



Лисенко О. І., Тачиніна О. М., Пономаренко С. О., Гуйда О. Г.

# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗГАЛУЖЕНИХ ТРАЄКТОРІЙ

*Монографія*

Київ  
2023

УДК 681.5.015.24:629.7

Л63

*Рекомендовано до видання вченою радою  
Національного технічного університету України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 7 від 01.11.2022 р.);*

Авторський колектив: Лисенко О.І. (1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, 5.3.1); Тачиніна О.М. (1.4, 1.5, 3.2, 3.3, 4.2, 4.3, 5.1.1-5.1.5); Пономаренко С.О. (Вступ, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4); Гуйда О.Г. (2.3, 2.4, 3.4, 5.2, 5.2.1)..

### **Рецензенти:**

**Шевченко В. Л.**, д.т.н., професор, заступник директора з наукової роботи Інституту програмних систем Національної академії наук України.

**Бідюк П. І.**, д.т.н., професор, професор кафедри математичних методів та системного аналізу Навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського.

### **Лисенко О. І., Тачиніна О. М., Пономаренко С. О., Гуйда О. Г.**

Л63 Теорія оптимальних розгалужених траєкторій / О. І. Лисенко, О. М. Тачиніна, С. О. Пономаренко, О. Г. Гуйда – К: КПІ ім. Ігоря Сікорського., 7БЦ, 2023. – 260 с.

ISBN 978-617-549-163-8

Монографія присвячена розвитку методів оптимального керування детермінованими розривними динамічними системами в задачах оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами, які пересуваються у просторі станів по розгалужених траєкторіях. Сформульовано і доведено теореми про необхідні, достатні, необхідні та достатні умови оптимальності розгалужених траєкторій. Наведено приклади застосування умов оптимальності розгалужених траєкторій для розв'язання модельних задач побудови оптимальних траєкторій руху групи літальних апаратів. Книга може бути корисною для фахівців з динаміки польоту, економічної кібернетики, інформаційно-телекомунікаційних систем.

Рекомендується для науковців, фахівців, аспірантів та студентів вищих навчальних закладів.

УДК 681.5.015.24:629.7

© О. І. Лисенко, О. М. Тачиніна,  
С. О. Пономаренко, О. Г. Гуйда

ISBN 978-617-549-163-8

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	6
ВСТУП .....	7
РОЗДІЛ 1 НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ РОЗГАЛУЖЕНОЇ ТРАЕКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ.....	13
1.1. Аналіз умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи. ....	13
1.2. Лема про приріст функціоналу в загальній задачі оптимізації розгалуженої траєкторії.....	29
1.3. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії.....	40
1.4. Наслідок 1. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну та бічні гілки і без взаємного впливу підсистем після розділення .....	44
1.5. Наслідок 2. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи з найпростішою розгалуженою траєкторією з урахуванням взаємодії підсистем .....	50
РОЗДІЛ 2 ОПТИМАЛЬНА ТРАЕКТОРІЯ РУХУ З АЛЬТЕРНАТИВОЮ ДЛЯ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ .....	57
2.1. Оптимальні траєкторії, що надають складеним динамічним системам додаткові можливості .....	57
2.2. Оптимальна траєкторія складеної динамічної системи з можливою зміною цілі руху в будь-який момент часу в заданому інтервалі.....	61
2.3. Оптимальна траєкторія руху розривної системи з поточним моментом розриву .....	70
2.4. Оптимальна траєкторія руху складеної динамічної системи з поточним моментом розділення .....	79
РОЗДІЛ 3 НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ТРАЕКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ .....	92
3.1. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії .....	92
3.2. Наслідок 1. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну та бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення .....	96

3.3. Наслідок 2. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем .....	103
3.3.1. Найпростіша розгалужена траєкторія з розділенням підсистем .....	103
3.3.2. Найпростіша розгалужена траєкторія з групуванням підсистем .....	106
3.4. Конструювання оптимальної розгалуженої траєкторії складеної динамічної системи .....	108
3.4.1. Нова інтерпретація функціоналу узагальненої роботи .....	108
3.4.2. Аналітичне конструювання траєкторії складеної динамічної системи з довільною схемою розгалужень .....	118
3.4.3. Наслідок 1. Конструювання траєкторії руху складеної динамічної системи зі схемою розгалуження, що містить центральну і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення .....	122
3.4.4. Наслідок 2. Конструювання розгалуженої траєкторії руху складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем .....	124
<b>РОЗДІЛ 4 ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ РОЗГАЛУЖЕНОЇ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ .....</b>	<b>131</b>
4.1. Принцип розширення для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії руху .....	131
4.1.1. Модифікований принцип розширення .....	131
4.1.2. Принцип розширення і метод інваріантного занурення .....	134
4.2. Наслідок 1. Принцип розширення для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення .....	138
4.3. Наслідок 2. Принцип розширення для найпростішої складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем .....	144
4.3.1. Найпростіша розгалужена траєкторія з розділенням підсистем .....	144
4.3.2. Найпростіша розгалужена траєкторія з групуванням підсистем .....	148
<b>РОЗДІЛ 5 АЛГОРИТМИ І ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ РОЗГАЛУЖЕНИХ ТРАЄКТОРІЙ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СКЛАДЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>151</b>
5.1. Алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів .....	151
5.1.1. Модифікований алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів, отриманий на основі квадратичного функціоналу .....	156
5.1.2. Модифікований алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів, отриманий на основі функціонала узагальненої роботи .....	159

5.1.3. Алгоритм «інтелектуального підказувача», що дозволяє уточнити момент часу розпуску групи безпілотних літальних апаратів при випадкових збуреннях .....	161
5.1.4. Алгоритм «інтелектуального підказувача», що дозволяє стабілізувати безпілотний літальний апарат на заданій траєкторії руху з урахуванням можливого перенацілювання в кожен момент часу в заданому інтервалі .....	165
5.1.5. Алгоритм оперативного синтезу розгалуженої траєкторії руху «літаючої сенсорної мережі», що базується на застосуванні модифікованого методу функцій Кротова.....	171
5.2. Оптимальна траєкторія руху ракети – носія, що виводить на орбіту групу навігаційних супутників .....	176
5.2.1. Розгалужена траєкторія виведення ракети - носія, що дозволяє досягти максимальної сумарної висоти підйому головних частин, що розділяються .....	177
5.3. Оптимальна розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи ...	184
5.3.1 Оптимальна за мінімумом часу виведення розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи з гіперзвуковим літаком-носієм.....	184
5.3.1.1. Математична модель руху ступенів авіаційно-космічної системи. Диференціальні рівняння, що описують динаміку руху ступенів авіаційно-космічної системи .....	184
5.3.2. Постановка задачі. Основні розрахункові співвідношення.....	198
5.3.3. Методика розрахунку оптимальної траєкторії, допоміжних і альтернативних варіантів .....	207
5.3.4. Результати розрахунку оптимальної траєкторії і їх аналіз .....	224
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	245

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- АКС – авіаційно-космічна система;
- БПЛА – безпілотні літальні апарати;
- БСК – бортова система керування;
- БФІ – багатофункціональний індикатор;
- ВПМ – вихідний пункт маршруту;
- ДГС АКС – двоступенева авіаційно-космічна система із горизонтальним стартом;
- ДГС АКС – двоступенева з горизонтальним стартом авіаційно-космічна система;
- ЕРМ – епізодична радіомережа;
- КН – корисне навантаження;
- ЛА – літальний апарат;
- ЛН – літак-носій;
- НС – надзвичайна ситуація;
- ОГС АКС – одноступенева авіаційно-космічна система із горизонтальним стартом;
- ОЛ – орбітальний літак;
- ППМ – проміжний пункт маршруту;
- ППРД – прямоточний повітряно-реактивний двигун;
- ПРГ – пункт розділення групи;
- РН – ракета-носій;
- РРД – рідинний ракетний двигун;
- СДС – складена динамічна система;
- СОМ – система орбітального маневрування;
- ТА – телекомунікаційна аероплатформа;
- ТПМ – транспортно-пусковий майданчик;
- ТРД – турбореактивний двигун;
- ЦОБ – цифровий обчислювальний блок.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Успіхи у створенні прецизійних механічних об'єктів, безпроводових телекомунікаційних систем та високопродуктивних малогабаритних бортових комп'ютерів дозволяють проектувати складні технічні системи нового покоління, що вирішують єдину технічну задачу без механічного зв'язку та з інформаційним обміном між окремими складовими цих об'єктів.

В якості різновидів таких перспективних технічних систем у монографії розглядаються групи БПЛА, оснащені безпроводовими телекомунікаційними системами, які утворюють так звані «літаючі сенсорні мережі» (роботизовані сенсорні мережі та системи), а також багаторазові авіаційно-космічні системи (АКС) типу «повітряний старт». З теоретичної точки зору ці об'єкти керування можуть бути класифіковані як складені динамічні системи (СДС), тобто системи складені із сукупності об'єктів (підсистем) із керованою зміною процесу їх взаємодії між собою, яка відбувається під час руху.

В монографії під складеною динамічною системою (СДС) розуміється сукупність об'єктів (підсистем) з послідовними в часі режимами їх роботи, яка описується на різних інтервалах часу різними диференціальними рівняннями та деякими кінцевими зв'язками для стикування траєкторій складених частин.

Траєкторії таких складених динамічних систем у науковій літературі отримали назву розгалужених [5, 110, 111, 126, 128, 154], так як вони складаються з ділянок спільного руху складових частин і ділянок їх індивідуального руху до цілі по окремих гілках траєкторії.

Застосування і розвиток таких СДС диктує необхідність оперативного синтезу траєкторій для такого типу систем, оскільки дозволяють і обчислювальні засоби, і засоби телекомунікаційного обміну. Проблеми оперативної оптимізації процесу керування цими складними технічними

системами визнані у світі такими, що є актуальними з наукової та практичної точок зору.

Це пов'язано з тим, що ефективність функціонування СДС залежить від оперативного оптимального вибору просторових координат і моментів часу, у які відбуваються структурні перетворення СДС, а також від оптимального керування складовими елементами при їхньому русі по гілках траєкторії в інтервалах часу між послідовними структурними перетвореннями.

Так комерційні запуски у космос корисного навантаження із використанням АКС, що реалізують технологію виведення типу «повітряний старт», потребують надійного гарантування запуску при деякій попередньо непередбачуваній зміні погодних умов у районі старту. Тобто актуальною є проблема оперативної корекції (оперативної оптимізації) розгалуженої траєкторії руху АКС, що складається із траєкторії руху літака-носія (ЛН) і орбітального ступеня (ОС) на етапі їх сумісного руху у так званій «зв'язці», спільної оптимізації траєкторій ЛН та ОС в процесі розділення та початкового розведення із подальшим виходом у задані точки навколоземного простору. Алгоритми оперативної корекції траєкторії АКС повинні програмуватися у комп'ютері бортового стартового комплексу ЛН, що дозволить виконати оперативну корекцію розгалуженої траєкторії в районі пуску і ця корекція буде врахована при прийнятті рішення про виконання маневрів повітряного старту. Підкреслимо, що задача оперативної оптимізації розгалуженої траєкторії АКС є актуальною і у аварійних ситуаціях. Так, наприклад, оперативно не скорегована траєкторія приземлення у «зв'язці» може призвести до руйнування шасі. Розгляд траєкторії АКС як розгалуженої дозволяє найкращим чином використати усі її системні конструктивно-технологічні властивості.

Точна оперативна інформація про потерпілих у зоні надзвичайної ситуації в умовах практично повного руйнування інфраструктури (пожежі,

землетруси, цунамі, торнадо і т.д.) може бути отримана завдяки використанню сенсорів розміщених на БПЛА (мобільних сенсорів), що утворюють «літаючу сенсорну мережу». Актуальною є проблема оперативної оптимізації «групової поведінки» (оптимізація розгалуженої траєкторії руху) мобільних сенсорів у агресивному середовищі, яке виникає під час надзвичайної ситуації. Алгоритм оперативної оптимізації програмується у бортовому комп'ютері телекомунікаційної платформи, яка керує рухом мобільних сенсорів. Успіх проведення пошуково-рятувальної операції визначається в першу чергу узгодженістю «групової поведінки» елементів «літаючої сенсорної мережі», яка повинна надавати актуальну та якісну (своєчасну і достовірну) інформацію про потерпілих та необхідну для них термінову допомогу. Не узгодженість «групової поведінки» мобільних сенсорів може призвести до повного зриву рятувальної операції.

З загальнотеоретичної точки зору, вирішення задачі оптимального керування СДС з розгалуженими траєкторіями зводяться до задачі керування розривними системами. Термін «розривна система» включає в себе великий клас моделей: складені, багатоступеневі, з релейним керуванням, з проміжними умовами, з імпульсним впливом і т.д. [10, 136-138, 141-144]. Математичні моделі розривних систем описують диференціальними рівняннями з розривними (кусково-неперервними) правими частинами. Дослідженню ознак і властивостей оптимальних рішень для розривних систем присвячені роботи Понтрягіна Л.С., Троїцького В.А., Гамкрелідзе Р.В., Уткіна В.І., Болтянского В.Г., Красовського М.М.

Прототипами розривних систем у теоретичному плані є системи, розглянуті в роботах Брайсона Хою Ши, Боднера В.А., Ащепкова Л.Т., Кротова Б. Ф., Самойленка Л.Л. , Перестюка Н.А., Асланяна А.А., Лисенка О.І. та інших авторів. В цих роботах у термінах розривних систем сформульовані задачі оптимального керування складеними системами, в

яких виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

В роботах [60, 102, 107, 145, 152-154] траєкторія руху складеної системи конструювалась по частинам, тобто складалась із ділянки оптимального руху СДС до точки розділення та програмних ділянок індивідуального руху до цілі складових елементів що відділилися і після розділення для кожної складової вирішувалась задача оптимальної стабілізації.

В роботах [110, 111, 119, 121, 123, 125, 128, 139] розглянуто застосування теорії розривних систем для задач керування багатоступеневими системами. В цих задачах розгалужені траєкторії руху багатоступеневих систем досліджуються та оптимізуються як розривні траєкторії, для яких в моменти розриву виконуються умови оптимального зшивання траєкторії попередньої та наступної ступені, без накладання умов на характер подальшого руху цих систем.

Для перетворення складених динамічних систем в розривні в цих роботах розглядався метод довизначення, а для дослідження розривних систем в основному розглядалося застосування методу динамічного програмування, принципу Понтрягіна, методу лінійних часових перетворень.

При цьому в усіх розглянутих випадках використання існуючого методу перетворення складеної динамічної системи в розривну (метод довизначення) приводило до того, що розміри вектору стану і вектору керування розривної системи збільшувались пропорційно кількості гілок траєкторії, тому цільна постановка задачі відшукання оптимальної розгалуженої траєкторії всієї СДС не розглядалась, а задача керування СДС формулювалася як задача керування розривними системами, коли виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

Для практичної реалізації оперативного синтезу траєкторій теоретичні розробки, отримані попередніми авторами, на сьогоднішній день не опрацьовані в прикладному плані до такого рівня, щоб їх можна було використовувати для вирішення задач проектування траєкторії руху СДС у реальному масштабі часу.

Це пояснюється тим, що абстрактно-формальне занурення задач про розгалужені траєкторії СДС у клас задач про розривні системи призводить до того, що розмірність вектору стану та розмірність вектору керування розривної системи збільшуються пропорційно кількості гілок траєкторії і стає практично неможливою реалізація алгоритму оперативної оптимізації розгалужених траєкторій у бортовому комп'ютері.

Прикладні дослідження, які б з самого початку заклали в постановку задачі не далеке від дійсності уявлення про розривність системи, а ясне фізичне уявлення про характер – «схему» руху складеної системи по гілках траєкторії, пояснили б механізм побудови умов оптимальності розгалуженої траєкторії з довільною схемою, розглянули всі прикладні аспекти, а також дали результати у вигляді максимально доступному широкому колу прикладників-дослідників, з точки зору можливості організації обчислювальних процедур, що реалізують ці умови, дотепер не були проведені.

Таким чином маємо конфліктну ситуацію (неузгодженість або протиріччя): з одного боку на теперішній час вже апаратно створені і активно створюються новітні складні технічні системи типу «повітряний старт», «літаючі сенсорні мережі», а, з іншого, для керування цими складеними динамічними системами застосовуються методи керування, які не дозволяють повністю використовувати усі закладені у ці системи технічні властивості.

Тому, актуальною є наступна наукова проблема оперативної оптимізації процесу керування рухом СДС, яка дозволила б на наявних на борту обчислювальних засобах, в реальному масштабі часу вирішувати

задачу оперативного синтезу оптимальних розгалужених траєкторій руху такого типу систем. Для вирішення цієї проблеми постає завдання розроблення умов оптимальності розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем у формі зручній для синтезу у реальному часі (оперативний синтез) оптимального керування цими складними системами.

# РОЗДІЛ 1

## НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ РОЗГАЛУЖЕНОЇ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

### 1.1. Аналіз умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи.

На сьогоднішній день для вирішення багатьох прикладних задач в різних областях науки і техніки широко використовуються складені динамічні системи.

Під складеною динамічною системою будемо розуміти сукупність об'єктів (підсистем) з послідовними в часі режимами їх роботи, яка описується на різних інтервалах часу різними диференціальними рівняннями та деякими кінцевими зв'язками для стикування траєкторій складених частин.

Прикладами використання на практиці таких складених динамічних систем є авіаційно-космічні системи (АКС) типу «МАКС», «Хотол», «Зангер», «Гермес», «XL-20», «Хоуп», «Кліпер», які використовуються в якості повітряної стартової платформи для виведення супутників та доставки вантажів на навколоземні та космічні орбіти (рис. 1.1-1. 4).



Рис. 1.1 – Авіаційно-космічна система «Pegasus»

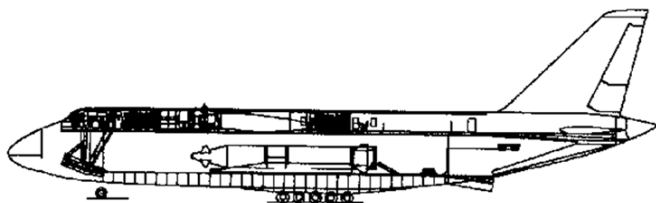


Рис. 1.2 – Авіаційно-космічна система «Оріль» на балі літака АН-124

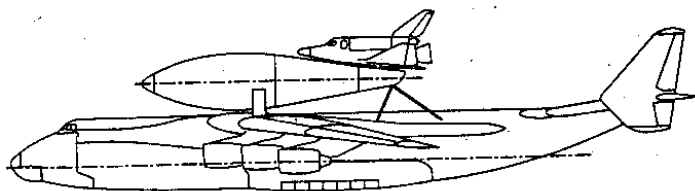


Рис. 1.3 – Авіаційно-космічна система «МАКС» на балі літака АН-125

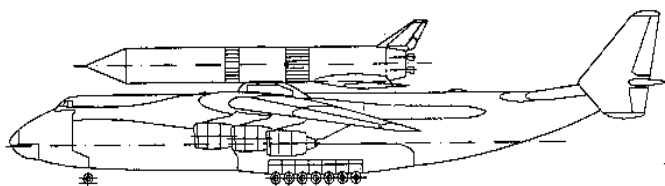


Рис. 1.4 – Авіаційно-космічна система «Світязь» на балі літака АН-125

Сучасний розвиток мехатроніки та бездротових телекомунікацій досяг такого рівня, коли стало можливим створення складених динамічних систем, що вирішують єдину технічну задачу, без механічних зв'язків між

підсистемами та з інформаційним обміном між окремими складовими цих систем.

Прикладами використання таких систем є безпроводові сенсорні мережі з мобільними сенсорами та аероплатформами, які виконують функцію, як носія сенсорів, так і телекомунікаційного ретранслятора інформації зібраної від сенсорів або як їх зараз прийнято називати «літаючі сенсорні мережі». Літаючі сенсорні мережі являють собою складену динамічну систему, елементами якої є: базовий безпілотний літальний апарат (БПЛА); група мобільних, різнорідних БПЛА, оснащених мультисенсорами та зв'язаних між собою за допомогою єдиної інформаційно-телекомунікаційної мережі.

Базовий БПЛА використовується: як аероплатформа для доставки і первинного розміщення дронів в зоні надзвичайної ситуації (НС); для збору і обробки оперативної інформації та ретрансляції одержаних даних в реальному масштабі часу в командний пункт управління (рис. 1.5 - 1.7).

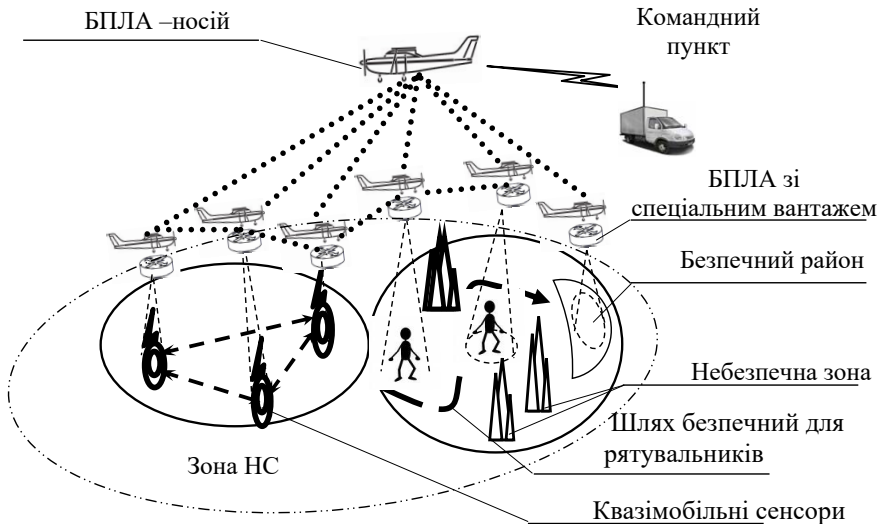


Рис. 1.5. Приклад застосування «літаючих сенсорних мереж» для проведення пошуково-рятувальних робіт в зоні надзвичайної ситуації

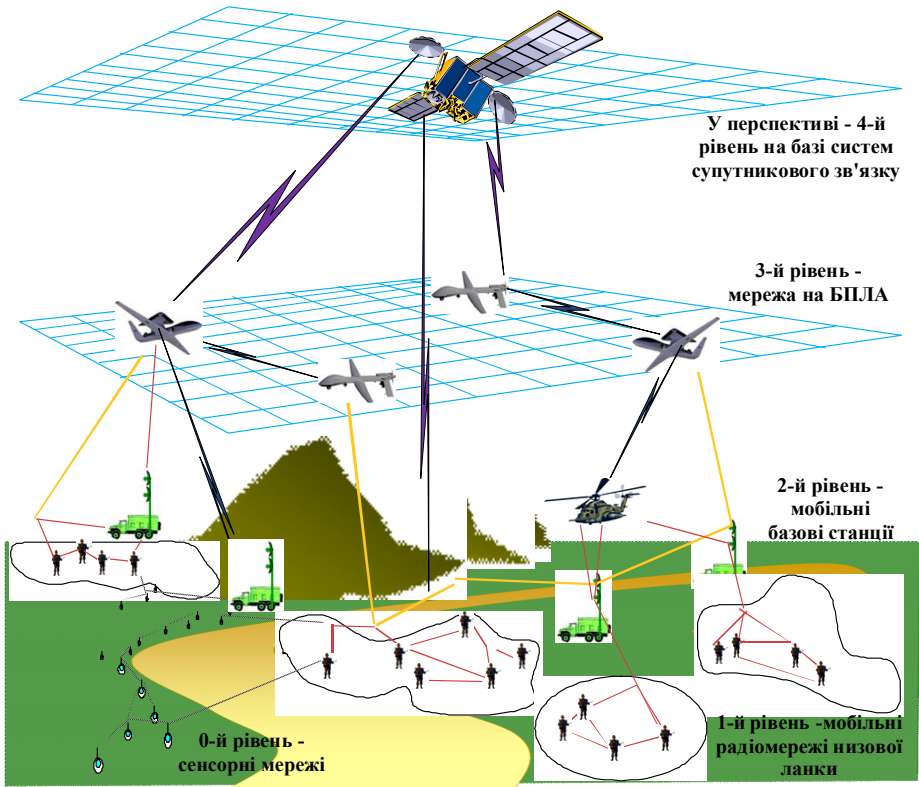


Рис. 1.6. Приклад архітектури перспективної мобільної безпроводової мультисенсорної мережі на базі БПЛА



Рис. 1.7. Безпроводові підводні сенсорні мережі на базі БПЛА – майбутнє моніторингу та підводного спостереження

Траєкторії таких складених динамічних систем у сучасній науковій літературі отримали назву розгалужених [5, 110, 111, 126, 128, 154], так як вони складаються з ділянок спільного руху складових частин (підсистем) і ділянок їх індивідуального руху до цілі по окремих гілках траєкторії.

Застосування і розвиток існуючих і перспективних СДС диктує необхідність оперативного синтезу траєкторій для такого типу систем, оскільки дозволяють і обчислювальні засоби, і засоби телекомунікаційного обміну. Проблеми оперативної оптимізації процесу керування цими складними технічними системами визнані у світі такими, що є актуальними з наукової та практичної точок зору.

Це пов'язано з тим, що ефективність функціонування СДС залежить від оперативного оптимального вибору просторових координат і моментів часу, у які відбуваються структурні перетворення СДС, а також від оптимального керування складовими елементами при їхньому русі по

гілках траєкторії в інтервалах часу між послідовними структурними перетвореннями.

Так комерційні запуски у космос корисного навантаження із використанням АКС, що реалізують технологію виведення типу «повітряний старт», потребують надійного гарантування запуску при деякій попередньо непередбачуваній зміні погодних умов у районі старту. Тобто актуальною є проблема оперативної корекції (оперативної оптимізації) розгалуженої траєкторії руху АКС, що складається із траєкторії руху літака-носія (ЛН) і орбітального ступеня (ОС) на етапі їх сумісного руху у так званій «зв'язці», спільної оптимізації траєкторій ЛН та ОС в процесі розділення та початкового розведення із подальшим виходом у задані точки навколоземного простору. Алгоритми оперативної корекції траєкторії АКС повинні програмуватися у комп'ютері бортового стартового комплексу ЛН, що дозволить виконати оперативну корекцію розгалуженої траєкторії в районі пуску і ця корекція буде врахована при прийнятті рішення про виконання маневрів повітряного старту. Підкреслимо, що задача оперативної оптимізації розгалуженої траєкторії АКС є актуальною і у аварійних ситуаціях. Так, наприклад, оперативно не скорегована траєкторія приземлення у «зв'язці» може призвести до руйнування шасі. Розгляд траєкторії АКС як розгалуженої дозволяє найкращим чином використати усі її системні конструктивно-технологічні властивості.

Точна оперативна інформація про потерпілих у зоні надзвичайної ситуації в умовах практично повного руйнування інфраструктури (пожежі, землетруси, цунамі, торнадо і т.д.) може бути отримана завдяки використанню сенсорів розміщених на БПЛА (мобільних сенсорів), що утворюють «літаючу сенсорну мережу». Актуальною є проблема оперативної оптимізації «групової поведінки» (оптимізація розгалуженої траєкторії руху) мобільних сенсорів у агресивному середовищі, яке виникає під час надзвичайної ситуації. Алгоритм оперативної оптимізації

програмується у бортовому комп'ютері телекомунікаційної платформи, яка керує рухом мобільних сенсорів. Успіх проведення пошуково-рятувальної операції визначається в першу чергу узгодженістю «групової поведінки» елементів «літаючої сенсорної мережі», яка повинна надавати актуальну та якісну (своєчасну і достовірну) інформацію про потерпілих та необхідну для них термінову допомогу. Не узгодженість «групової поведінки» мобільних сенсорів може призвести до повного зриву рятувальної операції.

З загальнотеоретичної точки зору, вирішення задачі оптимального керування СДС з розгалуженими траєкторіями зводяться до задачі керування розривними системами. Термін «розривна система» включає в себе великий клас моделей: складені, багатоступеневі, з релейним керуванням, з проміжними умовами, з імпульсним впливом і т.д. [10, 136-138, 141-144]. Математичні моделі розривних систем описують диференціальними рівняннями з розривними (кусково-неперервними) правими частинами. Дослідженню ознак і властивостей оптимальних рішень для розривних систем присвячені роботи Понтрягіна Л.С., Троїцького В.А., Гамкрелідзе Р.В., Уткіна В.І., Болтянського В.Г., Красовського М.М.

Прототипами розривних систем у теоретичному плані є системи, розглянуті в роботах Брайсона Хою Ши, Боднера В.А., Ащепкова Л.Т., Кротова Б. Ф., Самойленка Л.Л. , Перестюка Н.А., Асланяна А.А. та інших авторів. В цих роботах у термінах розривних систем сформульовані задачі оптимального керування складеними системами, в яких виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

В роботах [60, 102, 107, 145, 152-154] траєкторія руху складеної системи конструювалась по частинам, тобто складалась із ділянки оптимального руху СДС до точки розділення та програмних ділянок індивідуального руху до цілі складових елементів що відділилися і після

розділення для кожної складової вирішувалась задача оптимальної стабілізації.

В роботах [110, 111, 119, 121, 123, 125, 128, 139] розглянуто застосування теорії розривних систем для задач керування багатоступеневими системами. В цих задачах розгалужені траєкторії руху багатоступеневих систем досліджуються та оптимізуються як розривні траєкторії, для яких в моменти розриву виконуються умови оптимального зшивання траєкторії попередньої та наступної ступені, без накладання умов на характер подальшого руху цих систем.

Для перетворення складених динамічних систем в розривні в цих роботах розглядався метод довизначення, а для дослідження розривних систем в основному розглядалося застосування методу динамічного програмування, принципу максимуму Понтрягіна, принципу мінімуму Макшейна, методу лінійних часових перетворень.

При цьому в усіх розглянутих випадках використання існуючого методу перетворення складеної динамічної системи в розривну (метод довизначення) приводило до того, що розміри вектору стану і вектору керування розривної системи збільшувались пропорційно кількості гілок траєкторії, тому цільна постановка задачі відшукування оптимальної розгалуженої траєкторії всієї СДС не розглядалась, а задача керування СДС формулювалася як задача керування розривними системами, коли виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

Для практичної реалізації оперативного синтезу траєкторій теоретичні розробки, отримані попередніми авторами, на сьогоднішній день не опрацьовані в прикладному плані до такого рівня, щоб їх можна було використовувати для вирішення задач проектування траєкторії руху СДС у реальному масштабі часу.

Це пояснюється тим, що абстрактно-формальне занурення задач про розгалужені траєкторії СДС у клас задач про розривні системи призводить

до того, що розмірність вектору стану та розмірність вектору керування розривної системи збільшуються пропорційно кількості гілок траєкторії і стає практично неможливою реалізація алгоритму оперативної оптимізації розгалужених траєкторій у бортовому комп'ютері.

Прикладні дослідження, які б з самого початку заклали в постановку задачі не далеке від дійсності уявлення про розривність системи, а ясне фізичне уявлення про характер – «схему» руху складеної системи по гілках траєкторії, пояснили б механізм побудови умов оптимальності розгалуженої траєкторії з довільною схемою, розглянули всі прикладні аспекти, а також дали результати у вигляді максимально доступному широкому колу прикладників-дослідників, з точки зору можливості організації обчислювальних процедур, що реалізують ці умови, дотепер не були проведені.

В роботах Лисенка О. І. [64-69] були зроблені перші кроки до розробки такого типу методів, що б дозволяли вирішувати задачі оперативного синтезу траєкторій СДС, в яких було застосовано прийом, який називається представлення моделі руху СДС у вигляді моделі розгалуженої траєкторії. Однак, розвиток цих методів до рівня можливого практичного застосування вирішення задач побудови траєкторії СДС в реальному часі не було реалізовано.

Тому, актуальною є наступна наукова проблема оперативної оптимізації процесу керування рухом СДС, яка дозволила б на наявних на борту обчислювальних засобах, в реальному масштабі часу вирішувати задачу оперативного синтезу оптимальних розгалужених траєкторій руху такого типу систем. Для вирішення цієї проблеми постає завдання розроблення умов оптимальності розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем у формі зручній для синтезу у реальному часі (оперативний синтез) оптимального керування цими складними системами.

Для вирішення поставленого завдання передбачається застосувати метод Понтрягіна, метод Беллмана, метод функцій Кротова та метод аналітичного конструювання Красовського для того щоб в різних класах задач використовувати максимальну перевагу розглянутих вище методів.

Очевидно, що першим етапом для вирішення поставленого завдання є наукова задача, пов'язана з побудовою математичної моделі руху складеної динамічної системи в формі розгалуженої траєкторії і формулюванням умов оптимальності управління СДС з довільною схемою розгалужень.

Під розгалуженою траєкторією в роботі будемо розуміти групу траєкторій, кожна з яких відповідає траєкторії руху окремої підсистеми СДС і описується в фазовому просторі точками, які зображують в ньому динамічний стан підсистем СДС.

Гілкою траєкторії будемо називати ділянку траєкторії СДС між сусідніми точками, в яких відбуваються структурні перетворення СДС. Структурні перетворення СДС пов'язані з розділенням, групуванням, початком і кінцем руху підсистем і блоків, протиканням проміжних фазових обмежень. Зазначені структурні перетворення можуть відбуватися як в різні так і в співпадаючі моменти часу.

Підсистеми зі складу СДС, які розглядаються як один об'єкт, можуть утворювати блоки. У загальному випадку блоки і підсистеми СДС в процесі свого руху можуть багаторазово групуватися і розділятися.

З метою компактного сприйняття образу розгалуженої траєкторії скористаємося її схемою представленою на рис 1.8, а.

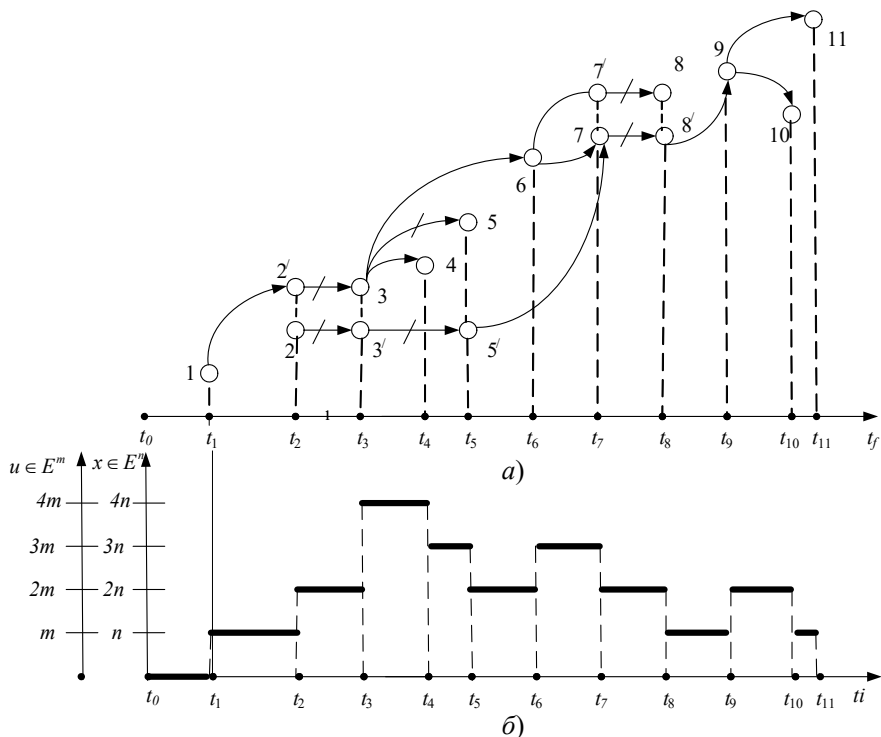


Рис. 1.8. Приклад структурної схеми розгалуженої траєкторії: а)- послідовність структурних перетворень в часі; б)-зміна розміру вектору стану і вектору керування розривної системи;  $t_i$ -моменти часу структурних перетворень СДС; стрілки умовно показують напрямок руху підсистем і блоків СДС

Рух СДС по гілках розгалуженої траєкторії (рис 1.8, а) описується диференціальною системою, яка має вигляд

$$\dot{x} = f(x, u; y, v; t), t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

де  $x \in E^n$  – вектор стану СДС,  $u \in \Omega \subset E^m$  – вектор керуючих впливів СДС,  $\Omega$  – обмежена множина простору  $E^m$ ;  $y$  – фазові координати,  $v$ – вектор керування підсистем зі складу СДС, що впливають на рух інших підсистем

(рух таких підсистем на рис 1.8,  $a$  позначено рискою);  $t_0, t_f$  – моменти часу початку і кінця руху СДС по відповідним гілках траєкторії.

На траєкторії підсистем (1.1) накладаються скалярні обмеження виду

$$g_i(x(t_0), y(t_0), t_0; x(t_f), y(t_f), t_f) \begin{cases} = 0, & \overline{i=1, k_g} \\ \leq 0, & \overline{i=k_g+1, n_g} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$q_i(x(t), u(t), t_0; y(t), v(t); t) \begin{cases} = 0, & \overline{i=1, k_q} \\ \leq 0, & \overline{i=k_q+1, n_q} \end{cases} \quad (1.3)$$

де  $t \in [t_0, t_f]$ ,

Критерій, що оцінює ефективність функціонування СДС, описується виразом

$$P = \Pi(\cdot) + \rho_{\Sigma} \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

де  $\Pi(\cdot)$  – термінальна складова критерію, що залежить від фазових координат підсистем (блоків) в моменти часу структурних перетворень СДС і самих моментів часу;  $\rho_{\Sigma}$  – інтегральна складова критерію, що складається з суми частинних інтегральних складових типу

$$\rho = \int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t); y(t), v(t); t) dt, \quad (1.5)$$

що відповідають окремим гілкам траєкторії СДС.

Таким чином, задача (1.1) – (1.5) оптимізації траєкторії СДС полягає в пошуку оптимальних керувань і траєкторій руху підсистем (блоків) по ділянках розгалуженої траєкторії, що мінімізують критерій (1.4), а також в знаходженні оптимальних моментів часу і фазових координат, в яких відбуваються структурні перетворення СДС.

Для вирішення зазначеної задачі в роботі запропонована методика комплексного застосування методів оптимального керування розривними системами для формування умов, що дозволяють виконати оперативну оптимізацію розгалужених траєкторій складених динамічних систем, яка складається з трьох етапів:

– на першому етапі здійснюється перехід від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи зі змінним розміром векторів стану керування;

– на другому етапі здійснюється оптимізація розривної системи зі змінним розміром векторів стану керування із застосуванням методів Понтрягіна Л.С., Беллмана Р. Е., Красовського А.А., Кротова В.Ф.

– на третьому етапі здійснюється повернення до термінів вихідної постановки задачі в формі оптимізації розгалуженої траєкторії (декомпозиція оптимального рішення, отриманого для розривної системи).

Для переходу від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи в монографії розроблено метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи зі змінними у моменти структурних перетворень розміром векторів стану та керування, який полягає в наступному:

1. Виходячи з фізичних міркувань функціонування СДС, викреслюється схема розгалуженої траєкторії (рис 1.8, а), складаються рівняння руху підсистем (блоків) уздовж гілок траєкторії, записуються обмеження, що діють неперервно на підсистеми (блоки) і в граничних точках, формулюється критерій.

2. Встановлюється хронологічна послідовність моментів часу структурних перетворень СДС.

3. В інтервалах часу між структурними перетвореннями СДС вводяться розширені вектори стану  ${}_iX$  і керування  ${}_iU$  ( $i = \overline{1, N}$ ), де  $N+1$  –

кількість структурних перетворень СДС з урахуванням структурного перетворення, пов'язаного з початком руху СДС ( $i=0$ ), що складаються відповідно з векторів стану і керування динамічних підсистем (блоків), що переміщуються по гілках траєкторії в даному інтервалі часу.

4. Здійснюється перехід від складеної динамічної системи до розривної системи зі змінним розміром вектором стану і керування (рис 1.8, б).

Розроблений метод перетворення складеної динамічної системи в розривну динамічну систему, відрізняється від існуючого методу довизначення тим, що розширення (збільшення розміру) векторів стану і керування здійснюється в інтервалах часу між структурними перетвореннями і дорівнює сумарному розміру векторів стану і керування, що відносяться до тих ділянок розгалуженої траєкторії, які потрапляють у розглянутий інтервал (рис 1.8, б), тоді як при використанні існуючого методу розміри вектору стану і вектору керування розривної системи стають рівними сумі розмірів векторів стану і керування, які відносяться до всіх гілок розгалуженої траєкторії.

В результаті виконання першого етапу і застосування розробленого методу перетворення складеної динамічної системи в розривну динамічну систему, переходимо до другого етапу вирішення зазначеної задачі – постановки задачі оптимізації розривної системи зі змінним розміром векторів стану і керування.

$$I = S(1X(t_0^+), t_0; 1X(t_1^-), 2X(t_1^+), t_1; 2X(t_2^-), 3X(t_2^+), t_2; \dots \dots; iX(t_i^-), i+1X(t_i^+), t_i; \dots; \dots; NX(t_N^-), t_N) + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{\bar{t}_i} \Phi(X, U, t) dt \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

$$G_l(1X(t_0^+), t_0; 1X(t_1^-), 2X(t_1^+), t_1; \dots; NX(t_N^-), t_N) \begin{cases} = 0, & l = \overline{1, K_G}; \\ \leq 0, & l = \overline{1, K_G + 1, N_G}; \end{cases} \quad (1.7)$$

$$Q_{ij}({}_iX(t), {}_iU(t), t) \begin{cases} = 0, & j = \overline{1, K_{Q_i}}; \\ \leq 0, & j = \overline{K_{Q_i} + 1, N_{Q_i}}; \end{cases} \quad (1.8)$$

$${}_i\dot{X} = {}_iF({}_iX, {}_iU, t), t \in [t_{i-1}^+, t_i^-], i = \overline{1, N}; \quad (1.9)$$

$${}_iX \in E^{n_{\Sigma^i}}, U \in \Omega_i \subset E^{m_{\Sigma^i}}; {}_iU(\cdot) - \text{кусково-неперервне}, \quad (1.10)$$

де  ${}_iX, {}_iU$  – розширені вектори фазового стану і керуючих впливів, відповідні  $i$ -му інтервалу часу між структурними перетвореннями СДС, розмірності  $n_{\Sigma^i}$  і  $m_{\Sigma^i}$ ;  $t_i$  – моменти часу структурних перетворень СДС;

$t_i^+, t_i^-$  – відповідно моменти часу  $t_i$  справа та зліва;  $\Omega_i$  – обмежена

множина простору  $E^{m_{\Sigma^i}}$ ;  $S(\cdot), G_j(\cdot)$  ( $j = \overline{1, N_G}$ ) – гладкі на

$E^{2\sigma} \times E^{N+1}$  ( $\sigma = \sum_{i=1}^N n_{\Sigma^i}$ ) скалярні функції змінних  ${}_1X, \dots, {}_N X, t_0, \dots, t_N$ ;

$Q_j(\cdot)$  ( $j = \overline{1, N_G}$ ) – неперервні на  $E^{n_{\Sigma^i}} \times E^{m_{\Sigma^i}} \times E^1$  разом з першими

похідними по всім своїм аргументам скалярні функції, для яких співвідношення (1.8) задовольняють умові положення [37], тобто вектори

$$\text{grad}_{{}_iU} Q_j({}_iX(t), {}_iU(t), t) \quad (j = \overline{1, K_{G_i}}) \quad \text{і} \quad \text{grad}_{{}_iU} Q_\gamma({}_iX(t), {}_iU(t), t)$$

( $\gamma \in I_\gamma$ ;  $I_\gamma$  – множина всіх індексів з  $j = \overline{K_{G_i} + 1, N_{Q_i}}$ , для яких  $Q_j(\cdot) = 0$ )

лінійно незалежні;  ${}_iF(\cdot)$  – неперервне разом з матрицею похідних  ${}_iF_{{}_iX}$

відображення:  $E^{n_{\Sigma^i}} \times \Omega_i \times E^1 \rightarrow E^{n_{\Sigma^i}}$ ;  $K_G, N_G, K_Q, N_Q, N$  – задані цілі

числа,  $0 \leq K_G \leq N_G, K_G < \sum_{i=1}^N (2n_{\Sigma^i} + 1) + 1$ ;  $0 \leq K_{Q_i} \leq N_{Q_i}, K_{Q_i} + K_\gamma < m_{\Sigma^i}$ , де

$K_\gamma$  – кількість індексів [38, 41].

В детермінованій постановці рішення задачі (1.6) – (1.10) буде сформульовано і доведено в термінах принципу мінімуму, динамічного програмування, методу функцій Кротова В.Ф., методу аналітичного конструювання А.А. Красовського.

Слід відзначити, що тільки приведення задачі оптимізації розгалуженої траєкторії СДС до оптимізації траєкторії розривної системи зі змінним розміром векторів стану і керування (1.6) – (1.10) дозволяє сформулювати теореми, на підставі яких можна виконувати оптимізацію траєкторії СДС з довільною схемою розгалужень. В іншому випадку кожна нова схема розгалужень траєкторії СДС вимагає виконання всієї процедури доказів, які враховують особливості траєкторії.

Як було вище зазначено, третій етап рішення задачі оптимізації розгалуженої траєкторії СДС полягає в поверненні до термінів вихідного формулювання задачі.

Приведення умов оптимальності керування і траєкторії розривної динамічної системи до умов оптимальності СДС, формальним еквівалентом якої є розривна система, здійснюється шляхом декомпозиції розширених векторів стану і керування, обмежень і граничних умов, допоміжних функцій і змінних, що використовувалися в ході застосування методу оптимізації, в послідовності зворотній вихідним перетворенням, які привели до переходу від СДС до розривної динамічної системи.

Для найбільш типових випадків такий перехід буде викладено в наступних підрозділах у формі наслідків з основної теореми, в якій сформульовано результат вирішення задачі (1.6) – (1.10).

## 1.2. Лема про приріст функціоналу в загальній задачі оптимізації розгалуженої траєкторії

Із багатьох способів доказу принципу мінімуму [8, 9, 13, 16, 30, 43, 81] виберемо спосіб [95], що базується на модифікованій лемі Розоноера з використанням імпульсної варіації керування і методу множників Лагранжа [43].

Лема 1.1 (модифікована лема Розоноера про приріст функціоналу).

Нехай  $t_i = \hat{t}_i + \delta t_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ),  ${}_i X(t_{i-1}^+) = {}_i \hat{X}(t_{i-1}^+) + h(t_{i-1}^+)$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  ${}_i \tilde{U}(t)$ ,  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – якесь допустиме керування, а  ${}_i U^\Delta(t)$ ,  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – будь-яке інше допустиме керування, що мало відрізняється від нього в тому сенсі, що  $\Delta_i U(t) = {}_i U^\Delta(t) - {}_i \tilde{U}(t)$  підпорядковане обмеженням  $\Delta_i U(t_i^-) = \Delta_i U(t_{i-1}^+) = 0$  та

$$(t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} |\Delta_i U(t)|^2 dt \leq \varepsilon_i^2 \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.11)$$

де  $\varepsilon_i$  – задана мала величина,  $\delta t_i$  – варіація за часом,  $h$ - варіація фазової координати в моменти структурних перетворень, « $\hat{\phantom{x}}$ », « $\tilde{\phantom{x}}$ »- відповідно оптимальні та допустимі величини змінних і параметрів.

Нехай  ${}_i \tilde{X}(t)$  – рішення рівняння (1.9) при  ${}_i U(t) = {}_i \tilde{U}(t)$ ,  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  та  ${}_i \tilde{X}(\hat{t}_{i-1}^+) = {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), а  ${}_i X^\Delta(t)$  – рішення рівняння (1.9) при  ${}_i U(t) = {}_i U^\Delta(t)$  та початковій умові  ${}_i X^\Delta(t_{i-1}^+) = {}_i \hat{X}(t_{i-1}^+) + h(t_{i-1}^+)$  ( $i = \overline{1, N}$ ).

Тоді приріст критерію матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\Delta \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}({}_1 U^\Delta(t), \dots, {}_N U^\Delta(t); {}_1 X^\Delta(t_0^+), \dots, {}_N X^\Delta(t_{N-1}^+); {}_1 X^\Delta(t_1^-), \dots, {}_N X^\Delta(t_N^-); t_0, \dots, t_N) - \\
&- \mathfrak{S}({}_1 \tilde{U}(t), \dots, {}_N \tilde{U}(t); {}_1 X(\hat{t}_0^+), \dots, {}_N \tilde{X}(\hat{t}_{N-1}^+); {}_1 \tilde{X}(\hat{t}_1^-), \dots, {}_N \tilde{X}(\hat{t}_N^-); \hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N = \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial_i X(t_{i-1}^+)} \right|_{\wedge, \sim} + {}_i \lambda(\hat{t}_{i-1}^+) \right]^T \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial_i X(t_{i-1}^-)} \right|_{\wedge, \sim} - {}_i \lambda(\hat{t}_{i-1}^-) \right]^T \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^-) \right\} + \\
&+ \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_{\sim}} \right|_{\wedge, \sim} - H_{1({}_1 \hat{X}(\hat{t}_0), {}_1 \tilde{U}(\hat{t}_0), {}_1 \lambda(\hat{t}_0), \hat{t}_0)} \right] \delta t_0 + \\
&+ \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_i} \right|_{\wedge, \sim} - H_{i({}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-), {}_i \tilde{U}(\hat{t}_i^-), {}_i \lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-)} - \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial_i X(t_{i+1}^+)} \right|_{\wedge, \sim} - H_{i+1({}_{i+1} \tilde{X}(\hat{t}_{i+1}^+), {}_{i+1} \tilde{U}(\hat{t}_{i+1}^+), {}_{i+1} \lambda(\hat{t}_{i+1}^+), \hat{t}_{i+1}^+)} \right] \right] \delta t_i + \\
&+ \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_N} \right|_{\wedge, \sim} + H_N({}_N \tilde{X}(\hat{t}_N^-), {}_N \tilde{U}(\hat{t}_N^-), {}_N \lambda(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N^-) \right] \delta t_N + \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left\{ H_i({}_i \tilde{X}(t), {}_i U^\Delta(t), {}_i \lambda(t), t) - H_i({}_i \tilde{X}(t), {}_i \tilde{U}(t), {}_i \lambda(t), t) + \right. \\
&\left. + \left[ \left. \frac{\partial H_i}{\partial_i X} \right|_{\wedge, \sim} + {}_i \dot{\lambda}(t) \right]^T \Delta_i X \right\} dt + \\
&+ 0 \left| \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N; \partial t_0, \dots, \partial t_N; \partial_1 X(\hat{t}_0^+), \dots, \partial_N X(\hat{t}_{N-1}^+) \right|,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= v_0 S({}_1 X(t_0^+), t_0, \dots, {}_N X(t_N^-), t_N) + \sum_{i=1}^{N_G} v_i G_i({}_1 X(t_0^+), t_0, \dots, {}_N X(t_N^-), t_N) + \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \left\{ v_0 \Phi_i({}_i X, {}_i U, t) + \sum_{j=1}^{N_{Q,i}} \mu_{ij}(t) \mathcal{Q}({}_i X, {}_i U, t) + \right. \\
&\left. + {}_i \lambda^T(t) [{}_i F({}_i X, {}_i U, t) - {}_i \dot{X}(t)] \right\} dt - \text{розширений критерій};
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
S^*|_{\wedge, \sim} &= S^*({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0; {}_1\tilde{X}(\hat{t}_1^-), {}_2\hat{X}(\hat{t}_1^+), \hat{t}_1; \dots; {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-), {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i; \\
&\dots; {}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) = v_0 S({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0; {}_1\tilde{X}(\hat{t}_1^-), {}_2\hat{X}(\hat{t}_1^+), \hat{t}_1; \dots; {}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) + \\
&+ \sum_{l=1}^{N_G} v_l G_l({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0; {}_1\tilde{X}(\hat{t}_1^-), {}_2\hat{X}(\hat{t}_1^+), \hat{t}_1; \dots; {}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) - \\
&- \text{термінальна складова розширеного критерія};
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
H_i({}_iX, {}_iU, {}_i\lambda, t) &= v_0 \Phi_i({}_iX, {}_iU, t) + \sum_{j=1}^{N_{Q_i}} \mu_{ij}(t) Q_{ij}({}_iX, {}_iU, t) + \\
&+ {}_i\lambda^T(t) {}_iF({}_iX, {}_iU, t) - \text{розширений гамільтоніан};
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) = h_i(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i\dot{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}) \tag{1.16}$$

$$\Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) = \Delta_i X(\hat{t}_i^-) + {}_i\dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i, \Delta_i X(\hat{t}_i^-) = X^\Delta(t_i^-) - \tilde{X}(\hat{t}_i^-); \tag{1.17}$$

де  $v_l$  ( $l = \overline{0, N}$ ),  $\mu_{ij}(t)$  ( $i = \overline{1, N}; j = \overline{1, N_{Q_i}}$ ) – множники Лагранжа;  ${}_i\lambda(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – спряжені змінні.

Тут знак  $|_{\wedge, \sim}$  – означає, що вираз який стоїть перед ним, обчислюється для оптимальних, відмічених знаком « $\wedge$ » та допустимих, відмічених знаком « $\sim$ », величин змінних і параметрів. Символ  $0(|\zeta|)$ , в даному випадку, і далі скрізь по тексту в роботі будемо використовувати для позначення скалярних та векторних малих величин порядку вище  $|\zeta|$ . За визначенням  $|0(|\zeta|)|/|\zeta| \rightarrow 0$ , якщо  $\zeta \rightarrow 0$ . Суму двох малих величин і добуток малої величини на число будемо позначати також  $0(|\zeta|)$ .

Доведення. Враховуючи що

$$-\int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} {}_i\lambda^T(t) {}_i\dot{X}(t) dt = -{}_i\lambda^T(t_i^-) {}_iX(t_i^-) + {}_i\lambda^T(t_{i-1}^+) {}_iX(t_{i-1}^+) + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} {}_i\dot{\lambda}^T(t) {}_iX(t) dt, \tag{1.18}$$

перепишемо (1.13) у наступному вигляді

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} = & S^*({}_1X(t_0^+), t_0; \dots; {}_iX(t_i^-), {}_{i+1}X(t_i^+), t_i; \dots; {}_N X(t_N^-), t_N) + \\
& + \sum_{i=1}^N [{}_i\lambda^T(t_{i-1}^+) {}_iX(t_{i-1}^+) - {}_i\lambda^T(t_i^-) {}_iX(t_i^-)] + \\
& + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} [H_i({}_iX, {}_iU, {}_i\lambda, t) + {}_i\dot{\lambda}^T(t) {}_iX(t)] dt.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Обчислимо приріст функціоналу (1.19)

$$\begin{aligned}
\Delta \mathfrak{S} = & S^*({}_1X(t_0^+), t_0; \dots; {}_iX^\Delta(t_i^-), {}_{i+1}X(t_i^+), t_i; \dots; {}_N X(t_N^-), t_N) + \\
& + \sum_{i=1}^N [{}_i\lambda^T(t_{i-1}^+) {}_iX(t_{i-1}^+) - {}_i\lambda^T(t_i^-) {}_iX^\Delta(t_i^-)] + \\
& + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} [H_i({}_iX^\Delta, {}_iU^\Delta, {}_i\lambda, t) + {}_i\dot{\lambda}^T(t) {}_iX^\Delta(t)] dt - \\
& - S^*({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0; \dots; {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-), {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i; \dots; {}_N \tilde{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) - \\
& - \sum_{i=1}^N [{}_i\lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+) {}_i\hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) - {}_i\lambda^T(\hat{t}_i^-) {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-)] - \\
& - \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} [H_i({}_i\tilde{X}, {}_i\tilde{U}, {}_i\lambda, t) + {}_i\dot{\lambda}^T(t) {}_i\tilde{X}(t)] dt.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Вважаючи

$$\begin{aligned}
{}_iX(t_{i-1}^+) = & {}_i\hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_{i-1}^+) + {}_ih(\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_{i-1}^+) = {}_i\hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i\hat{X}\delta t_{i-1}^+ + \\
& + {}_ih(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_ih(\hat{t}_{i-1}^+)\delta t_{i-1}^+ + 0(|\delta t_{i-1}^+|) = {}_i\hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + \delta {}_iX(\hat{t}_{i-1}^+) + 0(|\delta t_{i-1}^+|);
\end{aligned} \tag{1.21}$$

де  $\delta {}_iX(\hat{t}_{i-1}^+) = {}_ih(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i\hat{X}\delta t_{i-1}^+$ ,  ${}_ih(\hat{t}_{i-1}^+)\delta t_{i-1}^+$  – має порядок малості  $(\delta t_{i-1}^+)^2$ ;

$$\begin{aligned}
{}_iX^\Delta(t_i^-) = & {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) + \Delta {}_iX(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) = {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-) + {}_i\tilde{X}\delta t_i^- + \Delta {}_iX(\hat{t}_i^-) + \\
& + \Delta {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-)\delta t_i^- + 0(|\delta t_i^-|) = {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-) + \Delta {}_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + \Delta {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-)\delta t_i^- + 0(|\delta t_i^-|),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

де  $\Delta {}_i^\delta X(\hat{t}_i^-) = \Delta {}_iX(\hat{t}_i^-) + {}_i\tilde{X}\delta t_i^-$ , виконаємо розкладання в ряд Тейлора виразу (1.20) в околиці

$$\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n; {}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \dots, {}_N\hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+); {}_1\tilde{X}(\hat{t}_1^-), \dots, {}_N\tilde{X}(\hat{t}_N^-).$$

З метою більшої ясності представимо окремо розкладання кожного з перших трьох груп доданків виразу (1.20):

$$\begin{aligned}
1) \quad & S^*({}_1X(t_0^+), t_0; \dots; {}_iX^\Delta(t_i^-), {}_{i+1}X(t_i^+), t_i; \dots; {}_N X^\Delta(t_N^-), t_N) = \\
& = S^*({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+ + \delta t_0^+) + {}_1h(\hat{t}_0^+ + \delta t_0^+), \hat{t}_0 + \delta t_0^+; \dots; {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) + \\
& + \Delta_i X(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-), {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+ + \delta t_i^+) + {}_{i+1}h(\hat{t}_i^+ + \delta t_i^+), \hat{t}_i + \delta t_i; \dots \\
& \dots; {}_N\tilde{X}(\hat{t}_N^- + \delta t_N^-) + \Delta_N X(\hat{t}_N^- + \delta t_N^-), \hat{t}_N + \delta t_N) = \\
& = S^*({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+) + \delta_1 X(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0 + \delta t_0^+; \dots; {}_i X(\hat{t}_i^-) + \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + \\
& + \Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i, {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+) + \delta_{i+1} X(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i + \delta t_i; \dots; {}_N\tilde{X}(\hat{t}_N^-) + \\
& + \Delta_N^\delta X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N, \hat{t}_N + \delta t_N) + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|) = \\
& = S^*({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0; \dots; {}_i\tilde{X}(\hat{t}_i^-), {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i; \dots; {}_N\tilde{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[ \left. \frac{\partial S^*}{\partial_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+)} \right|_{\hat{\gamma}, \sim} \right]^T \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + 0(|\delta_1 X(\hat{t}_0^+), \dots, \delta_N X(\hat{t}_{N-1}^+)|) + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[ \left. \frac{\partial S^*}{\partial_i \tilde{X}(\hat{t}_{i-1}^+)} \right|_{\hat{\gamma}, \sim} \right]^T [\Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + \Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i] + P_0(\Delta_1^\delta X(\hat{t}_1^-) + \\
& + \Delta_1 \dot{X}(\hat{t}_1^-) \delta t_1, \dots, \Delta_N^\delta X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N) + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[ \left. \frac{\partial S^*}{\partial t_i} \right|_{\hat{\gamma}, \sim} \right]^T \delta t_i + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|), \tag{1.23}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
& P_0(\Delta_1^\delta X(\hat{t}_1^-) + \Delta_1 \dot{X}(\hat{t}_1^-) \delta t_1, \dots, \Delta_N^\delta X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N) = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \Delta_1^\delta X(\hat{t}_1^-) + \Delta_1 \dot{X}(\hat{t}_1^-) \delta t_1 \right]^T, \dots, \left[ \Delta_N^\delta X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N \right]^T \right\} \times \\
& \times \left[ \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{X}(\hat{t}_1^-) \\ \vdots \\ \tilde{X}(\hat{t}_N^-) \end{bmatrix}} \left| \frac{\partial \mathbf{S}^*}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{X}(\hat{t}_1^-) \\ \vdots \\ X(\hat{t}_N^-) \end{bmatrix}} \right| \right]_{\wedge, \sim} \times \left\{ \left[ \Delta_1^\delta X(\hat{t}_1^-) + \Delta_1 \dot{X}(\hat{t}_1^-) \delta t_1 \right]^T, \dots \right. \\
& \left. \dots, \left[ \Delta_N^\delta X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N \right]^T \right\}^T + \text{доданки більш високого порядку};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \sum_{i=1}^N \left[ {}_i \lambda^T(t_{i-1}^+,)_i X(t_{i-1}^+) - {}_i \lambda^T(t_i^-,)_i X(t_i^-) \right] = \\
& = \sum_{i=1}^N \left\{ {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_{i-1}^+) \left[ {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_{i-1}^+) + {}_i h(\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_{i-1}^+) \right] - \right. \\
& \left. - {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) \left[ {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) + \Delta_i X(\hat{t}_i^- + \delta t_i^-) \right] \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} + 0(|\delta t_{i-1}|) \right] \times \right. \\
& \times \left[ {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + 0(|\delta t_{i-1}|) \right] - \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^-) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \delta t_i + 0(|\delta t_i|) \right] \times \\
& \times \left[ {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-) + \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + \Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + 0(|\delta t_i|) \right] \left. \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+), {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+) \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+), {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} + 0(|\delta t_{i-1}|) \right] - \right. \\
& \left. - \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^-), {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-) + {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-), \Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \right. \right. \\
& \left. \left. + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-), {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) \delta t_i + 0(|\delta t_i|) \right] \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+), {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i \lambda^T(\hat{t}_{i-1}^+) \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+), {}_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} \right] - \right. \\
& \left. - \left[ {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^-), {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-) + {}_i \lambda^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-), \Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \right. \right. \\
& \left. \left. + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-), {}_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + {}_i \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i^\delta X(\hat{t}_i^-) \delta t_i \right] + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|); \right.
\end{aligned}$$

(1.24)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt = \\
3) \quad & = \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+ + \delta t_i^+}^{\hat{t}_i^- + \delta \hat{t}_i^-} \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt = \\
& = \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left\{ \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt + \right. \\
& \quad + H_i(\cdot, X^\Delta(\hat{t}_i^-), \cdot, U^\Delta(\hat{t}_i^-), \cdot, \lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) \delta t_i + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) X^\Delta(\hat{t}_i^-) \delta t_i - \\
& \quad \left. - H_i(\cdot, X^\Delta(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, U^\Delta(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, \lambda(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} - \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) X^\Delta(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} \right\} + \\
& \quad + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|) = \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left\{ \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt + \right. \\
& \quad + H_i(\cdot, \tilde{X}(\hat{t}_i^-) + \Delta_i X(\hat{t}_i^-), \cdot, \tilde{U}(\hat{t}_i^-) + \Delta_i U(\hat{t}_i^-), \cdot, \lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) \delta t_i + \\
& \quad + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \left[ \cdot, \tilde{X}(\hat{t}_i^-) + \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \right] \delta t_i - H_i(\cdot, \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + \cdot, h(\hat{t}_{i-1}^+), \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+) + \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+), \\
& \quad \cdot, \lambda(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} - \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) \left[ \cdot, \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) + \cdot, h(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} \right] \left. \right\} + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|) = \\
& = \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left\{ \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt + \right. \\
& \quad + H_i(\cdot, \tilde{X}(\hat{t}_i^-), \cdot, \tilde{U}(\hat{t}_i^-), \cdot, \lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) \delta t_i + \left[ \frac{\partial H_i}{\partial_i \tilde{X}(\hat{t}_i^-)} \Big|_{\lambda, \sim} \right]^T \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \\
& \quad + \left[ \frac{\partial H_i}{\partial_i \tilde{U}(\hat{t}_i^-)} \Big|_{\lambda, \sim} \right]^T \Delta_i U(\hat{t}_i^-) \delta t_i + P_i^{(-)}(\Delta_i X(\hat{t}_i^-), \Delta_i U(\hat{t}_i^-) \delta t_i) + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \\
& \quad + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \delta t_i - H_i(\cdot, \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, \lambda(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} - \\
& \quad - \left[ \frac{\partial H_i}{\partial_i \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+)} \Big|_{\lambda, \sim} \right]^T h(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_i - \left[ \frac{\partial H_i}{\partial_i \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+)} \Big|_{\lambda, \sim} \right]^T \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_i - \\
& \quad - P_i^{(+)}(\cdot, h(\hat{t}_{i-1}^+), \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+)) \delta t_{i-1} - \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} - \\
& \quad \left. - \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) \cdot, h(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_i + 0(|\delta t_0, \dots, \delta t_N|), \right. \\
& \hspace{15em} (1.25)
\end{aligned}$$

де:

$$P_i^{(-)}(\Delta_i X(\hat{t}_i^-), \Delta_i U(\hat{t}_i^-)) \delta t_i = \frac{1}{2} \left[ \Delta_i X(\hat{t}_i^-)^T, \Delta_i U(\hat{t}_i^-)^T \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \\ \tilde{U}(\hat{t}_i^-) \end{bmatrix}} \left[ \frac{\partial H_i}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \\ \tilde{U}(\hat{t}_i^-) \end{bmatrix}} \right]^T \right\} \begin{bmatrix} \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \\ \Delta_i U(\hat{t}_i^-) \end{bmatrix} + \text{доданки більш високого порядку};$$

$$P_i^{(+)}(h(\hat{t}_{i-1}^+), \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+)) \delta t_{i-1} = \frac{1}{2} \left[ h^T(\hat{t}_{i-1}^+), \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+) \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \\ \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+) \end{bmatrix}} \left[ \frac{\partial H_i}{\partial \begin{bmatrix} \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \\ \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+) \end{bmatrix}} \right]^T \right\} \begin{bmatrix} h(\hat{t}_{i-1}^+) \\ \Delta_i U(\hat{t}_{i-1}^+) \end{bmatrix} + \delta t_{i-1} +$$

+даданки більш високого порядку.

Враховуючи, що  $\left| h(\hat{t}_{i-1}^+) \right|$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – величина, що має такий же

порядок малості як і  $\delta t_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), а також, беручи до уваги обмеження

(1.11), можемо записати

$$\sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left[ H_i(\cdot, X^\Delta, \cdot, U^\Delta, \cdot, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t) X^\Delta(t) \right] dt + \right.$$

$$+ H_i(\cdot, \tilde{X}(\hat{t}_i^-), \cdot, \tilde{U}(\hat{t}_i^-), \cdot, \lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) \delta t_i + \left. \left[ \frac{\partial H_i}{\partial \tilde{X}(\hat{t}_i^-)} \right]_{\wedge, \sim}^T \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \right.$$

$$+ P_i^* (\Delta_i X(\hat{t}_i^-)) \delta t_i + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \tilde{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i + \dot{\lambda}^T(\hat{t}_i^-) \Delta_i X(\hat{t}_i^-) \delta t_i -$$

$$- H_i(\cdot, \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, \tilde{U}(\hat{t}_{i-1}^+), \cdot, \lambda(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} - \dot{\lambda}^T(\hat{t}_{i-1}^+) \hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+) \delta t_{i-1} \left. \right\} +$$

$$+ 0(\delta t_0, \dots, \delta t_N), \quad (1.26)$$

де:

$$P_i^*(\Delta_i X(\hat{t}_i^-))\delta t_i = \frac{1}{2}\Delta_i X^T(\hat{t}_i^-) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}(\hat{t}_i^-)} \left[ \frac{\partial H_i}{\partial \tilde{X}(\hat{t}_i^-)} \right]^T \right\}_{\wedge, \sim} \Delta_i X(\hat{t}_i^-) + \quad (1.27)$$

+ доданки більш високого порядку.

Проведемо ще одне додаткове дослідження: покажемо, що  $|\Delta_i X(t)|$ ,  $t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-]$  має порядок малості  $a_i \varepsilon_i + b_i |\delta_i X(t_{i-1}^+)|$ .

Різниця  $\Delta_i X(t) = {}_i X^\Delta(t) - {}_i \tilde{X}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-]$  – задовольняє рівняння

$$\Delta_i \dot{X}(t) = {}_i F({}_i \tilde{X} + \Delta_i X, {}_i \tilde{U} + \Delta_i U, t) - {}_i F({}_i \tilde{X}, \tilde{U}, t), \quad t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-] \quad (1.28)$$

при  $\Delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) = \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)$ , або в інтегральній формі

$$\Delta_i X(t) = \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} [{}_i F({}_i \tilde{X} + \Delta_i X, {}_i \tilde{U} + \Delta_i U, \tau) - {}_i F({}_i \tilde{X}, \tilde{U}, \tau)] d\tau + \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+). \quad (1.29)$$

Запишемо умови Ліпшиця

$$|{}_i F({}_i \tilde{X} + \Delta_i X, {}_i \tilde{U} + \Delta_i U, \tau) - {}_i F({}_i \tilde{X}, \tilde{U}, \tau)| \leq L_1^{(i)} |\Delta_i X(\tau)| + L_2^{(i)} |\Delta_i U(\tau)|, \quad (1.30)$$

$$\tau \in [\hat{t}_{i-1}^+, t_i], \quad t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-],$$

де  $L_1$  и  $L_2$  - деякі невід'ємні константи.

Зі співвідношення (1.29) маємо

$$|\Delta_i X(\tau)| \leq \left| \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} [{}_i F({}_i \tilde{X} + \Delta_i X, {}_i \tilde{U} + \Delta_i U, \tau) - {}_i F({}_i \tilde{X}, \tilde{U}, \tau)] d\tau \right| + |\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)| \quad (1.31)$$

і далі з урахуванням (1.30)

$$|\Delta_i X(\tau)| \leq |\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)| + L_1^{(i)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i X(\tau)| d\tau + L_2^{(i)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(\tau)| d\tau, \quad t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-] \quad (1.32)$$

Скориставшись нерівністю Гронуолла-Беллмана [14-15], отримуємо

$$|\Delta_i X(\tau)| \leq e^{L_1^{(i)}(\tau - \hat{t}_{i-1})} \left[ L_2^{(i)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)| dt + |\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)| \right]. \quad (1.33)$$

Для  $\tau \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-]$  маємо

$$|\Delta_i X(\tau)| \leq |\Delta_i X(\hat{t}_i^-)| \leq K_1^{(i)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)| dt + K_2^{(i)} |\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)|, \quad (1.34)$$

де  $K_1^{(i)} = L_2^{(i)} e^{L_1^{(i)}(\hat{t}_i^- - \hat{t}_{i-1}^+)} = \text{const}_1 < \infty$ ,  $K_2^{(i)} = e^{L_1^{(i)}(\hat{t}_i^- - \hat{t}_{i-1}^+)} = \text{const}_2 < \infty$ ,  $(i = \overline{1, N})$

.

Враховуючи нерівність Коші-Шварца [88] і обмеження на керування (1.11), запишемо

$$\left[ \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)| dt \right]^2 \leq (\hat{t}_i^- - \hat{t}_{i-1}^+) \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)|^2 dt \leq \varepsilon_i^2. \quad (1.35)$$

Маємо тепер оцінку норми вектору

$$|\Delta_i X(t)| \leq K_1^{(i)} \varepsilon_i + K_2^{(i)} |\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)|, \quad t \in [\hat{t}_i^- - \hat{t}_{i-1}^+]. \quad (1.36)$$

Розглянемо далі рівняння, що описує еволюцію компонент цього вектору.

Введемо процес.

$$\Delta_i \dot{\tilde{X}}(t) = {}_i \tilde{A}(t) \Delta_i \tilde{X}(t) + {}_i \tilde{B}(t) \Delta_i U(t), \quad t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-], \quad (1.37)$$

де  $\Delta_i \tilde{X}(\hat{t}_{i-1}^+) = \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)$   $(i = \overline{1, N})$ ,

$${}_i A(t) = \left. \frac{\partial_i F}{\partial_i X} \right|_{\substack{i X = \tilde{X} \\ i U = \tilde{U}}}, \quad {}_i B(t) = \left. \frac{\partial_i F}{\partial_i U} \right|_{\substack{i X = \tilde{X} \\ i U = \tilde{U}}}.$$

Оцінимо різницю  ${}_i\eta(t) = \Delta_i X(t) - \Delta_i \bar{X}(t)$ , де зміна в часі  $\Delta_i X(t)$  описується рівнянням (1.28). Розкладаючи праву частину (1.28) за формулою Тейлора із залишковим членом, отримуємо

$$\Delta_i \dot{X}(t) = {}_i \tilde{A}(t) \Delta_i X + {}_i \tilde{B}(t) \Delta_i U + R(\Delta_i X(t), \Delta_i U(t), t), \quad (1.38)$$

$$t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-], \Delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) = \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) \quad (i = \overline{1, N}),$$

де матрична функція  $R(\cdot)$  залежить від компонентів векторів  $\Delta_i X$  та  $\Delta_i U$  в другому степені і їх добутків. Використовуючи формулу для загального рішення лінійного векторного рівняння [79], можемо записати

$$\begin{aligned} \Delta_i X(t) = & {}_i \varphi(t, \hat{t}_{i-1}^+) \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} {}_i \varphi(t, \tau) {}_i \tilde{B}(\tau) \Delta_i U(\tau) d\tau + \\ & + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} {}_i \varphi(t, \tau) R(\Delta_i X(\tau), \Delta_i U(\tau), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\Delta_i \bar{X}(t) = {}_i \varphi(t, \hat{t}_{i-1}^+) \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} {}_i \varphi(t, \tau) {}_i \tilde{B}(\tau) \Delta_i U(\tau) d\tau, \quad (1.40)$$

де:  ${}_i \varphi(t, t_0)$  – перехідна матриця, що є рішенням диференціального

рівняння  $\frac{d}{dt} {}_i \varphi(t, t_0) = {}_i \tilde{A}(t) \Delta_i \varphi(t, t_0)$ ,  $t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-]$ ;  ${}_i \varphi(t, t_0) = I$ ,  $I$  – одинична матриця.

Віднявши з (1.39) рівняння (1.40) знаходимо

$${}_i \eta(t) = \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} {}_i \varphi(t_0, \tau) R(\Delta_i X(\tau), \Delta_i U(\tau), \tau) d\tau. \quad (1.41)$$

З використанням оцінок (1.35), (1.36) переконуємося, що

$$|{}_i \eta(t)| \leq 0 \left( \varepsilon_i, \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) \right). \quad (1.42)$$

Таким чином, лінійне рівняння (1.37) з точністю до  $0 \left( \varepsilon_i, \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) \right)$  дає правильний опис зміни стану, спричиненої змінами керування на  $\Delta_i U(t)$  та початкового стану на  $\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)$ :

$$\Delta_i X(t) = \Delta_i \tilde{X}(t) + 0 \left| \varepsilon_i, \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) \right|. \quad (1.43)$$

Крім того, зі співвідношень (1.37), (1.38), (1.42) випливає, що

$$\Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-) \delta t_i = 0 \left| \varepsilon_i, \delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+) \right|. \quad (1.44)$$

Отже, в виразах (1.23), (1.27) можуть бути віднесені до чисел вищого порядку малості доданки, які містять добутки  $\Delta_i \dot{X}(\hat{t}_i^-)$ ,  $\Delta_i X(\hat{t}_i^-)$  на  $\delta t_i$ , а також  $P_0(\Delta_1^{\delta} X(\hat{t}_1^-) + \Delta_1^{\delta} \dot{X}(\hat{t}_1^-) \delta t_1, \dots, \Delta_N^{\delta} X(\hat{t}_N^-) + \Delta_N^{\delta} \dot{X}(\hat{t}_N^-) \delta t_N)$  і  $P_i^*(\Delta_1^{\delta} X(\hat{t}_i^-))$ .

Підсумовуючи (1.23), (1.25), (1.26) і підставляючи результат в вираз (1.20), отримуємо (1.12), що й треба було довести.

### 1.3. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії

Теорема 1.1. Нехай  ${}_i X(t)$ ,  ${}_i U(t)$ ,  $t_0, t_1, \dots, t_N$  ( $t_{i-1} < t_i$ ,  $t \in [t_0, t_N]$ ,  $i = \overline{1, N}$ ) – допустимий процес. Для оптимальності процесу необхідно існування множників  $v_l$  ( $l = \overline{0, N_G}$ ),  $\mu_{ij}(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ;  $j = \overline{1, N_{Q_i}}$ )  $t \in [t_0, t_N]$  не рівних одночасно нулю і неперервних при  $t_0 \leq t \leq t_N$ ,  $t \neq t_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) рішень  ${}_i \lambda(t)$  спряжених векторних рівнянь

$${}_i \dot{\lambda}(t) + \partial H_i({}_i \hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), {}_i \lambda(t), t) / \partial {}_i \hat{X}(t) = 0 \quad (i = \overline{1, N}) \quad (1.45)$$

таких, що справедливі умови:

(1°) невід'ємності і доповнюючої не жорсткості

$$v_l \begin{cases} \geq 0, G_l({}_1 X(t_0^+), t_0; \dots; {}_N X(t_N^-), t_N) = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \geq 0, G_l({}_1 X(t_0^+), t_0; \dots; {}_N X(t_N^-), t_N) = 0, \\ = 0, G_l({}_1 X(t_0^+), t_0; \dots; {}_N X(t_N^-), t_N) < 0, \end{cases} l = \overline{K_G + 1, N_G}; \quad (1.46)$$

$$\mu_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) = 0, j = \overline{1, K}; i = \overline{1, N}; \\ \geq 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) = 0, \\ = 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) < 0, \end{array} \right\} j = \overline{K_{Q_i} + 1, N_{Q_i}}; \quad (1.47)$$

(2°) трансверсальності для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S^*}{\partial {}_1X(t_0)} \right|_{\wedge} + {}_1\lambda(\hat{t}_0^+) &= 0; \\ \left. \frac{\partial S^*}{\partial {}_N X(t_N)} \right|_{\wedge} - {}_N\lambda(\hat{t}_N^-) &= 0; \\ \left. \frac{\partial S^*}{\partial t_0} \right|_{\wedge} - H_1({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), {}_1\hat{U}(\hat{t}_0^+), {}_1\lambda(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0^+) &= 0; \\ \left. \frac{\partial S^*}{\partial t_N} \right|_{\wedge} - H_N({}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), {}_N\hat{U}(\hat{t}_N^-), {}_N\lambda(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N^-) &= 0; \end{aligned} \quad (1.48)$$

(3°) скачка для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S^*}{\partial {}_i X(\hat{t}_{i-1}^+)} \right|_{\wedge} + {}_i\lambda(\hat{t}_{i-1}^+) &= 0; \quad (i = \overline{2, N}); \\ \left. \frac{\partial S^*}{\partial {}_i X(\hat{t}_i^-)} \right|_{\wedge} - {}_i\lambda(\hat{t}_i^-) &= 0; \quad (i = \overline{1, N-1}); \\ \left. \frac{\partial S^*}{\partial t_i} \right|_{\wedge} + H_i({}_i\hat{X}(\hat{t}_i^-), {}_i\hat{U}(\hat{t}_i^-), {}_i\lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) - \\ - H_{i+1}({}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), {}_{i+1}\hat{U}(\hat{t}_i^+), {}_{i+1}\lambda(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i^+) &= 0; \quad (i = \overline{1, N-1}); \end{aligned} \quad (1.49)$$

(4°) мінімуму гамільтоніану в моменти часу  $t_{i-1} \leq t < t_i$  ( $i = \overline{1, N}$ )

$$H_i({}_i\hat{X}(t), {}_i\hat{U}(t), {}_i\lambda(t), t) = \min_{U \in \Omega_i} H_i({}_i\hat{X}(t), {}_iU(t), {}_i\lambda(t), t) \quad (1.50)$$

Доведення. Керування  ${}_iU(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), моменти часу  $t_i$  та координати  ${}_iX(\hat{t}_i^-)$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  ${}_{i+1}X(\hat{t}_i^+)$  ( $i = \overline{0, N-1}$ ) – є оптимальними, якщо

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{S} = & \mathfrak{S}({}_1U^\Delta(t), \dots, {}_N U^\Delta(t); {}_1 X^\Delta(t_0^+), \dots, {}_N X^\Delta(t_{N-1}^+); \\ & {}_1 X^\Delta(t_1^-), \dots, {}_N X^\Delta(t_N^-); t_0, \dots, t_N) - \mathfrak{S}({}_1\hat{U}^\Delta(t), \dots, {}_N \hat{U}^\Delta(t); \\ & {}_1 \hat{X}^\Delta(t_0^+), \dots, {}_N \hat{X}^\Delta(t_{N-1}^+); {}_1 \hat{X}^\Delta(t_1^-), \dots, {}_N \hat{X}^\Delta(t_N^-); \hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

яке б не було допустиме керування  ${}_i U^\Delta(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ).

Відповідно до леми 1.1, а також враховуючи, що варіації  $\delta_i X(\hat{t}_{i-1}^+)$  та  $\Delta_i X(\hat{t}_i^-)$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $\delta t_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ),  $\Delta_i X(\hat{t})$  ( $i = \overline{1, N}$ ) незалежні, отримуємо необхідні умови (1.45), (1.48), (1.49), що забезпечують виконання нерівності (1.51). При цьому умови (1.46), (1.47) дозволяють обчислити відповідні множники Лагранжа.

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{S} = & \sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left[ H_{i(i)}(\hat{X}(t), {}_i U^\Delta(t), {}_i \lambda(t), t) - H_{i(i)}(\hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), {}_i \lambda(t), t) \right] dt + \\ & + 0 \left( \left| \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N; \delta t_0, \dots, \delta t_N; \delta_1 X(\hat{t}_0^+), \dots, \delta_N X(\hat{t}_{N-1}^+) \right| \right) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

причому передбачається, що  $\Delta_i U(t) = {}_i U^\Delta(t) - {}_i \hat{U}(t)$  підпорядковується умові (1.11). Зокрема, необхідно, щоб нерівність (1.52) виконувалась для будь-яких малих відхилень  ${}_i U^\Delta(t)$  від  ${}_i \hat{U}(t)$  в сенсі (1.11) або виконувалась умова що впливає з цієї нерівності

$$\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)| dt \leq \varepsilon_i \quad (i = \overline{1, N}). \quad (1.53)$$

Тоді з нерівності (1.52) стає зрозумілою необхідність умови

$$\sum_{i=1}^N \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^-} \left[ H_{i(i)}(\hat{X}(t), {}_i U^\Delta(t), {}_i \lambda(t), t) - H_{i(i)}(\hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), {}_i \lambda(t), t) \right] \geq 0, \quad (1.54)$$

бо в іншому випадку при досить малих  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, N}$ )  $\Delta \mathfrak{S} \leq 0$ , що суперечить визначенню оптимальності (1.51). Розглянемо тепер спеціальний клас відхилень, які називаються голчастими та імпульсними варіаціями [43].

Нехай

$${}_i U^\Delta(t) = \begin{cases} {}_i V, t \in [\tau_i, \tau_i + \chi_i] \subset [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]; \\ U(t), t \notin [\tau_i, \tau_i + \chi_i], t \subset [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i] \quad (i = \overline{1, N}), \end{cases} \quad (1.55)$$

де  ${}_i V$  – довільна векторна константа з обмеженими компонентами така, що  ${}_i V \in \Omega_i$ ,  $\tau_i$  – довільний момент часу  $\tau_i \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i - \chi_i]$ , а  $\chi_i$  – мала додатна величина. В силу обмеженості  ${}_i V$ , отримуємо

$$\int_{\hat{t}_{i-1}^-}^{\hat{t}_i^-} |\Delta_i U(t)| dt = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \chi_i} |\Delta_i U(t)| dt = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \chi_i} |{}_i V(t)| dt \leq c_i \chi_i,$$

де  $c_i$  – деяка константа. Приймаючи  $\chi_i = \varepsilon_i / c_i$ , переконаємося у виконанні умови (1.53) для голчастої варіації. Вважаючи  ${}_i U^\Delta(t) = {}_i \hat{U}(t)$  для всіх  $(i = \overline{1, N})$ , крім одного  $i = j (1 \leq j \leq N)$ , де  ${}_j U^\Delta(t)$  визначається виразом (1.55), приходимо до висновку, що з (1.54) випливає

$$\int_{\hat{t}_{j-1}^+}^{\hat{t}_j^-} \left[ H_j(j, \hat{X}(t), {}_j U^\Delta(t), {}_j \lambda(t), t) - H_j(j, \hat{X}(t), {}_j \hat{U}(t), {}_j \lambda(t), t) \right] dt \geq 0. \quad (1.56)$$

Для голчастої варіації (1.55) необхідна умова (1.56) запишеться у вигляді

$$\int_{\tau_j}^{\tau_j + \chi_j} \left[ H_j(j, \hat{X}(t), {}_j U^\Delta(t), {}_j \lambda(t), t) - H_j(j, \hat{X}(t), {}_j \hat{U}(t), {}_j \lambda(t), t) \right] \geq 0. \quad (1.57)$$

Звідси випливає, що

$$H_j(j, \hat{X}(t), {}_j U^\Delta(t), {}_j \lambda(t), t) \geq H_j(j, \hat{X}(t), {}_j \hat{U}(t), {}_j \lambda(t), t), \quad (1.58)$$

при  ${}_j U(t) \in \Omega_j$  і при майже будь-якому  $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ .

Дійсно, якщо це не так, тобто в певний момент часу  $t \in [\tau_j, \tau_j + \chi_j]$

, що є точкою неперервності  ${}_j \hat{U}(t)$

$$H_j(j, \hat{X}(t), {}_j U^\Delta(t), {}_j \lambda(t), t) \leq H_j(j, \hat{X}(t), {}_j \hat{U}(t), {}_j \lambda(t), t), \quad (1.59)$$

то неперервність  ${}_j X(t), {}_j \lambda(t), {}_j F(\cdot), {}_j \Phi(\cdot)$  приведуть до існування інтервалу  $[t_a, t_b] \subset [\tau_j, \tau_j + \chi_j]$ , в якому виконана умова (1.59). Вибором  $\chi_j$

можна досягти того, що при  $t_a = \tau_j, t_b = \tau_j + \chi_j$  порушується нерівність (1.57), що суперечить вихідному твердженню про оптимальність  $j\hat{U}(t)$ . Умова (1.58) еквівалентна доказуваній умові (1.50) принципу мінімуму, з огляду на довільність вибору  $jV$  із  $\Omega_j$ . Отже, теорема доведена.

Теорема 1.1 дозволяє сформулювати кілька наслідків, які спрощують її застосування для оптимізації типових розгалужених траєкторій, що найчастіше застосовуються на практиці [94, 101, 109-112, 123, 140].

#### 1.4. Наслідок 1. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну та бічні гілки і без взаємного впливу підсистем після розділення

Складена динамічна система, що складається з  $\sum_{i=1}^k r_i$  підсистем

починає рух з різноманіття

$$g_l^{(0)}(x(t_0), t_0) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_g^{(0)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(0)} + 1, n_g^{(0)}}; \end{cases} \quad (1.60)$$

за схемою, представленою на рис.1.9.

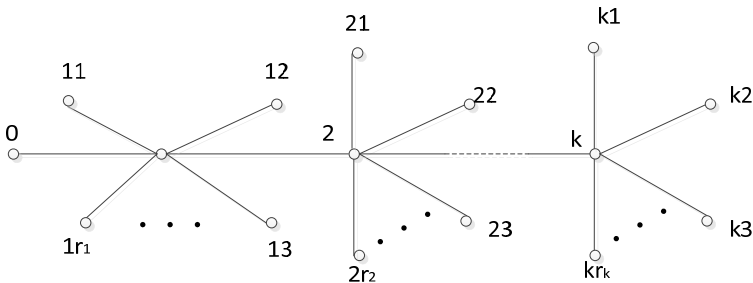


Рис. 1.9. Схема розгалуження траєкторії СДС, що містить центральну та бічні гілки і без взаємного впливу підсистем після розділення

На різноманіттях

$$g_l^{(i)}(i, x(t_i), t_i) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k^{(i)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(i)} + 1, n_g^{(i)}}; \\ (t_{i-1} < t_i, i = \overline{1, k}), \end{cases} \quad (1.61)$$

відбувається відділення по  $r_i (i = \overline{1, k})$  підсистем, які переміщуються до різноманіть

$$g_l^{(ij)}(ij, x(t_{ij}), t_{ij}) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_g^{(ij)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_g^{(ij)} + 1, n_g^{(ij)}} \end{cases} \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad (1.62)$$

на яких закінчується їх рух.

Динаміка руху підсистем СДС описується рівняннями виду

$$\begin{aligned} \beta \dot{x} &= \beta f(\beta x, \beta u, t), t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}], \\ (\beta &= i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}); \end{aligned} \quad (1.63)$$

де  $\beta x \in E^n$  – траєкторії підсистем СДС, що належать класу кусково-гладких функцій;  $\beta u \in \Omega_{\beta} \subset E^{m_{\beta}}$  – вектори керування підсистемами СДС, що належать класу кусково-неперервних функцій, на які накладено обмеження

$$q_l^{(\beta)}(\beta x, \beta u, t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, k_q^{(\beta)}}; \\ \leq 0, l = \overline{k_q^{(\beta)} + 1, n_q^{(\beta)}}; \end{cases} \quad t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]. \quad (1.64)$$

У моменти розділення виконуються умови

$$\begin{aligned} i x(t_i) - ij x(t_i) &= 0 \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}); \\ i x(t_i) - i_{i+1} x(t_i) &= 0 \quad (i = \overline{1, k-1}) \end{aligned} \quad (1.65)$$

для всіх фазових координат, крім координати, яка описує зміну маси механічної системи, для якої (нехай це буде  $n$ -я координата) виконана умова

$$i x_n(t_i) = \xi(i)_{i+1} x_n(t_i) + \sum_{j=1}^{r_i} ij x_n(t_i), \quad (1.66)$$

$$i = \overline{1, k}, j = \overline{1, r_i}, \xi(i) \begin{cases} 1, i = \overline{1, k-1}, \\ 0, i = k. \end{cases}$$

Керування  ${}_{\beta}u(t)$ , фазові координати  ${}_1x(t_0), {}_{\beta}x(t_{\beta})$ , моменти часу  $t_0, t_{\beta}$  ( $\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ) необхідно вибрати таким чином, щоб мінімізувати критерій

$$I = S + \sum_{i=1}^k (I_i + \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}) \rightarrow \min \quad (1.67)$$

де

$$S = S({}_1x(t_0), t_0; {}_1x(t_1), t_1; {}_2x(t_2), t_2; \dots; {}_kx(t_k), t_k; {}_{11}x(t_{11}), t_{11}; \dots; {}_{kr_k}x(t_{kr_k}), t_{kr_k}), \quad (1.68)$$

$$I = \int_{t_{\beta^*}}^{t_{\beta}} \Phi_{\beta}({}_{\beta}x, {}_{\beta}u, t) dt, \quad \beta = i, \beta^* = i-1; \beta = ij; \beta^* = i; \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}. \quad (1.69).$$

В умовах задачі (1.60) – (1.67) для всіх функцій будемо використовувати відповідні припущення п.1.1.

Складемо розширений критерій

$$\mathfrak{S} = S^* + \sum_{i=1}^k (I_i^* + \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}^*) + D, \quad (1.70)$$

де

$$S^* = vS + \sum_{i=1}^{n_g^{(0)}} v_l^{(0)} g_l^{(0)}({}_1x(t_0), t_0) + \left. \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{l=1}^{n_g^{(i)}} v_l^{(i)} g_l^{(i)}({}_i x(t_i), t_i) + \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l=1}^{n_g^{(ij)}} v_l^{(ij)} g_l^{(ij)}({}_{ij} x(t_{ij}), t_{ij}) \right] \right\} \quad (1.71)$$

$$I_{\beta}^* = \int_{t_{\beta^*}}^{t_{\beta}} \left\{ \Phi_{\beta}^*({}_{\beta}x, {}_{\beta}u, t) + {}_{\beta}\lambda^T(t) [{}_{\beta}f({}_{\beta}x, {}_{\beta}u, t) - {}_{\beta}\dot{x}] \right\} dt, \quad (1.72)$$

$$\Phi_{\beta}^*(\beta x, \beta u, t) = v\Phi_{\beta}(\beta x, \beta u, t) + \sum_{l=1}^{n_g^{(\beta)}} \mu_l^{\beta}(t) q_l^{\beta}(t)(\beta x, \beta u, t) \quad (1.73)$$

$$\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij; \beta^* = i; \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i},$$

$$D = \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{\tau=1}^{n-1} \alpha_{\tau}^{(i)} \xi(i) [{}_i x_{\tau}(t_i) - {}_{i+1} x_{\tau}(t_i)] + \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{\tau=1}^{n-1} \alpha_{\tau}^{(ij)} [{}_i x_{\tau}(t_i) - {}_{ij} x_{\tau}(t_i)] + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(i)} \left[ {}_i x_n(t_i) - \xi(i) {}_{i+1} x_n(t_i) - \sum_{j=1}^{r_i} {}_{ij} x_n(t_i) \right] \right\}, \quad (1.74)$$

$$\xi(i) = \begin{cases} 1, i = \overline{1, k-1}, \\ 0, i = k. \end{cases}$$

Використовуючи введені в виразах (1.70) – (1.74) позначення, сформулюємо у вигляді наслідку теореми 1.1. наступний результат.

**Теорема 1.2.** Нехай  $\beta x(t)$ ,  $\beta u(t)$ ,  $t_{\beta}$ ,  ${}_1 x(t_0)$ ,  $t_0$ ,

$(\beta = ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  – допустимий процес задачі (1.60) – (1.67) і  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ .

Тоді, для його оптимальності необхідно існування множників  $v$ ,  $v_l^{(0)}(l = \overline{1, n_g^{(0)}})$ ,  $v_l^{(i)}(l = \overline{1, n_g^{(i)}})$ ,  $v_l^{(ij)}(l = \overline{1, n_g^{(ij)}})$ ,  $\mu_l^{(\beta)}(t)(l = \overline{1, n_q^{(\beta)}})$   $t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]$ , не рівних одночасно нулю та неперервних на  $t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]$

$\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij; \beta^* = i; \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  рішень спряжених векторних рівнянь

$${}_{\beta} \dot{\lambda}(t) + \partial H_{\beta}(\beta x(t), \beta u(t), \beta \lambda(t), t) / \partial \beta x(t) = 0 \quad (1.75)$$

$$(\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}),$$

таких, що справедливі умови:

(1) невід'ємності і доповнюючої нежорсткості  $v > 0$ ;

$$v_l^{(0)} \begin{cases} \geq 0, g_l^{(0)}({}_1\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = 0, l = \overline{1, k_g^{(0)}} \\ \geq 0, g_l^{(0)}({}_1\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = 0 \\ = 0, g_l^{(0)}({}_1\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) < 0 \end{cases} \left\{ l = \overline{k_g^{(0)} + 1, n_g^{(0)}}; \right. \quad (1.76)$$

$$v_l^{(\beta)} \begin{cases} \geq 0, g_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}(\hat{t}_\beta), \hat{t}_\beta) = 0, l = \overline{1, k_g^{(\beta)}} \\ \geq 0, g_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}(\hat{t}_\beta), \hat{t}_\beta) = 0 \\ = 0, g_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}(\hat{t}_\beta), \hat{t}_\beta) < 0 \end{cases} \left\{ l = \overline{k_g^{(\beta)} + 1, n_g^{(\beta)}}; \right. \quad (1.77)$$

$$\mu_l^{(\beta)} \begin{cases} \geq 0, q_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}, {}_\beta\hat{u}, t) = 0, l = \overline{1, k_q^{(\beta)}} \\ \geq 0, q_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}, {}_\beta\hat{u}, t) = 0 \\ = 0, q_l^{(\beta)}({}_\beta\hat{x}, {}_\beta\hat{u}, t) < 0 \end{cases} \left\{ l = \overline{k_q^{(\beta)} + 1, n_q^{(\beta)}}; \right. \quad \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}. \quad (1.78)$$

(2) трансверсальності для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial {}_1x(t_0)} \right|_{\wedge} + {}_1\lambda(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_0} \right|_{\wedge} - H_1({}_1\hat{x}(\hat{t}_0), {}_1\hat{u}(\hat{t}_0), {}_1\lambda(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = 0, \quad (1.79)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial {}_{ij}x(t_{ij})} \right|_{\wedge} - {}_{ij}\lambda(\hat{t}_{ij}) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_{ij}} \right|_{\wedge} + H_{ij}({}_{ij}\hat{x}(\hat{t}_{ij}), {}_{ij}\hat{u}(\hat{t}_{ij}), {}_{ij}\lambda(\hat{t}_{ij}), \hat{t}_{ij}) = 0, \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i});$$

(3) стрибка для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial {}_i x(t_i)} \right|_{\wedge} - {}_i\lambda(\hat{t}_i) + \xi(i) {}_{i+1}\lambda(\hat{t}_i) + \sum_{j=1}^{r_i} {}_{ij}\lambda(\hat{t}_i) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial t_i} \right|_{\wedge} + H_i({}_i\hat{x}(\hat{t}_i), {}_i\hat{u}(\hat{t}_i), {}_i\lambda(\hat{t}_i), \hat{t}_i) - \xi(i) H_{i+1}({}_{i+1}\hat{x}(\hat{t}_i), {}_{i+1}\hat{u}(\hat{t}_i), {}_{i+1}\lambda(\hat{t}_i), \hat{t}_i) - \quad (1.80)$$

$$- \sum_{j=1}^{r_i} H_{ij}({}_{ij}\hat{x}(\hat{t}_i), {}_{ij}\hat{u}(\hat{t}_i), {}_{ij}\lambda(\hat{t}_i), \hat{t}_i) = 0;$$

$$i = \overline{1, k}; \xi(i) \begin{cases} = 1, i = \overline{1, k-1}; \\ = 0, i = k; \end{cases}$$

(4) мінімуму гамільтоніанів

$$H_{\beta}(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), \beta \lambda(t), t) = \min_{\beta u(t) \in \Omega_{\beta}} H_{\beta}(\beta \hat{x}(t), \beta u(t), \beta \lambda(t), t), \quad (1.81)$$

$$t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}] (\beta = i, \beta^* = i-1; \beta = ij; \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}).$$

де

$$H_{\beta}(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), \beta \lambda(t), t) = \Phi_{\beta^*}^*(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), t) + \beta \lambda^T(t)_{\beta} f(\beta x(t), \beta u(t), t),$$

$$\beta = i, j; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}.$$

Зауваження. Для механічних систем, у яких  $n$ -а фазова координата описує зміну маси, умова стрибка по  $n$ -ій спряженій змінній буде мати вигляд

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial_i x_n(t_i)} \right|_{\lambda} - {}_i \lambda_n(\hat{t}_i) + \xi(i) \zeta_{i+1} {}_{i+1} \lambda_n(\hat{t}_i) + \sum_{j=1}^{r_i} \zeta_{ij} {}_j \lambda_n(\hat{t}_i) (i = \overline{1, k}), \quad (1.82)$$

$$\text{де } 0 \leq \zeta_{\beta} \leq 1 \quad (\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad \xi(i) \zeta_{i+1} + \sum_{j=1}^{r_i} \zeta_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, k}).$$

Умови (1), (2), (4) безпосередньо впливають з теореми 1.1. Пояснимо докладніше, яким чином були отримані умови (3). Враховуючи що  ${}_i x(t_i)$  із теореми 1.2 відповідає  ${}_i X(t_i^-)$  із теореми 1.1, а  ${}_{i+1} x^T(t_i)$ ,  ${}_{ii} x^T(t_i), \dots, {}_{ir_i} x^T(t_i)$  відповідає  ${}_{i+1} X(t_i^+)$ , отримаємо

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial_i x_{\tau}(t_i)} \right|_{\lambda} - {}_i \lambda_{\tau}(\hat{t}_i) + \alpha_{\tau}(i) + \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{\tau}(ij) = 0, \quad (1.83)$$

$${}_{i+1} \lambda_{\tau}(\hat{t}_i) - \alpha_{\tau}(i) \xi(i) = 0, \quad (1.84)$$

$${}_{ij} \lambda_{\tau}(\hat{t}_i) - \alpha_{\tau}(ij) = 0 \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad \tau = \overline{1, n-1}, \quad (1.85)$$

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial_i x_n(t_i)} \right|_{\lambda} - {}_i \lambda_n(\hat{t}_i) + \alpha_n^{(i)} = 0, \quad (1.86)$$

$$-\xi(i)\alpha_n(i) + {}_{i+1}\lambda_n(\hat{t}_i) = 0, \quad (1.87)$$

$$-\alpha_n^{(i)} + {}_{ij}\lambda_n(\hat{t}_i) = 0 \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}). \quad (1.88)$$

Зі співвідношень (1.83) – (1.85) випливає умова (3). Виконавши множення виразу (1.87) на  $\zeta_{i+1}$ , виразу (1.88) на  $\zeta_{ij}$ , враховуючи що

$$0 \leq \zeta_\beta \leq 1 \quad (\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad \xi(i)\zeta_{i+1} + \sum_{j=1}^{r_i} \zeta_{ij} = 1$$
 та підсумувавши

отримані результати з результатами виразу (1.86), приходимо до співвідношення (1.82), що і потрібно було показати.

### 1.5. Наслідок 2. Принцип мінімуму для складеної динамічної системи з найпростішою розгалуженою траєкторією з урахуванням взаємодії підсистем

Під найпростішою розгалуженою траєкторією будемо розуміти траєкторію СДС, що складається з двох підсистем, яка допускає не більше одного розділення або одного угруповання. Схеми і часові діаграми найпростіших розгалужених траєкторій з розділенням і угрупованням представлені відповідно на рис 1.10, а, б.

Запишемо постановку задачі оптимізації найпростішої розгалуженої траєкторії СДС з розділенням у наступному вигляді.

Динаміка руху підсистем СДС вздовж розгалуженої траєкторії (рис. 1.10, а) описується рівняннями виду

$${}_\beta \dot{x} = {}_\beta f({}_\beta x, {}_\beta u, t), t \in [t_{\beta^*}, t_\beta] \quad (1.89)$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1),$$

$${}_\beta x \in E^n, {}_\beta u \in E^{m_\beta} \subset \Omega_\beta \quad (\beta = 1, 11, 12), \quad (1.90)$$

$$t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11} \quad (1.91)$$

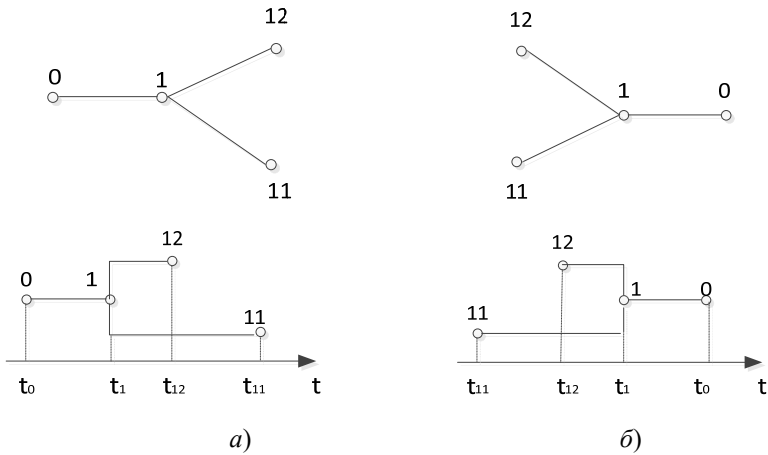


Рис.1.10. Схеми і часові діаграми найпростіших розгалужених траєкторій СДС:  
*a* – з розділенням підсистем; *б* – з групуванням підсистем.

На які накладаються обмеження

$$Q_l^{(1)}(x_1(t), u_1(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(1)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(1)} + 1, N_Q^{(1)}}; \end{cases} \quad (1.92)$$

$$Q_l^{(11,12)}(x_{11,12}(t), u_{11,12}(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(11,12)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(11,12)} + 1, N_Q^{(11,12)}}; \end{cases} \quad (1.93)$$

$$Q_l^{(11)}(x_{11}(t), u_{11}(t), t) \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(11)}}; \\ \leq 0, l = \overline{K_Q^{(11)} + 1, N_Q^{(11)}}; \end{cases} \quad (1.94)$$

У моменти відділення підсистем повинні бути виконані умови

$$\begin{aligned} & \begin{cases} = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \leq 0, l = \overline{K_G + 1, N_G}, \end{cases} \\ & {}_1x_\tau(t_1) - {}_{11}x_\tau(t_1) = 0, \quad {}_1x_\tau(t_1) - {}_{12}x_\tau(t_1) = 0 \quad (\tau = \overline{1, n-1}), \end{aligned}$$

$${}_1x_n(t_1) - {}_{11}x_n(t_1) - {}_{12}x_n(t_1) = 0.$$

Керування  ${}_{\beta}u(t)$ , фазові координати  ${}_{\beta}x(t)$ , моменти часу  $t_{\beta}^*$ ,  $t_{\beta}$  ( $\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1$ ) необхідно вибрати таким чином, щоб мінімізувати критерій

$$I = S({}_1x(t_0), t_0; {}_{11}x(t_1), t_1; {}_{12}x(t_{12}), t_{12}; {}_{11}x(t_{11}), t_{11}) + I_1 + I_{11} + I_{12} \rightarrow \min \quad (1.95)$$

$$I_{\beta} = \int_{t_{\beta}^*}^{t_{\beta}} \Phi_{\beta}({}_{\beta}X, {}_{\beta}U, t) dt, \quad (\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1), \quad (1.96)$$

де  ${}_{\beta}x_n(t)$  ( $\beta = 1, 11, 12$ ) - фазова координата, яка описує зміну маси механічної системи  ${}_{11,12}x(t) = \text{col}({}_{11}x(t), {}_{12}x(t))$ ,  ${}_{11,12}u(t) = \text{col}({}_{11}u(t), {}_{12}u(t))$ . Відзначимо, що  ${}_{11,12}u \in \Omega_{11,12}$  означає, що  ${}_{11}u \in \Omega_{11}, {}_{12}u \in \Omega_{12}$ .

Критерій оптимальності (1.96) відповідає формі Больца, в якій функція  $S(\cdot)$  по фізичному змісту відображає вимоги до значень координат руху підсистем СДС в моменти часу початку і закінчення руху, а також до значень самих моментів часу. Інтегральні члени критерію виражають вимоги до характеру руху підсистем СДС вздовж відповідних гілок траєкторії. Взаємний вплив підсистем в інтервалі часу  $[t_{\beta}^*, t_{\beta}]$  відображено і в рівняннях їх руху (1.89) і в частинних інтегральних критеріях  $I_{\beta}$  (1.96).

В умовах задачі (1.89) – (1.96) для всіх функцій прийняті допущення, аналогічні тим, які були сформульовані для відповідних функцій задачі (1.6) – (1.10). Відзначимо, що математична постановка задачі оптимізації найпростішої розгалуженої траєкторії СДС з групуванням підсистем (рис.1.10, б) може бути сформульована в тому ж вигляді, що і для СДС з розділенням. Рівняння, що описують рух елементів і критерій в схемі з групуванням (рис.1.10, б), мають той же вигляд, що і для схеми з розділенням, відрізняючись лише знаком зміни часу, де замість

співвідношення (1.91) на множину моментів часу накладені строгі нерівності з протилежним знаком

$$t_{11} < t_{12} < t_1 < t_0 \quad (1.97)$$

Застосування однотипних позначень дозволяє в одній теоремі сформулювати необхідні умови для вирішення задачі оптимізації траєкторії СДС з розділенням (1.89) - (1.96) і з групуванням (1.89) – (1.90), (1.92)–(1.97).

Складемо розширений критерій

$$\mathfrak{J} = S^* + D + I_1^* + I_{11,12}^* + I_{12}^* \quad (1.98)$$

де

$$S^* = v_0 S(\cdot) + \sum_{l=1}^{N_G} I G(\cdot), \quad (1.99)$$

$$D = \sum_{i=1}^2 \sum_{\tau=1}^{n-1} \alpha^{(i)} [{}_1 x_\tau(t_1) - {}_{11} x_\tau(t_1)] + \alpha_n [{}_1 x_n(t_1) - {}_{11} x_n(t_1) - {}_{12} x_n(t_1)],$$

$$I_1^* = \int_{t_0}^{t_1} [H_1^*({}_1 x(t), {}_1 u(t), {}_1 \lambda(t), \mu^{(1)}(t), t) - {}_1 \lambda^T(t) {}_1 \dot{x}(t)] dt, \quad (1.100)$$

$$I_{11,12}^* = \int_{t_1}^{t_{12}} [H_{11,12}^*({}_{11,12} x(t), {}_{11,12} u(t), {}_{11,12} \lambda(t), \mu^{(11,12)}(t), t) - {}_{11,12} \lambda^T(t) {}_{11,12} \dot{x}(t)] dt, \quad (1.101)$$

$$I_{11}^* = \int_{t_{12}}^{t_1} [H_{11}^*({}_{11} x(t), {}_{11} u(t), {}_{11} \lambda(t), \mu^{(11)}(t), t) - {}_{11} \lambda^T(t) {}_{11} \dot{x}(t)] dt, \quad (1.102)$$

$$H_1^*(\cdot) = H_1({}_1 x(t), {}_1 u(t), {}_1 \lambda(t), t) + \mu^{(1)}(t)^T Q^{(1)}(x(t), {}_1 u(t), t), \quad (1.103)$$

$$H_{11,12}^*(\cdot) = \sum_{i=1}^2 H_{1i}({}_{1i} x(t), {}_{1i} u(t), {}_{1i} \lambda(t), t) + \mu^{(11,12)}(t)^T Q^{(11,12)}({}_{11,12} x(t), {}_{11,12} u(t), t) \quad (1.104)$$

$$H_{11}^*(\cdot) = H_{11}({}_{11}x(t), {}_{11}u(t), {}_{11}\lambda(t), t) + \mu^{(11)}(t)^T Q^{(11)}({}_{11}x(t), {}_{11}u(t), t) \quad (1.105)$$

$$H_{\beta}(\cdot) = v_0 \Phi_{\beta}({}_{\beta}x(t), {}_{\beta}u(t), t) + {}_{\beta}\lambda^T(t) {}_{\beta}f({}_{\beta}x(t), {}_{\beta}u(t), t) \quad (\beta = 1, 11, 12) \quad (1.106)$$

$$\mu^{(\beta)}(t) = \text{col}[\mu_1^{(\beta)}(t), \dots, \mu_{N_Q^{(\beta)}}^{(\beta)}(t)] \quad (1.107)$$

$$Q^{(\beta)}(\cdot) = \text{col}[Q_1^{(\beta)}(\cdot), \dots, Q_{N_Q^{(\beta)}}^{(\beta)}(\cdot)] \quad (\beta = 1; 11, 12; 11) \quad (1.108)$$

$${}_{11,12}\lambda(t) = \text{col}[{}_{11}\lambda(t), {}_{12}\lambda(t)].$$

Використовуючи введені в виразах (1.98) - (1.108) позначення, сформулюємо у вигляді наслідку теореми 1.1 наступний результат.

Теорема

1.3.

Нехай

${}_{11}x(t), {}_{11}x(t), {}_{12}x(t), {}_{11}u(t), {}_{11}u(t), {}_{12}u(t), t_0, t_1, t_{12}, t_{11}$  – допустимі процеси задач (1.89)–(1.96) та (1.89) – (1.90), (1.92)–(1.97). Тоді для їхньої оптимальності необхідно, щоб існували такі векторні множники  $v = \text{col}(v_0, v_1, \dots, v_{N_G})$ ,  $\mu^{(1)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\mu^{(11,12)}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_{12}]$ ,  $\mu^{(11)}(t)$ ,  $t \in [t_{12}, t_{11}]$  не рівні одночасно нулю та неперервні рішення  ${}_{11}\lambda(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  ${}_{11}\lambda(t)$ ,  ${}_{12}\lambda(t)$ ,  $t \in [t_1, t_{12}]$ ,  ${}_{11}\lambda(t)$ ,  $t \in [t_{12}, t_{11}]$  спряжених векторних рівнянь

$${}_{11}\dot{\lambda} + \left. \frac{\partial H_1^*}{\partial {}_{11}x} \right|_{\lambda} = 0, \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \quad (1.109)$$

$${}_{11}\dot{\lambda} + \left. \frac{\partial H_{11,12}^*}{\partial {}_{11}x} \right|_{\lambda} = 0, \quad {}_{12}\dot{\lambda} + \left. \frac{\partial H_{11,12}^*}{\partial {}_{12}x} \right|_{\lambda} = 0, \quad t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}] \quad (1.110)$$

$${}_{11}\dot{\lambda} + \left. \frac{\partial H_{11}^*}{\partial {}_{11}x} \right|_{\lambda} = 0, \quad t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}] \quad (1.111)$$

таких, що справедливі умови:

(1) невід'ємності і доповнюючої нежорсткості  $v > 0$ ,

$$v_l \left\{ \begin{array}{l} \geq 0, G_l({}_1x(t_0), t_0; \dots; {}_{11}x(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{1, K_G} \\ \geq 0, G_l({}_1x(t_0), t_0; \dots; {}_{11}x(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} = 0 \\ = 0, G_l({}_1x(t_0), t_0; \dots; {}_{11}x(t_{11}), t_{11}) \Big|_{\wedge} < 0 \end{array} \right\} l = \overline{K_G + 1, N_G}; \quad (1.112)$$

$$\mu_l^{(\beta)}(t) \left\{ \begin{array}{l} \geq 0, Q_l^{(\beta)}({}_\beta x(t), {}_\beta u(t), t) \Big|_{\wedge} = 0, l = \overline{1, K_Q^{(\beta)}} \\ \geq 0, Q_l^{(\beta)}({}_\beta x(t), {}_\beta u(t), t) \Big|_{\wedge} = 0 \\ = 0, Q_l^{(\beta)}({}_\beta x(t), {}_\beta u(t), t) \Big|_{\wedge} < 0 \end{array} \right\} l = \overline{K_Q^{(\beta)} + 1, N_Q^{(\beta)}}; \quad (1.113)$$

де  $\beta = 1; 11, 12; 11;$

(2) трансверсальності для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\frac{\partial S^*}{\partial {}_1x(t_0)} \Big|_{\wedge} - (-1)_{11}^y \lambda(\hat{t}_0) = 0; \quad \frac{\partial S^*}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} + (-1)^y H_1^* \Big|_{\wedge} = 0, \quad (1.114)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial {}_{1i}x(t_i)} \Big|_{\wedge} + (-1)_{1i}^y \lambda(\hat{t}_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (1.115)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t_{11}} \Big|_{\wedge} - (-1)^y H_{11}^* \Big|_{\wedge} = 0;$$

(3) стрибка для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\frac{\partial S^*}{\partial {}_1x(t_1)} \Big|_{\wedge} + (-1)^y [{}_{11}\lambda(\hat{t}_1) - {}_{11}\lambda(\hat{t}_1) - {}_{12}\lambda(\hat{t}_1)] = 0, \quad (1.116)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t_1} \Big|_{\wedge} - (-1)^y (H_1^* \Big|_{\wedge} - H_{11,12}^* \Big|_{\wedge}) = 0, \quad (1.117)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial {}_{11}x(t_{12})} \Big|_{\wedge} + (-1)^y [{}_{11}\lambda(\hat{t}_{12}) + (-1)^y \varepsilon - {}_{11}\lambda(\hat{t}_{12}) - (-1)^y \varepsilon] = 0, \quad (1.118)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t_{12}} \Big|_{\wedge} - (-1)^y (H_{11,12}^* \Big|_{\wedge} - H_{11}^* \Big|_{\wedge}) = 0; \quad (1.119)$$

(4) мінімуму розширених гамільтоніанів

$$H_{\beta}^*(\beta, \hat{x}(t), \beta, \hat{u}(t), \beta, \lambda(t), t) = \min_{\beta u(t) \in \Omega_{\beta}} H_{\beta}^*(\beta, x(t), \beta, u(t), \beta, \lambda(t), t), t \in [t', t''] \quad (1.120)$$

де  $(\beta = 1, t' = t_0, t'' = t_1; \beta = 11, 12, t' = t_1, t'' = t_1; \beta = 11, t' = t_{12}, t'' = t_{11})$ .

Тут параметр  $\gamma$  приймає значення 1 або 2 відповідно для схеми з розділенням або угрупованням;  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  ${}_{11}\lambda(\hat{t}_{12} - \varepsilon)$  – значення спряженої змінної перед  $t = \hat{t}_{12}$  (зліва від  $\hat{t}_{12}$ );  ${}_{11}\lambda(\hat{t}_{12} + \varepsilon)$  – значення спряженої змінної одразу ж після  $t = \hat{t}_{12}$  (справа від  $\hat{t}_{12}$ ).

Зауваження. Для механічних систем умова стрибка для спряженої змінної, яка відповідає  $n$ -ій фазовій координаті і означає масу, має вигляд.

$$\left. \frac{\partial S^*}{\partial x(t_1)} \right|_{\wedge} + (-1)^{\gamma} [{}_{11}\lambda_n(\hat{t}_1) - \zeta_{1111}\lambda_n(\hat{t}_1) - \zeta_{1212}\lambda_n(\hat{t}_1)] = 0, \quad (1.121)$$

$$\zeta_{11} \geq 0, \zeta_{12} \geq 0, \zeta_{11} + \zeta_{12} = 1.$$

## РОЗДІЛ 2

### ОПТИМАЛЬНА ТРАЄКТОРІЯ РУХУ З АЛЬТЕРНАТИВОЮ ДЛЯ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

#### 2.1. Оптимальні траєкторії, що надають складеним динамічним системам додаткові можливості

Основна конструктивна ідея оптимальності траєкторії з альтернативою полягає в застосуванні принципу розширення [87, 88], не тільки до критерію оптимізації і вектору фазового стану, а й до обмеження.

Розглянемо математичну постановку задачі і її рішення.

Динамічна система

$$dx/dt = \dot{x}_t = F(x, u, t), t \in [t_0, t_f], \quad (2.1)$$

де  $x \in E^n$ ,  $u \in \Omega \subset E^m$ ,  $F(\cdot)$  – неперервне разом з матрицями похідних  $F_x, F_u$  відображення  $E^n \times E^m \times E^1 \rightarrow E^n$ , переміщається з точки з координатами  $(x(t_0), t_0) \in Q_0 = \{(x(t_0), t_0) : \varphi^{(0)} x(t_0), t_0 = 0\}$  ( $\varphi^{(0)} : E^{n+1} \rightarrow E^{r_0}$ ,  $r_0 < n+1$ ) в точку  $(x(t_f), t_f) \in Q_f = \{(x(t_f), t_f) : \varphi^{(f)} x(t_f), t_f = 0\}$  ( $\varphi^{(f)} : E^{n+1} \rightarrow E^{r_f}$ ,  $r_f < n+1$ ).

У будь-який момент часу  $t \in [t_0, t_f]$ , від динамічної системи (1.22) може відділитись підсистема

$$dy/d\xi = \dot{y}_\xi = f(x, v, \xi), \xi \in [t_0, t_k], \quad (2.2)$$

де  $y$  – фазові координати,  $v$  – вектор керування підсистем зі складу СДС, що впливають на рух інших підсистем;  $t_0, t_k$  – моменти часу початку і кінця руху СДС по відповідним гілках траєкторії,  $y \in E^n$ ,  $v \in \Omega_v \subset E^{m_v}$ ,  $y(t) = x(t)$  для всіх фазових координат, окрім маси,  $f(\cdot)$  – неперервне

разом з матрицями похідних  $f_y, f_v$  відображення  $E^n \times E^{m_v} \rightarrow E^n$ , яка переміщається в точку  $(y(t_k), t_k) \in Q_k = \{(y(t_k), t_k) : \varphi^{(k)}(x(t_k), t_k) = 0\}$  ( $\varphi^{(k)} : E^{n+1} \rightarrow E^{r_k}, r_k < n+1$ ).

На рух підсистеми (2.2) накладається обмеження

$$J = \int_t^{t_k} \varphi(y, v, \xi) d\xi + g(y(t), t; y(t_k), t_k) \leq 0 \quad (2.3)$$

Потрібно знайти  $u(t), x(t), t \in [t_0, t_f], v(\xi), y(\xi), t \in [t, t_k]$ , моменти часу  $t_0, t_f, t_k$  такі, щоб функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \Phi(x, u, t) dt + G(x(t_0), t; x(t_f), t_f) \rightarrow \min \quad (2.4)$$

приймав найменше можливе значення.

Рішення задачі пропонується шукати в класі кусково - гладких траєкторій і кусково - неперервних керувань.

Передбачається, що задача (2.1) – (2.4) не має тривіального рішення, що полягає в тому, що оптимальна траєкторія задачі (2.1) - (2.4) задовольняє обмеження (2.3) при некерованому русі підсистеми.

Використовуючи гіпотезу про розширення обмеження, суть якої полягає в тому, що задача пошуку  $v(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$ , що задовольняють двом обмеженням (2.2), (2.3) можливо замінити на еквівалентну задачу з одним обмеженням

$$\begin{aligned} \tilde{J} = \int_t^{t_k} \left\{ \varphi(y, v, \xi) + \Psi^{\dot{O}}(\xi) [f(y, v, \xi) - \dot{y}_\xi] \right\} d\xi + \\ + \mu^{(k)T_\varphi^{(k)}} (y(t_k), t_k) + g(x(t), t; y(t_k), t_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

де  $\mu^{(k)T} = \{\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{r_k}^{(k)}\}$  – векторний множник,  $\Psi^{\dot{O}}(\xi) = \{\Psi_1(\xi), \dots, \Psi_2(\xi)\}$  – функціональний векторний множник, які можуть трактуватися як множники Лагранжа [43]. Якщо пошук  $v(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$  виконується

за умовою  $J \rightarrow \min$ , то в цьому випадку  $v(\xi), y(\xi), \Psi^{(k)}(\xi), t_k$  повинні задовольняти рівнянням [87, 88]

$$\dot{\Psi}_\xi = -dh / dy|_{\wedge}, \quad (2.6)$$

$$h(\hat{y}, \hat{v}, \Psi, \xi) = \min_{v(\xi) \in \Omega_v} h(\hat{y}, v, \Psi, \xi) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(k)T} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial t_k} \Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial t_k} \Big|_{\wedge} + h \Big|_{\wedge} &= 0, \\ \mu^{(k)T} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y t_k} \Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial y t_k} \Big|_{\wedge} - \Psi(\hat{t}_k) \Big|_{\wedge} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mu^{(k)} \geq 0, \varphi_i^{(k)}(y(t_k), t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, r_k}). \quad (2.9)$$

де значок « $\wedge$ » означає оптимальні змінні і параметри,

$$h(y, v, \Psi, \xi) = \varphi(y, v, \xi) + \Psi^{\hat{O}}(\xi) f(y, v, \xi).$$

Виконання співвідношень (2.8) – (2.9) дозволяє задовольнити нерівність (2.3), яка набуває вигляду

$$\hat{J} = (x(t), t); \quad \hat{y}(\hat{t}_k), \hat{t}_k \leq 0. \quad (2.10)$$

Якщо при такому підході нерівність (2.3) порушується, то залишається єдиний спосіб домогтися його виконання – це змінити траєкторію  $x(t)$ . При неоптимальному способі вибору  $v(\xi), \xi \in [t, t_k]$  неясно, за рахунок чого домагатися виконання умови (2.3): або за рахунок управління  $v(\xi)$ , або за допомогою вимірювання  $x(t)$ . Тому в подальшому будемо виходити з того, що  $v(\xi), \xi \in [t, t_k]$  обчислено за формулами (2.6), (2.9).

У задачі (2.1), (2.4), (2.10) обмеження (2.10) є обмеженням типу нерівності, що не містить керування. Візьмемо повну похідну за часом від виразу (2.10) і підставимо в нього  $F(x, u, t)$  замість  $\dot{x}$  [49, 54]:

$$\dot{J}_t = \frac{\partial \hat{J}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \hat{J}}{\partial t} \right]^T F(x, u, t) = 0, \hat{J} = 0. \quad (2.11)$$

$$H(x, u, \lambda, t) = \Phi(x, u, t) + \lambda^T(t) F(x, u, t) + \mu(t) \dot{J}_f, \quad (2.12)$$

де

$$\mu(t) \begin{cases} \geq 0, \hat{J} = 0, \dot{J} = 0; \\ = 0, \hat{J} < 0. \end{cases}$$

Рівняння принципу мінімуму набувають вигляду [43]:

$$\dot{\lambda}_t = - \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{\wedge}; \quad (2.13)$$

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \lambda, t) = \min_{u^{(\cdot)} \in \Omega} H(\hat{x}, u, \lambda, t),$$

$$\mu^{(0)T} \left. \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial t_0} \right|_{\wedge} + \left. \frac{\partial G}{\partial t_0} \right|_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = 0, \quad (2.14)$$

$$\mu^{(f)T} \left. \frac{\partial \Phi^{(f)}}{\partial t_f} \right|_{\wedge} + \left. \frac{\partial G}{\partial t_f} \right|_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda(\hat{t}_f), \hat{t}_f) = 0, \quad (2.15)$$

$$\mu^{(0)T} \left. \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x(t_0)} \right|_{\wedge} + \left. \frac{\partial G}{\partial x t_0} \right|_{\wedge} + \lambda(\hat{t}_0) = 0, \quad (2.16)$$

$$\mu^{(f)T} \left. \frac{\partial \Phi^{(f)}}{\partial x(t_f)} \right|_{\wedge} + \left. \frac{\partial G}{\partial x(t_f)} \right|_{\wedge} - \lambda(\hat{t}_f) = 0.$$

Відзначимо, що перехід від нерівності (2.10) до нерівності (2.11) і далі, до гамільтоніану (2.12) не є єдиною можливим способом вирішення задачі (2.1), (2.4), (2.10). Для стійко-оптимальних процесів [16] пропонуються два способи вирішення задачі (2.1), (2.4), з обмеженням (2.10), що відрізняються від наведеного.

Перший спосіб полягає в тому, що в гамільтоніан (2.12) замість  $\mu(t) \dot{J}(t)$  вводиться  $\mu(t) \hat{J}(t)$  [11, теорема 4]. Другий спосіб полягає в переході до нової еквівалентної М-задачі з попередніми умовами (2.1), (2.10), але з іншим цільовим функціоналом [11, лема 2]

$$I_j = G(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, t) dt + \mu^{(0)T} \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) + \mu^{(f)T} \varphi^{(f)}(x(t_f), t_f) + \frac{M}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \max^2(0, \hat{J}(x(t), t; \hat{y}(\hat{t}_k), \hat{t}_k)) dt,$$

де  $M > 0$  – постійна.

Деякі інші методи перетворення обмеження у формі нерівності запропоновані в роботі [96].

На закінчення відзначимо, що рішення задачі (2.1) – (2.4) необхідно починати з перевірки відсутності тривіального рішення, тобто вирішити задачу (2.1), (2.5) та перевірити виконання умов (2.2), (2.3) при некерованому русі підсистеми (2.2).

Гіпотеза про розширення обмеження строго обґрунтовується за методикою [96] в разі, коли від нерівності (2.3) здійснюється перехід до його мінімального значення  $J = \min_{v(t) \in \Omega_v}$ .

## 2.2. Оптимальна траєкторія складеної динамічної системи з можливою зміною цілі руху в будь-який момент часу в заданому інтервалі

У даному підрозділі викладено необхідні умови оптимальності траєкторії складеної динамічної системи в умовах, коли зміна динаміки системи та (або) зміна кінцевої цілі руху відбувається не в фіксований або оптимально підібраний момент часу, а в будь-який поточний момент часу, що належить деякому заданому інтервалу [66].

Розглянемо постановку задачі. Динамічну систему

$$\dot{\sigma} = f(x, u, t), t \in [t_0, t_f], \quad x \in E^n, u \in \Omega \subset E^m \quad (2.17)$$

необхідно перевести з різноманіття

$$Q_0 = \left\{ (x(t_0), t_0) : \varphi_j^{(0)}(x(t_0), t_0) \begin{cases} \leq 0, j = \overline{1, r_0^{(0)}}; \\ = 0, j = \overline{r_0^{(0)} + 1, r^{(0)}}. \end{cases} \right\}, \quad (2.18)$$

де  $r^{(0)} + r_0^{(0)} < n + 1$ ,

на різноманіття

$$Q_f = \left\{ (x(t_f), t_f) : \varphi_j^{(f)}(x(t_f), t_f) \begin{cases} \leq 0, j = \overline{1, r_f^{(f)}}; \\ = 0, j = \overline{r_f^{(f)} + 1, r^{(f)}}. \end{cases} \right\}, \quad (2.19)$$

де  $r^{(f)} - r_f^{(f)} < n + 1$ ,

таким чином щоб мінімізувати критерій

$$I = S(x(t_0), t_0); x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in \Omega}. \quad (2.20)$$

При цьому, необхідно врахувати, що в кожен момент часу в інтервалі  $[t', t''] \subset [t_0, t_f]$  можлива зміна динаміки руху вихідної системи і (або) її перенацілювання, тобто диференціальна система (2.17) замінюється диференціальною системою

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= f^0(x^0, u^0, \eta), \quad \eta \in [\tau, t_k^\tau], \tau \in [t', t''], \\ x^0 &\in E^n, u^0 \in \Omega^0 \subset E^{m_0}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

яка має бути переведена зі стану  $x^0(\tau) = x(\tau)$  в точку  $x^0(t_k^\tau) = \text{const}$ ,  $t_k^\tau = \text{var}$ ,

$$Q_k = \left\{ (x(t_k^\tau), t_k^\tau) : \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) \begin{cases} \leq 0, j = \overline{1, r_k^{(k)}}; \\ = 0, j = \overline{r_k^{(k)} + 1, r^{(k)}}. \end{cases} \right\}, \quad (2.22)$$

де  $r^{(k)} - r_k^{(k)} < n + 1$ ,  $t_k^\tau$  – час досягнення системою (2.21) кінцевої точки (2.22) за умови що зміна динаміки і (або) перенацілювання відбулося в момент часу  $\tau$ , з урахуванням виконання обмеження

$$I^0 = S^0(x^0(\tau), \tau); x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) + \int_{\tau}^{t_k^\tau} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta \leq 0. \quad (2.23)$$

Тут скалярні функції

$$S(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f), S^0(x^0(\tau), \tau); x^0(t_k^\tau), t_k^\tau), \Phi_j^{(0)}(x(t_0), t_0) \quad (j = \overline{1, r_0^{(0)}}),$$

$\Phi_j^{(f)}(x(t_f), t_f) (j = \overline{1, r^{(f)}}), \Phi_j^{(k)}(x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) (j = \overline{1, r^{(k)}})$  мають неперервні перші похідні по всім аргументам;  $f(x, u, t), f^0(x^0, u^0, \eta)$  – неперервні разом з матрицями  $\partial f / \partial x$  та  $\partial f^0 / \partial x^0$  відображення відповідно  $E^n \times \Omega \times E^1 - E^n$  та  $E^n \times \Omega^0 \times E^1 - E^n$ ;  $\Phi(x, u, t), \Phi^0(x^0, u^0, \eta)$  – неперервні разом з матрицями  $\partial \Phi / \partial x$  та  $\partial \Phi^0 / \partial x^0$  відображення  $E^n \times \Omega \times E^1 - E^n$  та  $E^n \times \Omega^0 \times E^1 - E^n$ .

Приступимо до вирішення задачі. Від задачі (2.17) - (2.23) перейдемо до її дискретного аналогу, поклавши, що зміна динаміки і (або) перенацілювання можливі тільки в фіксовані моменти часу  $t_i \in [t', t'']$ ,  $t_{i-1} < t_i, i = \overline{2, N}$ ;  $t_1 = t', t_N = t''$ . Отримавши рішення нової задачі скористаємося граничним переходом  $N \rightarrow \infty, \max |t_{i-1} - t_i| \rightarrow 0$  та знайдемо рішення вихідної задачі.

Нова задача формулюється наступним чином

$$I = S(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, t) dt \rightarrow \min_{\substack{u(t) \in \Omega, \\ t \in [t_0, t_f]}} \quad (2.24)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, t_f], \quad (2.25)$$

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0, u^0, \eta), \eta \in [t, t_k^i], x^0(t_i) = x(t_i) (i = \overline{1, N}), \quad (2.26)$$

$$(x(t_0), t_0) \in Q_0, (x(t_f), t_f) \in Q_f,$$

$$\Phi_j^{(k)}(x^0(t_k^i), t_k^i) \begin{cases} \leq 0, j = \overline{1, r_k^{(k)}}; \\ = 0, j = \overline{r_k^{(k)} + 1, r^{(k)}}. \end{cases} \quad (2.27)$$

$$S^0(x^0(t_i), t_i); x^0(t_k^i), t_k^i) + \int_{t_i}^{t_k^i} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta \leq 0, (i = \overline{1, N}), \quad (2.28)$$

$$x \in E^n, x^0 \in E^n, u \in \Omega \subset E^m, u^0 \in \Omega^0 \subset E^{m_0}. \quad (2.29)$$

В силу кінцевого значення  $N$ , задача (2.24) – (2.29) пред'являє менш жорсткі вимоги до допустимого процесу  $\delta(t), u(t), x^0(\eta), u^0(\eta), t_0, t_f, t_k^i$ , ніж задача (2.17)–(2.23) до процесу  $\delta(t), u(t), x^0(\eta), u^0(\eta), t_0, t_f, t_k^f$ . Тому кожен допустимий процес задачі (2.17)–(2.23) буде допустимим і в задачі (2.24)–(2.29) [11].

Зафіксуємо  $N$  і використовуючи постійні скалярні  $\xi^N, \xi_{0j}^N (j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{ff}^N (j = \overline{1, r^{(f)}}), v_i^N, \mu_{ij}^N (j = \overline{1, r^{(k)}})$  та функціональні векторні  $\lambda^N(t), \lambda_i^{0N}(\eta)$  множники Лагранжа, записуємо розширений критерій оптимізації нової задачі (2.24) – (2.29):

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \xi^N \left\{ S(x(t_0), t_0); x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^{NT}(t) [f(x, u, t) - \dot{x}] dt \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \varphi_j^{(0)}(x(t_0), t_0) + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{ff}^N \varphi_j^{(f)}(x(t_f), t_f) + \\ & \sum_{i=1}^N \left\{ v_i^N \left[ S^0(x^0(t_i), t_i); x^0(t_k^i), t_k^i) + \int_{t_i}^{t_k^i} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta + \int_{t_i}^{t_k^i} \lambda_i^{0NT}(\eta) [f^0(x^0, u^0, \eta) - \dot{x}^0] d\eta \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} \mu_{ij}^N \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^i), t_k^i) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \xi^N + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{ff}^N + \sum_{i=1}^N \left[ v_i^N + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} \mu_{ij}^N \right] = 1, \quad \xi^N \geq 0, \xi_{0j}^N \geq 0, \xi_{ff}^N \geq 0, v_i^N \geq 0, \mu_{ij}^N \geq 0,$$

$$\xi_{0j}^N \varphi_j^{(0)}(x(t_0), t_0) = 0, (j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{ff}^N \varphi_j^{(f)}(x(t_f), t_f) = 0, (j = \overline{1, r^{(f)}}),$$

$$\mu_{ij}^N \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^i), t_k^i) = 0 (j = \overline{1, r^{(k)}}).$$

Відповідно до [11, 66] процес  $\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \hat{t}_0, \hat{t}_f, \hat{t}_k^i$  доставляє мінімум функціоналу (2.24) в сенсі необхідних умов, якщо існують рішення  $\lambda^N(t), \lambda_i^{0N}(\eta)$  спряжених векторних рівнянь

$$\xi^N \left[ \dot{\lambda}^N(t) + \partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t) / \partial x \Big|_{\wedge} \right] = 0, \quad (2.30)$$

$$v_i^N \left[ \dot{\lambda}_i^{0N}(\eta) + \partial H^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \lambda_i^{0N}(\eta), \eta) / \partial x^0 \Big|_{\wedge} \right] = 0, \quad (2.31)$$

таких, що справедливі умови:

(1<sup>0</sup>) трансверсальності:

$$\xi^N \left[ \partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} + \lambda^N(\hat{t}_0) \right] + \partial \varphi^{(0)\dot{O}} / \partial \delta(t_0)_{\wedge} \xi_0^N = 0, \quad (2.32)$$

$$\xi^N \left[ \partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda^N(\hat{t}_0), \hat{t}_0) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \partial \varphi_j^{(0)} / \partial t_0_{\wedge} = 0, \quad (2.33)$$

$$\xi^N \left[ \partial S / \partial x(t_f)_{\wedge} - \lambda^N(\hat{t}_f) \right] + \partial \varphi^{(f)T} / \partial x(t_f)_{\wedge} \xi_f^N = 0, \quad (2.34)$$

$$\xi^N \left[ \partial S / \partial t_f_{\wedge} + H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda^N(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{ff}^N \partial \varphi_j^{(f)} / \partial t_f = 0, \quad (2.35)$$

$$v_i^N \left[ \partial S^0 / \partial x^0(t_0^i)_{\wedge} - \lambda_k^{0N}(\hat{t}_k^i) \right] + \partial \varphi^{(k)\dot{O}} / \partial \delta(t_k^i)_{\wedge} \mu_i^N = 0, \quad (2.36)$$

$$v_i^N \left[ \partial S^0 / \partial t_k^i_{\wedge} + H^0(\hat{x}^0(\hat{t}_k^i), \hat{u}^0(\hat{t}_k^i), \lambda^{0N}(\hat{t}_k^i), \hat{t}_k^i) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} \mu_{ij}^N \partial \varphi_j^{(k)} / \partial t_k^i = 0, \quad (2.37)$$

(2<sup>0</sup>) стрибка:

$$\xi^N \left[ \lambda^N(t_i + 0) - \lambda^N(t_i - 0) \right] + v_i^N \left[ \lambda_i^{0N}(t_i + 0) + \partial S^0 / \partial x^0(t_i)_{\wedge} \right] = 0, \quad (2.38)$$

(3<sup>0</sup>) мінімуму гамільтоніану:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda^N(t), t) = \min_{u(t) \in \Omega, t \in [t_0, t_f]} H(\hat{x}(t), u(t), \lambda^N(t), t) \quad (2.39)$$

$$H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda^{0N}(\eta), \eta) = \min_{u^0(\eta) \in \Omega^0, \eta \in [t_i, t_k^i]} H^0(\hat{x}^0(\eta), u^0(\eta), \eta). \quad (2.40)$$

(4<sup>0</sup>) нетривіальності, невід'ємності, доповнюючої нежорсткості:

$$\xi^N + \sum_{j=1}^{r(0)} \xi_{0j}^N \sum_{j=1}^{r(f)} \xi_{jf}^N + \sum_{i=1}^N \left[ v_i^N + \sum_{j=1}^{r(k)} \mu_{ij}^N \right] = 1, \quad (2.41)$$

$$\xi^N \geq 0, \xi_{0j}^N \geq 0, \xi_{jf}^N \geq 0, v_i^N \geq 0, \mu_{ij}^N \geq 0, \quad (2.42)$$

$$\xi_{0j}^N \varphi_j^{(0)}(\hat{x}(t_0), \hat{t}_0) = 0, (j = \overline{1, r^{(0)}}), \quad (2.43)$$

$$\xi_{jf}^N \varphi_j^{(f)}(\hat{x}(t_f), \hat{t}_f) = 0, (j = \overline{1, r^{(f)}}),$$

$$v_i^N = \begin{cases} = 0, \\ \geq 0, \end{cases} \mu_{ij}^N \varphi_j^{(k)}(\hat{x}^0(t_k^i), \hat{t}_k^i) = 0 (j = \overline{1, r_k^{(k)}}), \quad (2.44)$$

де “^” означає оптимальні змінні і параметри,

$$\xi_0^{NT} = [\xi_{01}, \dots, \xi_{0N}], \xi_f^{NT} = [\xi_{f1}, \dots, \xi_{fN}], \mu_i^{NT} = [\mu_{i1}, \dots, \mu_{iN}],$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \Phi(x(t), u(t) + \lambda^{NT}(t) f(x(t), u(t), t),$$

$$H^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \lambda^0(\eta), \eta) = \Phi^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \eta) + \lambda^{0NT}(\eta) f^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \eta).$$

Задамо на числовій осі ступінчасті функції  $v^N(\tau)$  та  $\mu_j^N(\tau)$  зі стрибками відповідно  $v_1^N, \dots, v_N^N$  и  $\mu_{1j}^N, \dots, \mu_{Nj}^N$  в точках  $t_1, \dots, t_N$ . При  $\tau < t_1$  покладемо  $v^N(\tau) = \mu_j^N(\tau) = 0$ . В інтервалі часу  $[t_1, t_N]$  спряжене рівняння (2.30) разом з умовою (2.38) записується в рівносильній інтегральній формі, що містить інтеграл Стільтєса

$$\lambda^N(t) = \xi^N \int_t^{t^N} \partial H / \partial x \Big|_{\wedge} \partial \tau + \xi^N \lambda^N(t_N + 0) + \int_t^{t^N} [\lambda_i^{0N}(\tau) + \partial S^0 / \partial x^0 \Big|_{\wedge}] d v^N(\tau), \quad (2.45)$$

де  $\lambda^N(t_N + 0)$  – знаходиться в результаті рішення рівняння (2.30) в інтервалі  $[t_N, t_f]$  при дотриманні граничних умов (2.34).

Умови трансверсальності (2.36), (2.37) та умова стрибка (2.38) при  $\tau = t_1$  набувають відповідно вигляду

$$dv^N(t_i) \left[ \partial S^0 / \partial x^0(t_k^i) \Big|_{\wedge} - \lambda_i^{0N}(t_k^i) + \partial \varphi_j^{(k)T} / \partial x^0(t_k^i) \Big|_{\wedge} d\mu_j^N = 0 \right], \quad (2.46)$$

$$dv^N(t_i) \left[ \partial S^0 / \partial t_k^i \Big|_{\wedge} + H^0(\hat{x}^0(t_k^i), \hat{u}^0(t_k^i), \lambda^{0N}(\hat{t}_k^i), \hat{t}_k^i) \right] + \sum_{j=1}^{(k)} \mu_j^N \partial \varphi_j^{(k)} / \partial t_k^i \Big|_{\wedge} = 0, \quad (2.47)$$

$$dv^N(t_i) = v_i^N, \quad d\mu_j^N(\hat{t}_k^i) = \mu_{ij}^N, \quad \xi^N \left[ \lambda^N(t_1 + 0) - \lambda^N(t_1 - 0) \right] = 0, \quad (2.48)$$

де  $\lambda^N(t_1 - 0)$  – знаходиться в результаті рішення рівняння (2.30) в інтервалі  $[t_0, t_1]$  при дотриманні граничних умов (2.32).

Внаслідок умови (4<sup>0</sup>) функції  $v^N(\tau)$ ,  $\mu_j^N(\tau)$  невід'ємні, обмежені і мають обмежену варіацію. Зафіксуємо довільний відрізок  $J$  числової осі, що містить  $[t_1, t_N]$  разом з малою околицею і виберемо  $N > N_0$  так, щоб  $t_1, \dots, t_N$  залишалися точками неперервності керування  $u(t)$ . З послідовності функції  $\{v^N(\tau) : N > N_0\}$  та  $\{\mu_j^N(\tau) : N > N_0\}$  можливо виділити послідовності відповідно  $v^{Np}(\tau)$  та  $\mu_j^{Np}(\tau)$ , які поточечно на  $J$  сходяться до граничних функцій  $v(\tau)$ ,  $\mu_j(\tau)$ , тобто

$$v^{Np}(\tau) \rightarrow v(\tau), \quad \mu_j^{Np}(\tau) \rightarrow \mu_j(\tau), \quad \tau \in J, j = \overline{1, r^{(k)}}. \quad (2.49)$$

Скаляри  $\xi^N, \xi_{0j}^N(j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{ff}^N(j = \overline{1, r^{(f)}})$ ,  $N > N_0$  також обмежені в сукупності і тому послідовності  $\{\xi^N : N > N_0\}, \{\xi_{0j}^N : N > N_0\}$  ( $j = \overline{1, r^{(f)}}$ ) мають послідовності що сходяться  $\xi^{Np}, \xi_{0j}^{Np}(j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{ff}^{Np}(j = \overline{1, r^{(f)}})$ , які сходяться до  $\xi, \xi_{0j}(j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{ff}(j = \overline{1, r^{(f)}})$ , тобто

$$\xi^{Np} \rightarrow \xi, \quad \xi_{0j}^{Np} \rightarrow \xi_{0j}(j = \overline{1, r^{(0)}}), \quad \xi_{ff}^{Np} \rightarrow \xi_{ff}(j = \overline{1, r^{(f)}}). \quad (2.50)$$

Спряжена змінна  $\lambda_i^{0N}(\eta)$ , пов'язана з рухом системи (2.26) по траєкторії, що задовольняє нерівність (2.28), при граничному переході прагне до  $\lambda_\tau^0(\eta)$ , що задовольняє рівняння  $\dot{\lambda}_\tau^0(\eta) = -\partial H^0 / \partial x^0|_\lambda$ .

Індекс « $\tau$ », що замінив « $i$ », вказує на залежність значення спряженої змінної від фазової координати системи (2.26) в будь-який момент  $\tau \in [t', t'']$ , відповідний зміні динаміки системи і (або) її перенацілюванню. Відповідно до першої теореми Хеллі [46], варіації функцій  $v(\eta)$  та  $\mu_j(\eta)$  на  $J$  обмежені, отже, в інтегральному рівнянні типу Вольтерра

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \xi \lambda(t_N + 0) + \xi \int_t^{t^N} \partial H / \partial x|_\lambda \partial \tau + \\ & + \int_t^{t^N} \left[ \lambda_\tau^0(\tau) + \partial S^0(x^0(\tau), \tau; x^0(t_k^\tau), t_k^\tau / \partial x^0(\tau)|_\lambda) \right] d\nu(\tau) \end{aligned} \quad (2.51)$$

останній доданок має сенс. Рішення  $\lambda^N(t)$  цього рівняння існує в класі функцій обмеженої варіації і при цьому єдине [41].

В силу (2.49), (2.50) рішення  $\lambda^N(t)$  рівняння (2.45) в кожній точці  $\tau \in J$  сходиться до рішення рівняння (2.51). При цьому функції  $v(t)$  та  $\mu_j(t)$  як границі (2.49) неспадних невід'ємних функцій самі є неспадними невід'ємними на  $J$  функціями і, отже, можуть розглядатися як міри. Переходячи до границі по  $N$  в співвідношеннях (2.30) - (2.48), з урахуванням усього викладеного вище, отримаємо наступний результат.

**Теорема 2.1.** Для оптимальності процесу  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $x^0(\eta)$ ,  $u^0(\eta)$ ,  $t_0$ ,  $t_j$ ,  $t_k^\tau$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $\eta \in [\tau, t_k^\tau]$ ,  $\tau \in [t', t''] \subset [t_0, t_f]$  необхідно існування невід'ємних чисел  $\xi$ ,  $\xi_{0j}$  ( $j = \overline{1, r^{(0)}}$ ),  $\xi_{jf}$  ( $j = \overline{1, r^{(f)}}$ ) і невід'ємних мір  $v(\tau)$  та  $\mu_j(\tau)$  ( $j = \overline{1, r^{(k)}}$ ), зосереджених на множині  $I = \{\tau : \tau \in [t', t'']\}$ ; векторної функції  $\lambda(t)$  обмеженої варіації, що є рішенням інтегрального рівняння (2.51) для  $t \in [t', t'']$  і звичайного диференціального рівняння

$$\hat{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x|_{\wedge}$$

для  $t \in [t_0, t_f] / [t', t'']$  і векторної функції  $\lambda_{\tau}^0(t)$  обмеженої варіації, що є рішенням рівняння

$$\hat{\lambda}_{\tau}^0(\eta) = -\partial H^0 / \partial x^0|_{\wedge}, \quad \eta \in [\tau, \tau^{\tau}], \quad \tau \in [t', t''],$$

таких, що справедливі умови:

(1<sup>0</sup>) трансверсальності:

$$\xi \left[ \partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} + \lambda(\hat{t}_0) \right] + \partial \varphi^{(0)\delta} / \partial \delta(t_0)_{\wedge} \xi_0 = 0,$$

$$\xi \left[ \partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda(\hat{t}_0), \hat{t}_0) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j} \partial \varphi_j^{(0)} / \partial t_0|_{\wedge} = 0,$$

$$\xi \left[ \partial S / \partial x(t_f)_{\wedge} - \lambda(\hat{t}_f) \right] + \partial \varphi^{(f)T} / \partial x(t_f)_{\wedge} \xi_f = 0,$$

$$\xi \left[ \partial S / \partial t_f|_{\wedge} + H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{jf} \partial \varphi_j^{(f)} / \partial t_f|_{\wedge} = 0,$$

$$d\nu(\tau) \left[ \partial S^0 / \partial x^0(t_k^{\tau})_{\wedge} - \lambda_{\tau}^0(\hat{t}_k^{\tau}) \right] + \partial \varphi^{(k)\delta} / \partial \delta(t_k^{\tau})_{\wedge} d\mu(\tau) = 0,$$

$$d\nu(\tau) \left[ \partial S^0 / \partial t_k^{\tau}|_{\wedge} + H^0(x^0(\hat{t}_k^{\tau}), u^0(\hat{t}_k^{\tau}), \lambda(\hat{t}_k^{\tau}), \hat{t}_k^{\tau}) \right] + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} d\mu_j(\tau) \partial \varphi_j^{(k)} / \partial t_k^{\tau}|_{\wedge} = 0;$$

(2<sup>0</sup>) стрибка:

$$\xi[\lambda(t_1 + 0) - \lambda(t_1 - 0)] = 0;$$

(3<sup>0</sup>) мінімуму гамільтоніанів:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda(t), t) = \min_{u(t) \in \Omega, t \in [t_0, t_f]} H(\hat{x}(t), u(t), \lambda(t), t);$$

$$H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda^{0N}(\eta), \eta) = \min_{u^0(\eta) \in \Omega^0, \eta \in [t, t_k]} H^0(\hat{x}^0(\eta), u^0(\eta), \eta);$$

(4<sup>0</sup>) нетривіальності і доповнюючої нежорсткості:

$$\xi + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j} \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{j\bar{j}} + \int_{t'}^{t''} \left[ dv(\tau) + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} d\mu_j(\tau) \right] = 1,$$

$$\xi_{0j} \Phi_j^{(0)}(\hat{x}(t_0), \hat{t}_0) = 0, (j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{j\bar{j}} \Phi_j^{(f)}(\hat{x}(t_f), \hat{t}_f) = 0, (j = \overline{1, r^{(f)}}),$$

$$d\mu_j(\tau) \varphi_{kj}(\hat{x}(t_k^*), \hat{t}_k^*) = 0 (j = \overline{1, r^{(k)}}),$$

$$dv(\tau) = \begin{cases} = 0, & I^0 < 0; \\ \geq 0, & I^0 = 0. \end{cases}$$

Траєкторія динамічної системи (2.17), побудована відповідно до наведеної вище теореми, має таку особливість, що надає динамічній системі (2.17) можливість перейти в інтервалі часу  $[t', t'']$  на траєкторію типу (2.21) в разі зміни динаміки вихідної системи (2.17) і (або) її перенацілювання. Іншими словами, в кожен момент часу  $t \in [t', t'']$  руху системи існує альтернативний варіант руху по траєкторії, що описується рівнянням (2.21) з дотриманням умов (2.22), (2.23).

### 2.3. Оптимальна траєкторія руху розривної системи з поточним моментом розриву

При розробці алгоритмів траєкторного управління доводиться вирішувати оптимізаційні задачі, в яких керування динамічним об'єктом повинно доставляти екстремум функціоналу не тільки при фіксованих і вільних моментах часу початку та кінця процесу, а й в будь-який поточний момент часу [50].

Для задачі

$$I = S(x(t_0), t_0; x(t), t; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^t \Phi(x, u, \tau) d\tau \rightarrow \min \quad (2.52)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad \varphi(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f) = 0 \quad (2.53)$$

$$x \in E^n, u \in \Omega \in E^m, \varphi: E^{2n+2} \rightarrow E^r \quad (r < 2n+2) \quad (2.54)$$

де  $S(\cdot)$  – гладка на  $E^{3n} \times E^3$  скалярна функція змінних  $x(t_0), x(t), x(t_f), t_0, t, t_f$ ;  $\varphi_j(\cdot)$  ( $j = \overline{1, r}$ ) – гладкі на  $E^{2n} \times E^2$  скалярні функції змінних  $x(t_0), x(t_f), t_0, t_f$ ;  $f(\cdot)$  – неперервне разом з матрицею  $\partial f / \partial x$  відображення  $E^n \times \Omega \times E^1 \rightarrow E^n$ ;  $\Phi(\cdot)$  – неперервне разом з матрицею  $\partial \Phi / \partial x$  відображення  $E^n \times \Omega \times E^1 \rightarrow E^n$ , рішення може бути знайдено тривіальним образом: на підставі принципу оптимальності [16], з якого слідує, що ділянка оптимальної траєкторії сама по собі є оптимальною траєкторією. Звідси зрозуміло, що рішення задачі (2.52) – (2.54) співпадає з рішенням задачі (2.52) – (2.54) для  $t = t_f$ .

Задача істотно ускладнюється для розривних систем з поточним моментом розриву.

Розглянемо задачу оптимізації розривної системи

$$I = S(x(t_0), t_0; x(t_1), t_1; x(t_N), t_N; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{\tau} \Phi(x, u, t) dt + \int_{\tau}^{t_f^{\tau}} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta \rightarrow \min \quad (2.55)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, \tau], \quad \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) = 0; \quad \varphi^{(0)}: E^{n+1} \rightarrow E^{r(0)} \quad (2.56)$$

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0, u^0, \eta), \quad \eta \in [\tau, t_f^{\tau}], \quad \tau \in [t_1, t_N] \subset [t_0, t_f], \quad x(t) = x^0(t) \quad (2.57)$$

$$\varphi^{(f)}(x(t_f), t_f) = 0, \quad \varphi^{(f)}: E^{n+1} \rightarrow E^{r(f)}; \quad \varphi^{(f^0)}(x^0(t_f^{\tau}), t_f^{\tau}) = 0, \quad \varphi^{(f^0)}: E^{n+1} \rightarrow E^{r(f^0)} \quad (2.58)$$

$$x \in E^n, \quad x^0 \in E^n, \quad u \in \Omega \in E^m, \quad u^0 \in \Omega_0 \in E^{m_0} \quad (2.59)$$

де відносно  $S(\cdot)$ ,  $\varphi^{(0)}(\cdot)$ ,  $\varphi^{(f)}(\cdot)$ ,  $\varphi^{(f^0)}(\cdot)$ ,  $\Phi(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$ ,  $f^0(\cdot)$ ,  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f^0 / \partial x^0$  виконуються припущення, аналогічні тим, які були висунуто для відповідних функцій задачі (2.52) – (2.54);  $t_f$  – момент часу досягнення

системою (2.56) кінцевого різноманіття  $Q_f = \{(x(t_f), t_f) : \varphi^{(f)}(x(t_f), t_f) = 0\}$  за умови, що зміни динаміки її руху в інтервалі часу  $[t_1, t_N]$  не відбулося;  $t_f^\tau$  - момент часу досягнення кінцевого різноманіття  $Q_{f^0} = \{(x^0(t_f^\tau), t_f^\tau) : \varphi^{(f^0)}(x^0(t_f^\tau), t_f^\tau) = 0\}$  системою (2.57). За фізичним змістом задача (2.55) – (2.59) може інтерпретуватися як задача побудови оптимальної траєкторії динамічної системи з можливими відмовами в інтервалі часу  $[t_1, t_N]$ , що приводять до зміни динаміки руху цієї системи. При цьому, незважаючи на можливі відмови, динамічна система повинна виконувати основне або допоміжне завдання [11]. Вважаючи, що динаміка системи не зазнала змін в інтервалі часу  $[t_1, t_N]$ , або вона могла змінитися в кожен момент часу  $t_i \in [t_1, t_N]$ , приходимо до наступної допоміжної задачі векторної оптимізації [29, 30, 47]

$$I^w = \text{col}[I_0 \rightarrow \min, I_1 \rightarrow \min, \dots, I_N \rightarrow \min] \quad (2.60)$$

$$I_0 = S(x(t_0), t_0; x(t_1), t_1; x(t_N), t_N; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, \tau) d\tau \quad (2.61)$$

$$I_i = S(x(t_0), t_0; x(t_1), t_1; x(t_N), t_N; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_i} \Phi(x, u, \tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_f} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta \quad (i = \overline{1, N})$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_i], \quad \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) = \varphi^{(f)}(x(t_f), t_f) = 0; \quad (2.62)$$

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0, u^0, \eta), \quad \eta \in [t_i, t_f^i], \quad \varphi^{(f^0)}(x^0(t_f^i), t_f^i) = 0 \quad (2.63)$$

$$x \in E^n, \quad x^0 \in E^n, \quad u \in \Omega \in E^m, \quad u^0 \in \Omega^0 \in E^{m_0} \quad (2.64)$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N, \quad x(t_i) = x^0(t_i) \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.65)$$

де  $t_f^i$  – момент часу досягнення кінцевого різноманіття  $Q_{f^0}$  системою (2.63), що розпочала рух в момент часу  $t_i$ , яка відрізняється від задачі (2.55) – (2.59) тим, що умова, яка допускає нескінченно велику кількість

моментів часу зміни динаміки системи, замінено на менш жорстку умову, яка допускає кінцеве число точок  $t_i (i = \overline{1, N})$  зміни динаміки системи. Оскільки вимоги (2.60) – (2.65) менш жорсткі, ніж (2.55) – (2.59), то кожен допустимий процес  $x(t), u(t), x^0(\eta), u^0(\eta), t_0, t_f, t_1, t_N$  задачі (2.55) – (2.59) буде допустимим і в задачі (2.60) – (2.65) при довільно вибраних  $t_i (i = \overline{2, N-1})$  и  $t_{i-1} < t_i (i = \overline{1, N})$ .

Введемо поняття стійко-оптимального процесу і встановимо його ознаки, слідуючи роботі [11, п.15]. Процес  $x(t), u(t), x^0(\eta), u^0(\eta), t_0, t_f, t_1, t_N$  оптимальний для задачі (2.55) – (2.59) вважається стійко-оптимальним, якщо існує таке натуральне  $N_0$ , що для скінченної множини значень  $N > N_0$  допустимий процес  $x(\tau), u(\tau), x^0(\eta), u^0(\eta), T, t_0, t_f$ , де вектор  $T = (t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N)$ , який складено з фіксованих значень  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{N-1} < t_N$ , є оптимальним і в задачі (2.60) – (2.65). Зафіксуємо  $N > N_0$  і перейдемо до задачі оптимізації розгалуженої траєкторії, використовуючи принцип псевдорозгалуження траєкторії системи (2.63) в моменти часу  $t_i (i = \overline{1, N})$  від траєкторії системи (2.62), що переміщається з вихідного різноманіття  $Q_0 = \{x(t_0), t_0 : \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) = 0\}$  на кінцеве різноманіття  $Q_f$ . Принцип псевдорозгалуження траєкторії системи (2.63) в моменти часу  $t_i (i = \overline{1, N})$  від траєкторії системи (2.62) полягає у наступному.

Припустимо, що динаміка системи (2.62) зміниться в момент часу  $\tau = t_1$ . У цьому випадку траєкторія динамічної системи повинна складатися з двох ділянок, оптимально зістикованих між собою умовами стрибка [87]. В інтервалі  $[t_0, t_1]$  траєкторія задається рівнянням (2.62), а в інтервалі  $[t_1, t_f]$  - рівнянням (2.63).

Нехай при досягненні моменту часу  $t_1$  зміни динаміки системи не відбулося. Тоді траєкторія руху системи продовжує описуватися рівнянням (2.62) до наступного можливого моменту  $t_2$  зміни її динаміки і переходу до опису траєкторії руху системи рівнянням (2.63). Однак ділянка траєкторії в інтервалі часу  $[t_1, t_N]$  повинна оптимально підстикуватися в момент часу  $t_1$  до двох вище зазначених ділянок. Звідси виходить, що в момент часу  $t_1$  потрібно дотримуватися умови стрибка для систем, що переміщуються по розгалуженим траєкторіям [65, 66, 67], а не для розривних систем [11, 87].

Розмірковуючи аналогічним чином щодо умов стрибка траєкторій в моменти часу  $t_2, t_3$  і т.д. до  $t_N$ , приходимо до задачі оптимізації розгалуженої траєкторії з критерієм виду

$$\begin{aligned} \tilde{I} = v^N & \left[ S(x(t_0), t_0; x(t_1), t_1; x(t_N), t_N; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x, u, t) dt \right] + \\ & + \sum_{i=1}^N \left[ \mu_i^N \int_{t_i}^{t_f^i} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta + \xi_i^{NT} \varphi^{(f^0)}(x^0(t_f^i), t_f^i) \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Відповідно до п.1.4, для оптимального процесу  $\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), T, \hat{t}_0, t_f$  задачі (2.62) – (2.66) існують рішення  $\lambda^N(t), \lambda^N(t)$  спряжених векторних рівнянь

$$v_i^N \left[ \dot{\lambda}_i^{0N}(\eta) + \partial H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda_i^{0N}(\eta), \eta) / \partial \hat{x}^0(t) \right] = 0 \quad (2.67)$$

$$\mu_i^N \left[ \dot{\lambda}_i^{0N}(\eta) + \partial H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda^0(\eta), \eta) / \partial \hat{x}^0(\eta) \right] = 0 \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.68)$$

такі, що справедливі умови:

(1<sup>o</sup>) трансверсальності

$$\xi^N \left[ \partial S / \partial x(t_0) \Big|_{\wedge} + \lambda^N(\hat{t}_0) \right] + \partial \varphi^{(0)T} / \partial x(t_0) \Big|_{\wedge} \xi_0^N = 0, \quad (2.69)$$

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda^N(\hat{t}_0), \hat{t}_0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(0)T}}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} \xi_0^N = 0, \quad (2.70)$$

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} \Big|_{\wedge} - \lambda^N(\hat{t}_f) \right] + \frac{\partial \Phi^{(f)T}}{\partial x(t_f)} \Big|_{\wedge} \xi_f^N = 0,$$

$$\mu_i^N \lambda^{0N}(\hat{t}_f^i) + \frac{\partial \Phi^{(f^0)T}}{\partial x(t_f^i)} \Big|_{\wedge} \xi_i^N = 0, \quad (2.71)$$

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial t_f} \Big|_{\wedge} + H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda^N(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \Big|_{\wedge} \right] + \frac{\partial \Phi^{(f)T}}{\partial t_f} \Big|_{\wedge} \xi_f^N = 0,$$

$$\mu_i^N H^0(\hat{x}(\hat{t}_f^i), \hat{u}(\hat{t}_f^i), \lambda^N(\hat{t}_f^i), \hat{t}_f^i) + \frac{\partial \Phi^{(f^0)T}}{\partial x(t_f^i)} \Big|_{\wedge} \xi_i^N = 0, \quad (2.72)$$

(2°) стрибка:

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_1)} \Big|_{\wedge} + \lambda^N(t_1 + 0) - \lambda^N(t_1 - 0) \right] + \mu_i^N \lambda^{0N}(t_1 + 0) = 0, \quad (2.73)$$

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_N)} \Big|_{\wedge} + \lambda^N(t_N + 0) - \lambda^N(t_N - 0) \right] + \mu_N^N \lambda^{0N}(t_N + 0) = 0, \quad (2.74)$$

$$v^N \left[ \lambda^N(t_i + 0) - \lambda^N(t_i - 0) \right] + \mu_i^N \lambda^{0N}(t_i + 0) = 0, \quad (i = \overline{0, N}) \quad (2.75)$$

(3°) мінімуму гамільтоніану:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda^N(t), t) = \min_{u(t) \in \Omega, t \in [t_0, t_f]} H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda^N(t), t), \quad (2.76)$$

$$H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda^{0N}(\eta), \eta) = \min_{u^0(\eta) \in \Omega^0, \eta \in [t_0, t_f]} H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda^{0N}(\eta), \eta), \quad (2.77)$$

(4°) нетривіальності і невід'ємності:

$$v^N + \sum_{i=1}^N \mu_i^N = 1, \quad \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{fj}^N + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{r^{(f^0)}} \xi_{ij}^N = 1, \quad (2.78)$$

$$\xi_{0j}^N \geq 0 \quad (j = \overline{1, r^{(0)}}), \quad \xi_{fj}^N \geq 0 \quad (j = \overline{1, r^{(f)}}), \quad \mu_i^N \geq 0, \quad \xi_{ij}^N \geq 0 \quad (j = \overline{1, r^{(f^0)}}; i = \overline{1, N}).$$

де значок « $\wedge$ » означає оптимальні змінні і параметри,

$$H(x(t), u(t), t) = \Phi(x(t), u(t), t) + \lambda^{NT}(t) f(x(t), u(t), t),$$

$$H^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \eta) = \Phi^0(x^0(\eta), u^0(\eta), \eta) + \lambda^{0NT}(\eta) f(x^0(\eta), u^0(\eta), \eta).$$

Задамо на числовій осі ступінчасті функції  $\mu^N(\tau)$ ,  $\xi_j^N(\tau)$  ( $j = \overline{1, r^{(f^0)}}$ ) зі стрибками відповідно  $\mu_1^N, \dots, \mu_N^N$ ,  $\xi_{j1}^N, \dots, \xi_{jN}^N$  в точках  $t_1, \dots, t_N$ . При  $\tau < t_1$  покладемо  $\mu^N(\tau) = \xi_j^N(\tau) = 0$ . В інтервалі часу  $[t_1, t_N]$  спряжене рівняння (2.67) разом з умовою стрибка (2.74), (2.75) записується в рівносильній інтегральній формі, що містить інтеграл Стілтєса,

$$\begin{aligned} \lambda^N(\tau) = & v^N \int_{\tau}^{t_N} \partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda(t), t) / \partial x(t) dt + \int_{\tau}^{t_N} \lambda^{0N}(t) d\mu^N(t) + \\ & + v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t)} \Big|_{\lambda} + \lambda^N(t_N + 0) \right], \tau \in [t_1, t_N], \end{aligned} \quad (2.79)$$

де  $\lambda^N(t_N + 0)$  – знаходиться в результаті рішення рівняння (2.67) в інтервалі  $[t_N, t_f]$  при дотриманні граничних умов (2.71). При цьому умова стрибка (2.73) набуде вигляду

$$v^N \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_1)} \Big|_{\lambda} + \lambda^N(t_1 + 0) - \lambda^N(t_1 - 0) \right] = 0, \quad (2.80)$$

де  $\lambda^N(t_1 - 0)$  – отримаємо в результаті рішення рівняння (2.67) в інтервалі  $[t_0, t_1]$  при граничній умові (2.69).

Внаслідок умови (4°) функції  $\mu^N(\tau)$ ,  $\xi_j^N(\tau)$  невід'ємні, обмежені і мають обмежену варіацію. Зафіксуємо довільний відрізок  $J$  числової осі, що включає  $[t_1, t_N]$  разом з малою околицею і виберемо  $N > N_0$  так, щоб  $t_1, \dots, t_N$  залишалися точками неперервності керування  $u(t)$ . Із послідовності функцій  $\{\mu^N(t) : N > N_0\}$ ,  $\{\xi_j^N(t) : N > N_0\}$  можна виділити підпослідовності, які поточечно на  $J$  сходяться до граничних функцій  $\mu(t)$ ,  $\xi_j(t)$  [49], тобто,

$$\mu^N(t) \rightarrow \mu(t), \quad \xi_j^N(t) \rightarrow \xi_j(t), \quad \tau \in J. \quad (2.81)$$

Скаляр  $v^N$  та вектори  $\xi_0^N, \xi_f^N, N > N_0$  також обмежені в сукупності і тому послідовності  $\{v^N : N > N_0\}, \{\xi_0^N : N > N_0\}, \{\xi_f^N : N > N_0\}$  мають підпослідовності що сходяться, тобто  $v^N \rightarrow v, \xi_0^N \rightarrow \xi_0, \xi_f^N \rightarrow \xi_f$ . Варіації функції  $\mu(t)$  на  $J$  обмежені, отже, в інтегральному рівнянні типу Вольтерра [41]

$$\lambda(\tau) = v \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_N)} \Big|_{\wedge} + \lambda(t_N + 0) \right] + v \int_{\tau}^{t_N} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{\wedge} dt + \int_{\tau}^{t_N} \lambda^0(t) d\mu(t) \quad (2.82)$$

останній доданок має сенс. Рішення  $\lambda(\tau)$  цього рівняння існує в класі функцій обмеженої варіації і при цьому єдине [41]. В силу (2.81), рішення  $\lambda^N(\tau)$  рівняння (2.79) в кожній точці  $\tau \in J$  сходяться до рішення  $\lambda(\tau)$  рівняння (2.82). При цьому функція  $\mu(t)$  як границя (2.81) неспадної невід'ємної функції сама є неспадною невід'ємною на  $J$  функцією і, отже, може розглядатися як міра. Переходячи до границі по  $N$  ( $N \rightarrow \infty, \max(t_{i-1} - t_i) \rightarrow 0$ ) в співвідношеннях (2.67) – (2.72), (2.76) – (2.78), (2.80), з урахуванням усього викладеного вище, отримаємо наступний результат.

Теорема 2.2. Нехай  $\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \hat{t}_0, t_f, \hat{t}_0, \hat{t}_N$  – стійко-оптимальний процес задачі (2.55) – (2.59). Тоді існують невід'ємні числа  $\xi_{0j} (j = \overline{1, r^{(0)}}), \xi_{jf} (j = \overline{1, r^{(f)}}), v^N(\tau)$  і невід'ємні міри  $\mu(t), \xi_j(t) (j = \overline{1, r^{(j^0)}})$  обмеженої варіації, зосереджені на множині  $M = \{t : t \in [t_1, t_N]\}$ , векторна функція  $\lambda(\tau)$  обмеженої варіації, що є рішенням інтегрального рівняння (2.82) для  $\tau \in [t_1, t_N]$  і звичайного диференціального рівняння

$$\dot{\lambda}(t) = -\partial H / \partial x \Big|_{\wedge}$$

для  $t \in [t_0, t_f] \setminus [t_1, t_N]$  і векторна функція  $\lambda^0(\eta)$  обмеженої варіації, що є рішенням рівняння

$$\dot{\lambda}^0(\eta) = -\partial H^0 / \partial x^0 \Big|_{\wedge}, \eta \in [\tau, \tau_f^*],$$

таких, що справедливі умови:

(1°) трансверсальності:

$$\begin{aligned}
 & v \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_0)} \Big|_{\wedge} + \lambda(\hat{t}_0) \right] + \frac{\partial \Phi^{(0)T}}{\partial x(t_0)} \Big|_{\wedge} \xi_0 = 0, \\
 & v \left[ \frac{\partial S}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda(\hat{t}_0), \hat{t}_0) \right] + \frac{\partial \Phi^{(0)T}}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} \xi_0 = 0, \\
 & v \left[ \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} \Big|_{\wedge} - \lambda(\hat{t}_f) \right] + \frac{\partial \Phi^{(f)T}}{\partial x(t_f)} \Big|_{\wedge} \xi_f = 0, \\
 & \lambda^0(\hat{t}_f^{\tau}) d\mu(\tau) + \frac{\partial \Phi^{(f^0)T}}{\partial x(t_f^{\tau})} \Big|_{\wedge} d\xi(\tau) = 0, \\
 & v \left[ \frac{\partial S}{\partial t_f} \Big|_{\wedge} + H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \right] + \frac{\partial \Phi^{(f)T}}{\partial t^0} \Big|_{\wedge} \xi_f = 0, \\
 & d\mu(\tau) H^0(\hat{x}^0(\hat{t}_f^{\tau}), \hat{u}^0(\hat{t}_f^{\tau}), \lambda(\hat{t}_f^{\tau}), \hat{t}_f^{\tau}) + d\xi^T(\tau) \frac{\partial \Phi^{(f^0)}}{\partial t_f^{\tau}} \Big|_{\wedge},
 \end{aligned}$$

(2°) стрибка:

$$\frac{\partial S}{\partial x(t_i)} \Big|_{\wedge} + \lambda(t_i + 0) - \lambda(t_i - 0) = 0,$$

(3°) мінімуму гамільтоніанів:

$$\begin{aligned}
 H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda(t), t) &= \min_{u(t) \in \Omega} H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \lambda(t), t) \\
 H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda_{\tau}^0(\eta), \eta) &= \min_{u^0(\eta) \in \tilde{\Omega}} H^0(\hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta), \lambda_{\tau}^0(\eta), \eta)
 \end{aligned}$$

(4°) нетривіальності:

$$v + \int_{t_i}^{t_N} d\mu(t) = 1, \quad \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0,j} + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{f,j} + \int_{t_i}^{t_N} \sum_{j=1}^{r^{(f^0)}} d\xi_j(t) = 1.$$

## 2.4. Оптимальна траєкторія руху складеної динамічної системи з поточним моментом розділення

У розділі 1 отримано необхідні умови оптимальності розгалуженої траєкторії, по якій переміщається СДС для випадків фіксованого і вільного моментів часу розділення СДС на підсистеми. Задача істотно ускладнюється, якщо потрібно синтезувати траєкторію руху СДС в припущенні, що поділ може відбутися в кожен поточний момент часу  $t \in [t_1', t_1'']$  [124].

Сформулюємо задачу та розглянемо спосіб її вирішення для найпростішої СДС, що складається з двох підсистем. Як було зазначено в розділі 1, траєкторія такої СДС (рис.2. 1) відноситься до класу розгалужених траєкторій і складається з трьох ділянок: (0, 1) – ділянка спільного руху СДС; (1, 11), (1, 12) – ділянки руху підсистем після розділення.

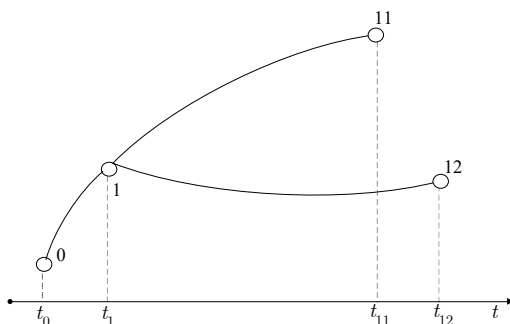


Рис. 2. 1. Приклад схеми розгалуження траєкторії руху СДС: (0, 1) – ділянка спільного руху СДС; (1, 11), (1, 12) – ділянки руху підсистем після розділення.

Векторні функції і змінні, що описують динаміку руху СДС на ділянках (0,1), (1,1*i*),  $i=1,2$  будемо позначати відповідно, індексами 1, 11,

12, що стоять зліва внизу, а скалярні функції і змінні – тими ж індексами, але що стоять праворуч внизу.

Розглянемо наступну математичну постановку задачі. Складена динамічна система, динаміка руху якої описується рівнянням

$${}_1\dot{x} = {}_1f({}_1x, {}_1u, t), \quad t \in [t_0, \tau], \quad (2.83)$$

де  ${}_1x$  – вектор стану,  ${}_1u$  – вектор керування,  $\tau \in [t'_1, t''_1]$ , починає свій рух з різноманіття

$$Q_0 = \{({}_1x(t_0), t_0) : \varphi_1^{(0)}({}_1x(t_0), t_0) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, l = \overline{1, r_0^{(0)}}; \\ = 0, l = \overline{r_0^{(0)} + 1, r^{(0)}}; \end{array} \right. \}, \quad (2.84)$$

де  $r^{(0)} - r_0^{(0)} < n + 1$ ,  $Q_0$  – обмеження на початкові значення фазових координат.

У будь-який момент часу  $\tau \in [t'_1, t''_1]$  ( $t_0 < t'_1$ ), де  $t'_1$  і  $t''_1$  задаються умови

$$Q'_1 = \{({}_1x(t'_1), t'_1) : \varphi_1^{(1)}({}_1x(t'_1), t'_1) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, l = \overline{1, r_1^{(1)}}; \\ = 0, l = \overline{r_1^{(1)} + 1, r^{(1)}}; \end{array} \right. \},$$

$$Q''_1 = \{({}_1x(t''_1), t''_1) : \varphi_1^{(1'')}({}_1x(t''_1), t''_1) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, l = \overline{1, r_1^{(1'')}}; \\ = 0, l = \overline{r_1^{(1'')} + 1, r^{(1'')}}; \end{array} \right. \},$$

на різноманітті

$$Q_1 = \{({}_1x(\tau), \tau) : \varphi_1^{(1)}({}_1x(\tau), \tau) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, l = \overline{1, r_1^{(1)}}; \\ = 0, l = \overline{r_1^{(1)} + 1, r^{(1)}}; \end{array} \right. \}, \quad (2.85)$$

де  $r^{(1)} - r_1^{(1)} < n + 1$ ,  $r^{(1')} - r_1^{(1')} < n + 1$ ,  $r^{(1'')} - r_1^{(1'')} < n + 1$ ;  $Q'_1, Q''_1, Q_1$  – обмеження на значення фазових координат відповідно в моменти часу  $t'_1, t''_1, \tau$ ,  $\tau \in [t'_1, t''_1]$ , складена динамічна система може розділитися на дві підсистеми

$${}_i\dot{x} = {}_i f({}_i x, {}_i u, \eta), \quad \eta \in [\tau, t_i^*], \quad {}_i x \in E^n, \quad {}_i u \in \Omega_i \subset E^{m_i} \quad (i=1,2), \quad (2.86)$$

Підсистеми що відділилися повинні досягти кінцевих різноманіть

$$Q_{li} = \left\{ ({}_1x(t_{li}^\tau), t_{li}^\tau) : \varphi_1^{(li)} \begin{cases} \leq 0, l = \overline{1, r^{(li)}}; \\ = 0, l = \overline{r^{(li)} + 1, r^{(li)}}; \end{cases} \right\}, \quad (2.87)$$

в нефіксовані моменти часу відповідно  $t_{li}^0$  ( $i = 1, 2$ ).

У момент часу розділення СДС фазові координати підсистем зв'язані співвідношеннями

$${}_1x_p(\tau) = {}_{1i}x_p(\tau) \quad (p = \overline{1, n-1}) \quad (2.88)$$

$${}_{1i}x_n(\tau) = \xi_{ii} {}_1x_n(\tau) \quad (i = 1, 2) \quad (2.89)$$

де  $\xi_{11} + \xi_{12} = 1$ ,  $n$ -а фазова координата що описує в механічних СДС зміну маси. Завдання полягає в знаходженні такого процесу.  ${}_1x(t)$ ,  ${}_1u(t)$ ,  ${}_{1i}x(\eta)$ ,  ${}_{1i}u(\eta)$ ,  $t_0$ ,  $t_{li}^0$  ( $i = 1, 2$ ), який би мінімізував критерій

$$I = I_1 + I_{11} + I_{12} \rightarrow \min \quad (2.90)$$

де

$$I_1 = S_1({}_1x(t_0), t_0; {}_1x(t_1), {}_1x(t_1^n)) + \int_{t_0}^t \Phi_1(x_1, u_1, t) dt. \quad (2.91)$$

$$I_{li} = S_{li}({}_{1i}x(t_{li}^\tau), t_{li}^\tau) + \int_{\tau}^{t_{li}^\tau} \Phi_{li}({}_{1i}x, {}_{1i}u, \eta) d\eta \quad (i = 1, 2) \quad (2.92)$$

за умови, що розділення СДС може відбутися в кожен момент часу  $\tau \in [t_1', t_1^n]$ .

У виразах (2.90)–(2.92) скалярні функції

$S_1({}_1x(t_0), t_0; {}_1x(t_1'), {}_1x(t_1^n))$ ,  $S_{li}({}_{1i}x(t_{li}^\tau), t_{li}^\tau)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi_l^{(0)}({}_1x(t_0), t_0)$  ( $l = \overline{1, r^{(0)}}$ ),  $\varphi_l^{(r')}({}_1x(t_1'), t_1')$  ( $l = \overline{1, r^{(r')}}$ ),  $\varphi_l^{(r'')}({}_1x(t_1''), t_1'')$  ( $l = \overline{1, r^{(r'')}}$ ),  $\varphi_l^{(l)}({}_1x(\tau), \tau)$  ( $l = \overline{1, r^{(l)}}$ ),  $\varphi_l^{(li)}({}_{1i}x(t_{li}^\tau), t_{li}^\tau)$  ( $i = 1, 2; l = \overline{1, r^{(li)}}$ ) – мають неперервні перші похідні за всіма своїми аргументами;  ${}_a f({}_a x, {}_a u, t)$  – неперервне разом з матрицею

$\partial_{\alpha} f / \partial_{\alpha} x$  відображення  $E^n \times \Omega_{\alpha} \times E^l \rightarrow E^n$ ;  $\Phi_{\alpha}(\alpha x, \alpha u, t)$  – неперервне разом з матрицею  $\partial \Phi_{\alpha} / \partial_{\alpha} x$  відображення  $E^n \times \Omega_{\alpha} \times E^l$  ( $\alpha = 1, 11, 12$ ).

Методика рішення задачі (2.83) – (2.92) полягає в наступному. Розглядається допоміжна задача з кінцевою множиною значень можливих моментів часу відділення підсистем, складається векторний критерій оптимізації, здійснюється приведення векторного критерію до адитивної форми з використанням принципу псевдо розгалуження траєкторії СДС, і, нарешті, через граничний перехід шукається рішення вихідної задачі.

Вважаючи, що розділення СДС на підсистеми сталося в один з моментів часу  $t_1^{(j)} \in [t_1', t_1'']$  ( $j = \overline{1, N}$ ) приходимо до наступної допоміжної задачі векторної оптимізації

$$I^w = \text{col}[I^{(1)} \rightarrow \min, I^{(2)} \rightarrow \min, \dots, I^{(N)} \rightarrow \min] \quad (2.93)$$

$$I^{(j)} = I_1^{(j)} + I_{11}^{(j)} + I_{12}^{(j)} \quad (2.94)$$

$$I_1^{(j)} = S_1(1x(t_0), t_0; 1x(t_1'), 1x(t_1'')) + \int_{t_0}^{t_1^{(j)}} \Phi_1(1x, 1u, t) dt \quad (2.95)$$

$$I_{li}^{(j)} = S_{li}(li x(t_{li}^{(j)}), t_{li}^{(j)}) + \int_{t_{li}^{(j)}}^{t_{li}^{(j)}} \Phi_{li}(li x, li u, \eta) d\eta \quad (i = 1, 2) \quad (2.96)$$

$$1\dot{x} = 1f(1x, 1u, t), t \in [t_0, t_1^{(j)}], \quad (2.97)$$

$$li\dot{x} = li f(li x, li u, \eta), \eta \in [t_1^{(j)}, t_{li}^{(j)}], \quad (2.98)$$

$$1x \in E^n, li x \in E^n, 1u \in \Omega_l \subset E^{m_l}, li u \in \Omega_{li} \subset E^{m_{li}} \quad (i = 1, 2) \quad (2.99)$$

$$1x_p(t_1^{(j)}) = li x_p(t_1^{(j)}) \quad (p = \overline{1, n-1}), li x_n(t_1^{(j)}) = \xi_{li} 1x_n(t_1^{(j)}),$$

$$\xi_{li} \geq 0 \quad (i = 1, 2), \xi_{11} + \xi_{12} = 1 \quad (2.100)$$

$$(1x(t_0), t_0) \in Q_0, (1x(t_1^{(j)}), t_1^{(j)}) \in Q_1, (1x(t_1'), t_1') \in Q_1',$$

$$(1x(t_1''), t_1'') \in Q_1'', \quad (2.101)$$

$$(\mathbf{x}(t_i^{(j)}), t_i^{(j)}) \in Q_{li} \quad (i=1,2; j=\overline{1,N}) \quad (2.102)$$

$$t_0 < t_1' = t_1^{(1)} < \dots < t_1^{(N)} = t_1'', \theta = (t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_1^{(N)}) \quad (2.103)$$

де  $t_i^{(j)}$  – момент часу досягнення кінцевого різноманіття  $Q_{li}$  системою (2.98), що розпочала рух в момент часу  $t_i^{(j)}$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ).

Принцип псевдорозгалуження траєкторії СДС полягає в наступному. Припустимо, що розділення СДС на підсистеми має відбутися в момент часу  $t = t_1^{(1)}$ . У цьому випадку траєкторія СДС складається з трьох ділянок (рис. 2. 2), оптимально зшитих між собою умовами стрибка, викладеними в розділі 1.

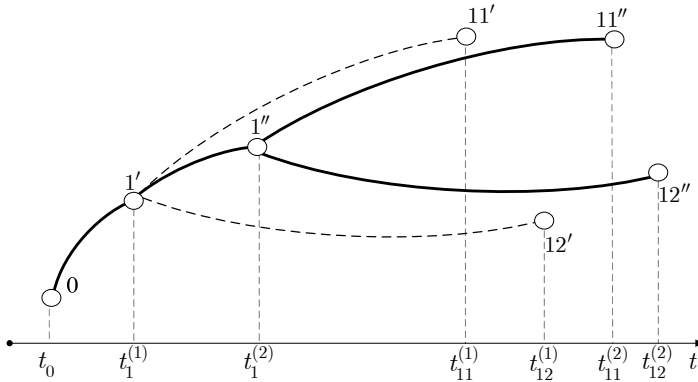


Рис. 2. 2. Схема розгалуження траєкторії руху СДС з поточним моментом розділення

Однак, якщо в момент  $t_1^{(1)}$  сигнал на розділення не надійде, то СДС в об'єднаному стані повинна продовжити рух до наступного можливого моменту часу розділення  $t_1^{(2)}$ .

Таким чином, в момент часу  $t_1^{(1)}$  необхідно оптимально зшивати не три, а чотири траєкторії, з яких одна зліва від  $t_1^{(1)}$ , що являє собою траєкторію руху підсистем в об'єднаному стані ( $0-1'$ ), і три траєкторії

праворуч від  $t_1^{(1)}$ : дві псевдотраєкторії, по яких могли б переміщатися підсистеми в відділеному стані ( $1'-11'$ ,  $1'-12'$ ) і одна траєкторія підсистем, що здійснюють рух в об'єднаному стані ( $1'-1''$ ). Міркуючи аналогічним чином щодо моментів часу  $t_1^{(2)}, t_1^{(3)}, \dots, t_1^{(N)}$ , приходимо до задачі оптимізації розгалуженої траєкторії (підрозділ 1.4), яка в даному випадку полягає у наступному:

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & v^N I_1^{(N)} + \varphi^{(0)T} \zeta_0^N + \varphi^{(1)T} \zeta_1^N + \varphi^{(1')T} \zeta_{1'}^N + \sum_{j=1}^N \{ \mu_j^N [I_{11}^{(j)} + I_{12}^{(j)}] + \\ & \varphi^{(1)T} \zeta_{1i}^{N(j)} + \varphi^{(1i)T} \zeta_{1i}^{N(j)} \} \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2.104)$$

де  $v^N, \zeta_{1i}^N, \mu_j^N$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ),

$$v^N \geq 0, \mu_j^N \geq 0 \quad (j=\overline{1,N}), \quad (2.105)$$

$$\varphi^{(0)T} = \{ \varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_{r^{(0)}}^{(0)} \}, \zeta_0^{NT} = \{ \zeta_{01}^N, \dots, \zeta_{0r^{(0)}}^N \}, \quad (2.106)$$

$$\varphi^{(1)T} = \{ \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_{r^{(1)}}^{(1)} \}, \zeta_{1'}^{NT} = \{ \zeta_{1'1}^N, \dots, \zeta_{1'r^{(1)'}}^N \}, \quad (2.107)$$

$$\varphi^{(1')T} = \{ \varphi_1^{(1')}, \dots, \varphi_{r^{(1')}}^{(1')} \}, \zeta_{1'}^{NT} = \{ \zeta_{1'1}^N, \dots, \zeta_{1'r^{(1')}}^N \}, \quad (2.108)$$

$$\varphi^{(1i)T} = \{ \varphi_1^{(1i)}, \dots, \varphi_{r^{(1i)}}^{(1i)} \}, \zeta_{1i}^{NT} = \{ \zeta_{1i1}^N, \dots, \zeta_{1i r^{(1i)}}^N \}, \quad (2.109)$$

$$\varphi^{(1i)T} = \{ \varphi_1^{(1i)}, \dots, \varphi_{r^{(1i)}}^{(1i)} \}, \zeta_{1i}^{NT} = \{ \zeta_{1i1}^N, \dots, \zeta_{1i r^{(1i)}}^N \}, \quad (2.110)$$

$$\zeta_{0l}^N \geq 0 \quad (l=\overline{1, r^{(0)}}), \zeta_{1'l}^N \geq 0 \quad (l=\overline{1, r^{(1')}}), \zeta_{1'l}^N \geq 0 \quad (l=\overline{1, r^{(1')}}), \quad (2.111)$$

$$\zeta_{1i l}^N \geq 0 \quad (l=\overline{1, r^{(1i)}}), \zeta_{1i l}^N \geq 0 \quad (i=1,2; l=\overline{1, r^{(1i)}}), \quad (2.112)$$

з урахуванням співвідношень (2.97) - (2.103).

Оскільки вимога задачі (2.83) - (2.90) щодо оптимальності умов розділення в кожен поточний момент часу більш жорстка, ніж вимога задачі (2.97) - (2.104), де оптимальні умови повинні дотримуватися в кінцевому числі моментів часу відділення підсистем, то кожен допустимий

процес  ${}_1x(t), {}_1u(t), {}_{1i}x(\eta), {}_{1i}u(\eta), t_0, \eta, t_i^{(j)}$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ) задачі (2.83)-(2.90) буде допустимим і в задачі (2.97) - (2.104) при довільно вибраних моментах часу  $t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < \dots < t_1^{(N)}$ .

Оптимальний процес  ${}_1x(t), {}_1u(t), {}_{1i}x(\eta), {}_{1i}u(\eta), t_0, \eta, t_i^{(j)}$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ) задачі (2.83)–(2.90) назвемо стійко-оптимальним, якщо знайдеться таке натуральне  $N_0$ , що для кінцевої множини значень  $N > N_0$  і рівновіддалених точок  $t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < \dots < t_1^{(N)}$  допустимий процес  ${}_1x(t), {}_1u(t), {}_{1i}x(\eta), {}_{1i}u(\eta), t_0, \eta, t_i^{(j)}$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ) буде оптимальним і в задачі (2.97) – (2.104).

Установимо ознаки стійко-оптимального процесу і одночасно отримаємо рішення вихідної задачі, виконавши в необхідних умовах оптимальності для задачі (2.97) – (2.104) граничний по  $N$  перехід.

Відповідно до принципу мінімуму (підрозділ 1.4) для оптимального процесу  ${}_1x(t), {}_1u(t), {}_{1i}x(\eta), {}_{1i}u(\eta), t_0, \eta, t_i^{(j)}$  ( $i=1,2; j=\overline{1,N}$ ) задачі (2.97)-(2.104) існують множники Лагранжа  $\zeta_0^N, \zeta_r^N, \zeta_r^N, \zeta_1^{N(j)}, \zeta_{1i}^{N(j)}$  ( $i=1,2$ ) і рішення  ${}_1\lambda^N(t), {}_{1i}\lambda^N(\eta)$  ( $i=1,2$ ) векторних спряжених рівнянь

$$v^N \left[ {}_1\dot{\lambda}^N(t) + \partial H_1 / \partial x \Big|_{\wedge} \right] = 0, \quad (2.113)$$

$$\mu_j^N \left[ {}_{1i}\dot{\lambda}^N(\eta) + \partial H_{1i} / \partial x \Big|_{\wedge} \right] = 0 \quad (i=1,2; j=\overline{1,N}), \quad (2.114)$$

такі, що справедливі умови:

(1°) трансверсальності:

$$v^N \left[ \frac{\partial S_1}{\partial {}_1x(t_0)} \Big|_{\wedge} + {}_1\lambda^N(\hat{t}_0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(0)T}}{\partial {}_1x(t_0)} \Big|_{\wedge} \zeta_0^N = 0, \quad (2.115)$$

$$v^N \left[ \frac{\partial S_1}{\partial t_0} - H_1 \Big|_{\wedge} \right] + \frac{\partial \varphi^{(0)T}}{\partial t_0} \Big|_{\wedge} \zeta_0^N = 0, \quad (2.116)$$

$$\mu_j^N \left[ \frac{\partial S_{li}}{\partial {}_1 x(t_{li}^{(j)})} \Big|_{\wedge} - {}_{li} \lambda^N(\hat{t}_{li}^{(j)}) \right] + \frac{\partial \varphi^{(li)T}}{\partial {}_1 x(t_{li}^{(j)})} \Big|_{\wedge} \zeta_{li}^{N(j)} = 0, \quad (2.117)$$

$$\mu_j^N \left[ \frac{\partial S_{li}}{\partial t_{li}^{(j)}} + H_{li} \Big|_{\wedge} \right] + \frac{\partial \varphi^{(li)T}}{\partial t_{li}^{(j)}} \Big|_{\wedge} = 0, \quad (2.118)$$

(2°) стрібка:

$$\begin{aligned} v^N \left[ \frac{\partial S_1}{\partial {}_1 x_p(t'_1)} \Big|_{\wedge} - {}_1 \lambda_p^N(t'_1 - 0) + {}_1 \lambda_p^N(t'_1 + 0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial {}_1 x_p(t'_1)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1'}^N + \\ + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial {}_1 x_p(t'_1)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1'}^{N(1)} + \mu_1^N \sum_{i=1}^2 \rho(\xi_{1i}, p) {}_{1i} \lambda_p^N(\hat{t}'_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial (t'_1)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1'}^N + v^N \left[ H_1 \Big|_{\wedge, t'_1 - 0} - H_1 \Big|_{\wedge, t'_1 + 0} \right] - \mu_1^N \sum_{i=1}^2 H_{1i} \Big|_{\wedge} = 0, \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} v^N \left[ \frac{\partial S_1}{\partial {}_1 x_p(t''_1)} \Big|_{\wedge} - {}_1 \lambda_p^N(t''_1 - 0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial {}_1 x_p(t''_1)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1''}^N + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial {}_1 x_p(t''_1)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1''}^{N(N)} + \\ + \mu_N^N \sum_{i=1}^2 \rho(\xi_{1i}, p) {}_{1i} \lambda_p^N(\hat{t}''_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial t''_1} \Big|_{\wedge} \zeta_{1''}^N + v^N H_1 \Big|_{\wedge} - \mu_N^N \sum_{i=1}^2 H_{1i} \Big|_{\wedge} = 0, \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} v^N \left[ {}_1 \lambda_p^N(t_1^{(j)} + 0) - {}_1 \lambda_p^N(t_1^{(j)} - 0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial {}_1 x_p(t_1^{(j)})} \Big|_{\wedge} \zeta_{1'}^{N(j)} + \\ + \mu_j^N \sum_{i=1}^2 \rho(\xi_{1i}, p) {}_{1i} \lambda_p^N(t_1^{(j)}) = 0, \end{aligned} \quad (2.123)$$

(3°) мінімуму гамільтоніанів:

$$H_1({}_1 \hat{x}(t), {}_1 \hat{u}(t), {}_1 \lambda^N(t), t) = \min_{\substack{{}_1 u(t) \in \Omega_1, t \in [t_0, t'_1]}} H_1({}_1 \hat{x}(t), {}_1 \hat{u}(t), {}_1 \lambda^N(t), t), \quad (2.124)$$

$$H_{1i}({}_1 \hat{x}(\eta), {}_{1i} \hat{u}(\eta), {}_{1i} \lambda^N(\eta), \eta) = \min_{\substack{{}_1 u(\eta) \in \Omega_{1i}, \eta \in [t_1^{(i)}, t_1^{(i+1)}]}} H_{1i}({}_1 \hat{x}(\eta), {}_{1i} \hat{u}(\eta), {}_{1i} \lambda^N(\eta), \eta) \quad (i=1, 2), \quad (2.125)$$

(4°) нетривіальності, невід'ємності, доповнюючої нежорсткості:

$$v^N + \sum_{i=1}^{r^{(0)}} \zeta_{0l}^N + \sum_{i=1}^{r^{(l)}} \zeta_{l'}^N + \sum_{i=1}^{r^{(i')}} \zeta_{l''}^N + \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^{r^{(l)}} \zeta_{il}^{N(j)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r^{(li)}} \zeta_{li}^{N(j)} + \mu_j^N \right] = 1 \quad (2.126)$$

$$\zeta_{0l}^N \geq 0 \quad (l = \overline{1, r^{(0)}}), \zeta_{l'l}^N \geq 0 \quad (l = \overline{1, r^{(l')}}), \zeta_{l''l}^N \geq 0 \quad (l = \overline{1, r^{(l'')}}), \quad (2.127)$$

$$\zeta_{li}^{N(i)} \geq 0 \quad (l = \overline{1, r^{(li)}}), \zeta_{lil}^N \geq 0 \quad (l = \overline{1, r^{(li)}}), (i = 1, 2) \quad (2.128)$$

$$\varphi_l^{(0)} \zeta_{0l}^N = 0, l = \overline{1, r_0^{(0)}}; \varphi_l^{(l')} \zeta_{l'l}^N = 0, l = \overline{1, r^{(l')}}; \varphi_l^{(l'')} \zeta_{l''l}^N = 0, l = \overline{1, r^{(l'')}}; \quad (2.129)$$

$$\varphi_l^{(i)} \zeta_{li}^{N(j)} = 0, l = \overline{1, r^{(l)}}; \varphi_l^{(li)} \zeta_{lil}^{N(j)} = 0 \quad (l = \overline{1, r^{(li)}}), l = \overline{1, r^{(li)}}, \quad (2.130)$$

де значок « $\wedge$ » означає оптимальні значення змінних і параметрів,

$$H_q(\underset{q}{x}, \underset{q}{u}, \underset{q}{\lambda}, t) = \Phi_q(\underset{q}{x}, \underset{q}{u}, t) + \underset{q}{\lambda} \lambda^{NT}(t) \underset{q}{f}(\underset{q}{x}, \underset{q}{u}, t), \quad q = 1, 11, 12$$

$$\rho(\xi_{li}, p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \overline{n-1}; \\ \xi_{li}, & p = n, i = 1, 2. \end{cases}$$

Задамо на числовій осі ступінчасті функції  $\mu^N(t)$ ,  $\zeta_{li}^N(t)$  ( $l = \overline{1, r^{(l)}}$ ),  $\zeta_{lil}^N(t)$  ( $i = 1, 2; l = \overline{1, r^{(li)}}$ ) зі стрибками відповідно  $\mu_1^N(t), \dots, \mu_n^N$ ;  $\zeta_{li}^{N(1)}, \dots, \zeta_{li}^{N(n)}$ ;  $\zeta_{lil}^{N(1)}, \dots, \zeta_{lil}^{N(n)}$  ( $i = 1, 2$ ) в точках  $t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(N)}$ . При  $t < t_1^{(1)}$  покладемо  $\mu^N(t) = \zeta_{li}^N(t) = \zeta_{lil}^N(t) = 0$ . В інтервалі часу  $[t_1^{(1)}, t_1^{(N)}]$  спряжене рівняння (2.113) разом з умовою стрибка (2.121), (2.123) можуть бути представлені в рівносильній інтегральній формі, що містить інтеграл Стілтєсса [22]

$$v_{1-p}^N \lambda_p^N(\tau) = v^N \int_{\tau}^{t_1^*} \frac{\partial H_1}{\partial_1 x_p} \Big|_{\lambda} dt + \int_{\tau}^{t_1^*} \sum_{i=1}^2 \rho(\xi_{li}, p) \zeta_{li}^N(t) d\mu^N(t) + \int_{\tau}^{t_1^*} \frac{\partial \Phi^{(1)T}}{\partial_1 x_p} \Big|_{\lambda} d\zeta_{li}^N(t) + v^N \frac{\partial S_1}{\partial_1 x_p(t_1^*)} \Big|_{\lambda} + \frac{\partial \Phi^{(1)T}}{\partial_1 x_p(t_1^*)} \Big|_{\lambda} \zeta_{l'}^N, \quad (2.131)$$

де  $\lambda_p^N(t)$  ( $i = 1, 2$ ) знаходиться в результаті рішення рівнянь (2.98), (2.114) при граничних умовах (2.100) – (2.103), (2.117), (2.118), (2.120), (2.122). При цьому умова стрибка для  $t = t_1^*$  набуде вигляду:

$$v^N \left[ \frac{\partial S_1}{\partial_1 x(t'_1)} \Big|_{\lambda} - {}_1\lambda^N(t'_1 - 0) + {}_1\lambda^N(t'_1 + 0) \right] + \frac{\partial \varphi^{(1)T}}{\partial_1 x(t'_1)} \Big|_{\lambda} \zeta_{r'}^N = 0, \quad (2.132)$$

де  ${}_1\lambda^N(t_1 - 0)$  – знаходиться в результаті рішення рівняння (2.113) в інтервалі часу  $[t_0, t'_1]$  при дотриманні граничних умов (2.115), (2.116), а  ${}_1\lambda^N(t_1 + 0)$  із рівняння (2.131) при  $\tau = t'_1$ .

Внаслідок умов (2.105) та (2.126)-(2.128) функції  $\mu^N(t)$ ,  $\zeta_{il}^N(t)$  ( $l = \overline{1, r^{(l)}}$ ),  $\zeta_{iil}^N(t)$  ( $i = 1, 2; l = \overline{1, r^{(li)}}$ ) невід'ємні і мають обмежену варіацію. Зафіксуємо довільний відрізок  $J$  числової осі, що включає  $[t_1^{(1)}, t_1^{(N)}]$  разом з малою околицею і виберемо  $N > N_0$  так, щоб  $t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(N)}$  залишалися точками неперервності керування  ${}_1u(t)$ . Із послідовності функцій  $\{\mu^N(t) : N > N_0\}$ ,  $\{\zeta_{11}^N(t) : N > N_0\}$ , ( $l = \overline{1, r^{(l)}}$ ),  $\{\zeta_{iil}^N(t) : N > N_0\}$ , ( $i = 1, 2; l = \overline{1, r^{(li)}}$ ) можна виділити підпослідовності, які поточечно на  $J$  сходяться до граничних функцій, тобто

$$\mu^N(t) \rightarrow \mu(t), \quad \zeta_{il}^N(t) \rightarrow \zeta_{il}(t) \quad (l = \overline{1, r^{(l)}}) \quad (2.133)$$

$$\zeta_{iil}^N(t) \rightarrow \zeta_{iil}(t) \quad (i = 1, 2; l = \overline{1, r^{(li)}}), \quad t \in J.$$

Скаляри  $v^N$ ,  $\zeta_{r'l}^N$  ( $l = \overline{1, r^{(r'l)}}$ ),  $\zeta_{r'l}^N$  ( $l = \overline{1, r^{(r'l)}}$ ),  $N > N_0$  також обмежені і тому послідовності  $\{v^N : N > N_0\}$ ,  $\{\zeta_{r'l}^N : N > N_0\}$  ( $l = \overline{1, r^{(r'l)}}$ ),  $\{\zeta_{r'l}^N : N > N_0\}$  ( $l = \overline{1, r^{(r'l)}}$ ) мають підпослідовності що сходяться, тобто

$$v^N \rightarrow v, \quad \zeta_{r'l}^N \rightarrow \zeta_{r'l}^N \quad (l = \overline{1, r^{(r'l)}}), \quad \zeta_{r'l}^N \rightarrow \zeta_{r'l}^N \quad (l = \overline{1, r^{(r'l)}}) \quad (2.134)$$

Варіації функції  $\mu(t)$ ,  $\zeta_{il}(t)$  ( $l = \overline{1, r^{(l)}}$ ) на  $J$  обмежені, а отже, в інтегральному рівнянні типу Вольтерра [41]

$$\begin{aligned}
v_1 \lambda_p(t) = & v \frac{\partial S_1}{\partial_1 x_p(t_1^*)} \Big|_{\wedge} + \frac{\partial \varphi^{(1)r}}{\partial_1 x_p(t_1^*)} \Big|_{\wedge} \zeta_{1r} + v \int_{\tau}^{t_1^*} \frac{\partial H_1}{\partial_1 x_p} \Big|_{\wedge} dt + \\
& + \int_{\tau}^{t_1^*} \left[ \sum_{i=1}^2 \rho(\xi_{1i}, p) {}_{1i} \lambda_p(t) d\mu(t) + \frac{\partial \varphi^{(1)r}}{\partial_1 x_p} \Big|_{\wedge} d\zeta_{1r}(t) \right], (p = \overline{1, n})
\end{aligned} \tag{2.135}$$

останній доданок має сенс. Рішення  ${}_1 \lambda(\tau)$  цього рівняння існує в класі функцій обмеженої варіації і при цьому єдине [41]. В силу (2.133) рішення  ${}_1 \lambda(\tau)$  рівняння (2.131) в кожній точці  $\tau \in J$  сходяться до рішення  ${}_1 \lambda(\tau)$  рівняння (2.115). При цьому функції  $\mu(t)$ ,  $\zeta_{1l}(t)$  ( $l = \overline{1, r^{(1)}}$ ) як границі (2.133) неспадних невід'ємних функцій самі є неспадними невід'ємними на  $J$  функціями отже, може розглядатися як міри. Переходячи до границі по  $N$  в співвідношеннях (2.113) – (2.129), і з урахуванням усього викладеного вище, отримуємо наступний результат.

**Теорема 2.3.** Нехай  ${}_1 x(t)$ ,  ${}_1 u(t)$ ,  ${}_{1i} x(\eta)$ ,  ${}_{1i} u(\eta)$ , ( $i=1,2$ )  $t_0$ ,  $t_1'$ ,  $t_1''$  – стійко- оптимальний процес задачі (2.83) – (2.90). Тоді існують невід'ємні числа  $v$ ,  $\zeta_{0l}$  ( $l = \overline{1, r^{(0)}}$ ),  $\zeta_{rl}$  ( $l = \overline{1, r^{(1r)}}$ ),  $\zeta_{rl}$  ( $l = \overline{1, r^{(1r)}}$ ) і невід'ємні міри  $\mu(t)$ ,  $\zeta_{1l}(t)$  ( $l = \overline{1, r^{(1)}}$ ),  $\zeta_{1il}(t)$  ( $i=1,2; l = \overline{1, r^{(1i)}}$ ) обмеженої варіації, зосереджені на множинах відповідно

$$M_{\mu} = [t_1', t_1''], M_1 = \{t : \varphi_l^{(1)}({}_1 x(t), t = 0) \subset [t_1', t_1''], l = \overline{1, r^{(1r)}}\},$$

$$M_{1i} = \{t : \varphi_l^{(1i)}({}_{1i} x(t_1^t), t_1^t = 0) \subset [t_1', t_1''], l = \overline{1, r^{(1i)}}\}, i = 1, 2,$$

де  $t_1^t$  ( $l=1,2$ ) момент часу досягнення системою (2.86) ( $i=1,2$ ) кінцевого різноманіття (2.87) за умови, що розділення СДС відбулося в момент  $t$ , векторна функція  ${}_1 \lambda(\tau)$  обмеженої варіації, що є рішенням інтегрального рівняння (2.135)  $\tau \in [t_1', t_1'']$  і звичайного диференціального рівняння

$${}_1 \dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H_1}{\partial_1 x} \Big|_{\wedge}, \tag{2.136}$$

для  $\tau \in [t_0, t'_1]$  і векторні функції  ${}_i \lambda(\eta)$  ( $i=1,2$ ) обмеженої варіації, що є рішенням рівнянь

$${}_i \dot{\lambda}(\eta) = - \left. \frac{\partial H_{li}}{\partial {}_i x} \right|_{\wedge}, \quad \eta \in [t, t'_i], \quad i=1,2; \quad t \in [t'_1, t''_1] \quad (2.137)$$

такі, що справедливі умови:

(1<sup>o</sup>) трансверсальності:

$$v \left[ \left. \frac{\partial S_1}{\partial x_1(t_0)} \right|_{\wedge} + {}_1 \lambda^N(\hat{t}_0) \right] + \left. \frac{\partial \Phi^{(0)T}}{\partial {}_1 x(t_0)} \right|_{\wedge} \zeta_0 = 0, \quad (2.138)$$

$$v \left[ \left. \frac{\partial S_1}{\partial t_0} - H_1 \right|_{\wedge} \right] + \left. \frac{\partial \Phi^{(0)T}}{\partial t_0} \right|_{\wedge} \zeta_0 = 0, \quad (2.139)$$

$$d\mu(t) \left[ \left. \frac{\partial S_{li}}{\partial {}_i x(t'_i)} \right|_{\wedge} - {}_i \lambda^N(\hat{t}'_i) \right] + \left. \frac{\partial \Phi^{(li)T}}{\partial {}_i x(t'_i)} \right|_{\wedge} d\zeta_{li} = 0, \quad (2.140)$$

$$d\mu(t) \left[ \left. \frac{\partial S_{li}}{\partial t'_i} \right|_{\wedge} + H_{li} \right] + \left. \frac{\partial \Phi^{(li)T}}{\partial t'_i} \right|_{\wedge} d\zeta_{li} = 0, \quad (2.141)$$

(2<sup>o</sup>) стрибка:

$$v \left[ \left. \frac{\partial S_1}{\partial x_1(t'_1)} \right|_{\wedge} + {}_1 \lambda(t'_1 + 0) - {}_1 \lambda(t'_1 - 0) \right] + \left. \frac{\partial \Phi^{(1)T}}{\partial {}_1 x(t'_1)} \right|_{\wedge} \zeta_1^N = 0, \quad (2.142)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi^{(1)T}}{\partial t'_1} \right|_{\wedge} \zeta_1 + v \left[ H_{1i} \Big|_{\wedge, \hat{t}'_1 - 0} - H_{1i} \Big|_{\wedge, \hat{t}'_1 + 0} \right] - d\mu(t) \sum_{i=1}^2 \left. H_{li} \right|_{\wedge} = 0, \quad (2.143)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi^{(1)T}}{\partial t''_1} \right|_{\wedge} \zeta_1 + v H_{1i} \Big|_{\wedge} - d\mu(t''_1) \sum_{i=1}^2 \left. H_{li} \right|_{\wedge} = 0, \quad (2.144)$$

(3<sup>o</sup>) мінімуму гамільтоніанів:

$$H_1({}_1 \hat{x}(t), {}_1 \hat{u}(t), {}_1 \lambda^N(t), t) = \min_{\substack{{}_1 u(t) \in \Omega_1, t \in [t'_1, t''_1]}} H_1({}_1 \hat{x}(t), {}_1 \hat{u}(t), {}_1 \lambda^N(t), t) \quad (2.145)$$

$$H_{li}(\hat{x}(\eta), \hat{u}(\eta), \lambda(\eta), \eta) = \min_{\substack{u(\eta) \in \Omega_{li}, \\ \eta \in [t, t_i], i=1,2}} H_{li}(\hat{x}(\eta), \hat{u}(\eta), \lambda(\eta), \eta) \quad (2.146)$$

(4°) нетривіальності, невід'ємності, доповнюючої нежорсткості:

$$v + \int_{t_i}^{t_i^*} d\mu(t) + \sum_{i=1}^{r^{(0)}} \zeta_{0l} + \sum_{i=1}^{r^{(1)}} \zeta_{1l} + \sum_{i=1}^{r^{(2)}} \zeta_{2l} + \int_{t_i}^{t_i^*} \left[ \sum_{i=1}^{r^{(1)}} d\zeta_{1l}(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r^{(li)}} d\zeta_{li}(t) \right] = 1 \quad (2.147)$$

$$\zeta_{0l} \varphi_l^{(0)} = 0, l = \overline{1, r^{(0)}}; \quad (2.148)$$

$$\zeta_{1l} \varphi_l^{(1)} = 0, l = \overline{1, r^{(1)}}; \quad (2.149)$$

$$\zeta_{2l} \varphi_l^{(2)} = 0, l = \overline{1, r^{(2)}}; \quad (2.150)$$

$$d\zeta_{1l}(t) \varphi_l^{(1)} = 0, l = \overline{1, r^{(1)}}; \quad d\zeta_{li}(t) \varphi_l^{(li)} = 0, i = \overline{1, 2}, l = \overline{1, r^{(li)}}. \quad (2.151)$$

Запропонований метод дозволяє сформулювати в термінах теорії оптимального керування умови оптимальності розгалуженої траєкторії складеної динамічної системи з поточним моментом розділення.

Сформульовані умови є частиною математичного забезпечення системи автоматизованого проектування і можуть бути використані для побудови обчислювальних алгоритмів, які враховують специфіку взаємодії елементів конкретних типів складених динамічних систем з поточним моментом розділення.

**РОЗДІЛ 3**  
**НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ**  
**ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ**  
**ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ**

**3.1. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії**

Згідно підрозділу 1.1 задача оптимізації довільно розгалуженої траєкторії руху СДС зводиться до вирішення задачі оптимізації розривної системи зі змінним розміром векторів стану та керування. Метод динамічного програмування дозволяє вирішити цю задачу в наступній постановці:

$$I = I(t_0, \dots, t_N; {}_1X(t_0^+), \dots, {}_N X(t_{N-1}^+); {}_1X(t_1^-), \dots, {}_N X(t_N^-);$$

$${}_1X(\cdot), \dots, {}_N X(\cdot); {}_1U(\cdot), \dots, {}_N U(\cdot)) = S_0({}_1X(t_0^+), t_0) + \sum_{i=1}^N I_i \rightarrow \inf, \quad (3.1)$$

де

$$({}_1X(t_0^+), t_0) \in B_0, ({}_N X(t_N^-), t_N) \in B_N; \quad (3.2)$$

$$({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) \in B_i, i = \overline{1, N-1}; \quad (3.3)$$

$$({}_1 X(t), {}_1 U(t)) \in W_i(t), t \in [t_{i-1}^+, t_i^-], i = \overline{1, N}; \quad (3.4)$$

$${}_i \dot{X} = {}_i F({}_i X, {}_i U, t), t \in [t_{i-1}^+, t_i^-], i = \overline{1, N}; \quad (3.5)$$

$${}_i X \in E^{n_{\Sigma i}}, {}_i U \in E^{m_{\Sigma i}}, (i = \overline{1, N}), t_i \in E (i = \overline{0, N}); \quad (3.6)$$

${}_i U(t)$  – кусково - неперервне керування,  $t_{i-1}^+ \leq t \leq t_i^-$ ,

$${}_i U(t) = {}_i U(t+0) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} {}_i U(t),$$

$$I_i = S_i({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i({}_i X, {}_i U, t) dt \quad (i = \overline{1, N-1}), \quad (3.7)$$

$$I_N = S_N({}_N X(t_N^-), t_N) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \Phi_N({}_N X, {}_N U, t) dt,$$

$B_0, B_N, B_i, (i = \overline{1, N-1}), W_i(t), (i = \overline{1, N})$  – задані підмножини відповідно з  $E^{n_{\Sigma i}} \times E^l, E^{n_{\Sigma N}} \times E^l, E^{n_{\Sigma i}} \times E^{n_{\Sigma i+1}} \times E^l (i = \overline{1, N-1}), E^{n_{\Sigma i}} \times E^{m_{\Sigma i}}, (i = \overline{1, N})$ .

Як і в підрозділі 1.1 запис  $f(t_i^+)$  або  $f(t_i^-)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) показує, що значення функції розглядається в момент часу  $t = t_i^+ = t_i + 0$  або  $t = t_i^- = t_i - 0$ , тобто відразу праворуч від  $t_i$  або відразу зліва від  $t_i$ . Аналогічний сенс має запис  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), тобто  $t \in [t_{i-1} + 0, t_i - 0]$  – розглядається інтервал часу від моменту праворуч від  $t_{i-1}$  до моменту зліва від  $t_i$ .

Через  $D_i({}_i X(t), t_{i-1}, t_i)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) позначимо множину всіх допустимих керувань  ${}_i U(\cdot)$ , визначених на відрізку  $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ , що задовольняють умовам (3.4), (3.7) і таких, що траєкторія системи (3.5) задовольняє умовам (3.2)–(3.4) ( $i = \overline{1, N}$ ). За визначенням  $D_i \neq \emptyset, i = \overline{1, N}$ . Крім того, позначимо через  ${}_i X(t), {}_i U(t), t_0, t_i, (i = \overline{1, N}), t_0 \leq t \leq t_N$  один із допустимих процесів задачі (3.1)–(3.7).

Допустимий процес  $({}_1 \hat{X}(\hat{t}_0^+), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+); {}_1 \hat{X}(\hat{t}_1^-), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_N^-); {}_1 \hat{X}(\cdot), \dots, {}_N \hat{X}(\cdot); {}_1 \hat{U}(\cdot), \dots, {}_N \hat{U}(\cdot); \hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N)$  назовемо рішенням задачі (3.1)–(3.7), тобто оптимальним процесом, якщо

$$\hat{I} = I(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N; {}_1 \hat{X}(\hat{t}_0^+), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+); {}_1 \hat{X}(\hat{t}_1^-), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_N^-); {}_1 \hat{X}(\cdot), \dots, {}_N \hat{X}(\cdot); {}_1 \hat{U}(\cdot), \dots, {}_N \hat{U}(\cdot)) = \inf_{B_0} \dots \inf_{B_N} \inf_{D_1} \dots \inf_{D_N} I. \quad (3.8)$$

Сформулюємо необхідні та достатні умови оптимальності допустимого процесу.

Теорема 3.1. Для оптимальності допустимого процесу необхідно та достатньо існування таких функцій Беллмана  $V_i(iX(t), t)$   $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), які визначені та неперервні на всіх  $(iX, t) \in B_i$ ,  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), де  $B_i$  – задані підмножини  $n$ -вимірному евклідовому простору з елементами  $iX = ({}_iX_1(t) \dots {}_iX_N(t))$ , що мають кусково-неперервні частинні похідні та задовольняють рівнянням Беллмана [14, 15]

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t} = \inf_{(iX, iU) \in W_i(t)} \left[ \Phi_i(iX, iU, t) + \left( \frac{\partial V_i}{\partial iX} \right)^T {}_iF(iX, iU, t) \right] \Bigg|_{iX} \quad (3.9)$$

всюди на  $[t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), де існують похідні, та пов'язаних граничними умовами [14, 15]

$$V_i(iX(t_i^-), t_i) = \left[ \begin{array}{l} V_{i+1}(i+1X(t_i^+), t_i) + \\ + S_i(iX(t_i^-), i+1X(t_i^+), t_i) \end{array} \right] \Bigg|_{(iX(t_i^-), i+1X(t_i^+), t_i) \in B_i} \quad (i = \overline{1, N-1}), \quad (3.10)$$

$$V_N({}_N X(t_N^-), t_N) = S_N({}_N X(t_N^-), t_N) \Big|_{({}_N X(t_N^-), t_N) \in B_N}, \quad (3.11)$$

і таких, що задовольняють співвідношенню

$$\hat{I} = \inf_{B_0} \inf_{B_1} \dots \inf_{B_N} \left[ \begin{array}{l} S_0({}_1 X(t_0^+), t_0) + \\ + V_1({}_1 X(t_0^+), t_0); {}_1 X(t_1^-), \dots, {}_N X(t_{N-1}^-); \\ {}_2 X(t_1^+), \dots, {}_N X(t_{N-1}^+); t_1, \dots, t_N. \end{array} \right] \quad (3.12)$$

Доведення. Відповідно до принципу оптимальності Беллмана [14, 15] співвідношення (3.8) можна представити у вигляді

$$\hat{I} = \inf_{B_0} \dots \inf_{B_N} \left[ S_0({}_1 X(t_0^+), t_0) + \inf_{D_1} \left[ I_1 + \inf_{D_2} \left[ I_2 + \dots + \inf_{D_N} [I_N] \dots \right] \right] \right] \quad (3.13)$$

Пошук нижньої границі виразу (3.12) починається з  $N$ -ої внутрішньої дужки.

Введемо функцію Беллмана

$$V_N({}_N X(t), t) = \inf_{D_N({}_N X(t), t, t_N)} \left[ S_N({}_N X(t_N^-), t_N) + \int_t^{t_N} \Phi_N({}_N X, {}_N U, \tau) d\tau \right]_{({}_N X(t_N^-), t_N) \in B_N},$$

$$t \leq \tau \leq t_N, \quad t \in [t_{N-1}^+, t_N^-],$$
(3.14)

яка згідно [14, 15, 43] визначена та неперервна на всіх  $({}_N X, t)$ ,  $({}_N X(t), {}_N U({}_N X(t), t)) \in W_N(t)$ , має кусково-неперервні частинні похідні по  ${}_N X(t)$  і  $t$  та задовольняє рівнянню Беллмана [14, 15]

$$-\frac{\partial V_N}{\partial t} = \inf_{({}_N X, {}_N U) \in W_N(t)} \left[ \Phi_N({}_N X, {}_N U, t) + \left( \frac{\partial V_N}{\partial {}_N X} \right)^T {}_N F({}_N X, {}_N U, t) \right]_{{}_N X}$$
(3.15)

при граничних умовах [14, 15]

$$V_N({}_N X(t_N^-), t_N) = S_N({}_N X(t_N^-), t_N) \Big|_{({}_N X(t_N^-), t_N) \in B_N}.$$
(3.16)

Далі, за аналогією з (3.13) – (3.15) вводимо функцію Беллмана

$$V_i({}_i X(t), t) = \inf_{D_i({}_i X(t), t, t_i)} \left[ V_{i+1}({}_{i+1} X(t_i^+), t_i) + S_i({}_i X(t_i^-), t_i) + \int_t^{t_i} \Phi_i({}_i X, {}_i U, \tau) d\tau \right]_{({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t) \in B_i},$$

$$i = N-1, N-2, \dots, 1; \quad t_0 \leq \tau \leq t_i, \quad t \in [t_{i-1}^+, t_i^-],$$
(3.17)

яка визначена при всіх  $({}_i X, t)$ ,  $({}_i X(t), {}_i U({}_i X(t), t)) \in W_i(t)$ , має кусково-неперервні частинні похідні по  ${}_i X$  і  $t$  та задовольняє рівнянню Беллмана

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t} = \inf_{({}_i X, {}_i U) \in W_i(t)} \left[ \Phi_i({}_i X, {}_i U, t) + \left( \frac{\partial V_i}{\partial {}_i X} \right)^T {}_i F({}_i X, {}_i U, t) \right]_{{}_i X}$$
(3.18)

при граничних умовах

$$V_i({}_i X(t_i^-), t_i) = \left[ S_i({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) + \right. \\ \left. + V_{i+1}({}_{i+1} X(t_i^+), t_i) \right]_{({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t) \in B_i} \quad (3.19)$$

Задаючи  $i$  послідовно, зменшуючи його значення від  $N-1$  до  $1$ , та враховуючи рекурентне співвідношення

$$\inf_{D_i} [I_i + V_{i+1}({}_{i+1} X(t_i^+), t_i)] = V_i({}_i X(t_{i-1}^+), t_{i-1}) \quad (3.20)$$

отримуємо, що  $V_1({}_1 X(t_0^+), t_0)$  залежить від набору  $({}_1 X(t_1^-), \dots, {}_N X(t_{N-1}^-); {}_2 X(t_1^+), \dots, {}_N X(t_{N-1}^+); t_1, \dots, t_N)$ . Підставивши

$V_1({}_1 X(t_0^+), t_0); {}_1 X(t_1^-), \dots, {}_N X(t_{N-1}^-); {}_2 X(t_1^+), \dots, {}_N X(t_{N-1}^+); t_1, \dots, t_N$  у вираз (3.13), доводимо співвідношення (3.12). Отже, теорема в цілому доведена.

У підрозділах 3.2 і 3.3, в формі наслідків з основної теореми 3.1 будуть сформульовані необхідні та достатні умови оптимальності для типових схем розгалуження траєкторій СДС.

### **3.2. Наслідок 1. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну та бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення**

Схема руху СДС по розгалуженій траєкторії, що містить центральну та бічні гілки представлена на рис. 1.9. Розглядалась наступна постановка задачі. Підсистеми СДС в об'єднаному стані починають рух з точки

$$({}_0 x(t_0), t_0) \in Q_0, \quad (3.21)$$

де  $Q_0$  – область допустимих значень фазових координат на початку руху системи.

В точках

$$({}_i x(t_i), t_i) \in Q_i \quad (t_{i-1} < t_i, i = \overline{1, k}) \quad (3.22)$$

відбувається відділення по  $(i = \overline{1, k})$  підсистем, які переміщуються в індивідуальні кінцеві пункти

$$({}_{ij}x(t_{ij}), t_{ij}) \in Q_{ij} \quad (i = \overline{1, k}, j = \overline{1, r_i}), \quad (3.23)$$

де  $Q_i$  – область допустимих значень фазових координат в момент розділення системи,  $Q_{ij}$  – області допустимих значень фазових координат в моменти завершення руху підсистем.

Крім того, в моменти часу виконуються співвідношення

$${}_i x_q(t_i) = {}_{i+1} x_q(t_i) = {}_{ij} x_q(t_i) \quad (i = \overline{1, k-1}, q = \overline{1, n-1}),$$

$${}_k x_q(t_k) = {}_{kj} x_q(t_k) \quad (q = \overline{1, n-1}),$$

$${}_i x_n(t_i) = {}_{i+1} x_n(t_i) + \sum_{j=1}^{r_i} {}_{ij} x_n(t_i) \quad (i = \overline{1, k-1}), \quad {}_k x_n(t_k) = \sum_{j=1}^{r_k} {}_{kj} x_n(t_k),$$

де  $n$ -а фазова координата описує зміну маси в механічних СДС.

Динаміка руху підсистем СДС по розгалуженій траєкторії, що містить центральну та бічні гілки представлена (рис. 1.9) описується рівняннями

$${}_{\beta} \dot{x} = {}_{\beta} f({}_{\beta} x, {}_{\beta} u, t), \quad t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}], \quad (3.24)$$

$$, \quad (\beta = i, \beta^* = i-1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$$

на які накладено обмеження

$$({}_{\beta} x(t), {}_{\beta} u(t)) \in G_{\beta}(t), \quad (3.25)$$

де кусково-неперервне,  ${}_{\beta} u(t) = {}_{\beta} u(t+0) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} u(t),$

$(\beta = i, \beta^* = i-1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}),$   $G_{\beta}$  – обмеження на граничні значення фазових координат підсистем та моменти часу їх досягнення.

У моменти часу розділення СДС на підсистеми виконуються співвідношення (1.65), (1.66)

$$\begin{aligned} &{}_i x(t_i) - {}_{ij} x(t_i) = 0 \quad (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}); \\ &{}_i x(t_i) - {}_{i+1} x(t_i) = 0 \quad (i = \overline{1, k-1}), \end{aligned}$$

$$i = \overline{1, k}, j = \overline{1, r_i}, \xi(i) \begin{cases} 1, i = \overline{1, k-1}, \\ 0, i = k. \end{cases}$$

Потрібно мінімізувати функціонал

$$I = I(t_0, t_i, \dots, t_k; t_{11}, \dots, t_{kr_k}; {}_1x(t_0), {}_1x(t_1), \dots, {}_kx(t_k), {}_{11}x(t_{11}), \dots, {}_{kr_k}x(t_{kr_k}); {}_1x(\cdot), {}_1u(\cdot); \dots, {}_kx(\cdot), {}_ku(\cdot), {}_{11}u(\cdot), \dots, {}_{kr_k}x(\cdot), {}_{kr_k}u(\cdot)) = \sum_{i=1}^k (I_i + \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}) \rightarrow \inf, \quad (3.26)$$

де

$$I_\beta = S_\beta({}_\beta x(t_\beta), t_\beta) + \int_{t_{\beta^*}}^{t_\beta} \Phi_\beta({}_\beta x, {}_\beta u, t) dt \quad (3.27)$$

$$(\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}).$$

Через  $\Delta({}_\beta x, t, t_\beta)$  позначимо множину всіх керувань  ${}_\beta u(\cdot)$ , визначених на відрізку  $[t, t_\beta]$ , які задовольняють умовам (3.25) і таких, що траєкторія системи (3.24) також визначена на відрізку  $[t_{\beta^*}, t_\beta]$ . Покладемо  $\Delta({}_\beta x, t, t_\beta) \neq \emptyset$ .

Процес  ${}_1x(t), {}_1u(t), {}_2x(t), {}_2u(t), \dots, {}_kx(t), {}_ku(t), {}_{11}x(t), {}_{11}u(t), \dots, {}_{kr_k}x(t), {}_{kr_k}u(t)$  назвемо допустимим процесом задачі (3.21) – (3.27), якщо функції  ${}_\beta x(t), {}_\beta u(t)$ ,  $(\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  визначені на будь-якому відрізку  $[t_{\beta^*}, t_\beta]$   $(\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$ , де  ${}_0x(t_0), \dots, {}_\beta x(t_\beta)$   $(\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  задовольняють включенням (3.21)–(3.23),  ${}_\beta u(\cdot) \in \Delta({}_\beta x, t_{\beta^*}, t_\beta)$   $(\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$ ,  ${}_\beta x(\cdot)$  – траєкторія системи (3.24). Допустимий процес назвемо рішенням задачі (3.21) – (3.27), тобто оптимальним процесом, якщо

$$\begin{aligned}
I &= I(\hat{t}_0, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k; \hat{t}_{11}, \dots, \hat{t}_{kr_k}; {}_1\hat{x}(\hat{t}_0), {}_1\hat{x}(\hat{t}_1), \dots, {}_k\hat{x}(\hat{t}_k), {}_{11}\hat{x}(\hat{t}_{11}), \dots, {}_{kr_k}\hat{x}(\hat{t}_{kr_k}); \\
&{}_1\hat{x}(\cdot), {}_1\hat{u}(\cdot); \dots, {}_k\hat{x}(\cdot), {}_k\hat{u}(\cdot), {}_{11}\hat{u}(\cdot), \dots, {}_{kr_k}\hat{x}(\cdot), {}_{kr_k}\hat{u}(\cdot)) = \inf_{({}_1x(t_0), t_0) \in Q_0} \dots \inf_{({}_kx(t_k), t_k) \in Q_k} \\
&\inf_{({}_{11}x(t_{11}), t_{11}) \in Q_{11}} \dots \inf_{({}_{kr_k}x(t_{kr_k}), t_{kr_k}) \in Q_{kr_k}} \inf_{({}_1u(\cdot) \in \Delta({}_1x(t_0), t_0, t_1))} \dots \inf_{({}_k u(\cdot) \in \Delta({}_kx(t_{k-1}), t_{k-1}, t_k))} \\
&\inf_{({}_{11}u(\cdot) \in \Delta({}_{11}x(t_1), t_1, t_{11}))} \dots \inf_{({}_{kr_k}u(\cdot) \in \Delta({}_{kr_k}x(t_k), t_k, t_{kr_k}))} I(t_0, t_1, \dots, t_k; t_{11}, \dots, t_{kr_k}; \\
&{}_1x(t_0), {}_1x(t_1), \dots, {}_kx(t_k), {}_{11}x(t_{11}), \dots, {}_{kr_k}x(t_{kr_k}); \\
&{}_1x(\cdot), {}_1u(\cdot); \dots; {}_kx(\cdot), {}_ku(\cdot); {}_{11}x(\cdot), {}_{11}u(\cdot), \dots, {}_{kr_k}x(\cdot), {}_{kr_k}u(\cdot)) = \hat{I}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Використовуючи позначення, введені в задачі (3.21) - (3.26), яка є окремим випадком задачі (3.1) – (3.7), сформулюємо наслідок з теореми 3.1 у вигляді наступного результату.

Теорема 3.2. Для оптимальності допустимого процесу задачі (3.21) - (3.26) необхідно і достатньо існування таких функцій  $V_\beta(\beta x(t), t)$ ,  $t \in [t_{\beta^*}, t_\beta]$ , які визначені і неперервні на всіх  $(\beta x, t)$ ,  $(\beta x(t), \beta u(t)) \in G_\beta(t)$ ,  $t \in [t_{\beta^*}, t_\beta]$  ( $\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ), мають кусково-неперервні частинні похідні та задовольняють рівнянням

$$-\frac{\partial V_\beta}{\partial t} = \inf_{(\beta x, \beta u) \in W_\beta(t)} \left[ \Phi_\beta(\beta x, \beta u, t) + \left( \frac{\partial V_\beta}{\partial \beta x} \right)^T \beta f(\beta x, \beta u, t) \right]_{\beta x} \tag{3.29}$$

всюди на  $[t_{\beta^*}, t_\beta]$  ( $\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ), де існують ці похідні, і зв'язаних граничними умовами

$$V_{ij}({}_{ij}x(t_{ij}), t_{ij}) = S_{ij}({}_{ij}x(t_{ij}), t_{ij}) \Big|_{({}_{ij}x(t_{ij}), t_{ij}) \in Q_{ij}}, \tag{3.30}$$

$$V_i(x(t_i), t_i) = \left[ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{t_i} V_{ij}(x(t_j), t_j) + \\ + \zeta(i) V_{i+1}(x(t_i), t_i) + \\ + S_i(x(t_{ij}), t_{ij}) \end{array} \right]_{(jx(t_j), t_j) \in Q_i} \quad (i = \overline{1, k}, j = \overline{1, r_i}), \quad (3.31)$$

де

$$\zeta(i) = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, k-1}; \\ 0, & i = k, \end{cases}$$

що задовольняють співвідношенням (1.66) і умові

$$\hat{I} = \inf_{(1x(t_0), t_0) \in Q_0} \dots \inf_{(kx(t_k), t_k) \in Q_k} \dots \inf_{(kr_kx(t_{kr_k}), t_{kr_k}) \in Q_{kr_k}} \left[ \begin{array}{l} V_1(0x(t_0), t_0); \\ 1x(t_1), t_1, \dots, kx(t_k), t_k; \\ 11x(t_{11}), t_{11}, \dots, kr_kx(t_{kr_k}), t_{kr_k} \end{array} \right]. \quad (3.32)$$

Покажемо яким чином з співвідношень теореми 3.1 отримуються співвідношення теореми 3.2.

Нехай рівняння (3.5) представлено в наступному блочному вигляді

$${}_i \dot{X} = \begin{bmatrix} {}_i \dot{x}^{(1)} \\ {}_i \dot{x}^{(2)} \\ \vdots \\ {}_i \dot{x}^{(q_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i f^{(1)}({}_i x^{(1)}, {}_i u^{(1)}, t) \\ {}_i f^{(2)}({}_i x^{(2)}, {}_i u^{(2)}, t) \\ \vdots \\ {}_i f^{(q_i)}({}_i x^{(q_i)}, {}_i u^{(q_i)}, t) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

де  ${}_i x^{(j)} \in E^n$ ,  ${}_i u^{(j)} \in E^{m^{(j)}}$ ,  ${}_i \dot{x}^{(j)} = {}_i f^{(j)}({}_i x^{(j)}, {}_i u^{(j)}, t)$  – рівняння типу (3.24);  $i = \overline{1, N}$ ;  $j = \overline{1, q_i}$ , – кількість підсистем, що входять до складу СДС в інтервалі  $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ .

$$\text{Відповідно до (1.4)} \quad \Phi_i({}_i X, {}_i U, t) = \sum_{j=1}^{q_i} \Phi_i^{(j)}({}_i x^{(j)}, {}_i u^{(j)}, t).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_i}{\partial t} &= \inf_{(i,x^{(j)},i,u^{(j)}) \in W^{(1)}(t)} \dots \inf_{(i,x^{(q_i)},i,u^{(q_i)}) \in W^{(q_i)}(t)} \sum_{j=1}^{q_i} H_i^{(j)}(i,x^{(j)},i,z^{(j)},i,u^{(j)},t) = \\
&= \sum_{j=1}^{q_i} \inf_{(i,x^{(j)},i,u^{(j)}) \in W^{(j)}(t)} H_i^{(j)}(i,x^{(j)},i,z^{(j)},i,u^{(j)},t) = \\
&= \sum_{j=1}^{q_i} \hat{H}_i^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},i,\hat{u}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},t)) \Big|_{(i,\hat{x}^{(j)},i,\hat{u}^{(j)}) \in W^{(j)}(t)},
\end{aligned}$$

де

$$H_i^{(j)} = \Phi_i^{(j)}(i,x^{(j)},i,u^{(j)},t) + i,z^{(j)T} i,f^{(j)}(i,x^{(j)},i,u^{(j)},t),$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_i^{(j)} &= \left[ \Phi_i^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,\hat{u}^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},t),t) + \right. \\
&\left. + i,z^{(j)T} i,f^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,\hat{u}^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},t),t) \right] \Big|_{(i,\hat{x}^{(j)},i,\hat{u}^{(j)}) \in W_i^{(j)}(t)},
\end{aligned}$$

$i,\hat{u}^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},t)$  – отримано з умови

$$\hat{H}_i^{(j)} = \inf_{i,u^{(j)} \in W_i^{(j)}(i,x^{(j)},t)} H_i^{(j)}(t,i,x^{(j)},i,u^{(j)},i,z^{(j)}) \Big|_{i,x^{(j)} \in W_{i,x}^{(j)}(t)},$$

$W_{i,u}^{(j)}(i,x^{(j)}(t),t)$  – переріз  $W_i^{(j)}(t)$  при кожному фіксованому  $i,x^{(j)}(t)$ ;

$W_{i,x}^{(j)}(t)$  – проекція  $W_i^{(j)}(t)$  на  $n$ -вимірний евклідов простір з елементами

$i,x^{(j)T} = (i,x_1^{(j)}, \dots, i,x_n^{(j)})$ , для якого можна записати  $2q$  векторних канонічних

рівнянь [87, 103]:

$$i,\dot{x}^{(j)} = \frac{\partial \hat{H}_i^{(j)}}{\partial i,z^{(j)}}, \quad i,\dot{z}^{(j)} = -\frac{\partial \hat{H}_i^{(j)}}{\partial i,x^{(j)}} \quad (3.34)$$

Зазначимо, що  $i,\dot{x}^{(j)} = i,f^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,\hat{u}^{(j)},t)$ , так як  $i,\hat{u}^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)},i,z^{(j)},t)$ ,

визначається із співвідношення  $\frac{\partial \hat{H}_i^{(j)}}{\partial i,u^{(j)}} = 0$ , якщо  $i,\hat{u}^{(j)}$  є внутрішньою

точкою області  $W_{i,u}^{(j)}(i,x^{(j)}(t),t)$ , або  $i,\hat{u}^{(j)} = i,\hat{u}^{(j)}(i,\hat{x}^{(j)}(t),t)$  і  $\frac{\partial \hat{u}_i^{(j)}}{\partial i,z^{(j)}} = 0$ , у

разі якщо  $i,\hat{u}^{(j)}$  належить границі цієї області.

Будемо шукати функцію Беллмана  $V_i(x^{(1)}(t), \dots, x^{(q_i)}(t), t)$  у вигляді

$$V_i(x^{(1)}(t), \dots, x^{(q_i)}(t), t) = \sum_{j=1}^{q_i} V_i^{(j)}(x^{(j)}(t), t). \quad (3.35)$$

Тоді  ${}_i z^{(j)} = \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial_i x^{(j)}}$  і від рівнянь (3.34), (3.35) приходимо до рівняння

Гамільтона – Якобі

$$-\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial t} = \Phi_i^{(j)}({}_i \hat{x}^{(j)}, {}_i \hat{u}^{(j)}, t) + \left( \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial_i x^{(j)}} \right)^T {}_i f^{(j)}({}_i \hat{x}^{(j)}, {}_i \hat{u}^{(j)}, t), \quad (3.36)$$

а від нього до рівняння Беллмана

$$-\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial t} = \inf_{({}_i x^{(j)}, {}_i u^{(j)}) \in W_i^{(j)}(t)} \left[ \Phi_i^{(j)}({}_i x^{(j)}, {}_i u^{(j)}, t) + \left( \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial_i x^{(j)}} \right)^T {}_i f^{(j)}(x_i^{(j)}, u_i^{(j)}, t) \right] \\ (i = \overline{1, N}; j = \overline{1, q}). \quad (3.37)$$

В силу взаємної незалежності руху підсистем після розділення можна стверджувати, що функція Беллмана  $V_i^{(j)}(x^{(j)}(t), t)$  неперервна на всій траєкторії руху  $j$ -ої підсистеми в інтервалі часу між моментом відділення і моментом закінчення руху підсистеми, володіє кусково-

неперервними похідними  $\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial_i x^{(j)}}$  та  $\frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial t}$  і задовольняє (3.36) усюди, де

існують ці похідні. Крім того,  $V_i^{(j)}(x^{(j)}(t), t)$  задовольняє граничній умові

$$V_i^{(j)}(x^{(j)}(t_j), t_j) = S_i^{(j)}(x^{(j)}(t_j), t_j) \Big|_{({}_i x^{(j)}(t_j), t_j) \in Q_i^{(j)}}, \quad (3.38)$$

яка впливає з (3.10), (3.11) в разі, коли підсистема закінчує свій рух в момент часу  $t_j$  на різноманітті  $Q_i^{(j)}$  і  $(S_i({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i)$  із (3.10) або

$(S_N(N, X(t_N^-), t_N))$  із (3.11), які можна представити у вигляді

$$\sum_{j=1}^{q_i} S_i^{(j)}(x^{(j)}(t_j), t_j) \Big|_{(x^{(j)}(t_j), t_j) \in Q_i^{(j)}}.$$

З іншого боку, функція Беллмана, розглянута на траєкторії руху підсистем, що розділяються в момент часу на різноманітті, задовольняє умові (3.31), що випливає з (3.10) з урахуванням (3.35). Співвідношення (3.32) безпосередньо випливає з (3.12) при  $S_0(1, X(t_0^+), t_0) = 0$ . Значимо, що твердження теореми 3.2 можливо отримати, провівши їх безпосереднє доведення за методикою доведення теореми 3.1 або за методикою, викладеною в роботі [14].

### 3.3. Наслідок 2. Метод динамічного програмування для складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем

#### 3.3.1. Найпростіша розгалужена траєкторія з розділенням підсистем

Запишемо постановку задачі оптимізації типової розгалуженої траєкторії СДС, схема якої зображена на рис. 1.10, а, у наступному вигляді.

Динаміка руху підсистем СДС вздовж розгалуженої траєкторії (рис. 1.10,а) описується рівняннями виду

$$\begin{aligned} \beta \dot{x} &= \beta f(\beta x, \beta u, t), \quad t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}] \\ (\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, \beta^* = 1, \beta = 12, \beta^* = 1), \\ t_0 &< t_1 < t_2 < t_{11}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де  $\beta x \in E^n$ ,  $\beta u \in E^{m_{\beta}}$ ,  $\beta u(t)$  – кусково-неперервне керування,  $t_{\beta^*} \leq t \leq t_{\beta}$ ,

$$\beta u(t) = \beta u(t+0) = \lim_{\tau \rightarrow t+1} u(\tau).$$

На які накладаються обмеження

$$({}_1x(t_0), t_0) \in Q_0, \quad (3.40)$$

$${}_\beta x(t_\beta), t_\beta \in Q_\beta \quad (\beta = 1, 11, 12), \quad (3.41)$$

де  $Q_\beta$  – задані підмножини  $E^n \times E^1$ ;

У моменти відділення підсистем повинні виконуватись умови

$$({}_1x(t), {}_1u(t)) \in W_1(t), t \in [t_0, t_1]; \quad (3.42)$$

$$({}_{11,12}x(t), {}_{11,12}u(t)) \in W_{11,12}(t), (t) \in [t_1, t_{12}]; \quad (3.43)$$

$$({}_{11}x(t), {}_{11}u(t)) \in W_{11}(t), t \in [t_{12}, t_{11}]; \quad (3.44)$$

$${}_1x_r(t_1) = {}_{11}x_r(t_1) = {}_{12}x_r(t_1) \quad (r = \overline{1, n-1}); \quad (3.45)$$

$${}_1x_n(t_1) = {}_{11}x_n(t_1) + {}_{12}x_n(t_1),$$

${}_\beta x_n(t)$  – фазова координата, яка описує зміну маси в механічних СДС;

$$W_1(t): E^1 \rightarrow 2^{E^{n+m_1}}, \quad W_{11,12}(t): E^1 \rightarrow 2^{E^{2n+m_1+m_2}}, \quad W_{11}(t): E^1 \rightarrow 2^{E^{2n+m_1}} -$$

багатозначні функції.

Керування  ${}_\beta u(t)$ , фазові координати  ${}_\beta x(t)$ , моменти часу  $t_{\beta^*}, t_\beta$  ( $\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, \beta^* = 1, \beta = 12, \beta^* = 1$ ) необхідно вибрати таким чином, щоб мінімізувати критерій

$$I = I_1 + I_{11} + I_{12} \rightarrow \inf, \quad (3.46)$$

де

$$I_\beta = S_\beta({}_\beta x(t_\beta), t_\beta) + \int_{t_{\beta^*}}^{t_\beta} \Phi_\beta({}_\beta x, {}_\beta u, t) dt$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, \beta^* = 1, \beta = 12, \beta^* = 1);$$

$${}_{11,12}x(t) = \text{col} ({}_{11}x^T(t), {}_{12}x^T(t)), \quad {}_{11,12}u(t) = \text{col} ({}_{11}u^T(t), {}_{12}u^T(t)).$$

Позначимо через  $W_{1,x}(t), W_{1,x}(t)$  – проєкції відповідних функцій  $W_1(t), W_{11}(t)$  на  $n$  – вимірний евклідовий простір з елементами  ${}_1x^T(t) = ({}_1x_1(t), \dots, {}_1x_n(t)), \quad {}_{11}x^T(t) = ({}_{11}x_1(t), \dots, {}_{11}x_n(t))$  і через  $W_{11,12,x}(t) -$

проекцію функцій  $W_{11,12}(t)$  на  $2n$  – вимірний евклідовий простір з елементами  ${}_{11,12}x^T(t) = ({}_{11}x_1(t), \dots, {}_{11}x_n(t); {}_{12}x_1(t), \dots, {}_{12}x_n(t))$ ; а через  $W_{1,u}({}_1x(t), t)$ ,  $W_{11,u}({}_{11}x(t), t)$ ,  $W_{11,12,u}({}_{11,12}x(t), t)$  позначимо переріз відповідних функцій  $W_1(t)$ ,  $W_{11}(t)$ ,  $W_{11,12}(t)$  при кожному фіксованому значенні  ${}_1x(t)$ ,  ${}_{11}x(t)$ ,  ${}_{11,12}x(t)$ .

Безпосередньо з основної теореми 3.1 формулюється наступний результат.

Теорема 3.3. Для того, щоб процес задачі (3.39) – (3.46) був оптимальним необхідно і достатньо існування таких функцій  $V_{11}({}_{11}x(t), t)$ ,  $t \in [t_2, t_1]$ ,  $V_{11,12}({}_{11,12}x(t), t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $V_1({}_1x(t), t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , які визначені і неперервні відповідно на всіх  $({}_{11}x, t)$ ,  ${}_{11}x \in W_{11,x}(t)$ ,  $(t_2 \leq t \leq t_1)$ ;  $({}_{11,12}x, t)$ ,  ${}_{11,12}x \in W_{11,12,x}(t)$ ,  $(t_1 \leq t \leq t_2)$ ;  $({}_1x, t)$ ,  ${}_1x \in W_{1,x}(t)$ ,  $(t_0 \leq t \leq t_1)$ , які мають кусково-неперервні частинні похідні та задовольняють рівнянням

$$-\frac{\partial V_{11}}{\partial t} = \inf_{{}_{11}u \in W_{11}({}_{11}x(t), t)} [\Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t) + \left(\frac{\partial V_{11}}{\partial {}_{11}t}\right)^T {}_{11}f({}_{11}x, {}_{11}u, t)] \Big|_{{}_{11}x \in W_{11,x}(t)}, t \in [t_2, t_1]; \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_{11,12}}{\partial t} = & \inf_{{}_{11,12}u \in W_{11,12}({}_{11,12}x(t), t)} [[\Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t) + \left(\frac{\partial V_{11,12}}{\partial {}_{11}x}\right)^T {}_{11}f({}_{11}x, {}_{11}u, t)] + \\ & + [\Phi_{12}({}_{12}x, {}_{12}u, t) + \left(\frac{\partial V_{11,12}}{\partial {}_{12}x}\right)^T {}_{12}f({}_{12}x, {}_{12}u, t)]] \Big|_{{}_{11,12}x \in W_{11,12,x}(t)}, t \in [t_1, t_2]; \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$-\frac{\partial V_1}{\partial t} = \inf_{{}_1u \in W_1} [\Phi_1({}_1x, {}_1u, t) + \left(\frac{\partial V_1}{\partial {}_1t}\right)^T {}_1f({}_1x, {}_1u, t)] \Big|_{{}_1x \in W_{1,x}(t)}, t \in [t_0, t_1], \quad (3.49)$$

всюди, де існують ці похідні, зв'язані граничними умовами

$$V_{11}(11x(t_{11}), t_{11}) = S_{11}(11x(t_{11}), t_{11}) \Big|_{(11x(t_{11}), t_{11}) \in Q_{11}} ; \quad (3.50)$$

$$V_{11,12}(11x(t_{12}), 12x(t_{12}), t_{12}) = \left[ V_{11}(11x(t_{12}), t_{12}) + \right. \\ \left. + S_{12}(12x(t_{12}), t_{12}) \right]_{(12x(t_{12}), t_{12}) \in Q_{12}} ; \quad (3.51)$$

$$V_1(1x(t_1), t_1) = \left[ V_{11,12}(11,12x(t_1), t_1) + \right. \\ \left. + S_1(1x(t_1), t_1) \right]_{(1x(t_1), t_1) \in Q_1} \quad (3.52)$$

та задовольняють співвідношенню

$$I = \inf_{(1x(t_0), t_0) \in Q_0} \inf_{(1x(t_1), t_1) \in Q_1} \inf_{(12x(t_{12}), t_{12}) \in Q_{12}} \inf_{(11x(t_{11}), t_{11}) \in Q_{11}} [V_1(1x(t_0), t_0); \\ 1x(t_1), 11x(t_{12}), 12x(t_{12}), 11x(t_{11}), t_1, t_{12}, t_{11})]. \quad (3.53)$$

### 3.3.2. Найпростіша розгалужена траєкторія з групуванням підсистем

Схема розгалуженої траєкторії СДС з групуванням підсистем зображена на рис. 1.10, б. Розглянемо постановку задачі:

$$I = I_1 + I_{11} + I_{12} + S_0(1x(t_0), t_0) + S_1(1x(t_1), t_1) \rightarrow \inf , \quad (3.54)$$

$$I_\beta = \int_{t_\beta}^{t_\beta^*} \Phi_\beta(\beta x, \beta u, t) dt \quad (\beta^* = 0, \beta = 1; \beta^* = 1, \beta = 11, 12);$$

$$(1x(t_0), t_0) \in Q_0 ; \quad (3.55)$$

$$(\beta x(t_\beta), t_\beta) \in Q_\beta \quad (\beta = 1, 11, 12) ; \quad (3.56)$$

$$(\beta x(t), \beta u(t)) \in W_\beta(t) \quad (\beta = 1, 11, 12, 11); \quad (3.57)$$

$$1x_r(t_1) = 11x_r(t_1) = 12x_r(t_1) \quad (r = \overline{1, n-1}); \quad (3.58)$$

$$1x_n(t_1) = 11x_n(t_1) + 12x_n(t_1) ;$$

$${}_{\beta}\dot{x} = {}_{\beta}f({}_{\beta}x, {}_{\beta}u, t), \quad t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}], \quad (3.59)$$

де  ${}_{\beta}x \in E^n, {}_{\beta}u \in E^{m_{\beta}}$ ;  ${}_{\beta}u$  – кусково-неперервне;  $t_{\beta} \leq t \leq t_{\beta}^*$ ;

$${}_{\beta}u(t) = {}_{\beta}u(t+0) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} u(\tau); (\beta^* = 0, \beta = 1; \beta^* = 1, \beta = 1, 1, 1, 2); t_{11} < t_{12} < t_1 < t_0$$

;  ${}_{11,12}x(t), {}_{11,12}u(t), {}_{\beta}x_n(t), (\beta = 1, 1, 1, 1, 2), Q_{\beta} (\beta = 0, 1, 1, 1, 1, 2)$  та  $W_{\beta}(t) (\beta = 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$  – позначення, що мають такий же зміст, що і в задачі (3.46) - (3.39).

Із теореми 3.1 отримуємо наступний результат.

Теорема 3.4. Для того, щоб допустимий процес задачі (3.54) - (3.59) був оптимальним, необхідно і достатньо існування таких функцій Беллмана

$$V_1({}_1x(t), t), t \in (t_1, t_0), V_{11,12}({}_{11,12}x(t), t), t \in [t_{12}, t_1], V_{11}({}_{11}x(t), t), t \in [t_{11}, t_{12}],$$

які визначені відповідно на всіх

$$({}_1x, t), {}_1x \in W_{1,x}(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_0);$$

$$({}_{11,12}x, t), {}_{11,12}x \in W_{11,12,x}(t) \quad (t_{12} \leq t \leq t_1);$$

$$({}_{11}x, t), {}_{11}x \in W_{11,x}(t) \quad (t_{11} \leq t \leq t_{12}),$$

мають кусково-неперервні частинні похідні і задовольняють рівнянням відповідно (3.49),  $t \in [t_1, t_0]$ ; (3.48),  $t \in [t_{12}, t_1]$ ; (3.47),  $t \in [t_{11}, t_{12}]$  всюди, де існують ці похідні, зв'язані граничними умовами [14, 15]

$$V_1({}_1x(t_0), t_0) = S_0({}_1x(t_0), t_0) \Big|_{({}_1x(t_0), t_0) \in Q_0}, \quad (3.60)$$

$$V_{11,12}({}_{11,12}x(t_1), t_1) = \left[ S_1({}_1x(t_1), t_1) + V_1({}_1x(t_1), t_1) \right] \Big|_{({}_1x(t_1), t_1) \in Q_1}, \quad (3.61)$$

$$V_{11}({}_{11}x(t_{12}), t_{12}) = V_{11,12}({}_{11}x(t_{12}), {}_{12}x(t_{12}), t_{12}) \Big|_{{}_{12}x(t_{12}), t_{12} \in Q_{12}} \quad (3.62)$$

та задовольняють співвідношенню

$$\hat{I} = \inf_{(t_1, x(t_1)) \in Q_{11}} \inf_{(t_2, x(t_2)) \in Q_{12}} \inf_{(t_1, x(t_1)) \in Q_1} \inf_{(t_0, x(t_0)) \in Q_0} [V_{11}(x(t_{11}), x(t_{12})), \\ 12x(t_{12}), 1x(t_1); t_{11}, t_{12}, t_1, t_0)]. \quad (3.63)$$

Позначення  $W_{1,x}(t)$ ,  $W_{11,12,x}(t)$ ,  $W_{11,x}(t)$  мають такий же зміст, що і в теоремі 3.3.

### 3.4. Конструювання оптимальної розгалуженої траєкторії складеної динамічної системи

Викладені в попередніх розділах і підрозділах методи оптимізації розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем вимагають для своєї реалізації істотних обчислювальних ресурсів. Запропонований в роботах Красовського А.А., Шендрика В.С. [51-56] і розвинений далі в роботах Букова В.Н. [25], Федосєєва О. С. [108] та ін. метод аналітичного конструювання алгоритмів керування із використанням функціоналу узагальненої роботи є значно простішим в обчислювальному відношенні, що дозволяє використовувати його не тільки на етапі попереднього синтезу розгалужених траєкторій СДС, а й в процесі функціонування системи в реальному масштабі часу [110, 111].

#### 3.4.1. Нова інтерпретація функціоналу узагальненої роботи

Задачу автоматичного керування, що розглядається нижче, можна назвати дворівневою. Суть цієї задачі полягає в наступному.

Динамічну систему

$$\dot{\delta} = f(x, u, W_1, t), \quad (3.64)$$

де  $\delta \in E^n$ ,  $u \in E^m$ ,  $W_1 \in E^m$ ;  $u$  і  $W_1$  – векторні керування, необхідно перевести з різноманіття

$$(\delta(t_0), t_0) \in Q_0 \quad (3.65)$$

на різноманіття

$$(\delta(t_f), t_f) \in Q_f \quad (3.66)$$

так, щоб мінімізувати критерій

$$I = S(\delta(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, W_1, W_2, t) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (3.67)$$

де  $W_2$  – в загальному випадку матрична функція керування розміру  $m_2 \times m_2^*$ , за умови що  $W_1 = W_1(\hat{x}, \hat{u}, t)$ ,  $W_2 = W_2(\hat{x}, \hat{u}, t)$  відомі функції часу та оптимальних значень фазових координат і керувань, тобто

$$I = I(\delta(t_0), t_0; \delta(t_f), t_f; u(\cdot), x(\cdot)) \Big|_{W_i(\hat{x}, \hat{u}, t) (i=1,2)} \quad (3.68)$$

Поставлену задачу назвемо задачею першого рівня.

Її вирішення методом, що базується на принципі мінімуму дають рівняння [11, 87, 88]

$$\delta H / \delta u \Big|_{\wedge} = 0, \quad (3.69)$$

$$\dot{\lambda} + \delta H / \delta x \Big|_{\wedge} = 0, \quad (3.70)$$

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{u}, W_1(\hat{x}, \hat{u}, t), t), \quad (3.71)$$

$$(\delta(t_0), t_0) \in Q_0, (\delta(t_f), t_f) \in Q_f \quad (3.72)$$

де

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \lambda, t) = \left[ L(\hat{x}, \hat{u}, W_1, W_2, t) + \lambda^T f(\hat{x}, \hat{u}, W_1, t) \right] \Big|_{W_i(\hat{x}, \hat{u}, t) (i=1,2)}$$

і методом динамічного програмування рішення описується рівняннями [54]

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ L(\hat{x}, u, W_1, W_2, t) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \Big|_{\wedge} f(\hat{x}, u, W_1, t) \right] = 0, \quad (3.73)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = L(\hat{x}, \hat{u}, W_1, W_2, t) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \bigg|_{\wedge} f(\hat{x}, \hat{u}, W_1, t), \quad (3.74)$$

$$V(\delta(t_f), t_f) = S(\delta(t_f), t_f); \quad (3.75)$$

$$\dot{\delta} = f(\delta, \hat{u}, W_1, t); \quad (3.76)$$

$$(\delta(t_0), t_0) \in Q_0, (\delta(t_f), t_f) \in Q_f \quad (3.77)$$

де функція Беллмана має вигляд

$$V(\delta(t), t) = \left[ \min_{u^{(i)}} \int_t^{t_f} L(x, u, W_1, W_2, t) dt + S(\delta(t_f), t_f) \right]_{W_i(\hat{x}, \hat{u}, t) (i=1,2)} .$$

Задачу другого рівня складають рівняння (3.69-3.72) або (3.73-3.77). Її вирішення полягає у виборі керувань  $W_i(\hat{x}, \hat{u}, t) (i=1,2)$ , які б спростили процедуру розв'язку рівнянь (3.69-3.72) або (3.73-3.77).

Розглянемо декілька підходів, що дозволяють дати змістовне трактування другому рівню задачі:

1. Нехай динамічна система (3.64) може мати керування різної ефективності, частина з яких може бути віднесена до вектору  $U$ , а друга частина – до вектору  $W_1$ . Вирішуючи задачу на другому рівні будемо шукати такі керування  $W_1$ , які б забезпечували найбільш сприятливі умови для застосування керувань першого рівня  $U$ .

Так, наприклад, в якості  $W_1$  можуть розглядатися керування, що визначають конфігурацію об'єкта. Виникає можливість підлаштовувати об'єкт за допомогою  $W_1$  так, щоб керування ним за допомогою  $U$  було найбільш ефективним.

2. Керування  $W_2$  впливає на рівняння, за якими обчислюється керування  $U$ , надаючи цьому керуванню додаткові властивості, які в кінцевому рахунку впливають на характер руху системи (3.64).

Використовуючи концепцію керування  $W_2$ , можна вирішувати з одного боку, проблему вибору вагових коефіцієнта функціоналу (3.67), розглядаючи ці коефіцієнти як керування, а з іншого боку управляти складністю рівнянь, за якими обчислюється керування  $U$ . Зокрема, останнє речення має сенс у випадку неточного значення параметрів об'єкта керування, внаслідок чого немає необхідності абсолютно точно розв'язувати рівняння, що визначають оптимальне керування.

Крім того, такий підхід можна розглядати, як один із способів здійснення редукції математичних моделей оптимальних процесів (3.71) або (3.76) [104].

3. У разі некоректно поставлених задач має сенс використовувати керування  $W_2$  в якості стабілізуючої добавки до функціоналу, що дозволить організувати стійку процедуру наближеного знаходження оптимального керування [26].

Спосіб пошуку  $W_i(\hat{x}, \hat{u}, t)$  ( $i = 1, 2$ ) істотно залежить від вихідного представлення критерію та моделі об'єкта. Розглянемо деякі конструктивні результати, отримані при використанні другого підходу в разі, коли

$$f(x, u, W_1, t) = \varphi(x, t) + \psi(x, u, W_1, t), \quad (3.78)$$

$$L(x, u, W_1, W_2, t) = Q(x, t) + \aleph(x, u, W_1, W_2, t), \quad (3.79)$$

гамільтоніан набуває вигляду

$$H(x, u, W_1, W_2, \lambda, t) = Q(x, t) + \aleph(x, u, W_1, W_2, t) + \lambda^T \varphi(x, t) + \lambda^T \psi(x, u, W_1, t). \quad (3.80)$$

Дослідимо його на мінімум по  $U$ :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial U} \right)^T = \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T + \lambda^T \left( \frac{\partial \psi}{\partial U} \right)^T = 0. \quad (3.81)$$

Зі співвідношення (3.81) отримуємо, що

$$\lambda^T \Psi = - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{-1} \Psi. \quad (3.82)$$

Після підстановки  $\lambda^T \Psi$  в (3.80) знаходимо вираз для мінімізованого гамільтоніану

$$\begin{aligned} H(x, u, W_1, W_2, \lambda, t) &= Q(x, t) + \aleph(x, u, W_1, W_2, t) + \\ &+ \lambda^T \varphi(x, t) - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{-1} \Psi = Q(x, t) + \lambda^T \varphi(x, t), \end{aligned} \quad (3.83)$$

де керування  $W_1$  і  $W_2$  обрані так, щоб виконувалася рівність

$$\aleph(x, u, W_1, W_2, t) - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{-1} \Psi = 0. \quad (3.84)$$

Враховуючи (3.78), (3.79), (3.83), (3.84), результат рішення задачі другого рівня, що задається рівняннями (3.69) – (3.72) або (3.73) – (3.77), запишеться відповідно у вигляді

$$\left. \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \right|_{\wedge} + \lambda^T \left. \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right) \right|_{\wedge} = 0, \quad (3.85)$$

$$\dot{\lambda} + \left. \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right|_{\wedge} + \lambda^T \left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right|_{\wedge} = 0, \quad (3.86)$$

$$\dot{\hat{x}} = \varphi(\hat{x}, t) + \Psi(\hat{x}, \hat{u}, W_1, t), \quad (3.87)$$

$$(\tilde{\delta}(t_0), t_0) \in Q_0, (\tilde{\delta}(t_f), t_f) \in Q_f, \quad (3.88)$$

$$\aleph(\hat{x}, \hat{u}, W_1, W_2, t) - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \left. \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{-1} \right|_{\wedge} \Psi \Big|_{\wedge} = 0 \quad (3.89)$$

або

$$\left. \left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \right|_{\wedge} + \left. \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right|_{\wedge} \left. \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^T \right|_{\wedge} = 0, \quad (3.90)$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^T \Big|_{\wedge} = Q(\hat{x}, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \Big|_{\wedge} \varphi(\hat{x}, t), \quad (3.91)$$

$$V(\tilde{\delta}(t_f), t_f) = S(\tilde{\delta}(t_f), t_f), \quad (3.92)$$

$$\dot{\hat{x}} = \varphi(\hat{x}, t) + \psi(\hat{x}, \hat{u}, W_1, t), \quad (3.93)$$

$$(\tilde{\delta}(t_0), t_0) \in Q_0, (\tilde{\delta}(t_f), t_f) \in Q_f, \quad (3.94)$$

$$\aleph(\hat{x}, \hat{u}, W_1, W_2, t) - \left(\frac{\partial \aleph}{\partial U}\right)^T \Big|_{\wedge} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial U}\right)^{-1} \Big|_{\wedge} \psi \Big|_{\wedge} = 0, \quad (3.95)$$

де враховано, що  $\lambda = \partial V / \partial x \Big|_{\wedge}$ . Відзначимо, що рівняння (3.85) – (3.89) або (3.85) – (3.89) дають рішення дворівневої задачі в цілому. Розглянемо рекурентну процедуру пошуку рішення дворівневої задачі, що дозволить отримати послідовність  $\{\hat{x}^L, \hat{u}^L, W_1^L, W_2^L\}$ , яка може виявитися корисною при вирішенні деяких типів задач. Нехай відомий  $L-1$ -й член послідовності:  $\{\hat{x}^{L-1}, \hat{u}^{L-1}, W_1^{L-1}, W_2^{L-1}\}$ . Запишемо вираз для мінімуму гамільтоніану з керування, відповідне  $L$ -му члену послідовності, і виконаємо його розкладання в ряд Тейлора в околиці значення  $\hat{u}^{L-1}$ :

$$\begin{aligned}
H^L &= Q(\hat{x}^L, t) + \aleph(\hat{x}^L, \hat{u}^L, W_1^L, W_2^L, t) + \lambda^{L^T} \varphi(\hat{x}^L, t) - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^{-1} \Psi \Bigg|_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^L \\ W_1^L \\ W_2^L}} = \\
&= Q(\hat{x}^L, t) + \lambda^{L^T} \varphi(\hat{x}^L, t) + \aleph(\hat{x}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) + \\
&+ \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}} (\hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}) + R_{\aleph}(\hat{x}^L, \hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) - \\
&- \left[ \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^{-1} \Psi \right]_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}} - \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^{-1} \Psi \right] \right]_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}} \times \\
&\times (\hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}) + R_{\Psi}(\hat{x}^L, \hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t),
\end{aligned} \tag{3.96}$$

де  $R_{\aleph}$  та  $R_{\Psi}$  – залишкові члени розкладання в ряд Тейлора функцій відповідно  $\aleph$  та  $\left( \frac{\partial \aleph}{\partial U} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{-1} \Psi$ . Керування  $W_1^L$  та  $W_2^L$  будемо шукати, використовуючи умови

$$\begin{aligned}
&\aleph(\hat{x}^L, \hat{u}^L, W_1^L, W_2^L, t) - \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^{-1} \Psi \Bigg|_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}} + \\
&+ R_{\aleph}(\hat{x}^L, \hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) - R_{\Psi}(\hat{x}^L, \hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) = 0.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Тоді гамільтоніан (3.96) набуде вигляду

$$H^L = Q(\hat{x}^L, t) + \lambda^{L^T} \varphi(\hat{x}^L, t) + D(\hat{x}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t)(\hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}), \tag{3.98}$$

де

$$D(\hat{x}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) = \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)^T \Bigg|_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}} - \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial \aleph}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^{-1} \Psi \right] \right] \Bigg|_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^{L-1} \\ W_1^L \\ W_2^L}}. \tag{3.99}$$

Остаточно рекурентна процедура пошуку рішення дворівневої задачі описується рівняннями

$$\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u} \right)^T + \lambda^{L^T} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) \right]_{\substack{\hat{x}^L \\ W_1^L \\ W_2^L}} = 0, \quad (3.100)$$

$$\dot{\lambda}^L + \frac{\partial Q(\hat{x}^L, t)}{\partial \hat{x}^L} + \lambda^{L^T} \frac{\partial \varphi(\hat{x}^L, t)}{\partial \hat{x}^L} + \frac{\partial D(\hat{x}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t)}{\partial \hat{x}^L} (\hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}) = 0, \quad (3.101)$$

$$\dot{\hat{x}}^L = \varphi(\hat{x}^L, t) + \psi(\hat{x}^L, \hat{u}^L, W_1^L, W_2^L, t), \quad (3.102)$$

$$(\hat{x}^L(t_0), t_0) \in Q_0, (\hat{x}^L(t_f), t_f) \in Q_f, L = 1, 2, \dots \quad (3.103)$$

при використанні принципу мінімуму і рівняннями

$$\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u} \right)^T + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^T \right]_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^L \\ W_1^L \\ W_2^L}} = 0, \quad (3.104)$$

$$-\frac{\partial V(\hat{x}^L, t)}{\partial t} = Q(\hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V(\hat{x}^L, t)}{\partial \hat{x}^L} \right)^T \varphi(\hat{x}^L, t) + D(\hat{x}^L, \hat{u}^{L-1}, W_1^L, W_2^L, t) (\hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}), \quad (3.105)$$

$$V(\hat{x}^L(t_f), t_f) = S(\hat{x}^L(t_f), t_f), \quad (3.106)$$

$$\dot{\hat{x}}^L = \varphi(\hat{x}^L, t) + \psi(\hat{x}^L, \hat{u}^L, W_1^L, t) = 0, \quad (3.107)$$

$$(\hat{x}^L(t_0), t_0) \in Q_0, (\hat{x}^L(t_f), t_f) \in Q_f, L = 1, 2, \dots \quad (3.108)$$

при використанні динамічного програмування з урахуванням в обох випадках співвідношення (3.97), а також за умови застосування рівнянь (3.85-3.89) або (3.90- (3.95) для відшукування  $\{\hat{x}^0, \hat{u}^0, W_1^0, W_2^0\}$ .

Відзначимо, що подальші конструктивні результати залежать від виду функцій  $\aleph(x, u, W_1, W_2, t)$  та  $\psi(x, u, W_1, t)$ . Так, наприклад, Красовським А.А. вперше було проведено дослідження дворівневої задачі в припущенні, що [52-56]

$$\aleph(x, u, W_1, W_2, t) = p(u, t) + W_2(t), \quad (3.109)$$

$$\psi(x, u, W_1, t) = \mu(x, t)u. \quad (3.110)$$

У цьому випадку рекурентна процедура аналітичного конструювання по Красовському А.А. відповідно до рівнянь (3.90) – (3.95) та (3.104) – (3.108) записується у вигляді:  $L = 0$ ,

$$\left[ \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \mu \right]_{\substack{\hat{x}^0 \\ \hat{u}^0}} = 0, \quad (3.111)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{\hat{x}^0} = Q(\hat{x}^0, t) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \Big|_{\hat{x}^0} \varphi(\hat{x}^0, t) = 0, \quad (3.112)$$

$$V(\hat{x}^0(t_f), t_f) = S(\hat{x}^0(t_f), t_f), \quad (3.113)$$

$$\dot{\hat{x}}^0 = \varphi(\hat{x}^0, t) + \mu(\hat{x}^0, t)\hat{u}^0, \quad (3.114)$$

$$(\hat{x}^0(t_0), t_0) \in Q_0, (\hat{x}^0(t_f), t_f) \in Q_f, \quad (3.115)$$

$$W_2^0(t) + P(\hat{u}^0, t) - \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T \Big|_{\hat{u}^0} \hat{u}^0 = 0; L = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.116)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \mu \right]_{\substack{\hat{x}^L \\ \hat{u}^L}} = 0, \quad (3.117)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{\hat{x}^L} = Q(\hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \Big|_{\hat{x}^L} \varphi(\hat{x}^L, t) - \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T u \right]_{\hat{u}^{L-1}(t)} \left[ \hat{u}^L - \hat{u}^{L-1}(t) \right], \quad (3.118)$$

$$V(\hat{x}^L(t_f), t_f) = S(\hat{x}^L(t_f), t_f), \quad (3.119)$$

$$\dot{\hat{x}}^L = \varphi(\hat{x}^L, t) + \mu(\hat{x}^L, t)\hat{u}^L, \quad (3.120)$$

$$(\hat{x}^L(t_0), t_0) \in Q_0, (\hat{x}^L(t_f), t_f) \in Q_f, L = 1, 2, \dots, \quad (3.121)$$

$$W_2^L(\hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}, t) + P(\hat{u}^{L-1}(t), t) - \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T \Big|_{\hat{u}^{L-1}(t)} \hat{u}^{L-1}(t) + R(\hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}(t), t) = 0, \quad (3.122)$$

де  $R(\hat{u}^L, \hat{u}^{L-1}(t), t)$  – різниця залишкових членів розкладання в ряд Тейлора функцій  $P(\hat{u}^L(t), t)$  та  $\left( \frac{\partial P}{\partial u} \right)^T \Big|_{\hat{u}^L} \hat{u}^L$ , починаючи з другого, в околиці значення  $\hat{u}^{L-1}$ .

Нехай  $P(u, t) = \frac{1}{2} u^T \rho(t) u$ , де  $\rho = \rho^T$ . Тоді (3.111)–(3.122) будуть мати наступний вигляд

$$\hat{u}^L = -\frac{1}{2} \rho^{-1} \mu^T(\hat{x}^L, t) \frac{\partial V(\hat{x}^L, t)}{\partial \hat{x}^L}, \quad (3.123)$$

$$-\frac{\partial V(\hat{x}^L, t)}{\partial t} \Big|_{\hat{x}^L} = Q(\hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V(\hat{x}^L, t)}{\partial \hat{x}^L} \right)^T \varphi(\hat{x}^L, t), \quad (3.124)$$

$$V(\hat{x}^L(t_f), t_f) = S(\hat{x}^L(t_f), t_f), \quad (3.125)$$

$$\dot{\hat{x}}^L = \varphi(\hat{x}^L, t) + \mu(\hat{x}^L, t)\hat{u}^L, \quad (3.126)$$

$$(\hat{x}^L(t_0), t_0) \in Q_0, (\hat{x}^L(t_f), t_f) \in Q_f, L = 1, 2, \dots, \quad (3.127)$$

$$W_2^L = \begin{cases} 1/2(\hat{u}^{0T} \rho(t) \hat{u}^0), L = 0; \\ 1/2(\hat{u}^{L-1T} \rho(t) \hat{u}^{L-1}), L = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.128)$$

де

$$Q^*(\hat{x}^L, t) = \begin{cases} Q(\hat{x}^0, t), L = 0; \\ Q(\hat{x}^L, t) + 1/2(\hat{u}^{L-1T} \rho(t) \hat{u}^{L-1}), L = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.129)$$

$$\varphi^*(\hat{x}^L, t) = \begin{cases} \varphi(\hat{x}^0, t), L = 0; \\ \varphi(\hat{x}^L, t) + \mu(\hat{x}^L, t) \hat{u}^{L-1}(t), L = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.130)$$

Рекурентний алгоритм аналітичного конструювання по Красовському А.А дозволяє в повній мірі використовувати обчислювальні процедури, розроблені в даний час для вирішення відомих рівнянь аналітичного конструювання по функціоналу узагальненої роботи [55]. Відзначимо, що ці рівняння відповідають рівнянням (3.111) – (3.122) або (3.123) – (3.130) при  $L=0$ .

Функції  $\aleph(x, u, W_1, W_2, t)$  та  $\psi(x, u, W_1, t)$ , в залежності від різних типів об'єктів керування, можуть мати вигляд, що відрізняється від (3.109) – (3.110). Однак методика рішення дворівневих завдань, викладена в даному параграфі, може бути поширена і на ці випадки.

### 3.4.2. Аналітичне конструювання траєкторій складеної динамічної системи з довільною схемою розгалужень

Розглянемо задачу (3.1) – (3.7), в якій функціонал (3.1) перепишемо у наступному вигляді

$$I = S_0(X(t_0^+), t_0) + \sum_{i=1}^N I_i \leq A, \quad (3.131)$$

де  $A = \text{const} > I$ .

Сформульована задача (3.2) – (3.7), (3.131) має безліч рішень. В задачах великої розмірності, що вирішуються на борту складених динамічних систем, потрібно отримати якомога швидше одне з рішень, що задовольняють нерівності (3.131). Концепція оперативного синтезу траєкторій СДС в постановці (3.1) – (3.7), (3.131) цілком реальна, так як в

цьому випадку нас не стільки цікавить строго оптимальний рух, скільки рух, який не виводить за межі існуючих в даний момент часу на борту СДС ресурсів. Немає користі в тому, що синтезована із запізненням оптимальна траєкторія заощадить нам більше ресурсів, чим неоптимальна, але синтезована швидко і в межах допустимих витрат. Використання методики сумісного синтезу керування по Красовському А.А. і Букову В.Н. [54, 25 ] є одним із шляхів вирішення задачі (3.2) – (3.7), (3.131) .

Переформулюємо задачу (3.2) – (3.7), (3.131) до виду дворівневої задачі оптимізації розгалуженої траєкторії, яка, як було показано в підрозділі 3.4.1, включає в себе в якості окремого випадку задачу Красовського А.А.:

$$I = S_0({}_1X(t_0^+), t_0) + \sum_{i=1}^N [I_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} W_{2,i}(\hat{U}, t) dt] \rightarrow \inf, \quad (3.132)$$

$$I^* = S_0({}_1X(t_0^+), t_0) + \sum_{i=1}^N I_i \leq A, \quad (3.133)$$

$$({}_1X(t_0^+), t_0) \in B_0, ({}_N X(t_N^-), t_N) \in B_N, \quad (3.134)$$

$$({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) \in B_i (i = \overline{1, N-1}), \quad (3.135)$$

$${}_i \dot{X} = {}_i \Phi({}_i X, t) + {}_i M({}_i X, t) {}_i U, t \in [t_{i-1}^+, t_i^-], \quad (3.136)$$

$${}_i X \in E^{n_{\Sigma,i}}, {}_i U \in E^{m_{\Sigma,i}}, W_{2,i} : E^{m_{\Sigma,i}} \times E^1 \rightarrow E^1 (i = \overline{1, N}), \quad (3.137)$$

де

$$I_i = S_i({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [Q_i({}_i X, t) + P_i({}_i U, t)] dt, \quad (3.138)$$

$$I_N = S_N({}_N X(t_N^-), t_N) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} [Q_N({}_N X, t) + P_N({}_N U, t)] dt, \quad (3.139)$$

$A > 0$ ;  ${}_i U$  та  $W_{2,i}$  – керування відповідно першого і другого рівнів на інтервалі часу  $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ .

Нехай  $\{{}_i X^L(t), {}_i U^L(t), t_0, t_i (i = \overline{1, N}), t_0 \leq t \leq t_N\}, L = 0, 1, 2, \dots$  – послідовність допустимих процесів задачі (3.132), (3.134) - (3.137).

Теорема 3.5. Для оптимальності елементів послідовності допустимих процесів необхідно існування таких функцій  $V_i({}_i \hat{X}^L, t), t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), які визначені і неперервні на всіх  $({}_i \hat{X}^L, t)$ , що володіють кусково-неперервними частинними похідними і задовольняють рівнянням

$$-\frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^0, t)}{\partial t} = Q_i({}_i \hat{X}^0, t) + \left( \frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^0, t)}{\partial {}_i \hat{X}^0} \right)_i^T \Phi({}_i \hat{X}^0, t), \quad (3.140)$$

$$\left( \frac{\partial P_i({}_i \hat{U}^0, t)}{\partial {}_i \hat{U}^0} \right)^T + \left( \frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^0, t)}{\partial {}_i \hat{X}^0} \right)_i^T M({}_i \hat{X}^0, t) = 0, \quad (3.141)$$

$$W_{2,i}^0 + P_i({}_i \hat{U}^0, t) - \left( \frac{\partial P_i({}_i \hat{U}^0, t)}{\partial {}_i \hat{U}^0} \right)_i \hat{U}^0 = 0, L = 0, \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^i, t)}{\partial t} &= Q_i({}_i \hat{X}^L, t) + \left( \frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^L, t)}{\partial {}_i \hat{X}^L} \right)_i^T \Phi({}_i \hat{X}^L, t) - \\ & - \left[ \frac{\partial}{\partial {}_i \hat{U}^{L-1}} \left( \frac{\partial P_i({}_i \hat{U}^{L-1}, t)}{\partial {}_i \hat{U}^{L-1}} \right)_i^T \hat{U}^{L-1} \right]^T [{}_i \hat{U}_i^L - {}_i \hat{U}^{L-1}(t)], \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\left( \frac{\partial P_i({}_i \hat{U}^L, t)}{\partial {}_i \hat{U}^L} \right)^T + \left( \frac{\partial V_i({}_i \hat{X}^L, t)}{\partial {}_i \hat{X}^L} \right)_i^T M({}_i \hat{X}^L, t) = 0, \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} W_{2,i} + P_i({}_i \hat{U}^{L-1}(t), t) - \left( \frac{\partial P_i({}_i \hat{U}^{L-1}, t)}{\partial {}_i \hat{U}^{L-1}} \right)_i^T \hat{U}^{L-1}(t) + \\ + R_i({}_i \hat{U}^L, {}_i \hat{U}^{L-1}(t), t) = 0; \quad L = 1, 2, \dots; i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.145)$$

зв'язаних граничним умовами (1.282), (1.283) і задовольняють співвідношенню (1.284).

Доведення. Безпосередньо з теореми 3.1 доводиться існування функцій  $V_i(\hat{X}^L, t)$ ,  $t \in [t_{i-1}^+, t_i^-]$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $L = 0, 1, 2, \dots$ , що задовольняють рівняння Беллмана (3.9), граничним умовам (3.10), (3.11), співвідношенню (3.12). Далі з (3.9) отримуємо рівняння (3.141) і (3.144) для відшукування оптимального рівняння першого рівня  ${}_i\hat{U}^L(t)$   $L = 0, 1, 2, \dots$ .

Відповідно до методики виведення рівнянь (3.111) – (3.122) формуємо рівняння (3.140), (3.142), (3.143), (3.145) для відшукування функцій  $V_i(\hat{X}^L(t), t)$  та керування другого рівня  $W_{2,i}^L$   $L = 0, 1, 2, \dots$  на кожному із інтервалів часу  $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ . Таким чином, теорема доведена.

Доведена теорема 3.5 дає рішення дворівневої задачі без урахування нерівності (3.133). Введемо для кожного елемента послідовності  $\{{}_iX^L(t), U^L(t), t_0, t_i (i = \overline{1, N}; L = 0, 1, 2, \dots), t_0 \leq t \leq t_N\}$  перевірку виконання умови (3.133).

В результаті кожен з елементів послідовності допустимих процесів задачі (3.132), (3.134) - (3.139), що задовольняє нерівності (3.133) може бути прийнятий за рішення задачі (3.2) – (3.7), (3.131) або (3.133) - (3.137). Відзначимо, що властивості допустимої послідовності, отриманої в результаті рішення задачі (3.132), (3.134) – (3.137) рекурентним методом Красовського А.А., в кожному конкретному випадку вимагають додаткового дослідження.

**3.4.3. Наслідок 1. Конструювання траєкторії руху складеної динамічної системи зі схемою розгалуження, що містить центральну і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення**

Розглянемо задачу оптимізації траєкторії СДС, схема якої представлена на рис. 1.9, в постановці (3.21) – (3.25), додавши до неї контрольну нерівність (3.131) і функціонал узагальненої роботи:

$$I = \sum_{i=1}^K \left\{ I_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} W_{2,i}(\hat{u}(t), t) dt + \sum_{j=1}^{r_i} \left[ I_{ij} + \int_{t_i}^{t_{ij}} W_{2,ij}(\hat{u}(t), t) dt \right] \right\} \rightarrow \inf, \quad (3.146)$$

$$I^* = \sum_{i=1}^K \left( I_i + \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij} \right) \leq A, \quad (3.147)$$

$$({}_\beta x(t_\beta), t_\beta) \in Q_\beta, \quad (3.148)$$

$${}_\beta \dot{x} = {}_\beta \varphi({}_\beta x, t) + {}_\beta \mu({}_\beta x, t) {}_\beta u, t \in [t_{\beta^*}, t_\beta], \quad (3.149)$$

$${}_\beta x \in E^n, {}_\beta u \in E^{m_\beta}, W_{2,\beta} : E^{m_\beta} x E^1 \rightarrow E^1, \quad (3.150)$$

де

$$I_\beta = S_\beta({}_\beta x(t_\beta), t_\beta) + \int_{t_\beta}^{t_{\beta^*}} [Q_\beta({}_\beta x, t) + P_\beta({}_\beta u, t)] dt \quad (3.151)$$

$$(\beta = i, \beta^* = i = 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, K}; j = \overline{1, r_i}), \quad A > \hat{I}, t_{i-1} < t_i (i = \overline{1, k}).$$

Відзначимо, що в момент часу  $t_i (i = \overline{1, k})$  фазові координати підсистем рівні між собою і не мають стрибка, за винятком  $n$ -ї фазової координати, що описує зміну маси в механічних системах, для якої справедливий закон збереження маси.

Нехай  $\beta x^L(t), \beta u^L(t), t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]$  ( $\beta = i, \beta^* = i - 1;$

$\beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_j}$ ) послідовність допустимих процесів задачі (3.146), (3.148) – (3.151).

Сформулюємо у вигляді першого наслідку з теореми 3.5 умови оптимальності конструювання траєкторії руху складеної динамічної системи зі схемою розгалуження, що містить центральну і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення. Для оптимальності елементів послідовності допустимих процесів необхідно існування таких функцій Беллмана  $V_{\beta}(\beta \hat{x}^L(t), t) t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]$ , які визначені і неперервні на всіх  $(\beta \hat{x}^L, t)$ , мають кусково - неперервні частинні похідні, задовольняють рівнянням

$$-\frac{\partial V_{\beta}(\beta \hat{x}^0, t)}{\partial t} = Q_{\beta}(\beta \hat{x}^0, t) + \left( \frac{\partial V_{\beta}(\beta \hat{x}^0, t)}{\partial \beta \hat{x}^0} \right)^T {}_{\beta} \varphi(\beta \hat{x}^0, t), \quad (3.152)$$

$$W_{2, \beta}^0(\beta \hat{u}^0, t) + P_{\beta}(\beta \hat{u}^0, t) - \left( \frac{\partial P_{\beta}(\beta \hat{u}^0, t)}{\partial \beta \hat{u}^0} \right)^T {}_{\beta} \hat{u}^0 = 0, \quad (3.153)$$

$$-\left( \frac{\partial V_{\beta}(\beta \hat{x}^L, t)}{\partial t} \right) = Q_{\beta}(\beta \hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V_{\beta}(\beta \hat{x}^L, t)}{\partial \beta \hat{x}^L} \right)^T {}_{\beta} \varphi(\beta \hat{x}^L, t) - \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta \hat{u}^{L-1}} \left( \frac{\partial P_{\beta}(\beta \hat{u}^{L-1}, t)}{\partial \beta \hat{u}^{L-1}} \right)^T {}_{\beta} \hat{u}^{L-1} \right] [{}_{\beta} \hat{u}^L - {}_{\beta} \hat{u}^{L-1}(t)], \quad (3.154)$$

$$W_{2, \beta}^L(\beta \hat{u}^L, {}_{\beta} \hat{u}^{L-1}, t) + P_{\beta}(\beta \hat{u}^{L-1}, t) - \left( \frac{\partial P_{\beta}(\beta \hat{u}^{L-1}, t)}{\partial \beta \hat{u}^{L-1}} \right)^T {}_{\beta} \hat{u}^{L-1}(t) + R_{\beta}(\beta \hat{u}^L, {}_{\beta} \hat{u}^{L-1}(t), t) = 0, \quad L = 1, 2, \dots, \quad (3.155)$$

$$\left( \frac{\partial P_{\beta}(\beta \hat{u}^L, t)}{\partial \beta \hat{u}^L} \right)^T + \left( \frac{\partial V_{\beta}(\beta \hat{x}^L, t)}{\partial \beta \hat{x}^L} \right)^T {}_{\beta} \mu(\beta \hat{x}^L, t) = 0, \quad (3.156)$$

$$L = 0, 1, 2, \dots; \quad \beta = i, ij; \quad i = \overline{1, K}; \quad j = \overline{1, r_j},$$

зв'язаних граничними умовами (3.30), (3.31) і задовольняють співвідношення (3.32).

Доказ цих умов можна виконати двома способами. Перший полягає в тому, що отримати співвідношення (3.152) - (3.156) при дотриманні умов (3.148) - (3.150) як окремих випадок рівнянь (3.140) - (3.145) теореми 1.11. Другий спосіб полягає у використанні того прийому, який застосовувався для доведення теореми 1.11. Суть його полягає в наступному.

Безпосередньо з теореми 1.8 доводиться існування функцій  $V_{\beta}(\hat{x}(t), t)$   $t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}]$  ( $\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \bar{1}, \bar{k}; j = \bar{1}, \bar{r}_i$ ), що задовольняють рівняння Беллмана (3.29), граничним умовам (3.30), (3.31) і співвідношенню (3.32). З рівняння (3.29) отримуємо рівняння (3.156) для відшукування керування  $\beta \hat{u}^L(t)$ ,  $L = 0, 1, 2, \dots$ . Після цього, відповідно до методики виведення рівнянь (3.111) - (3.122) формулюємо рівняння (3.152) - (3.154), що й треба було довести. Рішення задачі (3.146) - (3.150) вважається закінченим, якщо знайдений хоча б один елемент допустимої послідовності задачі (3.146), (3.148) - (3.150), що задовольняє нерівності (3.147).

#### **3.4.4. Наслідок 2. Конструювання розгалуженої траєкторії руху складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем**

У даному підрозділі, як наслідок із теореми 3.5, викладено умови оптимальності, що дозволяють оптимізувати методом рекурентного аналітичного конструювання по Красовському А.А. типові розгалужені траєкторії з урахуванням взаємного впливу підсистем після розділення. Математично взаємний вплив підсистем буде відображено як в рівняннях їх руху, так і в критерії ефективності.

Задача 1. Розглядалась типова розгалужена траєкторія з розділенням підсистем з урахуванням їх взаємного впливу після розділення (рис.1.10. а).

Постановка задачі :

$$I = I_1 + \int_{t_0}^{t_1} w_{2,1}(\hat{u}, t) dt + I_{12} + \int_{t_1}^{t_{12}} w_{2,12}(\hat{u}, t) dt + I_{11} + \int_{t_{12}}^{t_{11}} w_{2,11}(\hat{u}, t) dt, \quad (3.157)$$

$$I^* = I_1 + I_{12} + I_{11} \leq A, \quad (3.158)$$

$$({}_1x(t_0), t_0) \in Q_0, \quad (\beta x(t_\beta), t_\beta) \in Q_\beta \quad (\beta = 1, 11, 12), \quad (3.159)$$

$${}_1\dot{x} = {}_1\varphi({}_1x, t) + {}_1\mu({}_1x, t)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.160)$$

$${}_{11}\dot{x} = \begin{cases} {}_{11}^{12}\varphi({}_{11}x, {}_{12}x, t) + {}_{11}^{12}\mu^{11}({}_{11}x, {}_{12}x, t)u + {}_{11}^{12}\mu^{12}({}_{11}x, {}_{12}x, t)u, & t \in [t_1, t_{12}]; \\ {}_{11}\varphi({}_{11}x, t) + {}_{11}\mu({}_{11}x, t)u, & t \in [t_{12}, t_{11}], \end{cases} \quad (3.161)$$

$${}_{12}\dot{x} = {}_{12}\varphi({}_{12}x, {}_{11}x, t) + {}_{12}\mu^{11}({}_{12}x, {}_{11}x, t)u + \quad (3.162)$$

$$+ {}_{12}\mu^{12}({}_{12}x, {}_{11}x, t)u, \quad t \in [t_1, t_{12}],$$

$$\beta x \in E^n, \quad \beta u \in E^{m_\beta} \quad (\beta = 1, 11, 12), \quad t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11},$$

$${}_1x_r(t_1) = {}_{11}x_r(t_1) = {}_{12}x_r(t_1) \quad (r = \overline{1, n-1}), \quad (3.163)$$

$${}_1x_n(t_1) = {}_{11}x_n(t_1) + {}_{12}x_n(t_1), \quad (3.164)$$

де

$$I_\beta = S_\beta(\beta x(t_\beta), t_\beta) + \int_{t_\beta^*}^{t_\beta} [Q_\beta(\beta x, t) + P_\beta(\beta u, t)] dt \quad (3.165)$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, \beta^* = 12),$$

$$I_{12} = S_{12}(x(t_{12}), x(t_{12}), t_{12}) + \int_{t_1}^{t_{12}} [Q_{12}(x(t), x(t), t) + P_{12}(u(t), u(t), t)] dt, \quad (3.166)$$

$n$ -а фазова координата, що описує зміну маси в механічних СДС.

Нехай  $\beta x^L(t), \beta u^L(t), t_0, t_\beta (\beta = 1, 11, 12), t_0 \leq t \leq t_{11} \} L = 0, 1, 2, \dots$

послідовність допустимих процесів задачі (3.157), (3.159) – (3.164).

Сформулюємо у вигляді другого наслідку з теореми 3.5 умови оптимальності конструювання траєкторії руху складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем. Для оптимальності елементів послідовності допустимих процесів необхідно існування таких функцій

Беллмана  $V_{\beta}(\hat{x}^L(t), t)$

$t \in [t_\beta^*, t_\beta] (\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, \beta^* = 12), V_{12}, V_{12}(x_{11}^L(t), x_{12}^L(t), t) t \in [t_1, t_{12}]$ , які

визначені та неперервні відповідно на всіх  $(\hat{x}^L, t) (\beta = 1, 11), (x_{11}^L, x_{12}^L, t)$ ,

мають кусково-неперервні частинні похідні, задовольняють рівнянням (3.152) – (3.156) для  $\beta = 1, 11$  та рівнянням

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t)}{\partial t} &= Q_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t) + \left( \frac{\partial V_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t)}{\partial_{11} x_{11}^0} \right)^{T_{11}} \Phi(x_{11}^0, x_{12}^0, t) + \\ &+ \left( \frac{\partial V_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t)}{\partial_{12} x_{12}^0} \right)^T {}_{12} \Phi(x_{11}^0, x_{12}^0, t), \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} w_{2,12}^0(x_{12}^0, x_{12}^0, t) + P_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t) - \\ - \left( \frac{\partial P_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t)}{\partial_{11} x_{11}^0} \right)^T {}_{11} \hat{U}^0 - \left( \frac{\partial P_{12}(x_{11}^0, x_{12}^0, t)}{\partial_{12} x_{12}^0} \right)^T {}_{12} \hat{U}^0 = 0, \quad L = 0, \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial t} = Q_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{x}^L} \right)^T \times \\
& \times {}_{11}^{12}\Phi({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{12}\hat{x}^L} \right)^T {}_{12}\Phi({}_{12}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) - \\
& - \left[ \frac{\partial}{\partial {}_{11}u} \left( \frac{\partial P_{12}}{\partial {}_{11}u} \right)^T {}_{11}u \right] ({}_{11}\hat{u}^L - {}_{11}\hat{u}^{L-1}(t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial {}_{11}u} \left( \frac{\partial P_{12}}{\partial {}_{11}u} \right)^T {}_{12}u \right] ({}_{12}\hat{u}^L - {}_{12}\hat{u}^{L-1}(t)) + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial {}_{12}u} \left( \frac{\partial P_{12}}{\partial {}_{11}u} \right)^T {}_{11}u \right] ({}_{11}\hat{u}^L - {}_{11}\hat{u}^{L-1}(t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial {}_{12}u} \left( \frac{\partial P}{\partial {}_{12}u} \right)^T {}_{12}u \right] ({}_{12}\hat{u}^L - {}_{12}\hat{u}^{L-1}(t)) \Bigg|_{\substack{{}_{11}u={}_{11}\hat{u}^{L-1}, \\ {}_{12}u={}_{12}\hat{u}^{L-1}}}, \tag{3.169}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w_{2,12}^L({}_{11}\hat{u}^L, {}_{12}\hat{u}^L, {}_{12}\hat{u}^{L-1}, {}_{11}\hat{u}^{L-1}, t) + P_{12}({}_{11}\hat{u}^{L-1}, {}_{12}\hat{u}^{L-1}, t) - \left( \frac{\partial P_{12}({}_{11}\hat{u}^{L-1}, {}_{12}\hat{u}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{u}^{L-1}} \right)^T {}_{11}\hat{u}^{L-1} - \\
& - \left( \frac{\partial P_{12}({}_{11}\hat{u}^{L-1}, {}_{12}\hat{u}^L, t)}{\partial {}_{12}\hat{u}^{L-1}} \right)^T {}_{12}\hat{u}^{L-1} + R_{12}({}_{11}\hat{u}^{L-1}, {}_{12}\hat{u}^{L-1}, {}_{11}\hat{u}^L, {}_{12}\hat{u}^L, t), L=1,2,\dots, \tag{3.170}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial P_{12}({}_{11}\hat{u}^L, {}_{12}\hat{u}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{u}^L} \right)^T + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{x}^L} \right)^T {}_{12}\mu^{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) + \\
& + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{x}^L} \right)^T {}_{12}\mu^{11}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) = 0, \tag{3.171}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial P_{12}({}_{11}\hat{u}^L, {}_{12}\hat{u}^L, t)}{\partial {}_{12}\hat{u}^L} \right)^T + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{x}^L} \right)^T {}_{12}\mu^{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) + \\
& + \left( \frac{\partial V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t)}{\partial {}_{11}\hat{x}^L} \right)^T {}_{12}\mu^{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t) = 0, \quad L=1,2,\dots, \tag{3.172}
\end{aligned}$$

зв'язаних граничними умовами

$$V_{11}({}_{11}\hat{x}^L(t_{11}), t_{11}) = S_{11}({}_{11}\hat{x}^L(t_{11}), t_{11}) | ({}_{11}\hat{x}^L(t_{11}), t_{11}) \in Q_{11}, \tag{3.173}$$

$$V_{12}(\hat{x}^L(t_{12}), \hat{x}^L(t_{12}), t_{12}) = \left[ V_{11}(\hat{x}(t_{12}), t_{12}) + S_{12}(\hat{x}^L(t_{12}), \hat{x}^L(t_{12}), t_{12}) \right]_{(\hat{x}^L(t_{12}), t_{12}) \in Q_{12}}, \quad (3.174)$$

$$V_1(\hat{x}(t_1), t_1) = [V_{12}(\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_1), t_1) + S_1(\hat{x}(t_1), t_1)]_{(\hat{x}(t_1), t_1) \in Q_1} \quad (3.175)$$

та задовольняють співвідношенню (1.325) для кожного елемента послідовності.

Наведений результат безпосередньо впливає із загальної теореми 1.11, як окремий випадок, для якого встановлюються відповідності: індексів .

$\mathfrak{S} = (\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 12, 11\}, \{(0, 0), (1, 1), (2, 12), (3, 11)\})$ , фазових координат

$\mathfrak{N} = (\{1X, 2X, 3X\}, \{1x, (11x^T, 12x^T), 11x\}, \{(1X, 1x), (2X, 11x^T, 12x^T), (3X, 11x)\})$ ,

керувань

$$U = (\{1U, 2U, 3U\}, \{1u^T, (11u^T, 12u^T), 11u\}, \{(1U, 1u), (2U, 11u^T, 12u^T), (3U, 11u)\}),$$

$$W = (\{W_{2,1}, W_{2,2}, W_{2,3}\}, \{w_{2,1}, w_{2,12}, w_{2,11}\}, \{(W_{2,1}, w_{2,1}), (W_{2,2}, w_{2,12}), (W_{2,3}, w_{2,11})\}).$$

Рішення задачі (3.159) - (3.164) вважається закінченим, якщо знайдений хоча б один елемент послідовності задачі (3.157), (3.159) - (3.164), що задовольняє контрольному нерівності (3.158).

Задача 2. Розглядалась типова розгалужена траєкторія з групуванням підсистем (рис. 1.10, б).

Постановка задачі :

$$I = I_{11} + I_{12} + I_1 + \int_{t_{11}}^{t_{12}} w_{2,11}(\hat{u}, t) dt + \int_{t_{12}}^{t_1} w_{2,12}(\hat{u}, \hat{u}, t) dt + \int_{t_1}^{t_0} w_{2,1}(\hat{u}, t) dt + S_0(1x(t_0), t_0) + S_1(1x(t_1), t_1), \quad (3.176)$$

$$I^* = I_{11} + I_{12} + I_1 + S_0(1x(t_0), t_0) + S_1(1x(t_1), t_1) \leq A, \quad (3.177)$$

$$(1x(t_0), t_0) \in Q_0, (\beta x(t_\beta), t_\beta) \in Q_\beta (\beta = 1, 11, 12), \quad (3.178)$$

$$1\dot{x} = 1\varphi(1x, t) + 1\mu(1x, t)u, t \in [t_1, t_0], \quad (3.179)$$

$${}_{11}\dot{x} = \begin{cases} {}_{11}^{12}\varphi({}_{11}x, {}_{12}x, t) + {}_{11}^{12}\mu^{11}({}_{11}x, {}_{12}x, t) {}_{11}u + \\ + {}_{11}^{12}\mu({}_{11}x, {}_{12}x, t) {}_{12}u, t \in [t_{12}, t_1]; \\ {}_{11}\varphi({}_{11}x, t) + {}_{11}\mu({}_{11}x, t) {}_{11}u, t \in [t_{11}, t_{12}], \end{cases} \quad (3.180)$$

$${}_{11}\dot{x} = {}_{12}\varphi({}_{11}x, {}_{12}x, t) + {}_{12}\mu^{11}({}_{11}x, {}_{12}x, t) {}_{11}u + {}_{12}\mu^{12}({}_{11}x, {}_{12}x, t) {}_{12}u, t \in [t_{12}, t_1], \quad (3.181)$$

${}_{\beta}x \in E^n, {}_{\beta}u \in E^{m_{\beta}} (\beta = 1, 11, 12), t_{11} < t_{12} < t_1 < t_0,$

$${}_1x_r(t_1) = {}_{11}x_r(t_1) = {}_{12}x_r(t_1), \quad r = \overline{1, n-1}, \quad (3.182)$$

$${}_1x_n(t_1) = {}_{11}x_n(t_1) + {}_{12}x_n(t_1), \quad (3.183)$$

де

$$I_{\beta} = \int_{t_{\beta}^*}^{t_{\beta}} [Q_{\beta}({}_{\beta}x, t) + P_{\beta}({}_{\beta}u, t)] dt \quad (\beta = 0, \beta^* = 1; \beta = 12, \beta^* = 11), \quad (3.184)$$

$$I_{12} = \int_{t_{12}}^{t_1} [Q_{12}({}_{11}x, {}_{12}x, t) + P_{12}({}_{11}u, {}_{12}u, t)] dt, \quad (3.185)$$

$n$ -а фазова координата описує зміну маси в механічних СДС.

Нехай  ${}_{\beta}x^L(t), {}_{\beta}u^L(t), t_{\beta}, t_0 (\beta = 11, 11, 1), t_1 \leq t \leq t_0, L = 0, 1, 2, \dots$

послідовність допустимих процесів задачі (3.176), (3.178) – (3.183).

Сформулюємо, у вигляді ще одного наслідку з теореми 3.5, умови оптимальності конструювання траєкторії руху складеної динамічної системи з урахуванням групування підсистем. Для оптимальності елементів послідовності допустимих процесів необхідно існування таких функцій

$V_{\beta}({}_{\beta}\hat{x}^L(t), t), t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}] (\beta = 0, \beta^* = 1; \beta = 12, \beta^* = 11), V_{12}({}_{11}\hat{x}^L, {}_{12}\hat{x}^L, t), t \in [t_{12}, t_1],$   
які визначені та неперервні відповідно на всіх  
 $({}_{\beta}\hat{x}^L, t) (\beta = 1, 11), ({}_{11}\hat{x}^L, {}_{11}\hat{x}^L, t),$  мають кусково-неперервні частинні

похідні, задовольняють рівнянням (3.152) – (3.156) для  $\beta=1.11$  та рівнянням (3.167) – (3.172), зв'язаних граничними умовами

$$V_1({}_1\hat{x}^L(t_0), t_0) = S_0({}_1\hat{x}^L(t_0), t_0) \Big|_{({}_1\hat{x}^L(t_0), t_0) \in Q_0}, \quad (3.186)$$

$$V_{12}({}_{11}\hat{x}^L(t_1), {}_{12}\hat{x}^L(t_1), t_1) = [S_1({}_1\hat{x}^L(t_1), t_1) + V_1({}_1\hat{x}^L(t_1), t_1)] \Big|_{({}_1\hat{x}^L(t_1), t_1) \in Q_1}, \quad (3.187)$$

$$V_{11}({}_{11}\hat{x}^L(t_{12}), t_{12}) = [V_{12}({}_{11}\hat{x}^L(t_{12}), {}_{12}\hat{x}^L(t_{12}), t_{12})] \Big|_{({}_{12}\hat{x}^L(t_{12}), t_{12}) \in Q_{12}} \quad (3.188)$$

та задовольняють співвідношенню (3.63) для кожного елемента послідовності.

Доведення цього наслідку виконується аналогічно доведенню другого наслідку. Відповідність між елементами множин, що входять у формулювання теореми 3.5 і даного наслідку (3.186)–(3.188) має вигляд: по індексам  $\mathfrak{S} = (\{0, 1, 2, 3\}, \{11, 12, 1, 0\}, \{(0, 11), (1, 12), (2, 1), (3, 0)\})$ , по фазовим координатам

$$\aleph = (\{ {}_1X, {}_2X, {}_3X \}, \{ {}_{11}x, ({}_{11}x^T, {}_{12}x^T)_{,1}x \}, \{ ({}_1X, {}_{11}x), ({}_2X, {}_{11}x^T, {}_{12}x^T), ({}_3X, {}_{11}x) \})$$

та по керуванням

$$U = (\{ {}_1U, {}_2U, {}_3U \}, \{ {}_{11}u^T ({}_{11}u^T, {}_{12}u^T)^T, {}_{,1}u \}, \{ ({}_1U, {}_{,1}u), ({}_2U ({}_{11}u^T, {}_{12}u^T)^T, ({}_3U, {}_{,1}u) \})$$

$$W = (\{ W_{2,1}, W_{2,2}, W_{2,3} \}, \{ w_{2,11}, w_{2,12}, w_{2,1} \}, \{ (W_{2,1}, w_{2,1}), (W_{2,2}, w_{2,12}), (W_{2,3}, w_{2,1}) \}).$$

Після того, як відповідність встановлено, наслідок (3.186)–(3.188) впливає з положень теореми 1.11, як окремий випадок. Рішення задачі (3.176) - (3.183) завершується відшукуванням елемента послідовності задачі (3.176), (3.178) – (3.183), що задовольняє нерівності (3.177).

**РОЗДІЛ 4**  
**ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ РОЗГАЛУЖЕНОЇ**  
**ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ СКЛАДЕНОЇ**  
**ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ**

**4.1. Принцип розширення для складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії руху**

В даному підрозділі монографії сформульовано в термінах методу функцій Кротова достатні умови оптимальності траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження траєкторії руху. Умови оптимальності розгалуженої траєкторії доведені в двох формах: перша – модифікованого методу функцій Кротова; друга – модифікованого принципу розширення і методу інваріантного занурення.

**4.1.1. Модифікований принцип розширення**

Використовуючи позначення, прийняті в попередніх розділах, сформулюємо загальну постановку задачі оптимізації розгалуженої траєкторії СДС у наступному вигляді:

$$I = S(t_0^l, t_1^l, \dots, t_N^l; {}_1X^l(t_0^+), {}_2X^l(t_1^+), \dots, {}_N X^l(t_{N-1}^+); {}_1X^l(t_1^-), \dots, {}_N X^l(t_N^-)) + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^{l+}}^{t_i^{l-}} \Phi_i({}_iX^l, {}_iU^l, t) dt \longrightarrow \inf_D I; \quad (4.1)$$

$$(t_0^l, t_1^l, \dots, t_N^l; {}_1X^l(t_0^+), {}_2X^l(t_1^+), \dots, {}_N X^l(t_{N-1}^+); {}_1X^l(t_1^-), \dots, {}_N X^l(t_N^-)) \in B; \quad (4.2)$$

$$t_{i-1}^l < t_i^l (i = \overline{1, N}), ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t)) \in W_i (i = \overline{1, N}); \quad (4.3)$$

$${}_i\dot{X}^l = {}_iF({}_iX^l, {}_iU^l, t), t \in [t_{i-1}^l, t_i^l] (i = \overline{1, N}), \quad (4.4)$$

де  ${}_iX^l \in E^{m_{xi}}$ ,  ${}_iX^l (i = \overline{1, N})$  – неперервні і кусково-диференційовані функції;  
 ${}_iU^l \in E^{m_{ui}}$ ,  ${}_iU^l (i = \overline{1, N})$  – кусково-неперервні функції;  $B$  – задана

підмножина  $E^{N+1} \times E^{\sum_{i=1}^N n_{\Sigma_i}}$ ;  $W: E^1 \rightarrow 2^{E^{n_{\Sigma_i} + m_{\Sigma_i}}}$  – багатозначна функція,  $D$  – множина допустимих процесів  $({}_i X^l(t), {}_i U^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-}, i = \overline{1, N})$ , які задовольняють умовам (4.2) – (4.4) ( $D \neq \emptyset$ ).

Основним узагальнюючим моментом у постановці задачі (4.1) – (4.4) є те, що в якості рішення задачі оптимального керування СДС приймається мінімізуюча послідовність  $\{v^l\} = ({}_i X^l(t), {}_i U^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-}, i = \overline{1, N})$ , а не певний допустимий процес  $({}_i X^l(t), {}_i U^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-}, i = \overline{1, N})$ .

Теорема 4.1. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\} = ({}_i X^l(t), {}_i U^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-}, i = \overline{1, N})$  була рішенням задачі (4.1) – (4.4) достатньо існування гладких по  ${}_i X^l(t), t$  функцій Кротова  $\Psi_i({}_i X^l, t), t \in [t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}]$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) таких, що

$$R_i({}_i X^l(t), {}_i U^l(t), t) \xrightarrow{M} \hat{R}_i(t) \quad t \in [t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}], \quad (i = \overline{1, N}); \quad (4.5)$$

$$\Lambda(t_0^l, \dots, t_N^l; {}_1 X^l(t_0^l), \dots, {}_N X^l(t_{N-1}^l); {}_1 X^l(t_0^l), \dots, {}_N X^l(t_{N-1}^l)) \longrightarrow \hat{\Lambda}, \quad (4.6)$$

де символ  $\xrightarrow{M}$  позначає збіжність по мірі [57],

$$R_i({}_i X^l, {}_i U^l, t) = \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial {}_i X^l} \right)^T F_i({}_i X^l, {}_i U^l, t) + \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \right) + \Phi_i({}_i X^l, {}_i U^l, t); \quad (4.7)$$

$$\hat{R}_i(t) = \inf_{({}_i X^l, {}_i U^l) \in W_i(t)} R_i({}_i X^l, {}_i U^l, t) = 0; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(t_0^l, \dots, {}_N X^l(t_N^l)) &= S(t_0^l, \dots, t_N^l; {}_1 X^l(t_0^l), \dots, {}_N X^l(t_{N-1}^l); {}_1 X^l(t_N^l), \dots, {}_N X^l(t_N^l)) + \\ &+ \sum_{i=1}^N [\Psi_i({}_i X^l(t_{i-1}^l), t_{i-1}^l - \Psi_i({}_i X^l(t_i^l), t_i^l)]; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\hat{\Lambda} = \inf_B (t_0, \dots, {}_N X(t_N)). \quad (4.10)$$

Доведення. Нехай функції  $\Psi_i({}_i X^l(t), t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) існують і вдалося підібрати послідовність  $\{v^l\}$ , що задовольняє умовам (4.5) – (4.10). Покладемо, що мінімум функціоналу (4.1) досягається на послідовності

$\{\tilde{v}^l\} = \{ {}_i\tilde{X}^l(t), {}_i\tilde{U}^l(t), \tilde{t}_{i-1}^{l+} \leq t \leq \tilde{t}_i^{l-}, (i = \overline{1, N}) \}$ , що не задовольняє умовам (4.5) – (4.10).

Тоді

$$\hat{I} - \tilde{I} \geq 0, \quad (4.11)$$

де  $\hat{I} = \lim_{l \rightarrow \infty} I(v^l)$ ,  $\tilde{I} = \lim_{l \rightarrow \infty} I(\tilde{v}^l)$ .

При цьому

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \lim_{l \rightarrow \infty} I \left[ S(\tilde{t}_0^l, \dots, {}_1\tilde{X}^l(t_N^{l-})) + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} \Phi_i({}_i\tilde{X}^l, {}_i\tilde{U}^l, t) dt \right] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ S(\tilde{t}_0^l, \dots, {}_1\tilde{X}^l(t_N^{l-})) + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} [d\Psi_i({}_i\tilde{X}^l(t), t) - d\Psi_i({}_i\tilde{X}^l(t), t) + \Phi_i({}_i\tilde{X}^l, {}_i\tilde{U}^l, t) dt] \right\} = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ \Lambda(\tilde{t}_0^l, \dots, {}_N\tilde{X}^l(t_N^{l-})) + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} R_i({}_i\tilde{X}^l, {}_i\tilde{U}^l, t) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Враховуючи, що для послідовності  $\{\tilde{v}^l\}$  справедливі співвідношення

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Lambda(\tilde{t}_0^l, \dots, {}_N\tilde{X}^l(t_N^{l-})) = \hat{\Lambda} + \varepsilon_\Lambda; \quad (4.13)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_i({}_i\tilde{X}^l, {}_i\tilde{U}^l, t) = \hat{R}(t) + \varepsilon_{R_i}, \quad (4.14)$$

де  $\varepsilon_\Lambda \geq 0, \varepsilon_{R_i} \geq 0$ , можемо записати (4.12) у вигляді

$$\tilde{I} = (\hat{\Lambda} + \varepsilon_\Lambda) + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} [\hat{R}(t) + \varepsilon_{R_i}] dt. \quad (4.15)$$

В силу неперервності  $R_i(X, {}_iU, t)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} \inf_{(X, {}_iU) \in W_i(t)} R_i(X, {}_iU, t) dt &= \inf_{(v) \in D} \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} R_i(X, {}_iU, t) dt = \\ &= \inf_{(v) \in D} \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{t}_{i-1}^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} R_i(X, {}_iU, t) dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отже, (4.15) з урахуванням (4.16), можна записати у вигляді

$$\tilde{I} = \inf_{(v) \in D} \left[ \Lambda(t_0, \dots, {}_N X(t_N^-)) + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} R_i({}_i X, {}_i U, t) dt \right] + \varepsilon = \hat{I} + \varepsilon, \quad (4.17)$$

$$\text{де } \varepsilon = \varepsilon_\Lambda + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \varepsilon_{R_i} dt \geq 0.$$

Однак, співвідношення (4.17) суперечить нерівності (4.11), що заперечує твердження про існування послідовності. Теорема доведена.

Якщо існує допустимий процес  $({}_i \hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), \hat{t}_{i-1}^+ \leq t \leq \hat{t}_i^-, i = \overline{1, N})$ , що доставляє мінімум функціоналу (4.1), тобто мова йде про мінімалі, які є мінімізуючими послідовностями виду  ${}_i X^l(t) = {}_i \hat{X}(t); {}_i U^l(t) = {}_i \hat{U}(t); t_0^l = \hat{t}_0; t_i^l = \hat{t}_i; \hat{t}_{i-1}^+ \leq t \leq \hat{t}_i^-; i = \overline{1, N}$ , то з теореми 1.15 впливає наступний наслідок.

**Теорема 4.2.** Для того щоб допустимий процес  $({}_i \hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), \hat{t}_{i-1}^+ \leq t \leq \hat{t}_i^-, i = \overline{1, N})$  задачі (4.1) – (4.4) був оптимальний, достатньо існування гладких по  ${}_i X, t$  функцій Кротова  $\Psi_i({}_i X, t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), які відповідають умовам

$$R_i({}_i \hat{X}(t), {}_i \hat{U}(t), t) = R_i(t) = 0, \quad (4.18)$$

майже всюди на  $t \in [\hat{t}_{i-1}^+, \hat{t}_i^-]$  ( $i = \overline{1, N}$ ),

$$\Lambda(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N; {}_1 \hat{X}(\hat{t}_0^+), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+); {}_1 \hat{X}(\hat{t}_1^-), \dots, {}_N \hat{X}(\hat{t}_N^-)) = \hat{\Lambda}. \quad (4.19)$$

Відзначимо, що доведення теореми 4.2 можливо також виконати аналогічно [11, теорема 8].

### 4.1.2. Принцип розширення і метод інваріантного занурення

Основна ідея методу полягає в тому, що вихідну задачу включаємо в деяке сімейство задач оптимізації (інваріантне занурення). При цьому може виявитися, що між окремими задачами існують прості співвідношення і серед задач сімейства знайдеться така, яка легко вирішується методом Кротова.

Тоді, використовуючи рішення останньої і співвідношення, що зв'язують окремі задачі, отримуємо рішення вихідної задачі. Як і в попередньому пункті, в якості рішення задачі розглядається мінімізуюча послідовність  $\{v^l\}$ , яка вибирається так, щоб мінімізувати критерій

$$I = S_0({}_1X^l(t_0^{l+}), t_0^{l+}) + \sum_{i=1}^N J_i \rightarrow \inf_D, \quad (4.20)$$

де

$$J_i = S_i({}_iX^l(t_i^{l-}), {}_{i+1}X^l(t_0^{l+}), t_i^l) + \int_{t_N^{l-}}^{t_N^{l+}} \Phi_i({}_iX^l, {}_iU^l, t), \quad (i = \overline{1, N}),$$

$$J_N = S_N({}_NX^l(t_N^{l-}), t_N^{l-}) + \int_{t_N^{l-}}^{t_N^{l+}} \Phi_N({}_NX^l, {}_NU^l, t) dt,$$

за умов (4.3), (4.4) та

$$({}_1X^l(t_0^{l+}), t_0^{l+}) \in B_0, \quad ({}_NX^l(t_N^{l-}), t_N^{l-}) \in B_N, \quad (4.21)$$

$$({}_iX^l(t_i^{l-}), {}_{i+1}X^l(t_0^{l+}), t_i^l) \in B_i, \quad (i = \overline{1, N-1}), \quad (4.22)$$

де множини  $B_0, B_N, B_i$  мають таку же сутність, що і в задачі (3.1) – (3.7).

Процедура пошуку мінімального значення функціоналу (4.20) за методом інваріантного занурення записується у наступному вигляді [14]

$$\hat{I} = \inf_D I = \inf_{D_1} (J_1 + \inf_{D_2} (J_2 + \dots + \inf_{D_N} (J_N) \dots)), \quad (4.23)$$

де  $D$  – множина допустимих процесів  $\{v^l\} = ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-}, (i = \overline{1, N}))$ , що задовольняють умовам (4.3), (4.4), (4.21), (4.22) ( $D \neq \emptyset$ );  $D_i (i = \overline{1, N})$  – підмножина множини  $D$ , яка розглядається на інтервалі  $[t_{i-1}^l, t_i^l]$ , тобто  $({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \leq t \leq t_i^{l-})$ .

Позначимо

$$\hat{I}_i = \inf_{D_i} (J_i + \hat{I}_{i+1}) = \int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} R_i dt \quad (4.24)$$

де  $i = N, N-1, \dots, 2, 1$ ;  $\hat{I}_{N+1} = 0$ ;

$$\hat{S}_{\Psi,i} = \inf_{B_i} S_{\Psi,i}, \quad i = N, N-1, \dots, 2; \quad (4.25)$$

$$\hat{S}_{\Psi,1} = \inf_{B_0, B_1} [S_{\Psi,1} + S_0({}_1X(t_0^+), t_0)]; \quad (4.26)$$

$$\hat{R}_i(t) = \inf_{({}_iX, {}_iU) \in W_i(t)} R_i({}_iX, {}_iU, t) = 0; \quad (4.27)$$

$$S_{\Psi,N} = S_N({}_N X(t_N^-), t_N) + \Psi_N^-({}_N X(t_{N-1}^+), t_{N-1}) - \Psi_N({}_N X(t_N^-), t_N); \quad (4.28)$$

$$S_{\Psi,i} = S_i({}_i X(t_i^-), {}_{i+1} X(t_i^+), t_i) + \Psi_i({}_i X(t_{i-1}^+), t_{i-1}) - \Psi_i({}_i X(t_i^-), t_i) + \hat{I}_{i+1}({}_{i+1} X(t_i^+), t_i) \quad (4.29)$$

$$(i = N, N-1, \dots, 2, 1),$$

$R_i({}_i X^l, {}_i U^l, t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) – задовольняє рівняння (4.7), в якому гладкі скалярні функції  $({}_i X^l(t), t) \rightarrow \Psi_i({}_i X^l(t), t)$ , визначені для  ${}_i X^l \in E^n$ ,  $t \in [t_{i-1}^l, t_i^l] \subset E^1$ ,  $i = N, N-1, \dots, 2, 1$ , відшукуються для допустимої послідовності  $\{v^l\}$  зі співвідношень

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [S_{\Psi,N}({}_N X^l(t_N^{l-}), {}_N X^l(t_{N-1}^{l+}), t_{N-1}^l)] = \hat{S}_{\Psi,N}, \quad (4.30)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [S_{\Psi,i}({}_i X^l(t_i^{l-}), {}_{i+1} X^l(t_i^{l+}), {}_i X^l(t_{i-1}^{l+}), t_i^l, t_{i-1}^l)] = \hat{S}_{\Psi,i}, \quad (i = N, N-1, \dots, 1), \quad (4.31)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_i({}_i X^l, {}_i U^l, t) = \hat{R}_i, \quad (i = N, N-1, \dots, 1). \quad (4.32)$$

Теорема 4.3. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\}$  була рішенням задачі (4.3), (4.4), (4.20) – (4.22) достатньо існування таких функцій Кротова,  $\Psi_i({}_i X^l(t), t)$  для яких виконуються співвідношення (4.30) – (4.32).

Доведення. Нехай існує послідовність  $\{\tilde{v}^l\}$ , що відрізняється від  $\{v^l\}$  і для якої виконується умова

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I(\tilde{v}^l) = \inf_D I = \tilde{I}, \quad (4.33)$$

але не дотримується співвідношення (4.30) – (4.32), справедливе для послідовності  $\{v^l\}$ .

Тоді

$$\tilde{I} = \inf_D I(\tilde{v}) = \inf_{D_1} \left[ J_1(\tilde{v}) + \inf_{D_2} \left[ J_2(\tilde{v}) + \dots + \inf_{D_N} \left[ J_N(\tilde{v}) \right] \dots \right] \right]. \quad (4.34)$$

Однак,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i &= \inf_D [J_i(\tilde{v}) + \tilde{I}_{i+1}] = \lim_{l \rightarrow \infty} [J_i(\tilde{v}^l) + \tilde{I}_{i+1}] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ S_{i,i}(\tilde{X}^l(\tilde{t}_i^{l-}), \tilde{t}_{i+1}^l, \tilde{t}_i^l) + \int_{\tilde{t}_i^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} \Phi_{i,i}(\tilde{X}^l, \tilde{U}^l, t) dt + \tilde{I}_{i+1} \right] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ S_{i,i}(\tilde{X}^l(\tilde{t}_i^{l-}), \tilde{t}_{i+1}^l, \tilde{t}_i^l) + \int_{\tilde{t}_i^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} \left[ d\Psi_{i,i}(\tilde{X}^l(t), t) - d\Psi_{i,i}(\tilde{X}^l(t), t) + \Phi_{i,i}(\tilde{X}^l, \tilde{U}^l, t) \right] dt + \tilde{I}_{i+1} \right] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ \left[ S_{i,i}(\tilde{X}^l(\tilde{t}_i^{l-}), \tilde{t}_{i+1}^l, \tilde{t}_i^l) + \Psi_{i,i}(\tilde{X}^l(\tilde{t}_{i-1}^{l+}), \tilde{t}_{i-1}^l) - \Psi_{i,i}(\tilde{X}^l(\tilde{t}_i^{l-}), \tilde{t}_i^l) + \tilde{I}_{i+1} \right] + \int_{\tilde{t}_i^{l+}}^{\tilde{t}_i^{l-}} R_{i,i}(\tilde{X}^l, \tilde{U}^l, t) dt \right] = \\ &= \hat{S}_{\Psi,i} + \int_{\tilde{t}_{i-1}^l}^{\tilde{t}_i^l} \hat{R}_i(t) dt + \varepsilon \geq \inf_{D_i} [J_i(v) + \hat{I}_{i+1}], \end{aligned} \quad (4.35)$$

де  $\varepsilon \geq 0$  для  $i = N$ ,  $\hat{I}_{N+1} = 0$ ,  $S_N = S_{N(N)} X(t_N^-, t_N)$ .

Розглядаючи нерівність (4.35) послідовно для  $i = N, N-1, N-2, \dots, 2, 1$ , приходимо до висновку, що

$$\tilde{I} = \inf_D I(\tilde{v}) = \inf_{D_1} [J_1(\tilde{v}) + \tilde{I}_1] \geq \inf_{D_1} [J_1(v) + \hat{I}_1] = \hat{I}. \quad (4.36)$$

З виразу (4.36) слідує, що послідовність  $\{\tilde{v}^l\}$ , співпадає з послідовністю  $\{v^l\}$  та задовольняє співвідношенням (4.30) – (4.32), і мінімізує функціонал (4.20). Теорема доведена.

Як наслідок із теореми 4.3, сформулюємо результат для мінімалі, тобто для випадку, коли всі члени послідовності рівні оптимальному процесу.

Теорема 4.4. Для того, щоб допустимий процес  $(\hat{v}) = ({}_i\hat{X}(t), {}_i\hat{U}, t), \hat{t}_{i-1} \leq t \leq \hat{t}_i, \hat{t}_0, \hat{t}_i \quad i = \overline{1, N})$  задачі (4.3), (4.4), (4.20) – (4.22) був оптимальний, достатньо існування гладких по  ${}_iX, t$  функцій  $\Psi_i({}_iX, t) \quad i = \overline{1, N}$ , що відповідають умовам

$$S_N({}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N) + \Psi_N({}_N\hat{X}(\hat{t}_N^+), \hat{t}_{N-1}) - \Psi_N({}_N\hat{X}(\hat{t}_N^+), \hat{t}_N) = \hat{S}_{\Psi, N}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} S_i({}_i\hat{X}(\hat{t}_i^-), {}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i) + \Psi_i({}_i\hat{X}(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}) - \\ - \Psi_i({}_i\hat{X}(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i) + \hat{I}_{i+1}({}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), \hat{t}_i) = \hat{S}_{\Psi, i} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$(i = N-1, \quad N-2, \dots, 1),$$

$$\left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial {}_iX} \right]_{\wedge_i}^T \Big|_{{}_iF({}_i\hat{X}, {}_i\hat{U}, t) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \Big|_{\wedge}} + \Phi_i({}_i\hat{X}, {}_i\hat{U}, t) = \hat{R}_i \quad (4.39)$$

$$(i = N, N-1, \dots, 1),$$

для яких  $\hat{I}_i, \hat{S}_{\Psi, i}, \hat{R}_i$  обчислюються за формулами (4.24) – (4.27).

## 4.2. Наслідок 1. Принцип розширення для складеної динамічної системи зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення

Розглянемо задачу в постановці (3.24) – (3.26) з урахуванням того, що  $({}_1x(t_0), \dots, {}_kx(t_k); \quad {}_{11}x(t_{11}), \dots, {}_{kk}x(t_{kk}); \quad t_0, \dots, t_k; \quad t_{11}, \dots, t_{kk}) \in \mathcal{Q}$ .

Множину пар  $\mathcal{G}_\beta = (\beta x(t), \beta u(t))$ , що задовольняють умовам (3.21) – (3.25), будемо називати множиною допустимих процесів  $D_\beta (D_\beta \neq \emptyset) \beta = i, ij; i = \overline{1, k} \ j = \overline{1, r_i}$ .

На множині

$$D = D_1 \times \overset{r_1}{\underset{j=1}{\dot{\cup}}} D_{1j} U D_2 \times \overset{r_2}{\underset{j=1}{\dot{\cup}}} D_{2j} U \dots U D_k \times \overset{r_k}{\underset{j=1}{\dot{\cup}}} D_{kj} \quad (4.40)$$

задано функціонал (3.26). Потрібно знайти послідовність

$$\left\{ \mathcal{G}_{\beta}^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i} \right\} = \left\{ \beta x(t), \beta u(t), t_o, t_{\beta}^l, \beta = 1, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i} \right\} \subset D,$$

на якій функціонал (3.26) прямує до свого найменшого значення на множині  $D$ :

$$I(\mathcal{G}_{\beta}^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) \rightarrow \inf_D I = \hat{I}. \quad (4.41)$$

Теорема 4.5. Для того, щоб допустима послідовність  $(\mathcal{G}_{\beta}^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  була рішенням задачі (3.21) – (3.25), (4.41) достатньо існування гладких функцій Кротова  $\Psi_\beta(\beta x^l(t), t)$ ,  $t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}]$  ( $\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ) таких, що

$$R_\beta(\beta x^l(t), \beta u^l(t), t) \xrightarrow{M} \hat{R}_\beta(t) \text{ на } t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}], \quad (4.42)$$

$$\Lambda(\beta x^l(t), t_o^l), \beta(t_\beta), t_o^l, t_{\beta}^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) \rightarrow \hat{\Lambda}, \quad (4.43)$$

де

$$R_\beta(\beta x^l, \beta u^l, t) = \left( \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \beta x^l} \right)^T f(\beta x^l, \beta u^l, t) + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial t} + \Phi_\beta(\beta x^l, \beta u^l, t), \quad (4.44)$$

$$\hat{R}_\beta(t) = \inf_{(\beta x(t), \beta u(t)) \in G_\beta} R_\beta(\beta x, \beta u, t) = 0, \quad (4.45)$$

$$\Lambda(x^l(t'_0), \beta, x^l(t'_\beta), t'_0, t'_\beta, \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\{ S_i(x^l(t'_i), t'_i) + \Psi_i(x^l(t'_{i-1}), t'_{i-1}) - \Psi_i(x^l(t'_i), t'_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r_i} [S_{ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij}) + \Psi_{ij}(x^l(t'_i), t'_i) - \Psi_{ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij})] \right\}, \quad (4.46)$$

$$\hat{\Lambda} = \inf_Q \Lambda(x^l, t'_0), \beta, x^l(t'_\beta), t'_0, t'_\beta,$$

$$\beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}). \quad (4.47)$$

Задача (3.21) – (3.25), (4.41) є окремим випадком задачі (4.1) - (4.4). Тому зміст теореми 4.5 і співвідношення (4.42) – (4.47) безпосередньо впливають з теореми 4.1, як наслідок. Крім того, доказ теореми 4.5 може бути виконано з використанням тієї ж методики доведення, яка застосовувалася до теореми 4.1. Скористаємося методом прямого доведення теореми 4.5. Нехай існує послідовність  $\{\tilde{\mathcal{G}}_\beta^l, \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}\}$ , яка мінімізує функціонал (4.41), але не задовольняє умовам (4.42) – (4.47). Тоді

$$\hat{I} - \tilde{I} \geq 0, \quad (4.48)$$

де

$$\hat{I} = \lim_{l \rightarrow \infty} I(\mathcal{G}_\beta^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad (4.49)$$

$$\tilde{I} = \lim_{l \rightarrow \infty} I(\tilde{\mathcal{G}}_\beta^l, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad (4.50)$$

в той же час

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[ I(\tilde{\mathcal{G}}_i^l, i = \overline{1, k} + \sum_{j=1}^{r_j} I_{ij}, (\tilde{\mathcal{G}}_{ij}^l, j = \overline{1, r_i}) \right] = \\
&= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left\{ S_{i(i)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_i^l), \tilde{t}_i^l + \Psi_{i(i)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_{i-1}^l), \tilde{t}_{i-1}^l - \Psi_{i(i)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_i^l), \tilde{t}_i^l + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^k \left[ S_{ij(ij)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_{ij}^l), \tilde{t}_{ij}^l + \Psi_{ij(ij)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_i^l), \tilde{t}_i^l - \Psi_{ij(ij)} \tilde{x}^l(\tilde{t}_{ij}^l), \tilde{t}_{ij}^l \right] \right\} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lim_{l \rightarrow \infty} R_{i(i)} \tilde{x}^l, \tilde{u}^l, t) dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} \lim_{l \rightarrow \infty} R_{ij(ij)} \tilde{x}^l, \tilde{u}^l, t) dt \right] = \\
&= \hat{\Lambda} + \varepsilon_{\Lambda} + \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\hat{R}_i(t) + \varepsilon_{R,i}] dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} [\hat{R}_{ij}(t) + \varepsilon_{R,ij}] dt \right\} = \\
&= \hat{\Lambda} + \sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \hat{R}_i(t) dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} \hat{R}_{ij}(t) dt \right] + \varepsilon, \tag{4.51}
\end{aligned}$$

де

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Lambda} + \sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_{R,i} dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} \varepsilon_{R,ij} dt \right] \geq 0, \varepsilon_{\Lambda} \geq 0, \varepsilon_{R,i} \geq 0, \varepsilon_{R,ij} \geq 0.$$

В силу неперервності  $R_{\beta}(x_{\beta}, u, t)$  ( $\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ )

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf_{(x, u) \in G_i(t)} R_{i(i)}(x, u, t) dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} \inf_{(x, u) \in G_{ij}(t)} R_{ij(ij)}(x, u, t) dt \right] = \\
&= \inf_D \sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_{i(i)}(x, u, t) dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} R_{ij(ij)}(x, u, t) dt \right]. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Остання нерівність в (4.51) з урахуванням співвідношення (4.52)

буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \inf_D \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^k \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_{i(i)}(x, u, t) dt + \sum_{j=1}^{r_j} \int_{t_i}^{t_{ij}} R_{ij(ij)}(x, u, t) dt \right] \right\} + \varepsilon = \\
&= \inf_D \left\{ I(\mathcal{G}_{\beta}, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) \right\} + \varepsilon = \hat{I} + \varepsilon. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Після підстановки (4.53) в нерівність (4.48) приходимо до протиріччя, яке викликане неправильним вихідним припущенням про можливість існування послідовності  $\left\{ \hat{\mathcal{Q}}'_{\beta}, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i} \right\}$ , яка не володіє властивостями, сформульованими в теоремі 4.5. Теорема доведена.

Наступна теорема формулює достатні умови, яким повинна задовольняти мінімаль  $((\hat{\mathcal{Q}}_{\beta}, \beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) = (\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), \hat{t}_0, \hat{t}_{\beta}; \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}))$ , тобто мінімізуюча послідовність частинного виду  $\beta x^l(t) = \beta \hat{x}(t), \beta u^l(t) = \beta \hat{u}(t), t_0^l = \hat{t}_0, t_{\beta}^l = \hat{t}_{\beta}$  при всіх  $l$ .

Теорема 4.6. Для того, щоб допустимий процес  $(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), \hat{t}_0, \hat{t}_{\beta}; \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  задачі (3.21) – (3.26) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $\beta x, t$  функцій Кротова  $\Psi_{\beta}(\beta x, t)$  ( $\beta = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$ ), що відповідають умовам

$$R_{\beta}(\beta \hat{x}, \beta \hat{u}(t), t) = \hat{R}_{\beta}(t), \quad (4.54)$$

майже всюди на  $t \in [t_{\beta^*}, t_{\beta}]$ ,

$$\Lambda(\beta \hat{x}(t_{\beta}), \hat{t}_0, \hat{t}_{\beta}; \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) = \hat{\Lambda}, \quad (4.55)$$

де  $R_{\beta}, R_{\beta}(t), \Lambda, \hat{\Lambda}$  визначаються рівностями (4.44) – (4.47).

Як наслідок теореми 4.3 сформулюємо рішення задачі (3.21) – (3.26), (4.41) за допомогою спільного використання методів інваріантного занурення і функцій Кротова.

Теорема 4.7. Для того, щоб допустима послідовність  $\left\{ \mathcal{Q}'_{\beta}, \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i} \right\}$  була рішенням задачі (3.21) – (3.25), (4.41) достатньо існування гладких функцій Кротова  $\Psi_{\beta}(\beta \hat{x}^l(t), t)$ , для яких справедливі співвідношення

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_{\Psi, \beta}(\beta x^l(t_{\beta}), t_{\beta}^l; \beta x^l(t_{\beta^*}), t_{\beta^*}^l) = \hat{S}_{\Psi, \beta}(\beta x(t_{\beta^*}), t_{\beta^*}^l), \quad (4.56)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_{\beta}(\beta x^l, \beta u^l, t) = \hat{R}_{\beta}(t)$$

$$(\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = k, j = \overline{1, r_k}; i = k - 1, j = \overline{1, r_{k-1}}; \dots; i = 1, j = \overline{1, r_1}),$$
(4.57)

де

$$S_{\Psi, i}(x^l(t'_i), t'_i; x^l(t'_{i-1}), t'_{i-1}) = S_i(x^l(t'_i), t'_i) + \Psi_i(x^l(t'_{i-1}), t'_{i-1}) - \Psi_i(x^l(t'_i), t'_i) +$$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \hat{S}_{\Psi, ij}(x^l(t'_i), t'_i) + \hat{S}_{\Psi, i+1}(x^l(t'_i), t'_i), \hat{S}_{\Psi, i+1} = 0,$$
(4.58)

$$\hat{S}_{\Psi, i}(x^l(t'_{i-1}), t'_{i-1}) = \inf_{(x(t'_i), t'_i) \in Q_i} S_{\Psi, i}(x^l(t'_i), t'_i; x^l(t'_{i-1}), t'_{i-1}),$$
(4.59)

$$R_{\beta}(\beta x^l, \beta u^l, t) = \Phi_{\beta}(\beta x^l, \beta u^l, t) + \left( \frac{\partial \Psi(\beta x^l, t)}{\partial \beta x^l} \right)^T_{\beta} f(\beta x^l, \beta u^l, t) + \frac{\partial \Psi_{\beta}(\beta x^l, t)}{\partial t},$$
(4.60)

$$\hat{R}_{\beta} = \inf_{(\beta x, \beta u) \in G(t)} R_{\beta}(\beta x(t), \beta u, t) = 0,$$
(4.61)

$$t_{\beta}^* \leq t \leq t_{\beta}, \beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; \overline{1, r_k}; j = \overline{1, r_i},$$

$$S_{\Psi, ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij}; x^l(t'_i), t'_i) = S_{ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij}) + \Psi_{ij}(x^l(t'_i), t'_i) - \Psi_{ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij}),$$
(4.62)

$$\hat{S}_{\Psi, ij}(x^l(t'_i), t'_i) = \inf_{(x(t'_{ij}), t'_{ij}) \in Q_{ij}} S_{\Psi, ij}(x^l(t'_{ij}), t'_{ij}; x^l(t'_i), t'_i)$$
(4.63)

з урахуванням того, що

$$({}_i x_q(t_i) = {}_{i+1} x_q(t_i) = {}_{ij} x_q(t_i) \quad (q = \overline{1, n-1}; i = \overline{1, k-1}),$$

$${}_k x_q(t_k) = {}_{kj} x_q(t_k) \quad (q = \overline{1, n-1}),$$
(4.64)

а  $n$ -я фазова координата описує зміну маси

$${}_{i+1} x_n(t_i) = \xi_i, \quad {}_i x_n(t_i), \quad {}_{ij} x_n(t_i) = \xi_{ij}, \quad {}_i x_n(t_i),$$

$$\xi_i + \sum_{j=1}^{r_i} \xi_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, k}), \quad 0 < \xi_\beta < 1, \quad \beta = i, ij; \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, r_i}. \quad (4.65)$$

У свою чергу з теореми 4.6 випливає теорема про мінімалі.

**Теорема 4.8.** Для того, щоб допустимий процес  $(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t), \hat{t}_0, \hat{t}_\beta; \beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$  задачі (3.21) – (3.26), (4.41) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $(\beta x, t)$  функцій Кротова  $\Psi_\beta(\beta x, t) (\beta = i, ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$ , які відповідають умовам

$$S_{\psi, \beta}(\beta \hat{x}(\hat{t}_\beta), \hat{t}_\beta; \beta x(t_\beta^*), t_\beta^*) = \hat{S}_{\psi, \beta}(\beta x(t_\beta^*), t_\beta^*), \quad (4.66)$$

$$R_\beta(\beta \hat{x}, \beta \hat{u}, t) = \hat{R}_\beta \text{ майже всюди на } t \in [t_\beta^*, t_\beta] \quad (4.67)$$

$$\beta = i, \beta^* = i - 1; \beta = ij, \beta^* = i; i = \overline{1, k}; \overline{1, r_k}; j = \overline{1, r_i},$$

з урахуванням співвідношень (4.58) – (4.65).

### 4.3. Наслідок 2. Принцип розширення для найпростішої складеної динамічної системи з урахуванням взаємодії підсистем

#### 4.3.1. Найпростіша розгалужена траєкторія з розділенням підсистем

Розглянемо задачу (3.39) (3.42) – (3.46) (рис.1.10, а), вважаючи, що

$$({}_1x(t_0), ({}_1x(t_1), ({}_2x(t_{12}), ({}_1x(t_{11}); t_0, t_1, t_{12}, t_{11}) \in Q. \quad (4.68)$$

В якості вирішення задачі будемо шукати послідовність

$$\{v^l\} = \{({}_1x^l(t), ({}_1u^l(t), ({}_2x^l(t), ({}_2u^l(t), ({}_1x^l(t), ({}_1u^l(t); t^l_0, t^l_1, t^l_{12}, t^l_{11}) \leq t \leq t^l_{11}\},$$

яка мінімізує функціонал (1.311) на множині допустимих процесів  $(v) \in D$

$$I(v^l) \rightarrow \inf_D [I_1 + I_{11} + I_{12}] = \hat{I}. \quad (4.69)$$

Задача (3.39), (3.42)– (3.46), (4.68), (4.69) є окремих випадком задачі (4.1) - (4.4). Встановивши відповідності індексів  $\mathfrak{I} = (\{0,1,2,3\}, \{0,1,12,11\}, \{(0,0), (1,1), (2,12), (3,11)\})$ , фазових координат  $\mathfrak{K} = (\{_1 X, {}_2 X, {}_3 X\}, \{_1 x, ({}_{11} x^T, {}_{12} x^T)^T, {}_{12} x\}, \{({}_1 X, {}_1 x), ({}_2 X, ({}_{11} x^T, {}_{12} x^T)^T), ({}_3 X, {}_{11} x)\})$  та керувань  $\mathfrak{U} = (\{U, {}_2 U, {}_3 U\}, \{u, ({}_{11} u^T, {}_{12} u^T)^T, {}_{12} u\}, \{({}_1 U, u), ({}_2 U, ({}_{11} u^T, {}_{12} u^T)^T), ({}_3 U, {}_{11} u)\})$  сформулюємо рішення цієї задачі у вигляді наслідку теорем 4.1, 4.4.

1. Наслідки, отримані за допомогою модифікованого методу В.Ф. Кротова.

1.1. Наслідок з теореми 4.1 про мінімізуючу послідовність. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\}$  була рішенням задачі (3.39), (3.42)– (3.45), (4.68), (4.69) достатньо існування гладких по  ${}_{\beta} x^l, t$  функцій Кротова  $\Psi_{\beta}({}_{\beta} x^l(t), t), t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}^*]$  ( $\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1, t_{11,12} = t_{12}; \beta = 11, \beta^* = 12$ )

таких, що

$$R_{\beta}({}_{\beta} x^l, {}_{\beta} u^l, t) \xrightarrow{M} \hat{R}_{\beta}(t) \text{ майже всюди на } t \in [t_{\beta}^*, t_{\beta}^*] \quad (4.70)$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11, 12, \beta^* = 1; \beta = 11, \beta^* = 12);$$

$$\Lambda({}_1 x^l(t_0^l), {}_1 x^l(t_1^l), {}_{12} x^l(t_{12}^l), {}_{11} x^l(t_{12}^l), {}_{11} x^l(t_{11}^l), t_0^l, t_1^l, t_{12}^l, t_{11}^l) \rightarrow \hat{\Lambda}, \quad (4.71)$$

де

$$R_{\beta}({}_{\beta} x^l(t), {}_{\beta} u^l, t) = \left( \frac{\partial \Psi_{\beta}}{\partial {}_{\beta} x} \right)^T {}_{\beta} f({}_{\beta} x^l(t), {}_{\beta} u^l, t) + \frac{\partial \Psi_{\beta}}{\partial t} + \Phi_{\beta}({}_{\beta} x^l(t), {}_{\beta} u^l, t) \quad (\beta = 1; 11) \quad (4.72)$$

$$R_{11,12}({}_{11,12} x, {}_{11,12} u^l, t) = \left( \frac{\partial \Psi_{11,12}}{\partial {}_{11} x^l} \right)^T {}_{11} f({}_{11} x^l, {}_{11} u^l, t) + \left( \frac{\partial \Psi_{11,12}}{\partial {}_{12} x^l} \right)^T {}_{12} f({}_{12} x^l, {}_{\beta} u^l, t) + \frac{\partial \Psi_{11,12}}{\partial t} + \Phi_{11}({}_{11} x^l, {}_{11} u^l, t) + \Phi_{12}({}_{12} x^l, {}_{12} u^l, t), \quad (4.73)$$

$$\hat{R}_\beta(t) = \inf_{(\beta, x, u) \in \mathcal{M}_\beta(t)} R_\beta(\beta, x(t), \beta, u, t) = 0, \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x^l(t'_0), \dots, t'_{11}) &= S_1(x^l(t'_0), t'_0) + \Psi_1(x^l(t'_0), t'_0) - \Psi_1(x^l(t'_1), t'_1) + \\ &+ S_{12}(x^l(t'_{12}), t'_{12}) + \Psi_{11.12}(x^l(t'_1), t'_1) - \Psi_{11.12}(x^l(t'_{12}), t'_{12}) + \\ &+ S_{11}(x^l(t'_{11}), t'_{11}) + \Psi_{11}(x^l(t'_{12}), t'_{12}) - \Psi_{11}(x^l(t'_{11}), t'_{11}), \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\hat{\Lambda} = \inf_Q \Lambda(x^l(t'_0), \dots, t'_{11}). \quad (4.76)$$

1.2. Наслідок з теореми 4.2 про мінімалі. Для того, щоб допустимий процес  $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), (\beta = 1, 11.12, 11), \hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}; \hat{t}_0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_1)$  задачі (3.39), (3.42)–(3.45), (4.68), (4.69) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $\beta, x, t$  функцій Кротова  $\Psi_\beta(\beta, x(t), t)$  ( $\beta = 1, 11.12, 11$ ), які відповідають умовам

$$R_\beta(\hat{x}, \hat{u}, t) = \hat{R}_\beta(t) \quad (4.77)$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 0; \beta = 11.12, \beta^* = 1; \beta = 11, \beta^* = 12),$$

майже всюди на  $t \in [t_{\beta^*}, t_\beta]$ ,

$$\Lambda(x^l(\hat{t}_0), x^l(\hat{t}_1), x^l(\hat{t}_{12}), x^l(\hat{t}_{12}), x^l(\hat{t}_{11}), \hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}) = \hat{\Lambda} \quad (4.78)$$

де  $R_\beta(t), \hat{\Lambda}$ —задаються рівностями (4.74), (4.76).

2. Наслідки, отримані за допомогою методу інваріантного занурення і методу Кротова В.Ф. за умови, що

$$Q = Q_0 \times Q_1 \times Q_{12} \times Q_{11} \quad (4.79)$$

де елементи множин  $Q_\beta$  ( $\beta = 1, 11$ ) описані в задачі (1.311)–(1.318), а множина  $Q_{12}$  складається з елементів  $(x(t_{12}), x(t_{12}), t_{12})$ .

2.1. Наслідок з теореми 4.3 про мінімізуючу послідовність. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\}$  була рішенням задачі (3.39)–(3.45), (4.69), (4.79) достатньо існування таких функцій Кротова, для яких виконуються співвідношення (4.70), (4.72)–(4.74) та

$$\begin{aligned}
& \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ S_1(1x^l(t'_1), t'_1) + \Psi_1(1x^l(t'_0), t'_0) - \Psi_1(1x^l(t'_1), t'_1) + \right. \\
& \quad + S_{12}(12x^l(t'_{12}), t'_{12}) + \Psi_{11.12}(11.12x^l(t'_1), t'_1) - \\
& \quad - \Psi_{11.12}(11.12x^l(t'_{12}), t'_{12}) + S_{11}(11x^l(t'_{11}), t'_{11}) + \\
& \quad \left. + \Psi_{11}(11x^l(t'_{12}), t'_{12}) - \Psi_{11}(11x^l(t'_{11}), t'_{11}) \right] = \\
& = \inf_{Q_0} [\Psi_1(1x(t_0), t_0) + \inf_{Q_1} [S_1(1x(t_1), t_1) - \Psi_1(1x(t_1), t_1) + \\
& + \Psi_{11.12}(11.12x(t_1), t_1) + \inf_{Q_{12}} [S_{12}(12x(t_{12}), t_{12}) - \Psi_{11.12}(11.12x(t_{12}), t_{12}) + \\
& + \Psi_{11}(11x(t_{12}), t_{12}) + \inf_{Q_{11}} [S_{11}(11x(t_{11}), t_{11}) - \Psi_{11}(11x(t_{11}), t_{11})]]]] = \sum_{\beta} \hat{S}_{\Psi, \beta},
\end{aligned} \tag{4.80}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\Psi, 0} &= \inf_{Q_0} \Psi_1(1x(t_0), t_0), \hat{S}_{\Psi, 1} = \inf_{Q_1} [S_1(1x(t_1), t_1) - \Psi_1(1x(t_1), t_1) + \Psi_{11.12}(11.12x(t_1), t_1)], \\
\hat{S}_{\Psi, 12} &= \inf_{Q_{12}} [S_{12}(12x(t_{12}), t_{12}) - \Psi_{11.12}(11.12x(t_{12}), t_{12}) + \Psi_{11.11}(11.11x(t_{12}), t_{12})], \\
\hat{S}_{\Psi, 11} &= \inf_{Q_{11}} [S_{11}(11x(t_{11}), t_{11}) - \Psi_{11}(11x(t_{11}), t_{11})].
\end{aligned} \tag{4.81}$$

2.2. Наслідок теореми 4.4 про мінімалі. Для того, щоб допустимий процес  $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), (\beta = 1, 11, 12, 11), \hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}; \hat{t}_0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_{11})$  задачі (3.39)–(3.45), (4.69), (4.79) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $_{\beta}x, t$  функцій Кротова  $\Psi_{\beta}(\beta, x(t), t)$  ( $\beta = 1, 11, 12, 11$ ), які відповідають умовам (4.74), (4.77),

$$\Psi_1(1\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = \hat{S}_{\Psi, 0} \tag{4.82}$$

$$S_1(1\hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) - \Psi_1(1\hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) + \Psi_{11.12}(11.12\hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) = \hat{S}_{\Psi, 1} \tag{4.83}$$

$$S_{12}(12\hat{x}(\hat{t}_{12}), \hat{t}_{12}) - \Psi_{11.12}(11.12\hat{x}(\hat{t}_{12}), \hat{t}_{12}) + \Psi_{11}(11\hat{x}(\hat{t}_{12}), \hat{t}_{12}) = \hat{S}_{\Psi, 12} \tag{4.84}$$

$$S_{11}(11\hat{x}(\hat{t}_{11}), \hat{t}_{11}) - \Psi_{11}(11\hat{x}(\hat{t}_{11}), \hat{t}_{11}) = \hat{S}_{\Psi, 11} \tag{4.85}$$

де  $\hat{S}_{\Psi, \beta}$  ( $\beta = 0, 1, 12, 11$ ) задаються відповідними виразами з (4.81).

### 4.3.2. Найпростіша розгалужена траєкторія з групуванням підсистем

Рішення задачі (3.54), (3.57) – (3.59), (4.68) будемо шукати у вигляді послідовності

$\{v^l\} = \{_{11}x^l(t), _{11}u^l(t), _{12}x^l(t), _{12}u^l(t), _1x^l(t), _1u^l(t); t'_{11}, t'_{12}, t'_1, t'_{11} \leq t \leq t'_0\}$ , яка мінімізує функціонал (1.326) на множині допустимих процесів  $(v) \in D$

$$I(v^l) \rightarrow \inf_D [I_1 + I_{11} + I_{12} + S_1(_1x(t_1), t_1) + S_0(_1x(t_0), t_0)] = \hat{I}_0 \quad (4.86)$$

Установимо відповідність індексів  $\mathfrak{S}$ , фазових координат  $\mathfrak{N}$ , керувань  $U$  між задачею (4.1)–(4.4) та задачею (3.56)–(3.59), (4.68), (4.86), яка є окремим випадком першої:

$$\mathfrak{S} = (\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 12, 11\}, \{(0, 0), (1, 1), (2, 12), (3, 11)\}),$$

$$\mathfrak{N} = (\{_1X, _2X, _3X\}, \{_1x, (_{11}x, _{12}x), _{11}x\}, \{(_1X, _{11}x), (_2X, (_{11}x, _{12}x)), (_3X, _{11}x)\}),$$

$$U = (\{_1U, _2U, _3U\}, \{_1u, (_{11}u, _{12}u), _{11}u\}, \{(_1U, _1u), (_2U, (_{11}u, _{12}u)), (_3U, _{11}u)\}).$$

Виділимо окремо чотири наслідки з теорем 4.1–4.4 для випадку найпростішої розгалуженої траєкторії з групуванням підсистем.

1. Наслідки, отримані за допомогою модифікованого методу В.Ф. Кротова.

1.1. Наслідок теореми 4.1 про мінімізуючу послідовність. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\}$  була рішенням задачі (3.54), (3.56) – (3.59), (4.68), (4.86) достатньо існування гладких по  $_{\beta}x^l, t$  функцій Кротова  $\Psi_{\beta}(_{\beta}x^l, t), t \in [t'_{\beta}, t'_{\beta^*}]$  ( $\beta = 11, \beta^* = 12; \beta = 11.12, \beta^* = 1, t_{11.12} = t_{12}; \beta = 1; \beta^* = 0$ ) таких, що

$$R_{\beta}(_{\beta}x^l, _{\beta}u^l, t) \xrightarrow{M} \hat{R}_{\beta}(t) \quad (4.87)$$

майже всюди на  $t \in [t'_{\beta}, t'_{\beta^*}]$  ( $\beta = 11, \beta^* = 12; \beta = 11.12, \beta^* = 1, \beta = 1; \beta^* = 0$ );

$$\Lambda(_{11}x^l(t'_{11}), _{11}x^l(t'_{12}), _{12}x^l(t'_{12}), _1x^l(t'_1), _1x^l(t'_0), t'_{11}, t'_{12}, t'_1, t'_0) \rightarrow \hat{\Lambda} \quad (4.88)$$

де  $R_{\beta}(\beta \hat{x}, \beta \hat{u}, t), \hat{R}_{\beta}(t)$  обчислюються з виразів (4.72)–(4.74), (4.76);

$$\begin{aligned} \Lambda(\beta x'(t_1), \dots, t_0) = & \Psi_{11}(\beta x'(t_1), t_1) - \Psi_{11}(\beta x'(t_2), t_2) + \Psi_{11.12}(\beta x'(t_2), t_2) - \\ & - \Psi_{11.12}(\beta x'(t_1), t_1) + S_1(\beta x'(t_1), t_1) + \Psi_1(\beta x'(t_1), t_1) - \Psi_1(\beta x'(t_0), t_0) + S_0(\beta x'(t_0), t_0). \end{aligned} \quad (4.89)$$

1.2. Наслідок з теореми 4.2 про мінімалі. Для того, щоб допустимий процес  $(\beta \hat{x}(t), \beta \hat{u}(t))$  ( $\beta = 1, 1.1.12, 1.1$ ),  $\hat{t}_{11}, \hat{t}_{12}, \hat{t}_1, \hat{t}_0; \hat{t}_{11} \leq t \leq \hat{t}_0$ ) задачі (3.57)–(3.59), (4.68), (4.86) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $\beta x, t$  функцій Кротова  $\psi_{\beta}(\beta x, t)$  ( $\beta = 1, 1.1.12, 1$ ), які відповідають умовам

$$R_{\beta}(\beta \hat{x}, \beta \hat{u}, t) = \hat{R}(t) \text{ майже всюди на } t \in [\hat{t}_{\beta}^l, \hat{t}_{\beta}^*] \quad (4.90)$$

$$(\beta = 1, \beta^* = 12; \beta = 1.1.12, \beta^* = 1, t_{11.12} = t_{11}; \beta = 1; \beta^* = 0);$$

$$\Lambda(\beta \hat{x}(\hat{t}_{11}), \beta \hat{x}(\hat{t}_{12}), \beta \hat{x}(\hat{t}_{12}), \beta \hat{x}(\hat{t}_1), \beta \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_{11}, \hat{t}_{12}, \hat{t}_1, \hat{t}_0) = \hat{\Lambda},$$

де  $R_{\beta}(t), \hat{\Lambda}$ – обчислюються у відповідності з виразами (4.74) та (4.76) з урахуванням (4.89).

2. Теореми, отримані за допомогою методу інваріантного занурення і методу Кротова В.Ф. за умови, що

$$Q = Q_{11} \times Q_{12} \times Q_1 \times Q_0, \quad (4.91)$$

де елементи множин  $Q_{\beta}$  ( $\beta = 1, 1, 0$ ) описані в задачі (3.54)–(3.59), а множина  $Q_{12}$  складається з елементів  $(\beta x(t_{12}), \beta x(t_{12}), t_{12})$ .

2.1. Наслідок з теореми 4.3 про мінімізуючу послідовність. Для того, щоб допустима послідовність  $\{v^l\}$  була рішенням задачі (3.55)–(3.59), (4.86), (4.91) достатньо існування таких функцій Кротова, для яких справедливі співвідношення (4.72)–(4.74), (4.87), (4.89) та

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda_{(11x^l(t'_{11}), (11x^l(t'_{12}), (12x^l(t'_{12}), (1x^l(t'_1), (1x^l(t'_0), t'_{11}, t'_{12}, t'_1, t'_0)) = \\
& = \inf_{Q_1} [\psi_{11}(11x(t_{11}), t_{11}) + \inf_{Q_2} [\psi_{11.12}(11.12x(t_{12}), t_{12}) - \psi_{11}(11x(t_{12}), t_{12}) + \inf_{Q_1} [S_1(1x(t_1), t_1) - \\
& - \psi_{11.12}(11.12x(t_1), t_1) + \psi_{11}(1x(t_1), t_1) + \inf_{Q_0} [S_0(1x(t_0), t_0) - \psi_{11}(1x(t_0), t_0)]]] = \sum_{\beta} \hat{S}_{\psi, \beta},
\end{aligned} \tag{4.92}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\psi, 11} &= \inf_{Q_1} [\psi_{11}(11x(t_{11}), t_{11})], \\
\hat{S}_{\psi, 12} &= \inf_{Q_2} [\psi_{11.12}(11.12x(t_{12}), t_{12})] - [\psi_{11}(11x(t_{12}), t_{12})], \\
\hat{S}_{\psi, 12} &= \inf_{Q_1} [S_1(1x(t_1), t_1) - \psi_{11.12}(11.12x(t_1), t_1) + \psi_{11}(1x(t_1), t_1)], \tag{4.93} \\
\hat{S}_{\psi, 0} &= \inf_{Q_0} [S_0(1x(t_0), t_0) - \psi_{11}(1x(t_0), t_0)] \\
& (\beta = 11, 12, 1, 0).
\end{aligned}$$

2.2. Наслідок теореми 4.16 про мінімалі. Для того, щоб допустимий процес  $(\beta, \hat{x}(t), \beta, \hat{u}(t))$  ( $\beta = 11, 11.12, 1$ ),  $\hat{t}_{11}, \hat{t}_{12}, \hat{t}_1, \hat{t}_0$ ;  $\hat{t}_1 \leq t \leq \hat{t}_0$ ) задачі (3.55)-(3.59), (4.86), (4.91) був оптимальний, достатньо існування гладких по  $\beta, x, t$  функцій Кротова  $\psi_{\beta}(\beta, x, t)$  ( $\beta = 11, 11.12, 1$ ), які відповідають умовам (4.74), (4.77) майже всюди на  $t \in [t_{\beta}, t_{\beta}^*]$  ( $\beta = 11, \beta^* = 12$ ;  $\beta = 11.12, \beta^* = 1, t_{11.12} = t_{11}$ ;  $\beta = 1$ ;  $\beta^* = 0$ ), а також

$$\psi_{11}(11, \hat{x}(\hat{t}_{11}), \hat{t}_{11}) = \hat{S}_{\psi, 11}, \tag{4.94}$$

$$\psi_{11.12}(11.12, \hat{x}(\hat{t}_{12}), \hat{t}_{12}) - \psi_{11}(11, \hat{x}(\hat{t}_{12}), \hat{t}_{12}) = \hat{S}_{\psi, 12}, \tag{4.95}$$

$$S_1(1, \hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) - \psi_{11.12}(11.12, \hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) + \psi_{11}(11, \hat{x}(\hat{t}_1), \hat{t}_1) = \hat{S}_{\psi, 1}, \tag{4.96}$$

$$S_0(1, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) - \psi_{11}(11, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_0) = \hat{S}_{\psi, 0}, \tag{4.97}$$

де  $\hat{S}_{\psi, \beta}$  ( $\beta = 11, 12, 1, 0$ ) – задаються відповідними виразами з (4.93).

**РОЗДІЛ 5**  
**АЛГОРИТМИ І ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ РОЗГАЛУЖЕНИХ**  
**ТРАЄКТОРІЙ РУХУ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СКЛАДЕНИХ**  
**ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

**5.1. Алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів**

Надзвичайні ситуації природного й техногенного характеру , які дедалі частіше відбуваються у нашому світі, призводять до повного або часткового виходу з ладу наземної інфраструктури, у тому числі телекомунікаційних споруд (базових станцій стільникового зв'язку, радіорелейних та супутникових станцій, кабельних ліній та ін.). Оперативне забезпечення зв'язку в таких районах можливе шляхом розгортання епізодичних радіомереж (ЕРМ) та телекомунікаційних аероплатформ (ТА) на базі безпілотних літальних апаратів.

Безпілотні літальні апарати у сфері цивільного захисту застосовуються для забезпечення екологічного контролю за ступенем забруднення навколишнього середовища, у тому числі в осередках надзвичайних ситуацій, а також для оперативного представлення результатів контролю. Вони можуть слугувати для вирішення широкого кола завдань у галузі проведення авіаційного пошуку і рятування, пошуково-рятувальних операцій на суші і на морі, в умовах складного рельєфу місцевості. Так, при проведенні рятувальних операцій безпілотні літальні апарати є найбільш достовірним і безпечним джерелом інформування наземних груп. Безпілотні літальні апарати проводять оперативну розвідку і детальне обстеження місцевості, що дозволяє своєчасно оцінювати обстановку і приймати управлінські рішення з координації дій аварійно-рятувальних загонів.

Для вирішення такого роду задач перспективним є групове застосування безпілотних літальних апаратів. Перевага застосування групи безпілотних літальних апаратів (БПЛА) стає очевидним в задачах, в яких можливо розділення однієї складної задачі на кілька окремих задач, які виконуються окремими апаратами – наприклад, при проведенні моніторингу великих територій за короткий час; в задачах забезпечення зв'язку з мобільними абонентами для ефективної взаємодії наземних пошуково-рятувальних служб; для транспортування і скидання по команді оператора малогабаритних вантажів в задану точку [68, 125]. Разом з тим, керування БПЛА в складі групи є значно складнішою задачею, ніж керування одиночним апаратом [123, 146, 147].

Це пов'язано з тим, що крім керування польотом окремим БПЛА необхідно забезпечити певний взаємозв'язок і узгодженість його дій з іншими учасниками групи з урахуванням їх групової задачі.

Для групового керування БПЛА в даному підрозділі пропонується використовувати полієргатичну систему керування рухом групи БПЛА. Схема функціонування полієргатичної системи керування рухом групи БПЛА представлена на рис. 5. 1.

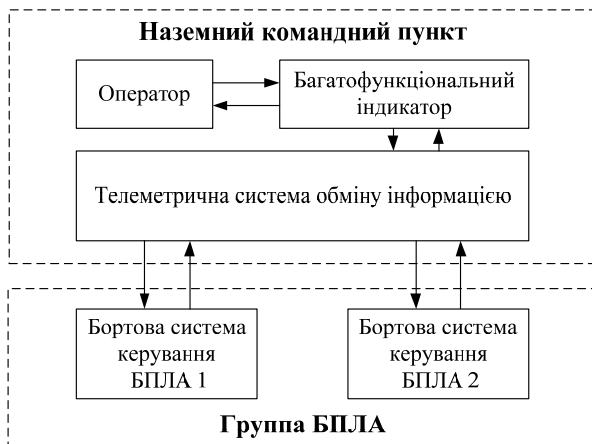


Рис. 5. 1. Полієргатична систему керування рухом групи БПЛА

При такому способі побудови системи керування (рис. 5.1.), виконання спланованих дій БПЛА в процесі вирішення загальної задачі покладається на оператора.

Оператору, необхідно вирішити штурманську задачу, тобто, задати групі БПЛА програмну траєкторію руху, фазову координату розділення групи, інтервал часу протягом якого допускається розділення групи.

Однак, крім штурманської задачі, існує ще задача утримання (стабілізації) групи і окремих БПЛА на програмній траєкторії руху і визначення найбільш сприятливого для розділення моменту часу всередині заданого інтервалу.

Для вирішення вище зазначених задач оператору необхідно мати інтерактивну комп'ютерну систему (багатофункціональний індикатор), призначену для підтримки прийняття рішень, яка, виконуючи функцію «інтелектуального підказувача», допомогла б йому задавати маневри БПЛА, оцінювати координати їх поточного розташування щодо заданої траєкторії, ідентифікувати оптимальні моменти часу виконання групових маневрів.

Розробці алгоритму для «інтелектуального підказувача» зі складу багатофункціонального індикатора (БФІ) наземного командного пункту і присвячений цей підрозділ.

Для розробки алгоритму оптимального керування рухом групи БПЛА пропонується використовувати теорію розгалужених траєкторій [8]. Концепція застосування теорії оптимізації розгалужених траєкторій до вирішення задачі керування групою БПЛА приведена на рис 5. 2.

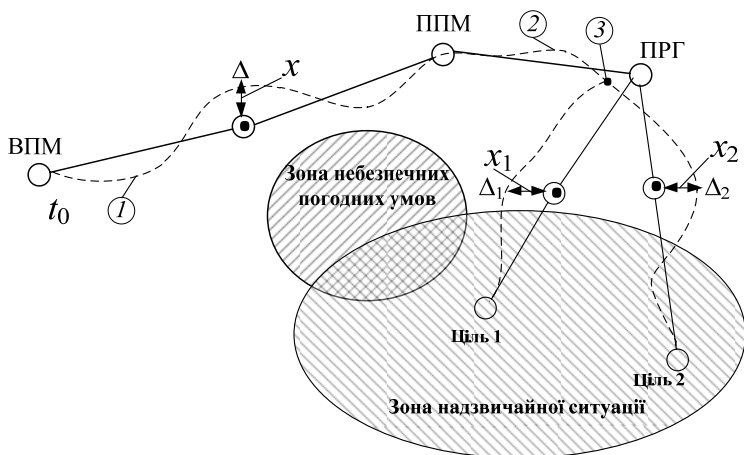


Рис. 5.2. Представлення інформації на екрані багатofункціонального індикатора оператора

На рис. 5.2 прийняті наступні позначення: ВПМ – вихідний пункт маршруту; ППМ – проміжний пункт маршруту; ПРГ – пункт розділення групи БПЛА;  $\Delta$  – мітка поточного положення групи;  $\Delta_i$  ( $i=1, 2$ ) – мітка поточного положення  $i$ -го БПЛА після розділення;  $\Theta$  – мітка заданого положення групи або окремого БПЛА; 1 – траєкторія руху групи БПЛА з розташованими на ній пунктами маршруту, отримана в результаті штурманського розрахунку; 2 – істинна траєкторія руху; 3 – істинна точка розділення групи;  $x$  або  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) – відстань між заданим і поточним положенням групи або окремого БПЛА. З метою фізичного відтворення образу польоту групи БПЛА, рисунок 5. 2 може бути перенесений на екран багатofункціонального індикатора (БФІ), на якому оператор спостерігає за повітряною обстановкою в районі зони надзвичайної ситуації, погодними умовами, стежить за положенням цілей скидання десантованого вантажу.

В силу дії різних збурень поточний стан групи або окремих БПЛА відрізняється від заданого. Алгоритм «інтелектуального підказувача»

виробляє оптимальне, з точки зору заданого критерію якості, керування рухом мітки поточного положення до заданого положення і розраховує оптимальний момент часу і фазову координату розподілення групи. Командні значення оптимального керування і моментів часу розділення подаються для відпрацювання в бортову систему керування (БСК) БПЛА. Еволюція мітки поточного положення на екрані БФІ поблизу програмної траєкторії зазвичай описується детермінованими або стохастичними лінійними диференціальними рівняннями [2].

Відзначимо, що в якості  $x$  або  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) використовується метрика того простору, в якому вирішується задача. Можливість представлення групи БПЛА однієї міткою на екрані БФІ на ділянці траєкторії між точками ВПМ та 3 (рис. 5.2) пояснюється тим, що геометричні розміри групи БПЛА на декілька порядків менше, ніж відстань, на яку вони переміщуються і тому для задачі оптимізації таке припущення є коректним.

Передбачається, що група БПЛА складається з двох апаратів, штурманське задача вже вирішена і розглядається лінійна детермінована модель динаміки руху мітки поточного положення БПЛА відносно заданого положення [79, 96]:

$${}_q \dot{x} = {}_q a_q x(t) + {}_q b_q u(t), \quad (5.1)$$

де  ${}_q x(t) \in E^1$  – вектор стану СДС,  ${}_q u(t) \in E^1$  – вектор керуючих впливів СДС,  $q$  – індекси ділянок розгалуженої траєкторії, по яким переміщуються підсистеми СДС ( $q = 1, 11, 12$ ). Схема розгалуженої траєкторії руху СДС представлена на рис. 1.10, а.

### 5.1.1. Модифікований алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів, отриманий на основі квадратичного функціоналу

Оператору необхідно задати таку координату точки початку спільного руху групи БПЛА  ${}_1\hat{x}(\hat{t}_0)$ , момент часу  $\hat{t}_1$  та координату точки розділення групи БПЛА  ${}_1\hat{x}(\hat{t}_1)$ , щоб БПЛА «11» через  $t_{11} = 6$ с після початку спільного руху і подальшого розділення досяг точки з координатою  ${}_{11}x(t_{11}) = 4$ , а БПЛА «12» через  $t_{12} = 4$ с досяг точки  ${}_{12}x(t_{12}) = 6,92$ , де координати вимірюються в умовних одиницях відстані, мінімізувавши при цьому критерій

$$J = \frac{1}{2} \left\{ F_1 x^2(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [ {}_1Q_1 x^2(t) + {}_1R_1 u^2(t) ] dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 {}_{1j}F_{1j} x^2(t_{ij}) + \int_{t_0}^{t_{1j}} [ {}_{1j}Q_{1j} x^2(t) + {}_{1j}R_{1j} u^2(t) ] dt \right\}, \quad (5.2)$$

де  ${}_1F=0,3$ ;  ${}_{11}F=0,1$ ;  ${}_{12}F=0,2$ ;  ${}_1Q=2$ ;  ${}_{11}Q=1$ ;  ${}_{12}Q=1$ ;  ${}_1R=2$ ;  ${}_{11}R=1$ ;  ${}_{12}R=1$ .

Для вирішення задачі (5.1), (5.2), в якій прийнято, що  ${}_1a=-2,5$ ;  ${}_{11}a=-1$ ;  ${}_{12}a=-1,5$ ;  ${}_1b=1$ ;  ${}_{11}b=0,5$ ;  ${}_{12}b=0,5$ , скористаємося принципом оптимальності Беллмана [14].

Виходячи з (3.123), вираз для оптимального значення керування буде мати вигляд

$${}_q\hat{u}(t) = -{}_qR^{-1}{}_qb^T{}_qP(t){}_q\hat{x}(t) \quad t \in [t_{q^*}, t_q] \quad (5.3) \\ (q=1, q^*=0; q=11, 12, q^*=1),$$

де  ${}_qP(t)$  – є рішенням диференціального рівняння

$${}_qP(t) = -{}_qP(t){}_qa - {}_qa^T{}_qP(t) + {}_qP(t){}_qb{}_qR^{-1}{}_qb^T{}_qP(t) - {}_qQ \quad (5.4)$$

для відповідних крайових умов

$${}_q P(t_q) = {}_q F(q = 11, 12), {}_1 P(t_1) = {}_1 F + {}_{11} P(t_1) + {}_{12} P(t_1) \quad (q = 1). \quad (5.5)$$

Основна відмінність запропонованого алгоритму обчислення оптимального керування (5.3) – (5.5) від відомого полягає в граничній умові (5.5) для  $q = 1$ , коли граничне значення для допоміжної змінної  ${}_1 P(t_1)$  розраховується з урахуванням значень допоміжних змінних  ${}_{11} P(t)$  та  ${}_{12} P(t)$  на лівому кінці гілок «1–11» та «1–12» при  $t = t_1$ .

Використовуючи вирази (5.3) – (5.5) для рішення скалярної задачі (5.1) – (5.2), отримуємо наступні аналітичні вирази для обчислення фазових координат і допоміжних змінних, що входять у вираз для обчислення оптимального керування:

$${}_q \hat{x}(t) = {}_q x(t_q) ch \left[ \sqrt{\delta_q} (t_q - t) + \varphi_q \right] ch^{-1} \varphi_q, \quad (5.6)$$

$${}_q P(t) = {}_q R \left\{ {}_q a + \sqrt{\delta_q} th \left[ \sqrt{\delta_q} (t_q - t) + \varphi_q \right] \right\} b^{-2} \quad (5.7)$$

$$t \in [t_{q^*}, t_q] \quad (q = 1, q^* = 0; q = 11, 12, q^* = 1),$$

де

$$\varphi_{1j} = \mathit{arth} \left[ \left( -{}_{1j} a + {}_{1j} b^2 {}_{1j} F_{1j} R^{-1} \right) \delta_{1j}^{-\frac{1}{2}} \right],$$

$$\delta_{1j} = {}_{1j} Q_{1j} b^2 {}_{1j} R^{-1} + {}_{1j} a^2 \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_1 = \mathit{arth} \left\{ \left[ -{}_1 a + {}_1 b^2 ({}_{11} P(\hat{t}_1) + {}_{12} P(\hat{t}_1) + {}_1 F) \right] \delta_1^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad \delta_1 = {}_1 Q_{1j} b^2 {}_1 R^{-1} + {}_1 a^2.$$

Момент часу  $\hat{t}_1$  розділення групи БПЛА знаходимо з умови  ${}_{11} \hat{x}(\hat{t}_1) = {}_{12} \hat{x}(\hat{t}_1)$ . Потім, підставляючи  $\hat{t}_1$  в вираз для  ${}_{11} \hat{x}(t)$ , обчислюємо координати точки відділення і далі, вважаючи у виразі (5.6)  $t = t_0 = 0$  при  $q = 1$ , знаходимо  ${}_1 x(\hat{t}_0)$ .

В результаті розрахунків отримуємо  ${}_1x(\hat{t}_0)=1,17$ ,  $\hat{t}_1=1,094$  с,  ${}_1x(\hat{t}_1)=1,59$ . На рис 5.3 наведено графік спільного і роздільного руху БПЛА.

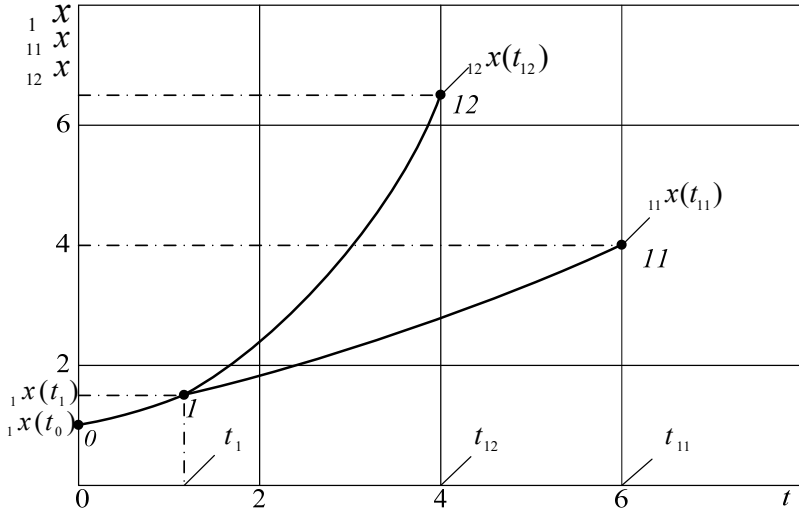


Рис. 5. 3. Графік розгалуженої траєкторії руху групи БПЛА: 0-1– дільниця траєкторії спільного руху групи БПЛА; 0-11, 0-12– відповідно дільниці індивідуального руху БПЛА «11» та БПЛА «12».

Запропонований алгоритм отриманий на основі квадратичного функціоналу враховує ефект розгалуження в задачі утримання (стабілізації) групи БПЛА на заданій розгалуженій траєкторії. При цьому оптимальним чином підбираються моменти часу і координати розпуску групи БПЛА.

### 5.1.2. Модифікований алгоритм оптимального керування групою безпілотних літальних апаратів, отриманий на основі функціонала узагальненої роботи

Припустимо, що координати кінцевих пунктів  ${}_{1j}x(t_{1j})$  ( $j=1, 2$ ) руху окремих БПЛА і моменти часу  $t_{1j}$  ( $j=1, 2$ ) їх досягнення задані. Задача «інтелектуального підказувача» полягає в тому щоб допомогти диспетчеру визначити координати точки, з якої група БПЛА повинна розпочати рух, координати точки і момент часу її розділення на дві групи, а також оптимальні керування для БПЛА (5.1) на всіх ділянках траєкторії, що забезпечують мінімум функціоналу

$$J = \frac{1}{2} \left[ \int_{t_0}^{t_1} ({}_1x^2 + {}_1u^2 + {}_1\hat{u}^2) dt + \sum_{j=1}^2 \int_{t_1}^{t_{1j}} ({}_{1j}x^2 + {}_{1j}u^2 + {}_{1j}\hat{u}^2) dt \right], \quad (5.8)$$

де  ${}_1x(t) \in E^1$  – вектор стану СДС,  ${}_{1j}x(t) \in E^1$  ( $j=1, 2$ ) – вектори стану БПЛА «11» та БПЛА «12»;  ${}_1u(t) \in E^1$  – вектор керуючих впливів СДС,  ${}_{1j}u(t) \in E^1$  ( $j=1, 2$ ) – вектори керуючих впливів БПЛА «11» та БПЛА «12»;  ${}_1\hat{u}$ ,  ${}_{1j}\hat{u}$  – відповідно оптимальні керування СДС, БПЛА «11» та БПЛА «12»;  $t_0$  – момент часу початку руху СДС,  $t_1$  – момент часу розділення СДС на БПЛА «11» та БПЛА «12»,  $t_{1j}$  ( $j=1, 2$ ) – моменти часу кінця руху БПЛА «11» та БПЛА «12».

Задачу (5.1), (5.8) будемо вирішувати відповідно до положення теореми 1.12 при  $l = 0$  і при відсутності обмеження (3.147).

Оптимальне керування обчислюється за формулою

$${}_q\hat{u}(t) = -{}_q b_q B(t)_q \hat{x}(t) \quad (q = 1, 11, 12), \quad (5.9)$$

де  $q$  – індекси ділянок розгалуженої траєкторії, по яким переміщаються підсистеми СДС,  ${}_q B(t)$  – допоміжна змінна, що є рішенням рівняння

$${}_q \dot{B}(t) + 2 {}_q B(t) {}_q u + 1 = 0 \quad (q = 1, 11, 12) \quad (5.10)$$

з граничними умовами  $B_{11}(t_{11}) = B_{12}(t_{12}) = 0$  ( $q = 1, 11, 12$ ) та граничними умовами  $B_1(t_1) = B_{11}(t_1) + B_{12}(t_1)$  ( $q = 1$ ). Обчислене за формулою (5.9) оптимальне керування  ${}_q \hat{u}(t)$  дозволяє отримати оптимальну розгалужену траєкторію

$${}_q x(t) = {}_q x(t_q) \exp \left\{ \begin{aligned} & (t - t_q) \left( a_q + \frac{1}{2 {}_q a} \right) + \left( \frac{A_q}{2 {}_q a} + \frac{1}{4 {}_q a^2} \right) \times \\ & \times \exp \left[ (-2 {}_q a (t - t_q)) - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (q = 1, 11, 12),$$

де  $q$  – індекси ділянок розгалуженої траєкторії, по яким переміщуються підсистеми СДС ( $q = 1, 11, 12$ );  $A_{11} = A_{12} = 0$  ( $q = 1, 11, 12$ );

$$A_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2 {}_1 a_j} \left\{ \exp \left[ -2 {}_1 a_j (t_i - t_{ij}) \right] - 1 \right\} \quad (q = 1).$$

Прирівнюючи рівняння для  ${}_{11}x(t)$  та  ${}_{12}x(t)$  в моменти часу  $t = t_1$  розділення групи БПЛА, знаходимо  $t_1$ , і далі після підстановки  $t_1$  в рівняння для  ${}_{11}x(t)$  та  ${}_{12}x(t)$  знаходимо координати точки розділення  ${}_1x(t_1)$ . Використовуючи знайдені значення  $t_1$  та  ${}_1x(t_1)$ , а також заданий момент часу  $t_0$  початку руху групи БПЛА, обчислюємо за допомогою рівняння для  ${}_1x(t_1)$  координати точки, з якої має розпочатися рух групи БПЛА, щоб мінімізувати критерій (5.8) і забезпечити прибуття БПЛА «11» та БПЛА «12» через задані інтервали часу в задані пункти (рис.5. 4).

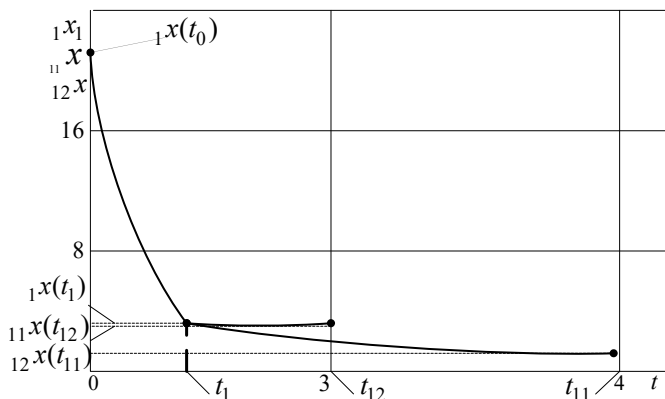


Рис. 5. 4. Графік розгалуженої траєкторії руху групи БПЛА

На рис. 5.4 наведені результати розрахунків  $t_1$ ,  ${}_1x(t_1)$ ,  ${}_1x(t_0)$  для наступних вихідних даних:  ${}_{11}a=0,5$ ;  $t_{11}=4$ ;  ${}_{11}x(t_{11})=0,5$ ;  ${}_{12}a=0,05$ ,  $t_{12}=3$ ,  ${}_{12}x(t_{12})=2$ ;  ${}_1a=0,55$ ,  $t_0=2$ . Отримані наступні результати :  $t_1=2,40$ ;  ${}_1x(t_1)=2,32$ ;  ${}_1x(t_0)=20,72$ .

### 5.1.3. Алгоритм «інтелектуального підказувача», що дозволяє уточнити момент часу розпуску групи безпілотних літальних апаратів при випадкових збуреннях

Математичні моделі динаміки руху міток поточного положення групи БПЛА до розділення і поточного положення окремих БПЛА після розділення описуються диференціальними рівняннями [83, 113]

$${}_q a_q x = ({}_q a_q x + {}_q b_q u) dt + {}_q \sigma({}_q x, t) d{}_q W(t), \quad (5.11)$$

$$t \in [t_*, t_q] (q = 1, q^* = 0; q = 11, 12, q^* = 1);$$

$${}_{11}x(t_1) = {}_{12}x(t_1) = {}_1x(t_1), \quad (5.12)$$

де  ${}_q x(t) \in E^1$ ,  ${}_q u(t) \in E^1$ ,  ${}_q W(t) \in E^2$ ,  ${}_q a, {}_q b$  ( $q = 1, 11, 12$ ) – постійні скалярні величини;  ${}_q \sigma({}_q x, t) = [{}_q \beta_1, {}_q \beta_2]$  – матриці розмірності  $1 \times 2$ ;  ${}_q W^T(t) = [{}_q W_1(t), {}_q W_2(t)]$  ( $q = 1, 11, 12$ ) – двовимірні сепарабельні вінеровські процеси.

Схема розгалуженої траєкторії представлена на рис. 1.10, а. Група БПЛА розпочинає свій рух в момент часу  $t_0$  із фіксованої точки  ${}_1 x(t_0)$  і, далі, в момент часу  $t_1$  відділяються окремі БПЛА, які повинні вийти в район своїх цілей в момент часу  $t_{11}$  та  $t_{12}$ . Задача «інтелектуального підказувача» полягає в тому щоб допомогти диспетчеру синтезувати керування мітками поточного положення  ${}_q u({}_q x, t)$  ( $q = 1, 11, 12$ ) і підібрати момент часу  $t_1$  так, щоб критерій мав мінімальне значення.

$$J(U, t_1) = M \left[ J_1 + \sum_{j=1}^2 J_{1j} \right] \rightarrow \inf_{U, t_1 \in \Theta_1} \quad (5.13)$$

де

$$U = [{}_1 u(t) \ t \in [t_0, t_1], \quad {}_{1i} u(t) \ t \in [t_1, t_{1i}] \ (i = 1, 2);$$

$$J_q = \frac{1}{2} \left[ {}_q F_q x^2(t_q) + \int_{t_q^*}^{t_q} [{}_q Q_q x^2(t) + {}_q R_q u^2(t)] dt \right] \ (q = 1, q^* = 0; \ q = 11, 12, q^* = 1).$$

Застосовуючи теорему для лінійної квадратичної гаусівської [52] задачі (5.11) – (5.13), отримуємо

$${}_q \hat{u}(t) = -{}_q R^{-1} {}_q b {}_q P(t) {}_q x \ (q = 1, 11, 12), \quad (5.14)$$

де  ${}_q P(\tau)$  ( $q = 1, 11, 12$ ) – допоміжна змінна, яка є рішенням диференціального рівняння [37, 42, 52]:

$$\frac{d {}_q P}{dt} = -{}_q Q - 2 \left[ {}_q a + \frac{{}_q \beta_1^2}{2} \right] {}_q P + {}_q R^{-1} {}_q b^2 {}_q P^2 \ (q = 1, 11, 12) \quad (5.15)$$

$${}_q P(t_q) = {}_q F(q=1,1,12), \quad {}_1 P(t_1) = {}_1 F + {}_{11} P(t_1) + {}_{12} P(t_1) \quad (q=1). \quad (5.16)$$

Мінімальне значення функціоналу  $\hat{J}$  обчислюється за формулою

$$\hat{J} = \inf_{t_1 \in \theta_1} V_1(x(t_0), t_0, t_1) = \inf_{t_1 \in \theta_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ P_1(t_0, t_1) x^2(t_0) + {}_1 L(t_0, t_1) \right] \right\}, \quad (5.17)$$

де  ${}_1 L(t_0, t_1)$  обчислюється за допомогою використання рівнянь [76]

$$\frac{d_q L}{dt} = -{}_q P(t) {}_q \beta_2^2 \quad (q=1,11,12), \quad (5.18)$$

при граничних умовах  ${}_1 L(t_1) = {}_{11} L(t_1) + {}_{12} L(t_1)$ ,  ${}_i L(t_{i_i}) = 0$  ( $i=1,2$ ).

Для рівнянь (5.15) та (5.18) рішення може бути отримано в аналітичному вигляді, що дозволяє записати явні вирази для розрахунку

$${}_1 P(t_0, t_1) = {}_1 R_1 b^{-2} \left\{ \left[ {}_1 a + \frac{{}_1 \beta_1^2}{2} \right] + \sqrt{{}_1 \delta} \operatorname{th} \left[ \sqrt{{}_1 \delta} (t_1 - t_0) + {}_1 B \right] \right\}, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} {}_1 L(t_0, t_1) = & {}_1 \beta_2^2 {}_1 R_1 b^{-2} \left\{ \left[ {}_1 a + \frac{{}_1 \beta_1^2}{2} \right] (t_1 - t_0) + \ln \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{{}_1 \delta} (t_1 - t_0) + {}_1 B \right) \operatorname{ch}^{-1} {}_1 B \right] \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^2 {}_{i1} \beta_2^2 {}_{i1} R_1 b^{-2} \left\{ \left[ {}_{i1} a + \frac{{}_{i1} \beta_1^2}{2} \right] (t_{i1} - t_1) + \ln \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{{}_{i1} \delta} (t_{i1} - t_1) + {}_{i1} B \right) \operatorname{ch}^{-1} {}_{i1} B \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

де

$${}_q B = \operatorname{arth} \left\{ \left[ - \left( {}_q a + \frac{{}_q \beta_1^2}{2} \right) + {}_q b^2 {}_q P(t_1) {}_q R^{-1} \right] + {}_q \delta^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

$${}_q \delta = {}_q Q {}_q b^2 {}_q R^{-1} + \left( {}_q a + \frac{{}_q \beta_1^2}{2} \right)^2 \quad (q=1, 11, 12),$$

$${}_1 P(t_1) = F_1 + \sum_{i=1}^2 {}_{i1} R_1 b^{-2} \left\{ \left[ {}_{i1} a + \frac{{}_{i1} \beta_1^2}{2} \right] + \sqrt{{}_{i1} \delta} \operatorname{th} \left[ \sqrt{{}_{i1} \delta} (t_{i1} - t_1) + {}_{i1} B \right] \right\}.$$

На рис. 5.5 показана залежність  $V_1(x(t_0), t_0; t_1)$  від  $t_1$ , розрахована за формулою (5.17) з урахуванням (5.19) і (5.20), для наступних значень параметрів:  ${}_1a = 0,02$ ;  ${}_1b = 0,1$ ;  ${}_i a = 0,005$ ;  ${}_i b = 0,1$  ( $i = 1, 2$ );  ${}_1\beta_1 = 0,02$ ;  ${}_1\beta_2 = 0,5$ ;  ${}_{11}\beta_1 = {}_{12}\beta_1 = 0,01$ ;  ${}_{11}\beta_2 = 0,49$ ;  ${}_{12}\beta_2 = 0,5$ ;  ${}_1F = 1$ ;  ${}_1Q = 0,01$ ;  ${}_1R = 1$ ;  ${}_{11}F = {}_{12}F = 0,5$ ;  ${}_{11}Q = {}_{12}Q = 0,1$ ;  ${}_{11}R = {}_{12}R = 1$ ;  ${}_1x(t_0) = 0,88$ ;  $t_0 = 0$ ;  $t_{11} = 6,5$ ;  $t_{12} = 6,2$ .

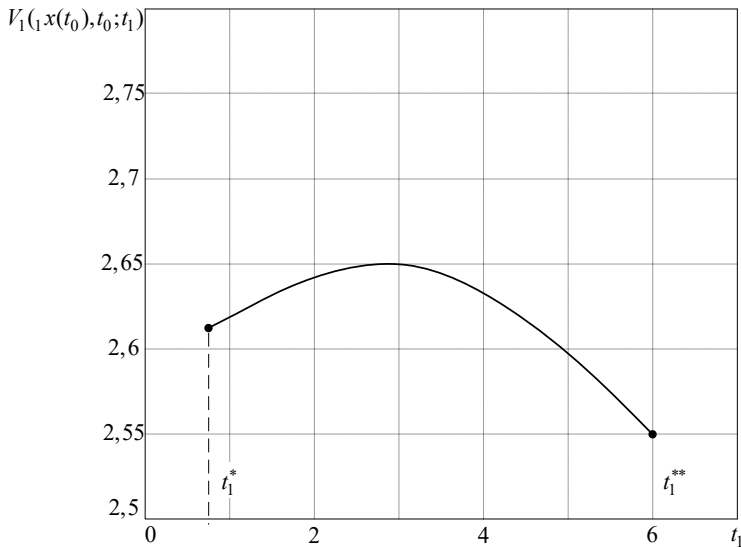


Рис. 5.5. Залежність показника якості від моменту часу  $t_1$  розділення групи БПЛА

Нехай розділення групи безпілотних літальних апаратів на маршруті допустимо за технічними можливостями в будь-який момент часу в інтервалі  $\theta_1 = [t_1^*, t_1^{**}]$ . Вимога мінімізації  $V_1(x(t_0), t_0; t_1)$  по параметру  $t_1$  приводить до висновку про те, що найбільш переважними моментами часу розділення є граничні точки «технічного» інтервалу  $\theta_1$ , тобто  $t_1^* = 1$  і  $t_1^{**} = 6$ . Однак, рішення задачі вибору моменту часу розділення групи безпілотних літальних апаратів в поліергатиційній системі керування

вимагає перевірки умови достатності інтервалу часу  $[t_0, t_1]$  для осмислення оператором рекомендацій «інтелектуального підказувача» [84, 86, 98]. Динамічна завантаженість оператора, пов'язана з осмисленням рекомендацій «інтелектуального підказувача», що надійшли в момент часу  $t_0$  і направлені на розділення групи БПЛА в момент часу  $t_1$  обчислюються за формулою [98]

$$\mu(t_1) = \tau_1 (t_1 - t_0)^{-1}, \quad (5.21)$$

де  $\tau_1$  – тривалість рішення диспетчером задачі, пов'язаної з аналізом обстановки на маршруті руху і прийняття рішення щодо розділення групи БПЛА.

З урахуванням (5.21) ймовірність прийняття рішення диспетчером буде мати вигляд [98]

$$\rho(\mu) = \left[1 - \exp(1 - \mu^{-1})\right] \left[1 - \mu \exp(1 - \mu^{-1})\right]^{-1}. \quad (5.22)$$

Нехай час  $\tau_1$  у вирі (5.21) буде рівним 0,5. Тоді

$$\mu^* = \mu(t_1^* = 1) = 0,5 / 1 = 1 / 2, \quad \rho(\mu^*) = 0,7746;$$

$$\mu^{**} = \mu(t_1^{**} = 6) = 0,5 / 6 = 1 / 12, \quad \rho(\mu^{**}) = 0,9999.$$

Результат розрахунку показав, що надійне прийняття правильного рішення диспетчером можливо тільки в тому випадку, коли в якості рекомендованого моменту часу розділення групи безпілотних літальних апаратів буде запропонований момент часу  $t_1^{**}$ .

#### **5.1.4. Алгоритм «інтелектуального підказувача», що дозволяє стабілізувати безпілотний літальний апарат на заданій траскторії руху з урахуванням можливого перенацілювання в кожен момент часу в заданому інтервалі**

Фізичний зміст задачі полягає в наступному. Припустимо, що диспетчер виявив дві цілі, одна з яких може бути помилковою. Так,

наприклад, в процесі пошукової операції в зоні надзвичайної ситуації надходить інформація про декілька можливих зон перебування об'єктів, які потребують оперативної допомоги. Якщо для здійснення пошукової операції в можливих зонах перебування об'єктів послідовно спрямовувати БПЛА в кожен і з цих зон, то це може призвести до збільшення часу пошукової операції та негативних наслідків. Тому доцільно вибрати одну із зон (наприклад, найбільш вірогідну за первинними ознаками) і спрямовувати до неї БПЛА, але при цьому врахувати можливість його перенацілювання при надходженні оперативної інформації щодо перебування об'єкту в тій чи іншій зоні.

Для вирішення цієї задачі скористаємося положеннями теореми 1.4. Динаміка руху мітки поточного положення БПЛА відносно траєкторії заданої диспетчером і спрямованої до цілі, первинно обраної за істинну описується лінійним скалярним рівнянням [98]

$$\dot{x}(t) = ax(t) + au(t), \quad (5.23)$$

$$t \in [t_0, t_f], t_0 = \text{const}, t_f = \text{var}, x(t_0) = X_0, x(t_f) = X_f,$$

де  $X_0, X_f$  – відомі величини.

Аналогічним рівнянням, але з іншими величинами коефіцієнтів описується динаміка руху мітки поточного положення БПЛА відносно можливої траєкторії його руху до другої цілі.

$$\dot{x}^0(\eta) = bx^0(\eta) + \beta u^0(\eta), \quad (5.24)$$

$$\eta \in [\tau, \tau_k^*], \tau \in [t', t''] \subset [t_0, t_f], \tau = \text{const}, \tau_k^* = \text{var}, x^0(\tau) = x(\tau), x^0(\tau_k^*) = X_k,$$

де  $X_k$  – відома величина або функція від  $\tau$ .

Потрібно оптимізувати процес стабілізації БПЛА на первинно обраній траєкторії так, щоб критерій

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \gamma u^2 dt \rightarrow \min_{\substack{u(t) \in [t_0, t_f], \\ u^0(\eta) \in [\tau, \tau_k^*]}} \quad (5.25)$$

досягав мінімального значення за умови виконання нерівності

$$I^0 = \int_{\tau}^{t_k^i} \phi u^{0^2} d\eta \rightarrow A \leq 0. \quad (5.26)$$

Згідно з теоремою 1.4 оптимальне керування, що доставляє мінімум гамільтоніану

$$H(x, u, \lambda, t) = \gamma u^2 + \lambda(ax + au), \quad (5.27)$$

обчислюється за формулою

$$u(t) = -\frac{\alpha}{2\gamma} \lambda(t), \quad (5.28)$$

де  $\lambda(t)$  задовольняє рівнянням

$$\dot{\lambda}(t) = -a\lambda(t), t \in [t_0, t_f] \setminus [t', t''], \quad (5.29)$$

$$\lambda(t) = \lambda(t'') + a \int_t^{t''} \lambda(t) dt + \zeta^{-1} \int_t^{t''} \lambda^0(\tau) dv(\tau), t \in [t', t''], \quad (5.30)$$

$$\zeta + \int_{t'}^{t''} dv(\tau) - 1, \zeta > 0, dv(\tau) \geq 0, dv(\tau) I^0 = 0.$$

Згідно (5.30) для обчислення  $\lambda(t)$  в інтервалі  $[t', t'']$  необхідно знати  $\lambda^0(\tau), \tau \in [t', t'']$ . Для обчислення  $\lambda^0(\tau)$  необхідно знайти оптимальну траєкторію, яка описується рівнянням (5.24).

В результаті рішення системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}^0(\eta) &= b\hat{x}^0(\eta) + \beta\hat{u}^0(\eta); \\ \dot{\hat{\lambda}}^0(\eta) &= -b\hat{\lambda}^0(\eta), \quad \eta \in [\tau, t_k^i], \end{aligned} \quad (5.31)$$

де  $\hat{u}^0(\eta) = -\beta(2\phi)^{-1}\hat{\lambda}^0(\eta), \eta \in [\tau, t_k^i]$  – керування що мінімізує гамільтоніан  $H^0(x^0, u^0, \lambda^0, \eta) = \phi u^{0^2} + \lambda^0(bx^0 + \beta u^0)$ , отримуємо

$$\hat{\lambda}^0(\eta) = c_{\lambda_0} \exp[-b(\eta - \tau)], \quad (5.32)$$

$$\hat{x}^0(\eta) = \frac{\beta^2}{4b\phi} c_{\lambda_0} \exp[-b(\eta - \tau)] + c_{x_0} \exp[b(\eta - \tau)]. \quad (5.33)$$

Враховуючи що

$$\hat{x}^0(\tau) = \hat{x}(\tau), \tau \in [t', t''], \hat{x}^0(t_k^\tau) = X_k^0,$$

$$\hat{H}^0(\hat{x}^0(t_k^\tau), \hat{u}^0(t_k^\tau), \lambda^0(t_k^\tau), t_k^\tau) = 0,$$

записуємо систему трьох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{4b\phi} c_{\lambda_0} + c_{x_0} &= \hat{x}(\tau), \\ \frac{\beta^2}{4b\phi} c_{\lambda_0} \exp[-b(t_k^\tau - \tau)] + c_{x_0} \exp[b(t_k^\tau - \tau)] &= X_k, \\ c_{\lambda_0} c_{x_0} b &= 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

з трьома невідомими  $c_{\lambda_0}$ ,  $c_{x_0}$  та  $t_k^\tau$ , з якої знаходимо  $c_{\lambda_0}$  як функцію від  $\hat{x}(\tau)$  та  $\tau$ . Із (5.32) слідує, що  $\lambda^0(\tau) = c_{\lambda_0}(\hat{x}(\tau), \tau)$ .

Підставляючи  $\lambda^0(\tau) = c_{\lambda_0}(\hat{x}(\tau), \tau)$  в рівняння (5.30), і вирішуючи його спільно з рівнянням для  $\hat{x}(t)$ , знаходимо оптимальні траєкторію і керування системи (5.23) в інтервалі часу  $[t', t'']$ . За межами інтервалу  $[t', t'']$  рівняння (5.23) слід вирішувати разом з рівняннями (5.28), (5.29).

Нехай  $a=1$ ,  $\alpha=2$ ,  $\gamma=1$ ,  $b=1,5$ ,  $\beta=1,5$ ,  $\phi=1$ ,  $t_0=0$ ,  $x(t_0)=8$ ,  $X_f=0,2415$ ,  $X_k=0,2231$ ,  $t'=0,5$ ,  $t''=2,5$ ,  $A=2\phi b / \beta^2 [y^2(\tau) - X_k^2]$ ,  $\tau \in [t', t'']$ , де  $y(\tau) = 0,0347 \exp[2(\tau - t')] + 7,7434 \exp[-2(\tau - t')]$ .

Тоді отримуємо, що  $\zeta=0,8721$ ,  $dv(\tau) = \mu(\tau)d\tau$ ,  $\mu(\tau)=0$  при  $\tau \in [t', t''] \setminus [t_1, t_2]$  та  $\mu(\tau)=0,4905$  при  $\tau \in [t_1, t_2]$ ,  $t_1=1,3166$ ,  $t_2=1,5773$ .

При цьому оптимальна траєкторія системи (5.23) складається з трьох ділянок (рис. 5.6):

$$\hat{x}^{(1)}(t) = 8,1313 \exp(-t) - 0,1313 \exp(t), \quad t \in [t_0, t_1];$$

$$\hat{x}^{(2)}(t) = y(t), \quad t \in [t_1, t_2];$$

$$\hat{x}^{(3)}(t) = 1,197 \exp(t_2 - t), \quad t \in [t_2, \hat{t}_f], \quad \text{где } \hat{t}_f = 3,1780,$$

кожному з яких відповідає оптимальне керування

$$\hat{u}^{(1)}(t) = 8,1313 \exp(-t), \quad t \in [t_0, t_1];$$

$$\hat{u}^{(2)}(t) = 11,6151 \exp[-2(t-t')] - 0,1735 \exp[2(t-t')], \quad t \in [t_1, t_2];$$

$$\hat{u}^{(3)}(t) = 1,197 \exp(t_2 - t), \quad t \in [t_2, \hat{t}_f].$$

В інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  рух системи відбувається по обмеженню, так як  $I^0 = 2\phi b / \beta^2 [\hat{x}^2(t) - y^2(t)] = 0$ . Оптимальне значення моменту часу досягнення системою (5.24) точки  $X_k$  розраховується за формулою

$$\hat{t}_k^\tau = 1/b \ln[\hat{x}(\tau) / X_k] + \tau = 0,6666 \ln \hat{x}(\tau) + \tau + 1, \quad \tau \in [t', t''].$$

Оптимальне значення критерію (5.25)  $\hat{I} = 32,1025$ , що дещо більше, ніж значення  $\tilde{I} = 31,9708$  цього ж критерію, обчислене за умови, що система (5.23) переходить з точки  $x(t_0)$  в точку  $x(t_f)$  по траєкторії  $\tilde{x}(t)$  (рис. 5.6) без урахування обмеження (5.26). Однак, точка  $x(t_f)$  досягається в цьому випадку за час  $\tilde{t}_f = 3,5 > \hat{t}_f$  і з порушенням обмеження (5.26) в інтервалі  $[t'_1, t''_2]$ , де  $t'_1 = 1$ ,  $t''_2 = 2$ . Розглянемо спрощене рішення задачі, коли рух системи (5.23) в інтервалах часу  $[t_0, t'_1]$  та  $[t''_2, t_f]$  відбувається по траєкторії, побудованою без урахування обмеження, а в інтервалі  $[t'_1, t''_2]$  з урахуванням обмеження. Тоді критерій (5.25) має значення  $I = 32,3338 > \hat{I}$ . Відношення  $(I - \tilde{I}) / (\hat{I} - \tilde{I}) = 2,756$  показує, що використання необхідних умов оптимальності траєкторії з альтернативою дозволяє майже в 3 рази зменшити погіршення критерія (5.25), яке б виникло в разі руху системи (5.23) по траєкторії спрощеного варіанту вирішення задачі (рис. 5.6).

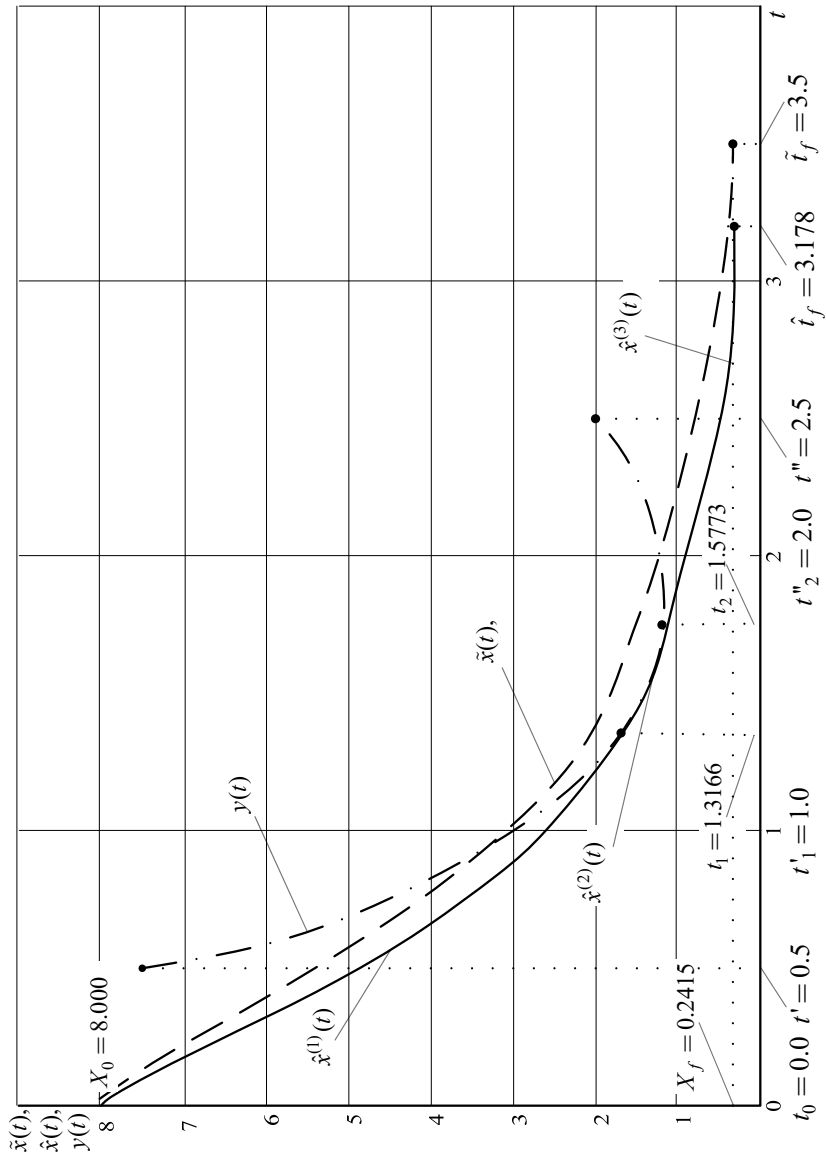


Рис. 5.6. Графік оптимальної траєкторії з альтернативою

На закінчення відзначимо, що розглянуті в цьому підрозділі приклади з лінійними моделями динамічних об'єктів слід сприймати в рамках концепції кусково-лінійної апроксимації нелінійних характеристик літальних апаратів та інформаційно-вимірювальних систем. Числові приклади, приведені в відносних одиницях.

### **5.1.5. Алгоритм оперативного синтезу розгалуженої траєкторії руху «літаючої сенсорної мережі», що базується на застосуванні модифікованого методу функцій Кротова**

Постановка задачі. Схема розгалуженої траєкторії руху складеної динамічної системи, що складається з однієї телекомунікаційної аероплатформи (ТА) та двох мобільних сенсорів (МС1 і МС2), яку скорочено будемо називати «літаюча сенсорна мережа», містить центральну і бокову гілки (рис. 1. 9). Припускаємо, що: 1) в момент часу початку руху сенсори закріплені на аероплатформі (будемо позначати «зв'язку» ТА+МА1+МА2) і після розділення МС1, МС2 і ТА починають рух в задані фіксовані точки; 2) після відділення сенсорів від аероплатформи відсутня взаємодія між ТА і МС1, МС2, яка б накладала обмеження на керуючі або фазові змінні ТА і МС1, МС2 після їх розділення; 3) розглядається рух в площині горизонту (Земля плоска і не обертається). Порівняння маневрених характеристик (радіусу і часу плоского розвороту вектора крейсерської швидкості на 90°) ТА + МС1+ МС2, ТА, МС1, МС2 з відстанню, на яку вони повинні переміститися, а також із загальною тривалістю польоту, дозволяє розглядати ТА + МС1+ МС2, ТА, МС1, МС2 як матеріальні точки, динаміка руху проєкцій яких в площині горизонту описується рівняннями виду [48, 102]:

$${}_q \dot{x}_1 = {}_q u_1 \cos_q u_2, \quad (5.35)$$

$${}_q \dot{x}_2 = {}_q u_1 \sin_q u_2, \quad (5.36)$$

$$q = i, ij; i = 1; j = 1, 2, 3,$$

де  ${}_q x_1, {}_q x_2$  – поточні координати, які відраховуються відповідно вздовж осі абсцис і осі ординат;  ${}_q u_1, {}_q u_2$  – керуючі змінні, які за фізичним змістом задачі являють собою відповідно модуль вектора швидкості і кут між віссю абсцис і вектором швидкості  ${}_q u_1 \in [0, {}_q u_{1\max}]$ ;  ${}_q u_2 \in [0, 2\pi]$ ,  $q$  – індекси дільниць розгалуженої траєкторії, по яким переміщуються ТА + МС1+ МС2, ТА, МС1, МС2 ( $q = i, ij; i = 1; j = 1, 2, 3$ ).

Необхідно мінімізувати векторний критерій, компоненти якого це інтервали часу, які відлічуються від моменту часу початку руху ТА + МС1+ МС2 до моментів часу прибуття МС1, МС2 і ТА в пункти призначення

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} t_{11} - t_0 \\ t_{12} - t_0 \\ t_{13} - t_0 \end{bmatrix} \rightarrow \min_{\substack{U \in {}_1\Omega \forall t \in [t_0, t_1], \\ U \in {}_j\Omega \forall t \in [t_1, t_j], \\ j=1,2,3; ({}_1x(t_1), t_1) \in S((t_1), t_1)}},$$

де  ${}_q U = \begin{bmatrix} {}_q u_1 \\ {}_q u_2 \end{bmatrix}$ ,  $q = 1, 1j; j = 1, 2, 3$ ;  ${}_q \Omega = [0; {}_q u_{1\max}] \times q[0; 2\pi]$ ,  $S({}_1x(t_1), t_1)$  –

множина точок, координати яких лежать в межах від 0 до 10 по осі абсцис і від 0 до 8 по осі ординат і досягаються в момент часу  $t_1$  (рис.1),  $S((t_1), t_1)$ ,  ${}_1x(t_1) = 1$ .

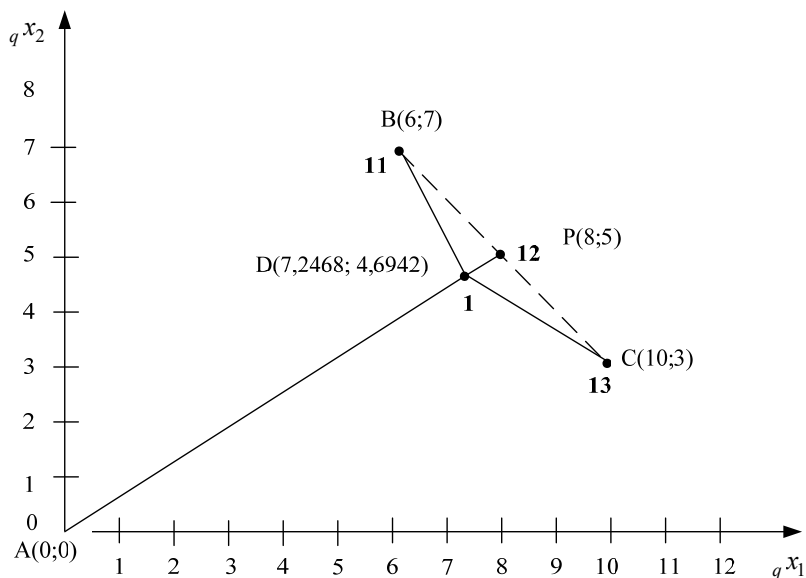


Рис. 5.9. Графічний образ оптимальної розгалуженої траєкторії «літаючої сенсорної мережі».

На рис. 5.2 прийняті наступні позначення:  $(\cdot)A(0;0)$  – початок руху ТА + МС1+ МС2;  $(\cdot)B(6;7)$  – пункт призначення для МС1;  $(\cdot)C(10;3)$  – пункт призначення для МС2;  $(\cdot)P(\frac{6+10}{2}; \frac{7+3}{2}) = P(8;5)$  – пункт призначення для ТА;  $(\cdot)D(7,2468;4,6942)$  – точка розгалуження траєкторії руху СДС типу ТА+МС1+МС2.  $q \in \{1, 1j, \} j = 1, 2, 3.$

Алгоритм рішення. Для пошуку компромісного рішення багатокритеріальної задачі перейдемо до адитивної форми скалярного критерію:

$$W = \dot{\alpha}_1 \int_{t_0}^{t_1} dt + \sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} \int_{t_1}^{t_{1j}} dt \rightarrow \min \quad (5.37)$$

$${}_1U \in {}_1\Omega \forall t \in [t_1, t_1], \quad {}_{1j}U \in {}_{1j}\Omega \forall t \in [t_1, t_{1j}], \quad j = 1, 2, 3,$$

$$({}_1x(t_1), t_1) \in S((t_1), t_1).$$

Для рішення задачі (5.35)–(5.37) скористаємося теоремою 3.5, викладеною в розділі 3.2. для СДС зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральні і бічні гілки, без взаємодії підсистем після розділення. Згідно з цією теоремою алгоритм оптимізації полягає в наступному:

1. Будуємо функцію  $R(x(t), u(t), t)$ , структура якої для кожної гілки в даному випадку буде однакою:

$$R(x(t), u(t), t) = \hat{O}(x, u, t) - \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^T}{\partial x} \times f(x, u, t),$$

$$\hat{O}(x, u, t) = 1; \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

вважаємо, що

$$\varphi(x, t) = \varphi_t(t) + \varphi_x(x), \quad \varphi_t(t) = \beta \times t;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \beta; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Остаточно маємо } R(x(t), u(t), t) = 1 - \beta - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} u_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \times u_2 \rightarrow \min_{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \Omega},$$

де

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 = q u_1 \cos_q u_2, \\ \dot{x}_2 = u_2 = q u_2 \sin_q u_2, \end{cases}$$

$$q = i, ij; i = 1; j = 1, 2, 3.$$

Нехай  $\varphi_x(x) = b_1 x_1 + b_2 x_2$ , де  $b_{1,2} > 0$ . Тоді  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = b_1$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = b_2$  і при цьому функція  $R(x, u, t)$  досягає мінімуму при  $u_1 = u_{1\max}$ ,  $u_2 = u_{2\max}$ .

2. Виберемо  $\beta$  із умови  $1 - \beta - b_1 u_{1\max} - b_2 u_{2\max} = 0$ .

Тоді рівняння руху по гілках розгалуженої траєкторії набуде вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_{1\max}; \\ \dot{x}_2 = u_{2\max}, \end{cases} \text{ або } \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_{1\max}}{u_{2\max}} \Rightarrow x_1 = \frac{u_{1\max}}{u_{2\max}} \cdot x_2 + \text{const} \quad (5.38)$$

Рівняння (5.38) – це пряма, тобто, кінцева гілка розгалуженої траєкторії в даній постановці задачі є пряма. Цією властивістю шуканої оптимальної розгалуженої траєкторії, доведеною з використанням функції Кротова, скористаємось для остаточного рішення задачі.

Необхідно таким чином зістикувати між собою прямі  $AD$ ,  $DC$ ,  $DP$ ,  $DB$  (тобто підібрати координати точки  $D$ ), щоб критерій  $W$ , заданий виразом (5.37) набув мінімального значення:

$$\begin{aligned} W = & \alpha_1(t_1 - t_0) + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}(t_{1j} - t_1) = \alpha_1 \frac{AD}{1u_{1\max}} + \alpha_{11} \frac{DB}{11u_{1\max}} + \\ & + \alpha_{12} \frac{DP}{12u_{1\max}} + \alpha_{13} \frac{DB}{13u_{1\max}} = \frac{\alpha_1}{1u_{1\max}} \cdot \sqrt{(x_D - 1x_1(t_0))^2 + (y_D - 1x_2(t_0))^2} + \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_{1j}}{1j u_{j\max}} \cdot \sqrt{(x_D - ijx_1(t_{ij}))^2 + (y_D - ijx_2(t_{ij}))^2} \rightarrow \min, \end{aligned}$$

де  $(x_D; y_D) \in [0; 10] \times [0; 8]$ .

Покладемо, що  $\alpha_1 = 0,4$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0,2$ ;  $1u_{1\max} = 10$  км/час;  
 $11u_{1\max} = 5$  км/час;  $12u_{1\max} = 10$  км/час;  $13u_{1\max} = 5$  км/час.

Тоді, використовуючи систему комп'ютерної математики MATLAB отримаємо:

$$\begin{aligned} 1x_1 &= 7,247 \text{ км}, \quad 1x_2 = 4,694 \text{ км}, \\ t_1 &= 0,8634 \text{ год}, \quad t_{11} = 0,5243 \text{ год}, \\ t_{12} - t_1 &= 0,813 \text{ год}, \quad t_{13} = 0,646 \text{ год}. \end{aligned}$$

Таким чином, застосування модифікованого методу функцій Кротова (розвинутого на задачі з розгалуженими траєкторіями руху складених динамічних систем) дозволило на попередньому етапі синтезу обґрунтувати вигляд оптимальної траєкторії руху на кожній гілці і звести вихідну задачу до задачі нелінійного програмування, яка може бути оперативно вирішена на

борту ЛА для оперативно заданих оператором пунктів бажаного розміщення МС.

## **5.2. Оптимальна траєкторія руху ракети – носія, що виводить на орбіту групу навігаційних супутників**

Вступ у третє тисячоліття співпало з новим етапом розвитку технологій мініатюрних космічних апаратів - мікро- і наносупутників.

Наносупутники (англ. nanosatellite, nanosat) – це космічні апарати, масою від 1 кг до 10 кг, розміром 1U (10x10x10 см), 2U (10x10x20 см) та 3U (10x10x30 см), які покликані вирішувати прості, але важливі задачі. В світовій практиці наносупутники використовуються для дистанційного зондування Землі, екологічного моніторингу, прогнозу землетрусів, дослідження іоносфери та ін. Період одиничних проривних результатів і перших вдалих дослідів створення малорозмірних супутників вже позаду. Основне сьгоднішнє завдання – виведення наносупутників на орбіту. В даному підрозділі, розглядається варіант запуску наносупутників в якості корисного навантаження (КН) на базі літака Ан-124-100, який використовується в якості рухомого стартового майданчика для запуску твердопаливної ракети-носія (РН) легкого класу. Літак з ракетою в вантажному відсіку буде злітати зі звичайного аеродрому і піднімаючись на висоту близько 20 км, на якій за допомогою авіаційно-пускової установки, яка включає транспортно-пусковий майданчик (ТПМ) і витяжну парашутну систему, здійснювати запуск ракети-носія.

В результаті проведення підготовчих для скидання ракети-носія операцій, пов'язаних з відкриттям вантажного люка, задіянням систем керування і т.п., РН на ТПМ під дією сили тяги витяжних парашутів починає рух по напольному обладнанню (гольгангам) в сторону вантажного люка. У момент фізичного відділення від літака відбувається роз'єднання зв'язуючих РН з ТПМ поясів та інших пристроїв.

Далі ракета, з пусковими контейнерами в яких розміщені наносупутники, за рахунок власного твердопаливного двигуна (на початковій стадії польоту), а після по інерції виходить на висоту близько 600 км на якій передбачається скидання корисного навантаження у вигляді мініатюрних супутників, а ТПМ за допомогою парашута здійснює посадку в заданому місці і готова для подальшого (багаторазового) використання. Наносупутники встановлюються всередину контейнера на платформу і притискаються пружинами до кришки.

Електричний імпульс від ракети-носія активує механізм відкриття кришки, яка повертається на кут  $170^\circ$  і відділяється по направляючих рейках пружинним механізмом, який задає йому задану швидкість, яка визначається пружиною, що використовується, і масою супутника. Відділення КН з малою масою відбувається за рахунок використання магнітно-імпульсного приводу з ємнісним накопичувачем енергії.

Запропонований варіант виведення наносупутників на орбіту найкращим чином адаптований до існуючих і інших потенційних обмежень своєю можливістю повітряного запуску з використанням аеродромів.

### **5.2.1. Розгалужена траєкторія виведення ракети - носія, що дозволяє досягти максимальної сумарної висоти підйому головних частин, що розділяються**

Оптимізація активної ділянки траєкторії руху ракети, яка виводить групу наносупутників, з урахуванням точної моделі руху ракети з головною частиною, що розділяється, моделі атмосфери Землі і її гравітаційного поля може бути виконана тільки при вдалому першому наближенні до оптимального рішення [1 – 4]. Рішення модельної задачі, викладене в даному підрозділі, може бути прийняте за перше наближення (субоптимальне рішення) для більш детальної задачі, яка точніше враховуватиме всі явища і

ефекти, пов'язані з рухом ракети з головною частиною, що розділяється і виводить групу наносупутників на орбіту.

Проведений аналіз пошуку оптимальної траєкторії виведення групи супутників на орбіту, показує, що оптимальне керування такого роду системами розглядалося в роботах Ащепкова Л.Т. [10–11], Сейджа Е.П., Уайта Ч.С. [97], стохастичні диференціальні системи розглядали Пугачов В.С., Синіцин І.М. [91]. Питання оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами, які переміщуються по розгалуженим траєкторіям і дозволяють вивести за один запуск групу наносупутників не розглядалося.

Розглянемо постановку задачі у наступному вигляді. Припустимо, що головна частина ракети-носія складається з двох ракет. Схема розгалуженої траєкторії руху ракети з головною частиною, що розділяється, представлена на рис. 1.10, *a*. Ракета-носії, головна частина якої складається з двох ракет, починає керований рух у пункті  $0$  і переміщається далі вздовж гілки  $0-1$  до пункту  $1$ . Після чого відбувається розділення головної частини на складові ракети, які використовуючи власне керування рухаються від пункту  $1$  до пунктів  $11$  та  $12$ . Припускаємо, що рух відбувається в вакуумі в плоскопаралельному гравітаційному полі.

Рівняння, що описують рух ракет на відповідних ділянках траєкторії, мають вигляд:[100–102]:

$${}_q \dot{x}_1 = g P_q \cos_q v, \quad (5.39)$$

$${}_q \dot{x}_2 = {}_q x_3, \quad (5.40)$$

$${}_q \dot{x}_3 = g P_q \sin_q v - g, \quad (q = 1, 11, 12), \quad (5.41)$$

де  $q$  – індекси ділянок розгалуженої траєкторії, по яким переміщуються підсистеми СДС ( $q=1,11,12$ );  ${}_q x_1, {}_q x_3$  – складові вектора швидкості, спрямовані відповідно поперек і уздовж силових ліній гравітаційного поля;

$q X_2$  – поточна координата, яка відраховується вздовж силових ліній гравітаційного поля (висота польоту);  $P_q$  – перевантаження, яке створюється силовою установкою ракети, яка виводить групу наносупутників, на ділянці  $0-1$  траєкторії ( $q=1$ ) і силовими установками ракет що відділяються на ділянках  $1-11$  ( $q=11$ ) та  $1-12$  ( $q=12$ );  $q V$  – кут тангажу;  $g$  – гравітаційне прискорення.

Розглянемо задачу з фіксованими моментами часу:  $t_0$  – початок руху ракети, яка виводить групу наносупутників,  $t_1$  – момент часу розділення головної частини,  $t_{11}$  та  $t_{12}$  – моменти часу досягнення ракетами, що відділилися кінцевих пунктів. Початкове положення ракети, яка виводить групу наносупутників  ${}_1x_1(t_0)$ ,  ${}_1x_2(t_0)$ ,  ${}_1x_3(t_0)$  вважається заданим. Перевантаження  $P_q$  ( $q=1, 11, 12$ ) на кожній ділянці траєкторії має свою постійну величину. Необхідно знайти такий закон зміни  $v_q$  ( $q=1, 11, 12$ ) значення координат пункту  $I$ , для яких критерій

$$I = -[{}_11x_2(t_{11}) + {}_{12}x_2(t_{12})] \rightarrow \min \quad (5.42)$$

досягає мінімуму за умови, що  ${}_11x_1(t_{11})$ ,  ${}_11x_2(t_{11})$ ;  ${}_{12}x_1(t_{12})$ ,  ${}_{12}x_2(t_{12})$  задані.

На підставі сформульованих у першому розділі необхідних умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху СДС з довільною схемою розгалуження, запишемо необхідні умови оптимальності керування  ${}_1v(t) \ t \in [t_0, t_1]$ ,  ${}_{11}v(t) \ t \in [t_1, t_{11}]$ ,  ${}_{12}v(t) \ t \in [t_1, t_{12}]$  задачі (5.39–5.42).

Для побудови оптимальної розгалуженої траєкторії руху ракети, яка виводить групу наносупутників, необхідно знайти такі спряжені змінні

$$\begin{cases} {}_q\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_q}{\partial {}_q x_1}, \\ {}_q\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_q}{\partial {}_q x_2}, \\ {}_q\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H_q}{\partial {}_q x_3}, \end{cases} \quad (q=1, 11, 12) \quad (5.43)$$

де

$$H_q = g_q \lambda_1(t) P_q \cos v_q + {}_q\lambda_2(t) {}_q x_3 + g_q \lambda_3 P_q \sin v_q - {}_q\lambda_3(t) g, \quad (5.44)$$

які задовольняють умовам

$$\frac{\partial I}{\partial {}_{11}x_2(t_{11})} - {}_{11}\lambda_2(t_{11}) = \frac{\partial I}{\partial {}_{12}x_2(t_{12})} - {}_{12}\lambda_2(t_{12}) = 0, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial I}{\partial {}_1x_1(t_1)} - {}_1\lambda_1(t_1) + {}_{11}\lambda_1(t_1) + {}_{12}\lambda_1(t_1) = 0, \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial I}{\partial {}_1x_2(t_1)} - {}_1\lambda_2(t_1) + {}_{11}\lambda_2(t_1) + {}_{12}\lambda_2(t_1) = 0, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial I}{\partial {}_1x_3(t_1)} - {}_1\lambda_3(t_1) + {}_{11}\lambda_3(t_1) + {}_{12}\lambda_3(t_1) = 0 \quad (5.48)$$

при довільних значеннях  ${}_{11}\lambda_1(t_{11})$ ,  ${}_{12}\lambda_1(t_{12})$ ,  ${}_{11}\lambda_3(t_{11})$ ,  ${}_{12}\lambda_3(t_{12})$ , щоб мінімізувати гамільтоніан (5.44) по керуванню  ${}_q v (q=1, 11, 12)$ . Застосовуючи співвідношення (5.43) - (5.48) до задачі (5.39) - (5.42), отримуємо рішення в явному аналітичному вигляді:

$${}_q\hat{x}_1(t) = \frac{gP_q}{\sqrt{C_q}} \ln \frac{2\sqrt{C_q R_q(t)} + 2C_q t + b_q}{2\sqrt{C_q R_q(t^*)} + 2C_q t^* + b_q} + {}_q\hat{x}_1(t^*), \quad (5.49)$$

$${}_q\hat{x}_2(t) = \frac{gP_q}{A_q} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4C_q} \left[ (2C_q t + b_q) \sqrt{R_q(t)} - (2C_q t^* + b_q) \sqrt{R_q(t^*)} \right] + \\ & + \frac{4A_q^2}{8C_q \sqrt{C_q}} \ln \frac{2\sqrt{C_q R_q(t)} + 2C_q t + b_q}{2\sqrt{C_q R_q(t^*)} + 2C_q t^* + b_q} - R_q(t^*) (t - t^*) \end{aligned} \right\} - \quad (5.50) \\
 - g \frac{(t - t^*)^2}{2} + {}_q\hat{x}_3(t^*) (t - t^*) + {}_q\hat{x}_2(t^*),$$

$${}_q\hat{x}_3(t) = \frac{gP_q}{A_q} \left[ \sqrt{R_q(t)} - \sqrt{R_q(t^*)} \right] - g(t - t^*) + {}_q\hat{x}_3(t^*), \quad (5.51)$$

$$t g_q \hat{v} = A_q (t - t^*) + B_q \quad (q=1, 11, 12), \quad (5.52)$$

де

$$R_q(t) = a_q + b_q t + C_q t^2, \quad a_q = 1 + B_q^2, \quad b_q = 2A_q B_q, \quad C_q = A_q^2 \quad (q=1, 11, 12);$$

при

$$q = 1, \quad t \in [t_0, t_f], \quad t^* = t_0, \quad A_1 = 2 \left( {}_{11}\lambda_1 + {}_{12}\lambda_1 \right)^{-1},$$

$$B_1 = \left[ {}_{11}\lambda_3(t_1) + {}_{12}\lambda_3(t_1) - 2t_1 \right] \left( {}_{11}\lambda_1 + {}_{12}\lambda_1 \right)^{-1};$$

при

$$q = 11, \quad t \in [t_1, t_{11}], \quad t^* = t_1; \quad q = 12, \quad t \in [t_1, t_{12}], \quad t^* = t_1,$$

$$A_q = {}_q\lambda_1^{-1}, \quad B_q = \left[ {}_q\lambda_3(t_1) - t_1 \right] {}_q\lambda_1^{-1} \quad (q=11, 12).$$

Параметри  ${}_{11}\lambda_1$ ,  ${}_{12}\lambda_1$ ,  ${}_{11}\lambda_3$ ,  ${}_{12}\lambda_3$  потрібно підбирати таким чином, щоб задовольнити заданим кінцевим умовам.

На рис. 5.8, 5.9 наведені результати розрахунку оптимальної розгалуженої траєкторії для наступних вихідних даних:

$$t_0 = 0 \text{ с}, \quad t_1 = 70 \text{ с}, \quad t_{11} = 100 \text{ с}, \quad t_{12} = 120 \text{ с},$$

$${}_1x_1(t_0) = {}_1x_3(t_0) = 0 \text{ м/с}, \quad {}_1x_2(t_0) = 0 \text{ м},$$

$$P_1g = 2g, \quad P_{11}g = 3,5g, \quad P_{12}g = 4g, \quad g = 9,806 \text{ м/с}^2,$$

$${}_{11}x_1(t_{11}) = 2000 \text{ м/с}, \quad {}_{11}x_3(t_{11}) = 0 \text{ м/с}, \quad (5.53)$$

$${}_{12}x_1(t_{12}) = 3000 \text{ м/с}, \quad {}_{12}x_3(t_{12}) = 0 \text{ м/с}, \quad (5.54)$$

Значення параметрів  ${}_{11}\lambda_1, {}_{12}\lambda_1, {}_{11}\lambda_3(t_1), {}_{12}\lambda_3(t_1)$  були знайдені в результаті рішення градієнтним методом системи, що складається з чотирьох нелінійних рівнянь (5.49), (5.51) при  $q=11, 12$  з урахуванням кінцевих умов (5.53) і (5.54). В якості першого наближення використані величини

$${}_{11}\lambda_1 = {}_{12}\lambda_1 = -50, \quad {}_{11}\lambda_3(t_1) = {}_{12}\lambda_3(t_1) = -30.$$

Розрахунки були зупинені при  ${}_{11}\lambda_1 = -100,06, {}_{12}\lambda_1 = -49,00, {}_{11}\lambda_3(t_1) = -26,60, {}_{12}\lambda_3(t_1) = -33,26$ , коли похибки відповідності кінцевим умовам досягли значень  $\Delta_{11}x_1(t_{11}) = 1,049 \text{ м/с}, \Delta_{11}x_3(t_{11}) = -0,268 \text{ м/с}, \Delta_{12}x_1(t_{12}) = -1,34 \text{ м/с}, \Delta_{12}x_3(t_{12}) = -0,510 \text{ м/с}$ .

Оптимальне значення критерію (5.42) склало  $I = -294629 \text{ м}$ .

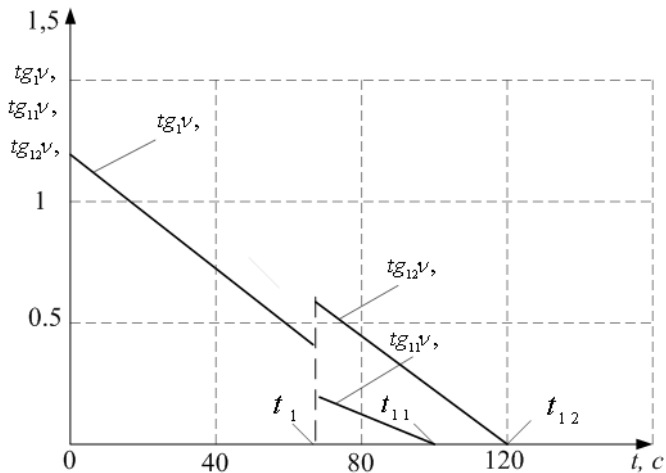


Рис. 5.8. Графіки параметрів оптимальної розгалуженої траєкторії: - оптимальні керування:  $tg_1v(t_0) = 1,34; tg_1v(t_1) = 0,401; tg_{11}v(t_1) = 0,265; tg_{12}v(t_1) = 0,678;$

$${}_{11}v(t_0) = 53^{\circ}16', \quad {}_{11}v(t_0) = 21^{\circ}51', \quad {}_{11}v(t_1) = 14^{\circ}51', \quad {}_{12}v(t_1) = 34^{\circ}9';$$

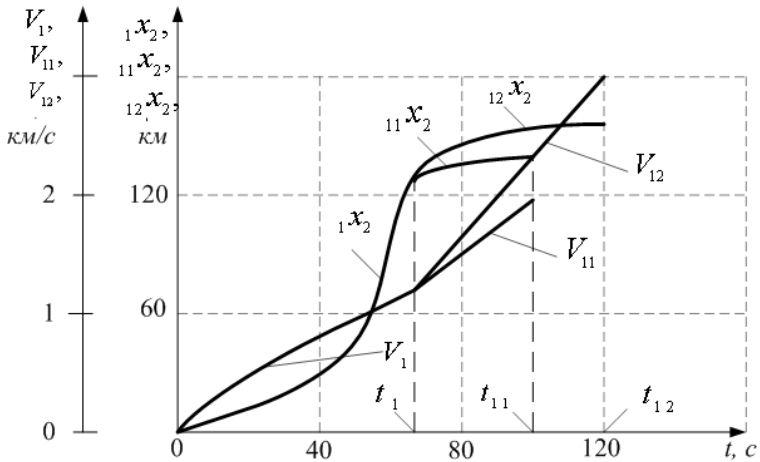


Рис. 5.9. Графіки параметрів оптимальної розгалуженої траєкторії: - висоти і швидкості:

$$V_g = \sqrt{q x_1^2 + q x_3^2} \quad (q=1, 11, 12), \quad 1x_2(t_1) = 124,889 \text{ км}, \quad 11x_2(t_{11}) = 131,834 \text{ км},$$

$$12x_2(t_{12}) = 162,795 \text{ км}.$$

Таким чином, в даному підрозділі і на підставі сформульованих необхідних умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху СДС з довільною схемою розгалуження, в аналітичному вигляді розрахована програма руху по розгалуженій траєкторії ракети з головною частиною, яка виводить групу наносупутників на навколосезмну орбіту. Реалізація отриманих керуючих впливів на різних етапах польоту і в момент розділення дозволить ефективно використовувати ресурси складеної динамічної системи для оптимальної траєкторії виведення групи навігаційних супутників. Програма може використовуватися в бортових обчислювальних системах в якості обчислювального алгоритму для оперативної побудови опорної програми руху аналогічного класу апаратів.

### **5.3. Оптимальна розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи**

#### **5.3.1 Оптимальна за мінімумом часу виведення розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи з гіперзвуковим літаком-носієм**

##### **5.3.1.1. Математична модель руху ступенів авіаційно-космічної системи. Диференціальні рівняння, що описують динаміку руху ступенів авіаційно-космічної системи**

Розвиток космічних технологій в науково-дослідницьких, прикладних і військових цілях поставив питання про зниження витрат, пов'язаних з доставкою вантажів на навколосемні орбіти. Перспективним вирішенням цієї задачі є використання багаторазової авіаційно-космічної системи (АКС), в якій уся конструкція або її частина використовується багаторазово [142, 152-154]. Про доцільність використання багаторазової АКС свідчать результати льотно-конструкторських випробувань і експлуатації орбітальних багаторазових транспортних космічних систем: «Спейс шаттл», «Буран», «Спіраль». Обґрунтовані і розроблені проекти орбітальних і суборбітальних транспортних космічних систем «МАКС», «Хотол», «Зангер», «Гермес», «XL-20», «Хоуп», «Клипер» та інших [35, 36, 60, 63, 70, 136–141].

Перспективою розвитку багаторазової АКС є одноступеневі із горизонтальним стартом авіаційно-космічні системи (ОГС АКС) з комбінованою силовою установкою. За теоретичними оцінками [101, 102, 106, 107], у апаратів, що горизонтально стартують сила тяги, яка витрачається на компенсацію сили лобового опору для різних типів апаратів зі злітною масою до 600 тон не буде перевищувати  $50\text{--}100 \cdot 10^4 \text{ Н}$ , в той час як у апаратів, що вертикально стартують може досягати  $3000 \cdot 10^4 \text{ Н}$ . Проміжним етапом на шляху практичної реалізації технології ОГС АКС виведення в космос корисного навантаження є двоступеневі із горизонтальним стартом АКС (ДГС АКС) з першою гіперзвуковою ступінню-розгонщиком, яку

прийнято називати літак-носій (ЛН), і другою орбітальною ступінню, яку називають орбітальним літаком (ОЛ). Припускається, що безпілотний варіант ДГС АКС буде використано як для відпрацювання гіперзвукових технологій, впровадження яких призведе до створення пілотованих ДГС АКС і непілотованих (безпілотних) ОГС АКС, так і технологій виведення в ближній космос і зняття з орбіти нано-, мікро- і малих супутників різного призначення (технологія створення космічних супутникових групувань, які не перетворюються з часом в космічне сміття).

Разом з тим, однією з найбільш важливих проблем при створенні ДГС АКС з горизонтальним стартом залишається забезпечення безпеки операції розділення і початкового розведення орбітальної ступені і літака-носія. Створювані на сьогоднішній день математичні моделі такого роду апаратів, вимагають великої кількості вихідних даних і колосальних обчислювальних ресурсів, при цьому вони не володіють тим рівнем точності і достовірності інформації, оскільки немає вимірювань, які були б покладені в ідентифікацію математичних моделей і дозволяли моделювати в наземних умовах і імітувати їх роботу за допомогою комп'ютерних систем.

Практика проектування ДГС АКС [107, 140, 152-154] показує необхідність і доцільність випереджаючої розробки відносно недорогих експериментальних двоступеневих демонстраторів гіперзвукових технологій, які б забезпечували відпрацювання алгоритмів керування польотом на різних етапах, включаючи розділення носія та орбітальної ступені, виведення орбітальної ступені на необхідну висоту з заданою швидкістю, а також її спуск і автоматичну посадку. Створення демонстраторів гіперзвукових технологій, дозволить зменшити ступінь технічного ризику, знизити фінансові витрати, а випереджаючі експериментальні дослідження забезпечать розв'язання ключових науково-технічних проблем і дадуть основу для подальшої повномасштабної розробки ДГС АКС.

Даний підрозділ присвячено розробці методу розрахунку оптимальної опорної розгалуженої траєкторії ДГС АКС. Опорною вважається та

траєкторія, яка може бути прийнята в якості раціонального першого наближення до оптимальної траєкторії, побудова якої здійснюється на більш детальних і точних моделях руху ступенів АКС.

Запропонований метод може бути використаний як для попереднього розрахунку, так і для корекції поточних показань розрахунку в залежності від ситуації, що складається на борту, оскільки володіє необхідною швидкістю і вимагає раціонального обсягу обчислювальних ресурсів.

В якості критерію оптимізації опорної розгалуженої траєкторії ДГС АКС прийнято мінімум часу виведення СН і ОС з положення підйом - розгін в задані кінцеві положення.

Вихідна форма критерію може бути як скалярною

$$I = b_1\Delta t_1 + b_2\Delta t_{12} + b_{11}\Delta t_{11}, \quad (5.55)$$

де  $b_1, b_{12}, b_{11}$  – нормовані вагові коефіцієнти;  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ;  $\Delta t_{1i} = t_{1i} - t_1$  ( $i=1,2$ );  $t_1, t_{12}, t_{11}$  – моменти часу структурних перетворень СДС, яка переміщається по типовій розгалуженій траєкторії з розділенням (рис. 1.10, а,  $t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11}$ ), так і векторною

$$I = \{\Delta t_1, \Delta t_{12}, \Delta t_{11}\}^T, \quad (5.56)$$

В цьому випадку використовуємо умовний критерій переваги із застосуванням процедури апріорного типу, що здійснює згортку критерію (5.56) на підставі рівномірної оптимальності [111-113], до вигляду (5.55), перетворюючи тим самим задачу векторної оптимізації в скалярну.

Дільниця підйому-розгону 0-1-11 (12) загальної траєкторії польоту (рис. 5.10) являє собою розгалужену траєкторію, для оптимізації якої будемо застосовувати теоретичні положення, розроблені в попередніх розділах роботи.

Для пошуку оптимальної траєкторії руху ступенів АКС: літака-носія з розміщенням на ньому орбітальним літаком (СН + ОС), літака-носія (СН) та

орбітального літака (ОЛ) будемо використовувати необхідні умови оптимальності детермінованої СДС, сформульовані у вигляді теореми 1.3.

В якості першої ступені ДГС АКС розглядається гіперзвуковий безпілотний літак-носії (ЛН), а в якості орбітальної ступені – безпілотний орбітальний літак (ОЛ), який після запуску в космос може повертатися по траєкторії літака на землю. Вважається, що тяга ЛН створюється комбінованою силовою установкою, яка складається з турбореактивних, прямоточних, гіперзвукових прямоточних повітряно-реактивних двигунів. Силова установка ОЛ – це рідинний ракетний двигун (РРД). Якісну картину профілю польоту ДГС АКС представлено на рис. 5.10.

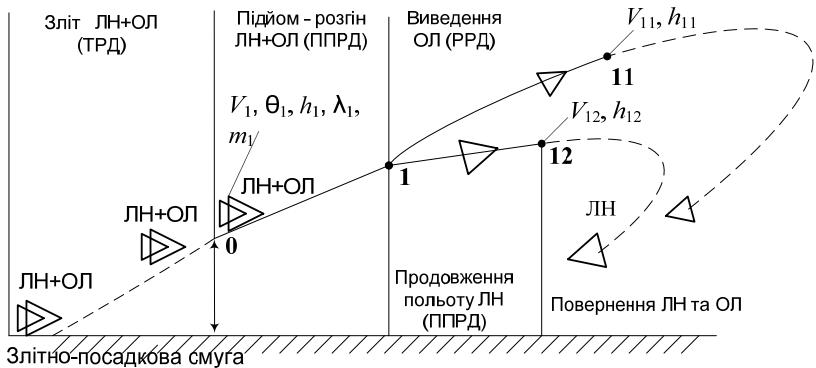


Рис.5.10. Якісна картина профілю польоту ДГС АКС: ТРД (турбореактивний двигун), ППРД (прямоточний повітряно-реактивний двигун) – режими роботи силової установки ЛН, РРД – рідинний ракетний двигун ОЛ

З урахуванням прийнятих припущень, в якості математичної моделі руху ступенів АКС вздовж гілок траєкторії (рис. 5.10) приймаються відповідні рівняння руху центру мас ЛН+ОЛ (гілка 0 – 1), ЛН (гілка 1 – 12), ОЛ (гілка 1 – 11) в проекціях на вісі траєкторної системи координат (за відсутності вітру) [17, 60, 70, 101, 116]:

$$m\dot{V} = P \cos(\alpha + \varphi_p) - X_a - m \frac{\mu}{r^2} \sin \theta + m r \omega_z^2 \cos \varphi (\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta), \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} -mV\dot{\psi} \cos \theta = & P \sin(\alpha + \varphi_p) \sin \gamma_a + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a + 2m\omega_\zeta V (\sin \varphi \cos \theta - \\ & - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta) - m r \omega_\zeta^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi) - m \frac{V^2}{r} \cos^2 \theta \sin \psi \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} mV\dot{\theta} = & P \sin(\alpha + \varphi_p) \cos \gamma_a + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - m \frac{\mu}{r^2} \cos \theta - 2m r \omega_\zeta V \cos \varphi \sin \psi + \\ & + m r \omega_\zeta^2 (\cos^2 \varphi \cos \theta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \sin \theta) + m \frac{V^2}{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.59)$$

доповнені кінематичними рівняннями

$$\dot{r} = V \sin \theta, \quad (5.60)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{V \cos \theta}{r} \cos \psi, \quad (5.61)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V \cos \theta \sin \psi}{r \cos \varphi}, \quad (5.62)$$

і рівнянням зміни маси

$$\dot{m} = -f, \quad (5.63)$$

де  $P$  – тяга силової установки ступенів демонстратора на відповідних гілках траєкторії,  $\alpha$  – кут атаки,  $\theta$  – кут нахилу траєкторії,  $Y_a$ ,  $X_a$  – відповідно підйомна сила і лобовий опір,  $\omega_\zeta$  – кутова швидкість обертання Землі,  $r = R_\zeta + h$  ( $R_\zeta$  – умовний радіус Землі,  $h$  – геометрична висота),  $\mu$  – добуток гравітаційної сталої на масу Землі,  $\lambda$  – довгота,  $f$  – секундна витрата маси.

Для різних ділянок розгалуженої траєкторії, рівняння (5.57)–(5.63) будуть відрізнятися величиною тяги, аеродинамічним впливом, секундною витратою маси  $f$  та її початковим значенням. Для позначення приналежності вектору стану, керування та інших параметрів для опису руху ступенів АКС вздовж гілок траєкторії 0-1 (ЛН+ОЛ), 1-12 (ЛН), 1-11 (ОЛ) будемо відмічати їх лівим нижнім індексом відповідно 1, 12, 11. У випадках,

коли міркування стосуються усіх гілок розгалуженої траєкторії або, коли зрозуміло про яку саме гілку розгалуженої траєкторії йде мова, індекси 1, 12, 11 записувати не будемо.

Розглянемо рух ступенів АКС в площині екватора в східному напрямку, за припущення що ковзання відсутнє, а кут крену дорівнює нулю, тобто,  $\gamma_a=0$  ( $\cos \gamma_a=1, \sin \gamma_a=0$ ),  $\varphi=0$  ( $\cos \varphi=1, \sin \varphi=0$ ),  $\psi=-\frac{\pi}{2}$  ( $\cos \psi=0, \sin \psi=-1$ ).

З урахуванням прийнятих припущень рівняння (5.57)–(5.63) істотно спрощуються і приймають вигляд

$$m\dot{V} = P \cos \alpha - X_a - mg(r, \omega_C) \sin \theta, \quad (5.64)$$

$$mV\dot{\theta} = P \sin \alpha + Y_a - mg(r, \omega_3) \cos \theta + 2mV\omega_3 + m\frac{V^2}{r} \cos \theta, \quad (5.65)$$

$$\dot{h} = V \sin \theta, \quad (5.66)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V}{r} \cos \theta, \quad (5.67)$$

$$\dot{m} = -f. \quad (5.68)$$

де

$$g(r, \omega_C) = \frac{\mu}{r^2} - r\omega_C^2. \quad (5.69)$$

Зауважимо, що спрощення рівнянь (5.57)–(5.63) не впливає на зміст задачі, який полягає в оптимізації саме розгалуженої траєкторії.

Крім того, використання плоскої траєкторії руху ЛА, оптимізованої при його русі вздовж земного екватора для виведення ЛА в площині умовного екватора, тобто, при русі ЛА в площині ортодромії, дасть похибку не більше 2% від оптимального рішення для заданого положення площини виведення [37, 47, 70, 101]. Якщо навіть така помилка є неприпустимою, то розраховану за рівняннями (5.64) – (5.68) траєкторію можна розглядати як наближення до оптимальної траєкторії, що лежить поза площиною екватора.

Слід зауважити, що в силу дії різних випадкових зовнішніх (атмосферних) і внутрішніх (параметричних) збурень реальний політ ступенів АКС не відбуватиметься строго за заданою як завгодно точно заздалегідь розрахованою траєкторією. Відповідно до сучасної концепції вирішення задач виведення ступенів АКС в задані точки навколосемного простору [100, 101, 106, 107, 110] найбільш перспективним є спосіб, який використовує прогнозування руху ЛА, в якому прогноз керування задається за допомогою опорного оптимального керування, який відповідає опорній оптимальній траєкторії [82].

Для побудови опорних оптимальних керування і траєкторії принципове значення мають основні фізичні процеси, що впливають на рух ЛА. Тому, в подальших розрахунках другорядні явища не будуть прийматися до уваги. Опорна оптимальна траєкторія і відповідне їй керування знаходять застосування не тільки для прогнозування руху ступенів АКС за допомогою бортових обчислювальних комплексів в процесі нормального функціонування літальних апаратів, а й на етапі проектування АКС при перевірці концептуальної придатності проектних варіантів за допомогою імітаційного моделювання руху, які пропонуються до реалізації компоновок ступенів АКС [29, 79, 82, 83, 85].

### ***Сили, що діють в польоті на ступені АКС***

#### **1. Тяга двигуна**

##### *Силова установка літака-носія*

Згідно з однією з найбільш перспективних концепцій АКС з гіперзвуковим літаком-носієм [39, 47, 60, 70, 73] тяга СН буде створюватися комбінованою силовою установкою, що складається з п'яти турбопрямоточних двигунів, кожен з яких має максимальний питомий імпульс  $J_{y0}=3800$  с і максимальні витрати палива  $f_{ППРД}=30$  кг/с в режимі прямоточного повітряно-реактивного двигуна (ППРД). Максимальне значення тяги ППРД залежить від висоти і числа  $M$  польоту:  $P_{ППРД}=P_{max}(h, M)$  (рис. 5.11) [76, 77, 78, 82].

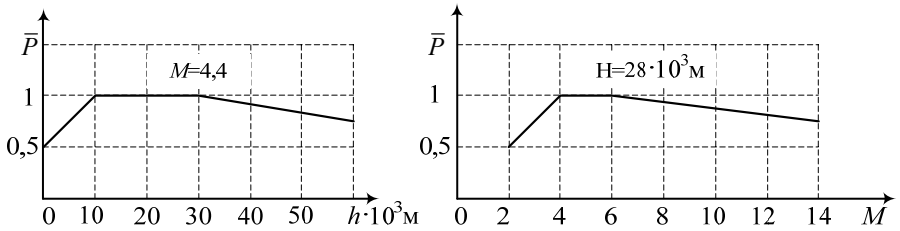


Рис. 5.11. Висотно-швидкісні характеристики ППРД:

$$P = \frac{P_{\max}(h, M)}{J_{y0} \times f_{\text{ппрд}} \times g}, \quad g = 9,81 \text{ м} / \text{с}^2.$$

Для обчислення тяги ППРД в точках  $(h, M)$ , які не збігаються з висотно-швидкісними характеристиками крейсерського режиму ППРД (рис. 5.11), апроксимуємо  $P$  залежністю  $P=P(h, M)$ , для якої в області  $4 \leq M \leq 6$ ,  $10 \cdot 10^3 \text{ м} \leq h \leq 30 \cdot 10^3 \text{ м}$  –  $P=1$ , а за її межами вибирається найменше з значень  $P$ , обчислене за характеристиками  $P(h) \Big|_{M=4,4}$  і  $P(M) \Big|_{h=28 \cdot 10^3 \text{ м}}$  [106].

#### Силовая установка орбитального літака

На ОЛ встановлюється один або декілька рідинних ракетних двигунів (РРД) з сумарною пустоною тягою  $P_{\text{ПУСТ}} = 1800 \cdot 10^3 \text{ Н}$ , питомим імпульсом у вакуумі  $J_{y0} = 492,998 \text{ с}$  і максимальними секундними витратами палива  $f_{\text{РРД}} = 372,184 \text{ кг/с}$  [75, 76, 77, 82, 84]. Максимальне значення тяги РРД для поточної висоти польоту  $h$  обчислюється за формулою [78, 94]

$$P_{\text{РРД}} = P_{\text{ПУСТ}} - \rho(h) S_a N_a = P_{\max}(h), \quad (5.70)$$

де  $\rho(h)$  – тиск повітря,  $S_a$  – площа зрізу сопла (приймаємо  $S_a = 2,01 \text{ м}^2$  [90],  $N_a = 1$ ). У режимі плавного дроселювання РРД шляхом зміни секундної витрати палива  $\dot{m}$  для обчислення тяги використовується вираз [106, 114]

$$P_{\text{РРД}} = -\dot{m} J_{y0} g + P_a S_a - \rho(h) S_a = P_{\max}(h), \quad (5.71)$$

де  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $P_a$  – тиск на зрізі сопла (приймаємо  $P_a = 1,962 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$  [101-102]). Перехід в режим плавного дроселювання РРД здійснюється в момент часу  $t_4$  – досягнення тангенціальним перевантаженням значення  $n_{xa} = 4$ .

Вважаючи, що

$$n_{xa} = \frac{P \cos \alpha - X_a}{mg} \approx \frac{P}{mg}, \quad P \approx -\dot{m} J_{y0} g,$$

знаходимо закон зміни маси ОЛ і секундної витрати палива РРД, що забезпечують політ з гранично допустимим перевантаженням  $n_{xa} = 4$ :

$$m = m_4 \exp[-(t - t_4)/c],$$

$$\dot{m} = -\frac{m_4}{c} \cdot \exp[-(t - t_4)/c] \leq f_{PPD},$$

де  $m_4$  – маса ОЛ в момент часу  $t_4$ ,  $c = J_{y0} / n_{xa} = 123,2495 \text{ с}$ .

## 2. Складові аеродинамічної сили.

Модель динаміки руху ступенів АКС (5.64) – (5.68) містить дві складові аеродинамічної сили: силу лобового опору  $X_a$  і підйомну силу  $Y_a$ , які обчислюються за формулами [3, 17]

$$X_a = c_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S, \tag{5.72}$$

$$Y_a = c_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S, \tag{5.73}$$

де  $\rho = \rho(h)$  – масова густина повітря,  $S$  – площа крила,  $c_{xa}$  та  $c_{ya}$  – відповідно коефіцієнт лобового опору і коефіцієнт підйомної сили.

Коефіцієнти  $c_{xa}$  та  $c_{ya}$  розраховуються за формулами [12, 33, 39, 59,60, 99]:

$$c_{xa} = c_{xao}(M) + B(M)c_{ya}^2, \tag{5.74}$$

$$c_{ya} = c_y^a(M)\alpha, \tag{5.75}$$

де  $c_{xao}(M) = 0,015(M-1)^{-1} + c$ ,  $B(M) = 0,525 \ln M + b$ ,  
 $c_y^a(M) = 3,7242(M^2 - 1)^{-0,5}$ ,  $M = V/a$  – число Маха,  $a = 20,047\sqrt{T}$  – швидкість звуку [99],  $T$ – термодинамічна температура Кельвіна,  $\alpha$ – кут атаки, в наступній області зміни  $\alpha$  та  $M$ :

$$3 \leq M \leq 5 \text{ и } 0 \leq \alpha \leq 0,15; 3 \leq M \leq 10 \text{ и } 0 \leq \alpha \leq 0,1; \quad (5.76)$$

$$3 \leq M \text{ и } 0 \leq \alpha \leq 0,05, \quad (5.77)$$

а також за формулами

$$c_{xa} = c_{xao} + A_1 \sin^3 \alpha \operatorname{sign} \alpha, \quad (5.78)$$

$$c_{ya} = A_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{sign} \alpha, \quad (5.79)$$

де

$$c_{xao} = 0,05 c_{yK_{\max}} (3K_{\max} \cos^2 \alpha_{K_{\max}})^{-1},$$

$$A_1 = A_2 \cdot 2(3 \cos^2 \alpha_{K_{\max}} - 1) \left[ 3K_{\max} \sin(2\alpha_{K_{\max}}) \right]^{-1}, A_2 = 0,15 \frac{\sqrt{3}}{2} c_{y_{\max}},$$

$$\alpha_{K_{\max}} = \arccos \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} (\pi - \arccos(c_{yK_{\max}} c_{y_{\max}}^{-1})) \right] \right\},$$

$$c_{y_{\max}} = \max_{0 \leq \alpha \leq \pi/2} c_y,$$

$c_{yK_{\max}}$  – значення коефіцієнта підйомної сили, що відповідає максимальній аеродинамічній якості  $K_{\max}$ , за межами області (5.76), (5.77).

Результати розрахунку максимальної аеродинамічної якості і найвигіднішого кута атаки за формулами

$$K_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{B(M)c_{xao}(M)}}, \quad (5.80)$$

$$\alpha_{HB} = \sqrt{\frac{c_{xao}(M)}{B(M)}}, \quad (5.81)$$

$$c_{ya}^a(i)$$

отримані з виразів (5.74), (5.75), і які описують квадратичну поляру [17], наведені відповідно в табл. 5.1 і 5.2.

Таблиця 5.1

Залежність  $K_{\max}$  від  $M$

Ступені АКС	ЛН+ОЛ (дільниця траєкторії 0–1, $c=0,0095, b=0,6$ )					ЛН (дільниця траєкторії 1–12, $c=0,008, b=0,4$ )				
	$M$	4,4	5	6	7	8	4,4	6	12	20
$K_{\max}$	3,61	3,61	3,60	3,58	3,56	4,13	4,11	3,95	3,79	3,72

Продовження табл. 5.1

Ступені АКС	ОЛ (дільниця траєкторії 1–11, $c=0,01, b=0,8$ )						
	$M$	4	8	10	12	20	25
$K_{\max}$	3,30	3,29	3,26	3,23	3,12	3,07	3,03

Таблиця 5.2

Значення  $\alpha_{\text{нв}}$  для ступенів АКС

Ступені АКС		ЛН+ОС (дільниця траєкторії 0–1)	ЛН (дільниця траєкторії 1–12)	ОЛ (дільниця траєкторії 1–11)			
$\alpha_{\text{нв}}$	град	7,21	6,75	9,50	11,67	16,04	20,70
	рад	0,13	0,12	0,17	0,20	0,28	0,36
$M$		5	5	7,7	10	15	20

Величина найвигіднішого кута атаки (табл. 5.2) для ОЛ лежить далеко за межами області (5.76), (5.77). Отже, в процесі виведення кут атаки ОЛ може вийти за межі цієї області, що призведе до необхідності використовувати для розрахунків оптимальної траєкторії формули (5.78), (5.79), що описують гіперзвукову поляру. Обчислимо параметри  $c_{\text{хао}}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , що входять до виразу (5.78), (5.79). Припустимо, що  $K_{\max} = 3,0$ ,  $c_{yK_{\max}} = 0,3$ ,  $c_{y_{\max}} = 1$  [115-117]. Тоді  $A_2 = 0,1299$ ,  $A_1 = 0,07138$ ,  $c_{\text{хао}} = 0,01902$ .

Результати розрахунку гіперзвукової аеродинамічної якості в залежності від значень кута атаки наведені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Залежність  $K_{\max}$  от  $\alpha$

$\alpha$ , град	0	5	10	15	20	20,7	21	25	30	35	40	45	50
$K$	0,0	0,5	1,64	2,67	3,0	3,0	3,0	2,88	2,59	2,27	1,97	1,61	1,44

Як видно з табл. 4.3 найвигідніший кут атаки для гіперзвукової поляри практично збігається зі значенням  $\alpha_{\text{нв}}$ , обчисленим для квадратичної поляри  $M=20$  (табл. 5.2) і лежить в проміжку між  $20^\circ$ – $21^\circ$ .

### 3. Властивості атмосфери, які використовуються при розрахунку сил.

Вважаємо, що атмосфера складається із двох ізотермічних ділянок з масовою щільністю і тиском повітря, які експоненціально зменшуються зі збільшенням висоти [3, 4, 101, 106]:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp[-(h - h_0)/h_p], \quad (5.82)$$

$$P(h) = P_0 \exp[-(h - h_0)/h_p]. \quad (5.83)$$

Чисельні значення параметрів, що входять у вирази (5.82), (5.83), наведені в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Діапазон зміни висоти $h$ , м	$h_0=28 \cdot 10^3 \leq h < 45 \cdot 10^3$	$h_0=45 \cdot 10^3 \leq h \leq 100 \cdot 10^3$
Термодинамічна температура Кельвіна $T$ , К	237,4385	224,4945
Швидкість звуку $a$ , м/с	308,9017	300,3639
$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	$2,5076 \cdot 10^{-2}$	$3,9957 \cdot 10^{-3}$
$h_p$ , м	$6,5334 \cdot 10^3$	$7,4384 \cdot 10^3$
$P_0$ , Н/м <sup>2</sup>	$1,6162 \cdot 10^3$	$2,8714 \cdot 10^2$
$h_p$ , м	$6,9451 \cdot 10^3$	$7,1316 \cdot 10^3$

### Граничні умови

Вважаємо, що ЛН + ОЛ починають свій рух в момент часу  $t_0 = 0$  в точці фазового простору моделі (5.64) – (5.68) з координатами  $V_1=1359,160$  м/с;  $\theta_1=0$ ;  $h_1=28 \cdot 10^3$ м;  $\lambda_1=0$ ;  $m_1=294 \cdot 10^3$ кг.

Орбітальний літак і літак-носії після підйому-розгону СН + ОС і розділення ступенів повинні досягти швидкостей і висот відповідно  $V_{11}=7843,04$  м/с;  $h_{11}=100 \cdot 10^3$ м та  $V_{12}=3665,824$  м/с;  $h_{12}=45 \cdot 10^3$ м при будь-яких значеннях  $\theta_{1i}$ ,  $\lambda_{1i}$ ,  $m_{1i}$ , ( $i=1,2$ ) в момент першого досягнення заданих швидкості і висоти.

### Обмеження

При виконанні розрахунків будемо розглядати в якості допустимої таку розгалужену траєкторію руху ступенів АКС вздовж її гілок, при якій не порушуються наступні обмеження по фазовим координатам  $x = \{V, \theta, h, \lambda, m\}^T$  та керуванню  $u = \{P, \alpha\}^T$  моделі (5.64) – (5.68); по температурі в критичній точці [75, 77]; по швидкісному напору і навантаженням  $n_{xk}$  та  $n_{yk}$  [81]; по величині кута атаки  $-10^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$  [85]; по величині тяги  $((X_a - mg \sin\theta)/\cos\alpha) \leq P \leq P_{\max}$ . Перелічений набір обмежень відповідає фізичному змісту і є стандартним для задач динаміки польоту, в яких вирішується проблема підйому-розгону ЛА [12, 33, 39].

У задачах виведення багатоступеневих АКС з горизонтальним стартом в точці розділення ступенів повинні виконуватися спеціальні обмеження, що забезпечують рівність нулю механічної напруги в замках кріплення ОЛ до ЛН. На траєкторній задачі ці обмеження полягають в тому, що  $n_{xk_1}(t_1) = n_{yk_1}(t_1) = 0$  [12, 33]. Крім того відділення ОС від СН має відбуватися в такій точці фазового простору і в такий момент часу, які б дозволили мати на орбіті масу палива  $m_{11}^T(t_{11}) \in [m_{\min}^T, m_{\text{НОМ}}^T]$ , де  $m_{\min}^T$  – кількість палива мінімально необхідне для створення гальмівного імпульсу, що забезпечує повернення з

орбіти,  $m_{НОМ}^T$  – номінально необхідний запас палива на орбіті [85, 94, 114]. В даній задачі  $m_{\min}^T = 1712$  кг,  $m_{НОМ}^T = 3000$  кг.

Для задачі оптимізації розгалуженої траєкторії АКС необхідно ввести специфічне обмеження

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) \geq A(t), t \in [t_1, t_{12}], \quad (5.84)$$

де

$$A(t) = \begin{cases} 22,5(t - t_1)^2, & t_1 \leq t \leq t_1 + 4, \\ 223,244 \cdot \ln[(t - t_1) + 1], & t_1 + 4 \leq t \leq t_{12}, \end{cases}$$

яке забезпечує умову безпечного руху ОЛ і ЛН після розділення до заданих кінцевих пунктів. Умова (5.84) вимагає, щоб графіки висот польоту ОЛ і ЛН не зближувались до небезпечної відстані, при якій існує реальна загроза зіткнення ОЛ і ЛН або попадання одного з них в супутній струмінь іншого [114].

Відзначимо, що етап розділення ступенів АКС за часом займає не більше 8-10 с [47, 60]. Етап розділення починається після включення на ОЛ РРД системи орбітального маневрування (СОМ) та механічного підйому ОЛ в положення, при якому кут між поздовжньою віссю ОЛ і площиною крила ЛН не перевищує 11 град.

Додатковий аеродинамічний опір ОЛ зрівноважується тягою РРД СОМ, в той час як тиск на нижній частині фюзеляжу піднімає ОЛ вгору і уводить від літака-носія. Приблизно через 4 с після відділення, коли ОЛ віддаляється від ЛН за межі впливу косих стрибків ущільнення, які йдуть від носової частини фюзеляжу ЛН [47], основний РРД починає виводити ОЛ в задану граничну точку. Дослідження ділянки розділення є самостійною задачею [59]. В наведеному прикладі розрахунку розгалуженої траєкторії руху АКС особливості ділянки розділення враховані в обмеженні (5.84), в обмеженні маси палива на орбіті, а також в тому, що  $n_{xk_1}(t_1) = n_{yk_1}(t_1) = 0$  і поздовжнє перевантаження ОЛ протягом 4 с після розділення дорівнює 0.

### 5.3.2. Постановка задачі. Основні розрахункові співвідношення

Завдання оптимізації траєкторії АКС з гіперзвуковим літаком-носієм може бути вирішена на підставі наслідку 2 з теореми 1.1 (теорема 1.3), що дає необхідні умови оптимальності керування детермінованою СДС з розділенням підсистем.

Постановка задачі набуває вигляду:

$${}_1\dot{x} = {}_1f({}_1x, {}_1u, t), t \in [t_0, t_1], ({}_1x(t_0), t) = const, ({}_1x(t_1), t_1) = var, \quad (5.85)$$

$${}_{11}\dot{x} = {}_{11}f({}_{11}x, {}_{11}u, t), t \in [t_1, t_{11}], {}_{11}x(t_1) = const, t_{11} = var, \quad (5.86)$$

$${}_{12}\dot{x} = {}_{12}f({}_{12}x, {}_{12}u, t), t \in [t_1, t_{12}], {}_{12}x(t_{12}) = const, t_{12} = var, \quad (5.87)$$

$${}_1x_i(t_1) = {}_{11}x_i(t_1) = {}_{12}x_i(t_1), (i = \overline{1, n-1}), \quad (5.88)$$

$${}_1x_n(t_1) = {}_{11}x_n(t_1) + {}_{12}x_n(t_1), \quad (5.89)$$

$$Q({}_{11}x, {}_{12}x, {}_{11}u, {}_{12}u, t) \leq 0, t \in [t_1, t_{12}], \quad (5.90)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_1({}_1x, {}_1u, t) dt + \int_{t_1}^{t_{12}} [\Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t) + \Phi_{12}({}_{12}x, {}_{12}u, t)] dt + \\ + \int_{t_2}^{t_{11}} \Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t) dt \rightarrow \min_{\substack{{}_{11}u(t), t \in [t_0, t_1], {}_{12}u(t), t \in [t_1, t_{12}], \\ {}_{11}u(t), t \in [t_1, t_{11}], {}_1x(t), t \in [t_1, t_{12}]}} \quad (5.91)$$

де  ${}_1x(t) \in E^n$ ,  ${}_{12}x(t) \in E^n$ ,  ${}_{11}x(t) \in E^n$ ,  ${}_1u(t) \in \Omega_1 \subset E^m$ ,  ${}_{12}u(t) \in \Omega_{12} \subset E^{m_{12}}$ ,

${}_{11}u(t) \in \Omega_{11} \subset E^{m_{11}}$ ,  ${}_1u(\cdot)$ ,  ${}_{12}u(\cdot)$ ,  ${}_{11}u(\cdot)$  – кусково-неперервні.

Основні розрахункові співвідношення для задачі (5.85) - (5.91) відповідно до теореми 1.3 сформулюємо у вигляді наслідку.

Наслідок 5.1.

Нехай  ${}_1x(t)$ ,  ${}_1u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  ${}_{12}x(t)$ ,  ${}_{12}u(t)$ ,  $t \in [t_1, t_{12}]$ ,  ${}_{11}x(t)$ ,  ${}_{11}u(t)$ ,  $t \in [t_1, t_{11}]$ ,  $t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11}$  – допустимий процес. Для оптимальності допустимого процесу необхідно існування функціонального множника  $\mu(t) \geq 0$   $t \in [t_1, t_{12}]$ ,

неперервних рішень  ${}_1\Psi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  ${}_{11}\Psi(t)$ ,  ${}_{12}\Psi(t)$ ,  $t \in [t_1, t_{12}]$ ,  ${}_{11}\Psi(t)$ ,  $t \in [t_{12}, t_{11}]$  диференціальних рівнянь:

$${}_1\dot{\Psi} + \left. \frac{\partial H_{11}}{\partial {}_1x} \right|_{\wedge} = 0, t \in [t_0, \hat{t}_1], \quad (5.92)$$

$${}_{11}\dot{\Psi} + \left. \frac{\partial H_{11}}{\partial {}_{11}x} \right|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}], \quad (5.93)$$

$${}_{12}\dot{\Psi} + \left. \frac{\partial H_{12}}{\partial {}_{12}x} \right|_{\wedge} + \mu(t) \left. \frac{\partial Q}{\partial {}_{12}x} \right|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \quad (5.94)$$

$${}_{11}\dot{\Psi} + \left. \frac{\partial H_{11}}{\partial {}_{11}x} \right|_{\wedge} + \mu(t) \left. \frac{\partial Q}{\partial {}_{11}x} \right|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \quad (5.95)$$

таких, що справедливі умови

(1) трансверсальності:

$$H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_{11}) = 0; \quad (5.96)$$

(2) скачка:

$${}_1\Psi(\hat{t}_1) = {}_{11}\Psi(\hat{t}_1) + {}_{12}\Psi(\hat{t}_1), \quad (5.97)$$

$${}_{11}\Psi(\hat{t}_{12} - 0) = {}_{11}\Psi(\hat{t}_{12} + 0), \quad (5.98)$$

$$H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_1) = H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_1) + H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_1) + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_1), \quad (5.99)$$

$$H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_{12} - 0) + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_{12} - 0) + \mu(\hat{t}_{12} - 0)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_{12} - 0) - H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_{12} - 0) = 0; \quad (5.100)$$

(3) мінімуму гамільтоніанів

$$H_{\beta}({}_{\beta}\hat{x}(t), {}_{\beta}\hat{u}(t), {}_{\beta}\Psi(t), t) = \min_{{}_{\beta}u(t) \in \Omega_{\beta}} H_{\beta}({}_{\beta}\hat{x}(t), {}_{\beta}\hat{u}(t), {}_{\beta}\Psi(t), t) \quad (5.101)$$

$$(\beta = 1, t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]; \beta = 11, t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}]),$$

$$\begin{aligned} & H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_1) + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_1) + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_1) = \\ & = \min_{\substack{{}_{11}u(t) \in \Omega_{11}, {}_{12}u(t) \in \Omega_{12}, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}]} } \left[ \begin{aligned} & H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_1) + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_1) + \\ & + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_1) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (5.102)$$

де  $H_1 = \Phi_1 + {}_{11}\Psi^T f$ ,  $H_{12} = \Phi_{12} + {}_{12}\Psi^T f$ ,  $H_{11} = \Phi_{11} + {}_{11}\Psi^T f$ .

У вихідній постановці задачі для опису динаміки руху ступенів АКС по дільницях траєкторії будемо використовувати систему (5.64) – (5.68) з відповідними кількісними значеннями, що входять в неї параметрів і характеристик. Вектори стану і керування з рівнянь (5.85) – (5.91) матимуть такий склад  ${}_{\beta}x = \{V_{\beta}, \theta_{\beta}, h_{\beta}, \lambda_{\beta}, m_{\beta}\}^T$ ,  ${}_{\beta}u = \{\alpha_{\beta}, P_{\beta}\}^T$  ( $\beta = 1, 12, 11$ ). Обмеження (5.90) приймає вигляд (5.84).

В процесі виконання розрахунків розглянемо п'ять варіантів оптимізації критерію (5.91), який відповідає у вихідній постановці задачі критерію (5.70) за умови, що  $\Phi_{\beta}({}_{\beta}x, {}_{\beta}u, t) = b_{\beta}$  ( $\beta = 1, 12, 11$ ):

1. Головний варіант, що вимагає виконання умов (5.92) - (5.102), тобто всіх умов наслідку 5.1.

2. Допоміжний варіант по  $H$  (по гамільтоніанам), що вимагає виконання умов (5.92) – (5.96), (5.99) – (5.102) наслідку 5.1. За фізичним змістом задачі це означає, що точка розділення оптимізується тільки по моменту часу розділення  $t_1$ , для будь-якої фазової координати  ${}_1x(t_1)$ , при якій виконуються зазначені умови. Формально це означає, що мінімум виразу (5.91) шукається за всіма зазначеними в ньому керуваннями і параметрами, окрім  ${}_1x(t_1)$ .

3. Допоміжний варіант по  $\psi$  (по спряженим змінним), який вимагає виконання умов (5.92) – (5.98), (5.100) – (5.102) наслідку 5.1. За фізичним змістом задачі, це означає, що точка розділення оптимізується тільки по фазової координаті  ${}_1x(t_1)$  для будь-якого моменту часу, при якому виконуються зазначені умови. Формально це означає, що мінімум виразу

(5.91) шукається за всіма зазначеними в ньому керуваннями і параметрами, окрім  $t_1$ .

4. Альтернативний варіант по ОЛ (по орбітальному літаку), що вимагає виконання умов (5.92), (5.93) для  $t \in [t_1, t_{11}]$ , (5.94), (5.96), (5.101), для  $\beta = 1$  та  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\beta = 11$  і  $t \in [t_1, t_{11}]$  наслідку 5.1, до яких додаються умови

$${}_1\Psi(\hat{t}_1) = {}_{11}\Psi(\hat{t}_{11}), \quad (5.103)$$

$$H_{11}({}_1\hat{x}, \hat{u}, {}_1\Psi, \hat{t}_1) = H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, \hat{t}_1), \quad (5.104)$$

$$H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_{12}) + \mu(\hat{t}_{12})Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_{12}) = 0, \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} & H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, t) + \mu(t)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, t) = \\ & = \min_{\substack{u(t) \in \Omega_{12}, \\ t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}]}} [H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, t) + \mu(t)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, t)]. \end{aligned} \quad (5.106)$$

За фізичним змістом задачі це означає, що в точці розділення створюються найкращі умови для виведення орбітального літака, але при цьому вони не враховують подальший рух літака-носія.

Іншими словами, спочатку, оптимізується дільниця траєкторії 0-1-11, а потім з обчисленої точки  $({}_1x(t_1), t_1)$  оптимізується рух ЛН по гілці 1-12 із умови мінімізації інтервалу часу  $\Delta t_{12} = t_{12} - t_1$  ( $t_1 = const$ ,  $t_{12} = var$ ) перельоту в точку  ${}_{12}x(t_{12}) = const$  з дотриманням обмеження (5.90), в якому  ${}_{11}x(\cdot)$  та  ${}_{11}u(\cdot)$  є відомими функціями часу  $t \in [t_1, t_{12}]$ . Формально це означає, що в задачі (5.85)– (5.91) в точці розділення варіюються всі координати ступеню ЛН + ОЛ  ${}_{11}x(t_1)$  крім маси, а також моменту часу початку виведення на орбіту ОЛ.

5. Альтернативний варіант по ЛН (по літаку-носію), що вимагає виконання умов (5.92), (5.93), (5.95), (5.96), (5.98), (5.101) для  $\beta = 1$  та  $t \in [t_0, t_1]$ ;  $\beta = 12$  та  $t \in [t_1, t_{12}]$ ,  $\beta = 11$  та  $t \in [t_{12}, t_{11}]$  наслідку 5.1., до яких додаються умови

$${}_{12}\dot{\Psi} + \left. \frac{\partial H_{12}}{\partial {}_{12}x} \right|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \quad (5.107)$$

$$H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_{12}) = 0, \quad (5.108)$$

$$H_1({}_1\hat{x}, {}_1\hat{u}, {}_1\Psi, \hat{t}_1) = H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\Psi, \hat{t}_1), \quad (5.109)$$

$${}_1\Psi(\hat{t}_1) = {}_{12}\Psi(\hat{t}_1), \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} & H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\Psi, t) + \mu(t)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, t) = \\ & = \min_{{}_{11}u(t) \in \Omega_{11}, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}]} [H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}u, {}_{11}\Psi, t) + \mu(t)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}x, {}_{11}u, {}_{12}\hat{u}, t)]. \end{aligned} \quad (5.111)$$

За фізичним змістом задачі це означає, що в точці розділення створюються найкращі умови для підйому літака-носія, що не враховують подальший рух орбітального літака. Іншими словами, в першу чергу оптимізується дільниця траєкторії 0-1-12, а потім із обчисленої точки  $({}_1x(t_1), t_1)$  оптимізується рух ОЛ по гілці 1-11 із умови мінімізації інтервалу часу  $\Delta t = t_{11} - t_1$  ( $t_1 = const$ ,  $t_{11} = var$ ) виведення в точку  ${}_{11}x(t_{11}) = const$  з дотриманням обмеження (5.90), в якому  ${}_{12}x(\cdot)$  і  ${}_{12}u(\cdot)$  є відомими функціями часу  $t \in [t_1, t_{12}]$ . Формально це означає, що в задачі (5.85) – (5.91) в точці розділення варіюються всі координати ступеня ЛН + ОЛ  ${}_1x(t_1)$  і всі координати ступеня СН, а також момент часу закінчення спільного руху ЛН + ОЛ і момент початку підйому ЛН.

У всіх п'яти варіантах задача оптимізації критерію (5.91) зводиться до вирішення трьох двочкових крайових задач, зв'язаних між собою в точці розділення спеціальними умовами: умовами неперервності всіх фазових координат, крім маси; умовами стрибка по спряженим змінним і гамільтоніанам. Для того щоб однозначно розв'язати задачі оптимізації по кожному варіанту потрібно, щоб загальна кількість довільних постійних, що входять в рішення системи звичайних диференціальних рівнянь, які описують рух ступенів АКС і еволюцію спряжених змінних, плюс кількість моментів часу структурних перетворень СДС дорівнювало числу обмежувачих умов [43] (табл. 5.5 и 5.6).



Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		1			
Кількість обмежувачих умов	всього	7n+4			
	за окремими умовами	1	1	1	1
Обмежуючі умови	(5.98)	$t_0 = const$	(5.96)	(5.99)	(5.100)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		2			
Кількість обмежувачих умов	всього	7n+4			
	за окремими умовами	n	n	n	n
Обмежуючі умови	${}_1x(t_0) = const$	${}_1x(t_{11}) = const$	${}_2x(t_{12}) = const$	${}_1x(t_1) = {}_{11}x(t_1)$	${}_1x(t_1) = {}_{12}x(t_1)$
					${}_1x(t_1) = const$

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		2			
Кількість обмежувачих умов	всього	7n+4			
	за окремими умовами	n	1	1	1
Обмежуючі умови	(5.98)	$t_0 = const$	(5.96)	(5.99)	(5.100)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		3				
Кількість обмежувачих умов	всього	7n+4				
	за окремими умовами	n	n	n	n	n
Обмежуючі умови		${}_1x(t_0) = const$	${}_1x(t_{11}) = const$	${}_2x(t_{12}) = const$	${}_1x(t_1) = {}_{11}x(t_1) = {}_{11}x(t_1) = {}_{12}x(t_1) = {}_{12}x(t_1)$	$n$ (5.97)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		3				
Кількість обмежувачих умов	всього	7n+4				
	за окремими умовами	n	1	1	1	1
Обмежуючі умови		$(5.98)$	$t_0 = const$	$t_1 = const$	$(5.99)$	$(5.100)$

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		4				
Кількість обмежувачих умов	всього	6n+4				
	за окремими умовами	n	n	n	n	n
Обмежуючі умови		${}_1x(t_0) = const$	${}_1x(t_{11}) = const$	${}_2x(t_{12}) = const$	${}_1x(t_1) = {}_{11}x(t_1) = {}_{12}x(t_1) = const$	$n$ (5.103)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		4		
Кількість обмежуючих умов	всього	6n+4		
	за окремими умовами	1	1	1
Обмежуючі умови		$t_0 = const$	(5.96)	(5.104)
				(5.105)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		5				
Кількість обмежуючих умов	всього	7n+4				
	за окремими умовами	n	n	n	n	n
Обмежуючі умови		${}_1x(t_0) = const$	${}_1x(t_{11}) = const$	${}_1x(t_1) = const$	${}_1x(t_1) = {}_{12}x(t_1) = {}_{11}x(t_1) = const$	(5.98)

Номер варіанту оптимізації критерію (5.91)		5				
Кількість обмежуючих умов	всього	7n+4				
	за окремими умовами	n	1	1	1	1
Обмежуючі умови		(5.110)	$t_0 = const$	(5.96)	(5.108)	(5.109)

Як видно із табл. 5.5 і 5.6, всі варіанти оптимізації критерію (5.91) однозначно можна розв'язати. Однак, використання умов, наведених в табл. 5.6, є найбільш зручним в разі, якщо вдається отримати аналітичні вирази для рішень диференціальних рівнянь динаміки руху ступенів АКС і спряжених змінних при оптимальному керуванні, наведених в табл. 5.5.

У разі чисельного рішення рівнянь табл. 5.5 для пошуку оптимальної траєкторії використовується багатокрокова, ітераційна процедура. При цьому, перед кожним кроком обчислень здійснюється така цілеспрямована зміна вільних (незакріплених) параметрів, яка призводить до все більш точного виконання умов табл. 5.6. Та частина умов табл. 5.5, яка не може бути виконана відразу за рахунок спеціальної організації обчислювальної процедури, виконується підбором, наприклад, за допомогою градієнтного методу, вільних параметрів, наведених в наступному підрозділі, в табл. 5.7. [113, 114, 117].

З метою успішного чисельного рішення всіх варіантів задачі (5.85) – (5.91) за допомогою відповідних кожному із цих варіантів необхідних умов оптимальності розроблена спеціальна методика, викладенню змісту якої присвячений наступний підрозділ.

### **5.3.3. Методика розрахунку оптимальної траєкторії, допоміжних і альтернативних варіантів**

Методика вирішення всіх варіантів задачі (5.105) – (5.106) складається з двох алгоритмів.

Перший алгоритм аналітично обґрунтовує оптимальну програму зміни тяги двигунів ступенів АКС, а другий дає чисельний алгоритм розрахунку оптимальної програми зміни кута атаки, який базується на серії послідовних наближень до оптимального рішення за допомогою субоптимальних рішень, отриманих для редукованих моделей динаміки руху АКС.

#### *1. Аналітичне обґрунтування оптимального закону зміни тяги $\hat{P}$*

На тягу двигунів ЛН і ОЛ накладено обмеження

$$\frac{X_{\alpha}^*}{\cos \alpha} \leq P \leq P_{\max}, \quad (5.112)$$

де  $P_{\max} = P_{\max}(h, M)$  для ППРД та  $P_{\max} = P_{\max}(h)$  для РРД (підрозд. 5.3.1),  
 $X_{\alpha}^* = X_{\alpha} + mg(r, \omega_C) \sin \theta$ .

Це означає, що граничні значення області допустимих значень тяги є функціями фазових координат і керування  $\alpha$ .

Для того щоб було можливе застосування принципу мінімуму в формі наслідку 5.1 з доповненнями та змінами по допоміжним і альтернативним варіантам покладемо, що

$$0 \leq P \leq P_{\max}^*, \quad (5.113)$$

де  $P_{\max}^* = \text{const} \geq P_{\max}(h, M)$  для ППРД та  $P_{\max}^* = \text{const} \geq P_{\max}(h)$  для РРД.

Тоді, використовуючи правило множників Лагранжа [32, 87, 97], запишемо загальний для всіх ділянок рух ступенів АКС вираз для розширеного гамільтоніану

$$H = H_{\alpha, x, \psi} + P \cdot H_{\alpha, x, \psi}^{Pf}, \quad (5.114)$$

де

$$\begin{aligned} H_{\alpha, x, \psi} &= b - \psi_V m^{-1} [X_{\alpha} + mg(r, \omega_C) \sin \theta] + \\ &+ \psi_{\theta} (mV)^{-1} \left[ Y_{\alpha} - mg(r, \omega_C) \cos \theta + 2mV\omega_C + m \frac{V^2}{r} \cos \theta \right] + \\ &+ \psi_h V \sin \theta + \psi_{\lambda} \frac{V}{r} \cos \theta - \psi_m f - \eta_P(t) P_{\max} + \frac{\eta_X(t) X_{\alpha}^*}{\cos \alpha}, \\ H_{\alpha, x, \psi}^{Pf} &= \psi_V m^{-1} \cos \alpha + \psi_{\theta} (mV)^{-1} \sin \alpha + \eta_P(t) - \eta_X(t) \end{aligned}$$

переключаюча функція;  $b = b_{\beta}$  ( $\beta = 1, 11, 12$ ) – вагові коефіцієнти критерію (5.70),

що підставляються в залежності від приналежності гамільтоніану до відповідної ділянки розгалуженої траєкторії;  $P_{\max} = P_{\max}(h, M)$  для ППРД;

$P_{\max} = P_{\max}(h)$  для РРД;  $\eta_P(t) \geq 0$ ,  $\eta_X(t) \geq 0$ ,  $\eta_P(t)(P - P_{\max}) = 0$ ,

$\eta_X(t) \left( \frac{X_\alpha^*}{\cos \alpha} - P \right) = 0$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  для ділянки  $0-I$ ,  $t \in [t_1, t_{11}]$  для ділянки  $I-I_1$  ( $i=1, 2$ ) розгалуженої траєкторії АКС;  $\Psi_V, \Psi_\theta, \Psi_h, \Psi_\lambda, \Psi_m$  – спряжені змінні, що відповідають фазовим координатам  $V, \theta, h, \lambda, m$ .

З виразу (5.114) видно, що тяга входить в  $H$  лінійно. Це означає, що умова, яка вимагає мінімізувати гамільтоніан по складовій вектора керування - тязі в області простору керувань, і описується нерівністю (5.113) з дотриманням обмеження (5.112), буде виконуватись тільки при  $H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} < 0$  та  $P = P_{\max}$  або

$$H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} > 0 \text{ та } P = \frac{X_\alpha^*}{\cos \alpha}.$$

Відзначимо, що для задачі про мінімізацію часу підйому-розгону, вимога  $P = P_{\max}$  об'єктивно відображає фізичний зміст проблеми найшвидшого переходу з однієї точки фазового простору в іншу і підтверджується досвідом вирішення аналогічних завдань [17, 47, 60]. Ковзаючий режим  $H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} = 0$  вимагає окремого дослідження. В даному прикладі цей режим не розглядався.

Виходячи з фізичного змісту задачі, умова  $H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} > 0$  та вимога що з неї випливає, щодо постійної швидкості польоту  $\frac{dV}{dt} = \frac{\hat{P} \cos \alpha - X_\alpha^*}{m} = 0$ , можуть виникнути тільки під дією обмеження (5.84) на рух ЛН відразу після відділення від нього ОЛ протягом інтервалу часу  $\Delta t_{nxk}^0$ .

Тому покладемо, що переключуюча функція має від'ємне значення в кожен момент часу  $t \in [t_0, \hat{t}_1]$  ділянки  $0-I$ ;  $t \in [\hat{t}_1 + 4, \hat{t}_{11}]$  ділянки  $I-I_1$ ;  $t \in [\hat{t}_1 + \Delta t_{nxk}^0, \hat{t}_{12}]$  ділянки  $I-I_2$  і додатне значення в момент часу  $t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_1 + \Delta t_{nxk}^0]$  ділянки  $I-I_2$  оптимальної розгалуженої траєкторії. Вимоги (5.102), (5.106), (5.111) щодо мінімізації гамільтоніанів і обмеження (5.90) не впливають на остаточний результат, який полягає в тому, що  $P = P_{\max}$  при  $H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} < 0$  та  $\hat{P} = X_\alpha^* / \cos \alpha$  при  $H_{\alpha,x,\psi}^{Pf} > 0$ , так як з одного боку обмеження (5.90) при розрахунках замінюється

обмеженням (5.84), яке накладене тільки на фазові координати, а з іншого боку умова мінімуму суми гамільтоніанів (5.102) декомпозується на умови мінімізації по  $P$  та  $\alpha$  кожного із гамільтоніанів окремо, уздовж відповідних ділянок траєкторії.

Таким чином, вважаємо, що оптимальне керування по тязі  $\hat{P}$  для всіх ділянок траєкторії вибране і дорівнює  $P_{i \dot{i} D\dot{A}}$  для ділянок 0–1 та 1–12 руху ступенів АКС ЛН + ОЛ  $t \in [t_0, t_1]$  та ЛН  $t \in [t_1 + \Delta t_{nxk}^0, t_{12}]$ , і  $P_{GRD}$  для ділянки 1–11 руху ОЛ  $t \in [t_1 + 4, t_{11}]$ . У подальших розрахунках залишається знайти оптимальний закон зміни кута атаки  $\hat{\alpha}$  і підібрати величину  $\Delta t_{nxk}^0$ .

## 2. Багатокроковий обчислювальний алгоритм пошуку оптимальних значень кута атаки, фазових координат і моменту часу розділення

Алгоритм оптимізації програми зміни кута атаки ступенів АКС на ділянках траєкторії і параметрів точки розділення реалізує необхідні умови оптимальності для кожного із п'яти варіантів задачі (5.85) - (5.91). Пошук оптимальної траєкторії ступенів АКС здійснюється методом послідовних наближень від оптимальної розгалуженої траєкторії АКС, отриманої для найпростішої редукованої моделі динаміки руху ступенів АКС, до оптимальної розгалуженої траєкторії АКС для вихідної моделі (5.64) - (5.68).

При цьому в якості першого наближення для найпростішої моделі з енергетичною апроксимацією розглядається лінійний закон керування, яким є швидкість, в функції довготи, а для наступних більш складних моделей в якості першого наближення використовуються результати оптимізації фазових координат і керувань, отримані для попередньої моделі.

### 2.1. Редукція моделей динаміки руху ступенів АКС (5.64) - (5.68)

Для переходу до моделей пониженого порядку будемо використовувати методику, викладену в роботі [99-103], враховуючи специфічні особливості моделі (5.64) – (5.68). Всі моделі будемо описувати за наступною схемою:

рівняння динаміки руху ступенів АКС, вектор стану, вектор керування, граничні точки, обмеження, функціонал.

*1. Модель з п'ятьма залежними змінними.*

Рівняння динаміки руху ступенів АКС повторює рівняння (5.64) - (5.68) з тією лише різницею, що  $P = \hat{P}$ :

$$\dot{V} = m^{-1} \left[ \hat{P} \cos \alpha - X_\alpha - mg(r, \omega_C) \sin \theta \right], \quad (5.115)$$

$$\dot{\theta} = (mV)^{-1} \left[ \hat{P} \sin \alpha + Y_\alpha - mg(r, \omega_C) \cos \theta + 2mV\omega_C + m \frac{V^2}{r} \cos \theta \right], \quad (5.116)$$

$$\dot{h} = V \sin \theta, \quad (5.117)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V}{r} \cos \theta, \quad (5.118)$$

$$\dot{m} = -f. \quad (5.119)$$

Вектор стану:  $x = \{V, \theta, h, \lambda, m\}^T$ .

Вектор керування:  $u = \{\alpha\}$ .

Граничні точки:

$t_0 = 0$ ,  $V_1 = 1359,167$  м/с,  $\theta_1 = 0$ ,  $h_1 = 28 \cdot 10^3$  м,  $\lambda_1 = 0$ ,  $m_1 = 294 \cdot 10^3$  кг,  
 $t_1 = \text{var}$ ,  $V_1 = \text{var}$ ,  $\theta_1$  – будь-який,  $h_1 = \text{var}$ ,  $\lambda_1$  – будь-який,  $m_1$  – будь-яка,  
 $t_{11} = \text{var}$ ,  $V_{11} = 7843,040$  м/с,  $\theta_{11}$  – будь-який,  $h_{11} = 100 \cdot 10^3$  м,  $\lambda_{11}$  – будь-який,  $m_{11}$  –  
 будь-яка,  $t_{12} = \text{var}$ ,  $V_{12} = 3665,824$  м/с,  $\theta_{12}$  – будь-який,  $h_{12} = 45 \cdot 10^3$  м,  $\lambda_{12}$  –  
 будь-який,  $m_{12}$  – будь-яка.

Обмеження:

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) \geq A(t) \quad t \in [t_1, t_{12}]. \quad (5.120)$$

Функціонал:

$$I = b_1 \int_{t_0}^{t_1} dt + b_{11} \int_{t_1}^{t_{11}} dt + b_{12} \int_{t_1}^{t_{12}} dt. \quad (5.121)$$

## 2. Модель з чотирма залежними змінними

У цій та інших моделях довгота використовується для заміни часу як незалежної змінної.

Рівняння динаміки руху ступенів АКС:

$$V' = \frac{dV}{d\lambda} = (mV \cos\theta^{-1})r \left[ \hat{P} \cos\alpha - X_\alpha - mg(r, \omega_C) \sin\theta \right], \quad (5.122)$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\lambda} = (mV^2 \cos\theta)^{-1} r \left[ \hat{P} \sin\alpha + Y_\alpha - mg(r, \omega_C) \cos\theta + 2mV\omega_C + m \frac{V^2}{r} \cos\theta \right], \quad (5.123)$$

$$h' = \frac{dh}{d\lambda} = rtg\theta, \quad (5.124)$$

$$m' = \frac{dm}{d\lambda} = -f \cdot r (V \cdot \cos\theta)^{-1}. \quad (5.125)$$

Вектор стану:

$$x = \{V, \theta, h, m\}^T.$$

Вектор керування:

$$u = \{\alpha\}.$$

Граничні точки:

$$\lambda_1(t_0) = 0, \quad V_1 = 1359,167 \text{ м/с}, \quad \theta_1 = 0, \quad h_1 = 28 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad m_1 = 294 \cdot 10^3 \text{ кг},$$

$$\lambda_1(t_1) = \text{var}, \quad V_1 = \text{var}, \quad \theta_1 - \text{будь-який}, \quad h_1 = \text{var}, \quad m_1 - \text{будь-яка}, \quad \lambda_{11}(t_{11}) = \text{var},$$

$$V_{11} = 7843,040 \text{ м/с}, \quad \theta_{11} - \text{будь-який}, \quad h_{11} = 100 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad m_{11} - \text{будь-яка}, \quad \lambda_{11}(t_{12}) = \text{var},$$

$$V_{12} = 3665,824 \text{ м/с}, \quad \theta_{12} - \text{будь-який}, \quad h_{12} = 45 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad m_{12} - \text{будь-яка}.$$

Обмеження:

$$h_{11}(\lambda) - h_{12}(\lambda) \geq A^*(\lambda) \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_{12}], \quad (5.126)$$

$$\text{где } A^*(\lambda) = \begin{cases} 2,239 \cdot 10^4 (\lambda - \lambda_1)^2, & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + 1,268 \cdot 10^{-3}; \\ 229,777 \cdot \ln[2635,605(\lambda - \lambda_1) + 1], & \lambda_1 + 1,268 \cdot 10^{-3} < \lambda \leq \lambda_{12}. \end{cases}$$

Функціонал:

$$I = b_1 \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} r_1 (V_1 \cos \theta_1)^{-1} d\lambda + b_{11} \int_{\lambda_1}^{\lambda_{11}} r_{11} (V_{11} \cos \theta_{11})^{-1} d\lambda + b_{12} \int_{\lambda_1}^{\lambda_{12}} r_{12} (V_{12} \cos \theta_{12})^{-1} d\lambda. \quad (5.127)$$

### 3. Модель з трьома залежними змінними

Дану модель отримуємо шляхом спрощенням моделі (5.122) – (5.125) за рахунок виключення диференціального рівняння зміни маси. Маса, для спрощенням, вважається лінійною функцією довготи:

$$m(\lambda) = m_0 - \dot{m}(\lambda - \lambda_\beta), \quad (5.128)$$

де  $m_0 = 294 \cdot 10^3$  кг,  $\dot{m} = 6,35 \cdot 10^5$  кг/рад,  $\beta = 0$  – для ділянки 0–I розгалуженої траєкторії, по якій переміщається ступінь ЛН+ОЛ;  $m_0 = 284 \cdot 10^3$  кг,  $\dot{m} = 3,47 \cdot 10^5$  кг/рад;  $\beta = 1$  – для ділянки I–I2 розгалуженої траєкторії, по якій переміщається ступінь ЛН;  $m_0 = 91 \cdot 10^3$  кг,  $\dot{m} = 4,13 \cdot 10^5$  кг/рад;  $\beta = 1$  – для ділянки I–II розгалуженої траєкторії, по якій переміщається ступінь ОЛ. Для обчислення  $\dot{m}$  на відповідних ділянках траєкторії була використана методика оціночних розрахунків, наведена в роботі [83].

Динаміка руху ступенів АКС описується рівняннями (5.122) – (5.124). Вектор стану, вектор керування, граничні точки, обмеження і функціонал мають такий же вигляд, що і для чотиривимірної моделі.

### 4. Модель з двома залежними змінними

Дана модель є результатом подальшого спрощення моделі з трьома залежними змінними. Вважаємо, що  $\hat{P} \cos \alpha \approx \hat{P} \cos \alpha_{HB}$ , а динаміка зміни кута нахилу траєкторії в основному залежить від складової тяги  $\hat{P} \sin \alpha$ :

$$\frac{d\theta}{d\lambda} - (mV^2 \cos \theta)^{-1} r \hat{P} \sin \alpha \approx 0, \quad (5.129)$$

З умови (5.129) слідує співвідношення

$$Y_a \approx mg(r, \omega_3) \cos \theta - 2mV\omega_3 - m \frac{V^2}{r} \cos \theta, \quad (5.130)$$

яке по фізичному змісту означає, що підйомна сила приблизно врівноважує проекцію різниці між силою ваги і центробіжною силою на нормаль до траєкторії. Відзначимо зовнішню схожість виразу (5.130) зі співвідношенням (2.69) з роботи [114], яке справедливе для спеціального класу траєкторій: рівноважного або квазістаціонарного планування. Таким чином, якщо на траєкторії виведення ступенів АКС тяга зменшиться до нуля, то відповідна ступінь переходить на траєкторію польоту в режимі квазістаціонарного планування.

Припустимо, що в процесі підйому-розгону ступенів АКС кут атаки буде змінюватися поблизу найвигіднішого значення (табл. 5.2, 5.3).

Тоді для розрахунку аеродинамічних сил, що діють на ЛН + ОЛ та ЛН скористаємося квадратичною полярною, а на ОС – гіперзвуковою.

Використовуючи співвідношення (5.72) – (5.74) отримуємо формулу для обчислення сили лобового опору в залежності від швидкості, висоти і кута нахилу траєкторії

$$X_a = q S \left\{ C_{xa^0}(M) + B_a(M)(qS)^{-2} \left[ mg(r, \omega_3) \cos \theta - m \frac{V^2}{r} \cos \theta - 2mV\omega_3 \right]^2 \right\}, \quad (5.131)$$

де  $q = \frac{\rho(h)V^2}{2}$  – швидкісний напір, для ступенів АКС ЛН + ОЛ і ЛН. Розрахунок  $X_a$  для ОЛ здійснимо використовуючи (5.72), (5.73), (5.78) і (5.79), виконавши попередньо лінеаризацію (5.78) і (5.79) поблизу  $\alpha_{HB}$ :

$$C_{xa} = C_{xa^0}^* + A_1^* \Delta \alpha, \quad (5.132)$$

$$C_{\dot{\alpha}a} = C_{ya^0}^* + A_2^* \Delta \alpha, \quad (5.133)$$

де

$$C_{xa^0}^* = C_{xa^0} + A_1 \sin^3 \alpha_{HB}, \quad A_1^* = 3A_1 \sin^2 \alpha_{HB} \cdot \cos \alpha_{HB},$$

$$C_{ya^0}^* = A_2 \sin^2 \alpha_{HB} \cdot \cos \alpha_{HB}, \quad A_2^* = A_2 (2 \sin \alpha_{HB} \cdot \cos^2 \alpha_{HB} - \sin^3 \alpha_{HB}).$$

Остаточний вираз для  $X_\alpha$  набуває вигляду

$$X_\alpha = {}_q S \left\{ C_{xa^0}^* + A_1^* ({}_q S A_2^*)^{-2} \left[ \begin{array}{l} mg(r, \omega_3) \cos \theta - m \frac{V^2}{r} \cos \theta - \\ -2mV\omega_3 - {}_q S C_{ya^0}^* \end{array} \right] \right\}. \quad (5.134)$$

Розрахунки показали, що  $|\Delta \alpha(t)| - |\Delta \alpha(t) - \alpha_{HB}| < 12$  град,  $\alpha_{HB} = 11,670$  град ( $M=10$ ), для  $t \in [t_1, 192 \text{ с}]$  ( $34 \text{ км} < h < 78 \text{ км}$ ,  $6,8 < M < 20$ ). Подальший підйом і розгін ОС відбувається при значеннях кута атаки, близьких до нуля, тобто, формули (5.78) і (5.79) можуть бути спрощені до виду

$$C_{xa} = C_{xa}^* + A_1 \alpha^3 \operatorname{sign} \alpha, \quad (5.135)$$

$$C_{ya} = A_2 \alpha^3 \operatorname{sign} \alpha, \quad (5.136)$$

що дозволяє обчислювати  $X_\alpha$  за допомогою виразу

$$X_\alpha = {}_q S \left\{ C_{xa^0} + A_1 A_2^{\frac{3}{2}} \left[ mg(r, \omega_3) \cos \theta - m \frac{V^2}{r} \cos \theta - 2mV\omega_3 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.137)$$

Рівняння динаміки руху ступенів будуть мати наступний вигляд:

$$V' = [m(\lambda)V \cos \theta]^{-1} (R_\zeta + h) \left[ \hat{P} \cos \alpha_{HB} - X_\alpha - mg(R_\zeta + h, \omega_\zeta) \sin \theta \right], \quad (5.138)$$

$$h' = (R_3 + h) \operatorname{tg} \theta, \quad (5.139)$$

де  $X_\alpha$  – обчислюється за формулою (5.131) для ЛН + ОЛ і ЛН або за формулою (5.134) для ОЛ.

Вектор стану:

$$x = \{V, h\}^T.$$

Вектор керування:

$$u = \{\theta\}.$$

Граничні точки:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t_0) = 0, \quad V_1 = 1359,167 \text{ м/с}, \quad \theta_1 = 0, \quad h_1 = 28 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad \lambda_1(t_1) = \text{var}, \quad V_1 = \text{var}, \quad h_1 = \text{var}, \\ \lambda_{11}(t_{11}) = \text{var}, \quad V_{11} = 7843,040 \text{ м/с}, \quad h_{11} = 100 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad \lambda_{12}(t_{12}) = \text{var}, \\ V_{12} = 3665,824 \text{ м/с}, \quad h_{12} = 45 \cdot 10^3 \text{ м}. \end{aligned}$$

Обмеження та функціонал мають вигляд відповідно (5.126) і (5.127).

### 5. Модель з однією залежною змінною

Остання модель що розглядається – це модель з енергетичною апроксимацією. У цій апроксимації тільки питома енергія  $E$  розглядається як змінна

$$E = \frac{1}{2V^2} + g_s h, \quad (5.140)$$

де  $g_s = g_{12} = 9,7062 \text{ м/с}^2$  для моделей руху ЛН+ОЛ, ЛН,  $g_s = g_{11} = 9,6244 \text{ м/с}^2$  для моделей руху ОЛ. Продиференціюємо  $E$  по довготі і підставимо замість  $dV / d\lambda$  та  $dh / d\lambda$  їх вирази, що задаються формулами (5.135) та (5.136), в яких враховано, що  $g(R_3 + h, \omega_3) = g_3 = \text{const}$ ,  $R_3 + h = R_3 + 28 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $\cos\theta = 1$ .

Отримаємо

$$\frac{dE}{d\lambda} = [m(\lambda)]^{-1} (\hat{P} \cos \alpha_{NB} - X_\alpha)(R_C + 28 \cdot 10^3), \quad (5.141)$$

де  $\hat{P} = P_{\max}(E - \frac{1}{2V^2})$  – для ППРД,  $\hat{P} = P_{\max}(E - \frac{1}{2V^2})$  – для РРД (підрозд. 5.3.1),  $X_\alpha$  – обчислюється за формулами (5.131) (ЛН + ОЛ, ЛН) або (5.134) (ОЛ) з урахуванням того, що  $2mV\omega_3 \approx 0$  та  $h = g_3^{-1}(E - \frac{1}{2V^2}) > 0$ .

Вектор стану:

$$x = \{E\}.$$

Вектор керування:

$$u = \{V\}.$$

Граничні точки:

$$\lambda_1(t_0) = 0, \quad E_1 = 1,195441 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda_1(t_1) = \text{var}, \quad E_1 = \text{var}, \quad \lambda_{11}(t_{11}) = \text{var}, \\ E_{11} = 31,719070 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda_{12}(t_{12}) = \text{var}, \quad E_{12} = 7,155911 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}.,$$

Обмеження:

$$g_{11}^{-1}\left(E_{11} - \frac{V_{11}^2}{2}\right) = g_{12}^{-1}\left(E_{12} - \frac{V_{12}^2}{2}\right) * (\lambda). \quad (5.142)$$

Критерій описується виразом (5.127) за умови, що  $r_1 = r_{11} = r_{12} = R_3 + 28 \cdot 10^3$ .

### Структура програми розрахунку

Програма складається з п'яти автономних розрахункових блоків відповідно до кількості моделей динаміки руху ступенів АКС. Розрахунок починається з найпростішої моделі і далі результат передається для використання в якості першого наближення в будь-якому з наступних блоків.

Кожен блок розбитий на кілька взаємопов'язаних підблоків: формувача першої ітерації за результатами розрахунку оптимальної траєкторії для моделей меншої розмірності; обчислювача гамільтоніанів і їх мінімізації по керуванню в заданих точках; апроксимації керування в інтервалах між точками мінімізації гамільтоніанів; інтегрування диференціальних рівнянь динаміки руху ступенів АКС; чисельного диференціювання гамільтоніанів уздовж траєкторії руху ступенів і інтегрування рівнянь для спряжених змінних; градієнтної інтерактивної процедури розрахунку параметрів табл. 5.7, які відповідають умовам табл.5.6.

Таблиця 5.7

Параметри і умови, що підбираються і виконуються обчислювальною процедурою

Умови, що виконуються за рахунок обчислювальної процедури, незакріплені параметри	$1 \chi(t_0)$ – задана точка початку інтегрування рівняння (5.100) в прямому напрямку часу	$11 \chi(t_{11})$ – задана точка початку інтегрування рівняння (5.101) в зворотному напрямку часу	$12 \chi(t_{12})$ – задана точка початку інтегрування рівняння (5.102) в зворотному напрямку часу	Умова (5.113) виконується алгоритмічно при послідовному інтегуванні в зворотному напрямку часу рівнянь (5.108), (5.110)
Кількість параметрів і умов	$n$	$n$	$n$	$n$
Окремо по параметрам та умовам				
Всього за варіантами оптимізації критерію (5.106)	(7n+4) для варіантів 1, 2, 3, 5; (6n+4) для варіанта 4			

Продовження табл. 5.7

Умови, що виконуються за рахунок обчислювальної процедури, незакріплені параметри	$1 \Psi(t_0)$	$11 \Psi(t_{11})$	$12 \Psi(t_{12})$	$t_0 = 0$	$t_1$	$t_{11}$	$t_{12}$
Кількість параметрів і умов	$n$	$n$	$n$	1	1	1	1
Окремо по параметрам та умовам							
Всього за варіантами оптимізації критерію (5.106)	(7n+4) для варіантів 1, 2, 3, 5; (6n+4) для варіанта 4						

Примітка: умова (5.113) в 4-му варіанті не розглядається.

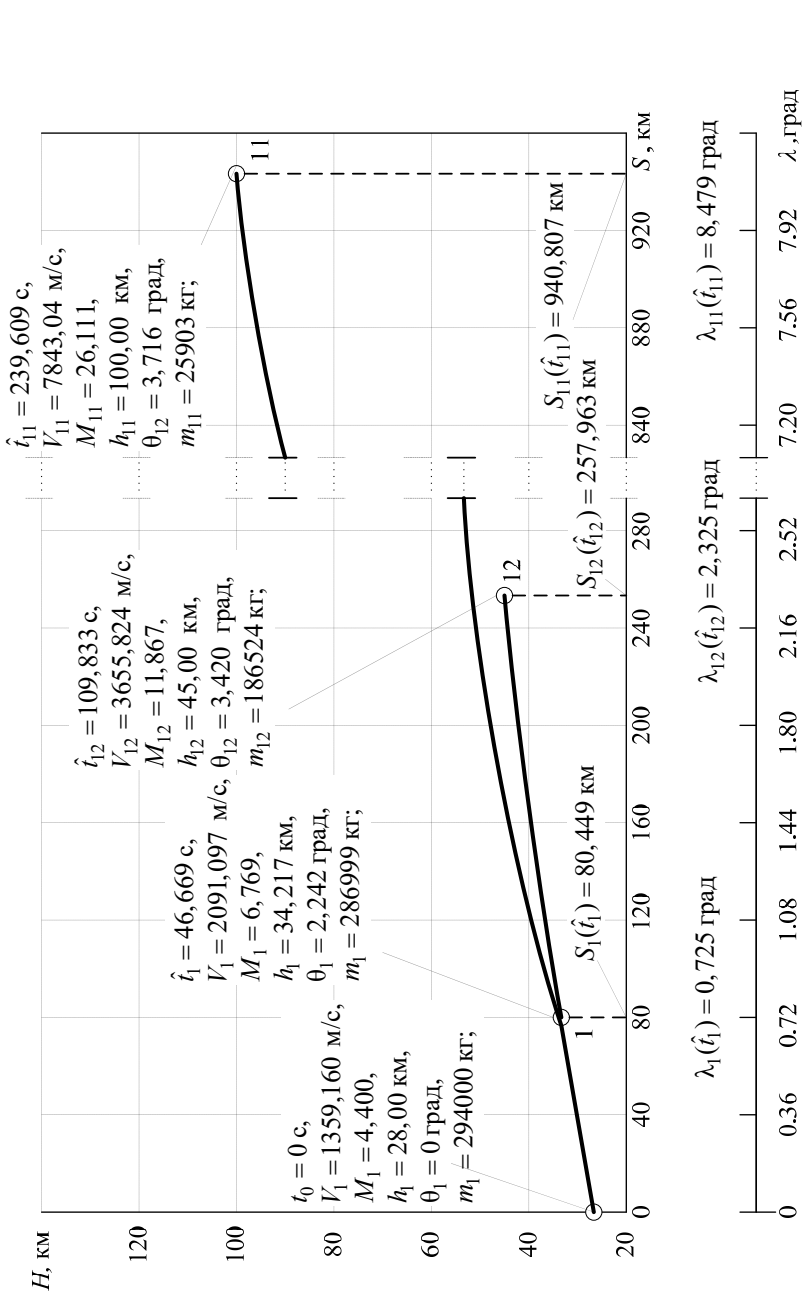


Рис. 5.12. Профілі польоту ступенів АКС

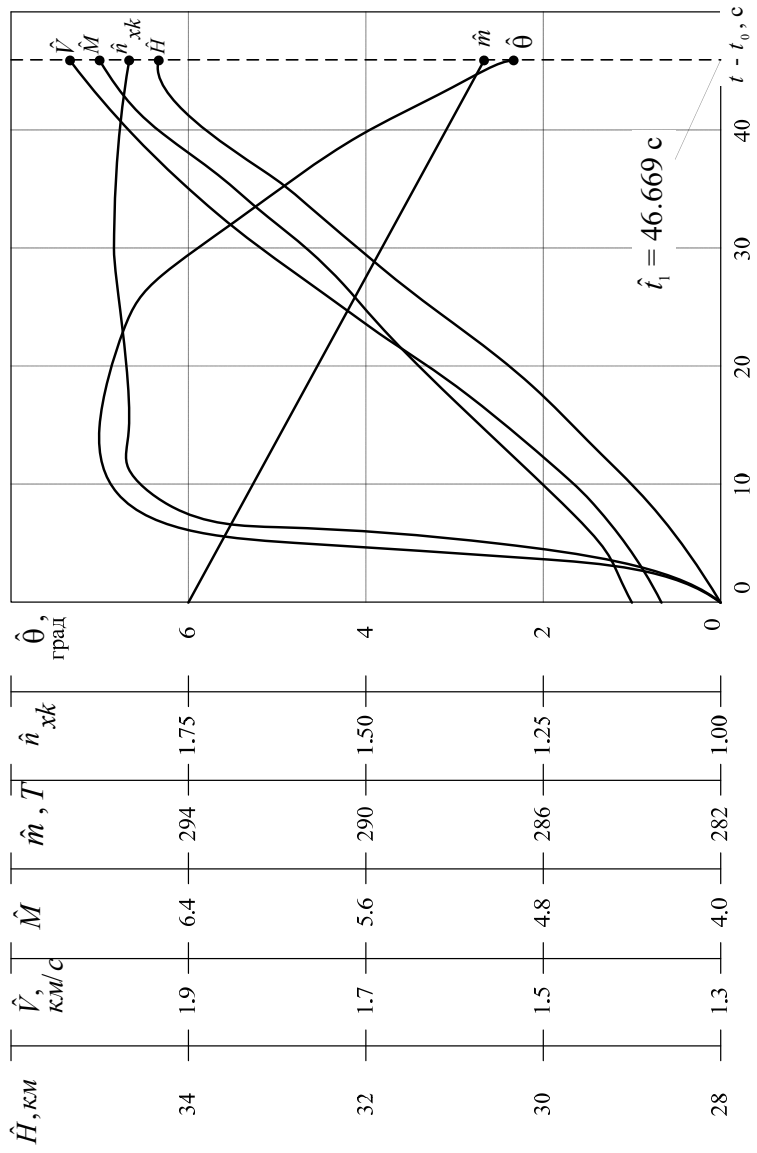


Рис. 5.13. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки 0-1 розгалуженої траєкторії (політ ЛН+ОЛ,  $t_0 = 0 \text{ c}$ )

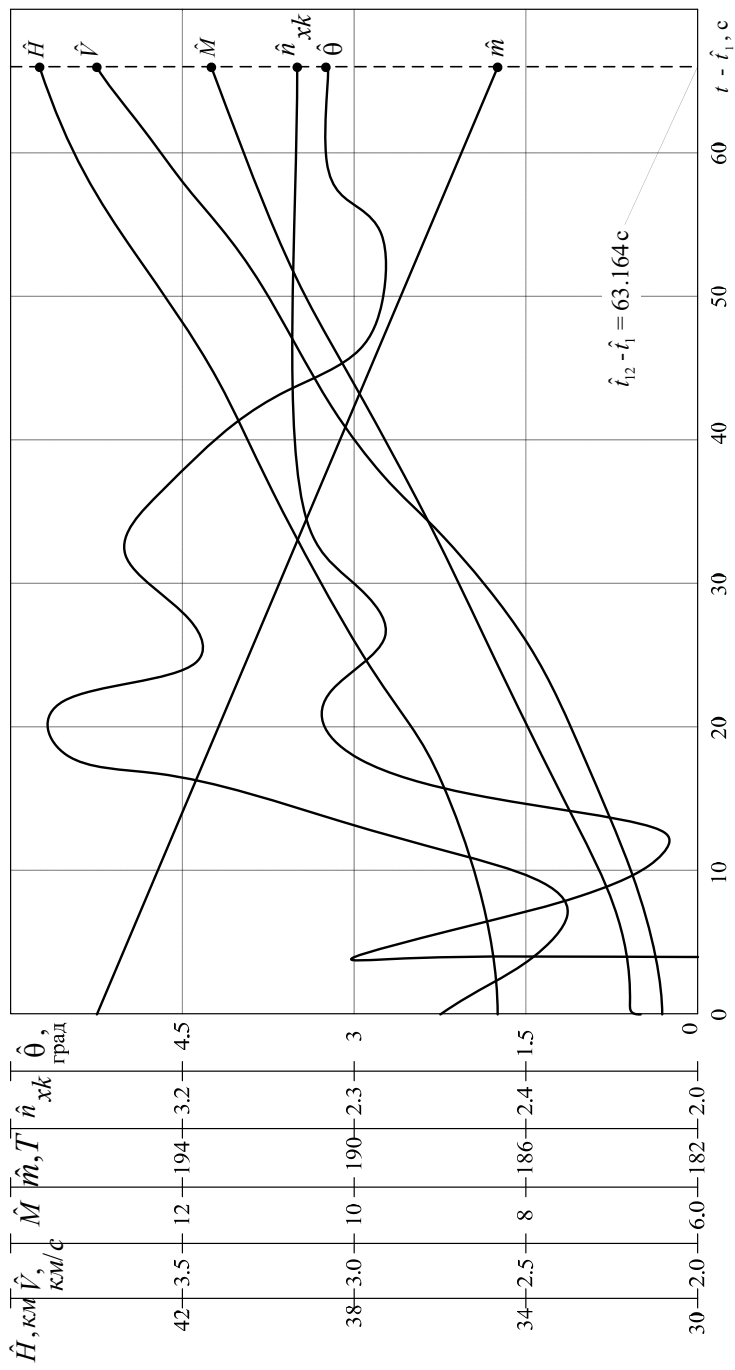


Рис. 5.14. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки /-12 розгалуженої траєкторії (політ ЛН,  $\hat{t}_1 = 46.669 \text{ c}$ )

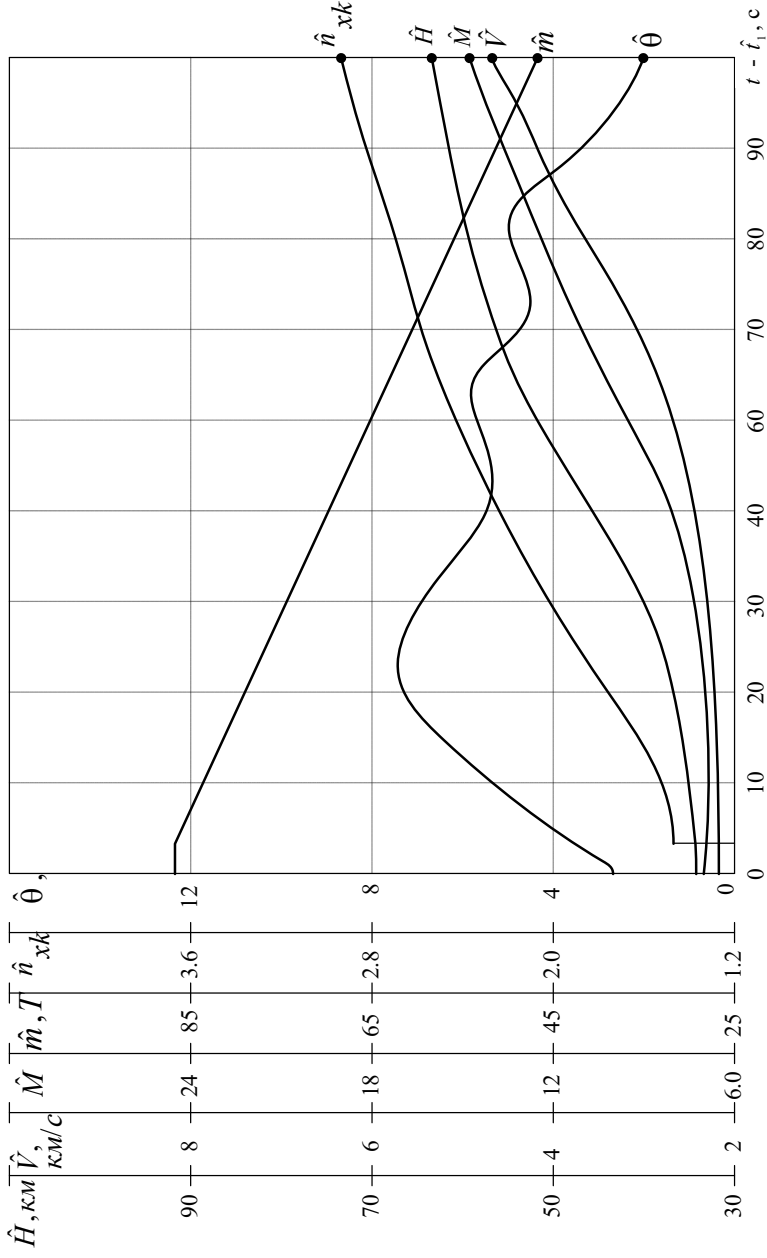


Рис. 5.15. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки I-II розгальженої траєкторії  
(політ ОЛ,  $0 \leq t - \hat{t}_1 \leq 100$  с,  $\hat{t}_1 = 46.669$  с)

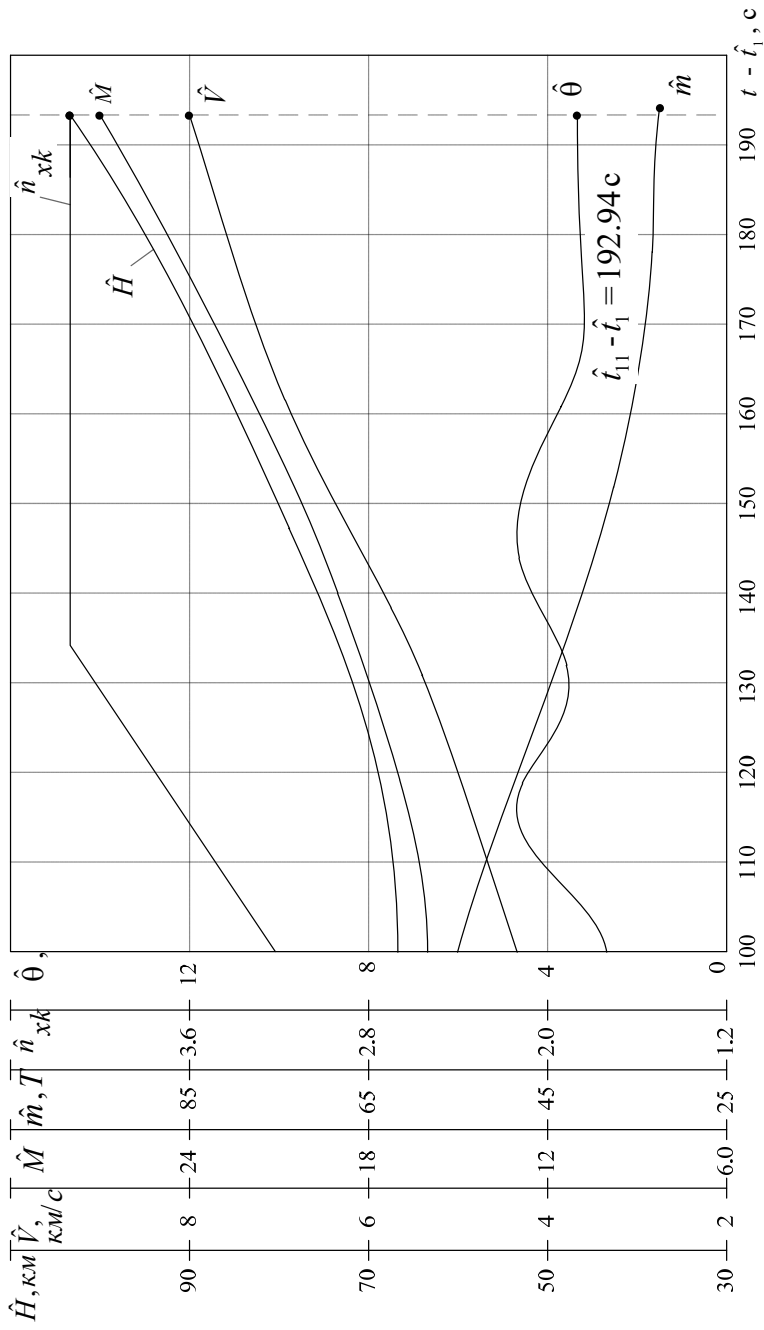


Рис. 5.16. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки I-II розгалуженої траєкторії

(поліг ОЛ,  $100 \text{ с} \leq t - \hat{t}_1 \leq \hat{t}_{11} - \hat{t}_1$ ,  $\hat{t}_1 = 46.669 \text{ с}$ )

Відзначимо, що процедура мінімізації гамільтоніанів побудована на перевірених і підтверджених в ході розрахунків гіпотезі про те, що якщо допустима траєкторія знаходиться поблизу оптимальної, то для пошуку чергового наближення до оптимального значення керування в кожен момент часу (для моделей з 2 по 5 в кожній точці по довготі) в заданому інтервалі необхідно виконувати операцію мінімізації гамільтоніанів по керуванню в ці моменти часу на допустимій траєкторії.

Для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь використовувався метод Рунге-Кутта 4-го порядку. Для чисельного диференціювання використовувалися явні триточкові формули [41, 45].

### 5.3.4. Результати розрахунку оптимальної траєкторії і їх аналіз

Мінімізація критерію (5.55) для всіх п'яти задач (5.85) – (5.91) виконувалася для однакових значень вагових коефіцієнтів  $b_1 = b_{11} = b_{12} = 1$ .

Профіль польоту ступенів АКС по розгалуженій ділянці траєкторії, а також графіки зміни в часі оптимальних траєкторних параметрів для головного варіанта розв'язання задачі (5.85) – (5.91) представлені на рис. 5.12 – 5.16.

У табл. 5.8. – 5.12 наведені числові дані величин оптимальних параметрів траєкторії і керування для всіх п'яти варіантів вирішення задачі (5.85) – (5.91) для повної математичної моделі, що містить п'ять залежних змінних.

Таблиця 5.8

Головний варіант оптимізації траєкторії

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки $\theta-I$ , $\beta=0$					
$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.000	0.144	0.279	0.426	0.570	0.725
$S - S_\beta$ , км	0.000	16.073	30.911	47.266	63.303	80.449
$t - t_\beta$ , с	0.000	11.362	20.994	29.379	38.096	46.669
$V$ , м/с	1359.160	1499.024	1638.382	1791.239	1937.097	2091.097
$M$	4.400	4.852	5.303	5.798	6.270	6.769
$h$ , км	28.000	28.981	30.664	32.347	33.546	34.217
$\Theta$ , град	0.000	6.586	6.498	5.896	4.283	2.242
$m$ , кг	294000	292245	290850	289593	288285	286999
$n_{xk}$	1.046	1.763	1.794	1.821	1.817	1.796
$\alpha$ , град	17.020	6.174	4.872	2.305	0.822	0.000

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.129	0.256	0.406	0.554	0.711
$S - S_{\beta}$ , км	14.393	29.431	45.099	61.537	78.961
$t - t_{\beta}$ , с	6.815	13.371	19.983	26.463	32.823
$V$ , м/с	2224.807	2290.940	2451.233	2633.516	2818.592
$M$	6.991	7.416	7.935	8.525	9.124
$h$ , км	34.542	35.292	36.942	37.845	39.552
$\Theta$ , град	1.293	2.857	5.333	4.147	4.913
$m$ , кг	194976	193993	193001	192029	191075
$n_{xk}$	2.392	2.057	2.901	2.739	2.898
$\alpha$ , град	9.374	17.211	0.462	9.052	0.126

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.875	1.047	1.224	1.409	1.599
$S - S_{\beta}$ , км	97.162	116.182	135.870	156.394	177.514
$t - t_{\beta}$ , с	39.076	45.229	51.289	57.266	63.164
$V$ , м/с	3000.285	3179.071	3344.307	3506.724	3665.824
$M$	9.712	10.291	10.826	11.352	11.867
$h$ , км	40.474	41.648	42.606	43.739	45.000
$\Theta$ , град	3.902	3.536	2.787	3.162	3.420
$m$ , кг	190137	189214	188305	187409	186524
$n_{xk}$	2.886	2.987	2.915	2.937	2.986
$\alpha$ , град	3.673	0.877	9.051	8.885	6.613

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-11, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.306	0.545	0.798	1.068	1.355
$S - S_{\beta}$ , км	33.974	60.575	88.570	118.556	150.407
$t - t_{\beta}$ , с	15.713	27.127	38.242	49.086	59.658
$V$ , м/с	2246.562	2435.346	2658.874	2896.792	3152.907
$M$	7.479	8.107	8.852	9.640	10.496
$h$ , км	36.312	40.640	44.801	47.568	50.847
$\Theta$ , град	6.720	7.898	5.945	4.991	5.225
$m$ , кг	88059	83811	79674	75688	71703
$n_{xk}$	1.617	2.155	2.272	2.352	2.558
$\alpha$ , град	20.093	0.676	6.816	16.724	1.120

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	1.690	1.981	2.321	2.677	3.052
$S - S_{\beta}$ , км	184.160	219.887	257.520	297.074	338.688
$t - t_{\beta}$ , с	69.640	80.036	89.875	99.479	108.881
$V$ , м/с	3418.401	3694.218	3978.327	4273.974	4595.632
$M$	11.380	12.299	13.245	14.229	15.300
$h$ , км	53.273	56.331	59.227	61.545	64.509
$\Theta$ , град	3.981	4.638	3.789	3.214	3.936
$m$ , кг	67886	64119	60457	56882	53383
$n_{xk}$	2.604	2.823	3.004	3.179	3.418
$\alpha$ , град	20.101	2.026	3.981	19.264	8.412

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	3.446	3.857	4.289	4.740	5.208
$S - S_{\beta}$ , км	382.352	428.013	475.886	525.903	577.901
$t - t_{\beta}$ , с	118.068	127.064	135.880	144.506	152.981
$V$ , м/с	4932.967	5290.391	5642.479	5984.530	6320.989
$M$	16.423	17.783	18.852	19.957	21.044
$h$ , км	67.791	70.675	73.880	77.787	81.846
$\Theta$ , град	4.190	3.539	3.788	4.456	4.142
$m$ , кг	49964	46616	43335	40091	37141
$n_{xk}$	3.615	3.885	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	3.098	9.974	14.891	2.091	0.596

Продовження табл. 5.8

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	5.693	6.192	6.713	7.233	7.754
$S - S_{\beta}$ , км	631.708	687.053	744.823	802.514	860.358
$t - t_{\beta}$ , с	161.304	169.464	177.609	185.412	192.940
$V$ , м/с	6641.031	6955.012	7260.839	7557.139	7843.040
$M$	22.110	23.155	24.173	25.160	26.111
$h$ , км	85.287	88.897	92.595	96.294	100.000
$\Theta$ , град	3.956	3.775	3.714	3.715	3.716
$m$ , кг	34455	32011	29744	27722	25903
$n_{xk}$	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	-0.154	0.594	0.980	0.155	0.000

Таблиця 5.9

Допоміжний по  $H$  варіант оптимізації

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки $0-I$ , $\beta=0$					
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.000	0.135	0.274	0.393	0.558
$S - S_\beta$ , км	0.000	15.050	30.489	43.627	61.971	74.772
$t - t_\beta$ , с	0.000	10.575	20.476	28.889	38.028	44.456
$V$ , м/с	1359.160	1487.231	1631.474	1774.334	1935.597	2050.145
$M$	4.400	4.814	5.281	5.744	6.266	6.636
$h$ , км	28.000	28.837	30.545	31.978	33.498	34.045
$\Theta$ , град	0.000	6.383	6.302	6.225	3.714	2.448
$m$ , кг	294000	292413	290928	289666	288295	287331
$n_{xk}$	1.010	1.766	1.766	1.835	1.813	1.803
$\alpha$ , град	17.443	6.192	6.143	0.384	1.721	0.000

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки $I-II$ , $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.134	0.279	0.430	0.587
$S - S_\beta$ , км	14.918	31.010	47.783	65.155	83.061
$t - t_\beta$ , с	7.138	14.103	20.912	27.580	34.121
$V$ , м/с	2130.377	2277.630	2425.744	2598.382	2786.527
$M$	6.896	7.373	7.859	8.411	9.020
$h$ , км	34.667	35.760	37.285	38.826	40.041
$\Theta$ , град	2.388	3.891	5.209	5.082	3.887
$m$ , кг	195260	194215	193194	192194	191212
$n_{xk}$	2.436	2.463	2.863	2.883	2.726
$\alpha$ , град	8.922	10.174	4.950	-0.03194	11.236

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки $I-II$ , $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.915	1.089	1.271	1.459
$S - S_\beta$ , км	101.543	120.896	141.048	61.967	183.641
$t - t_\beta$ , с	40.546	46.863	53.084	59.215	65.263
$V$ , м/с	2972.104	3152.338	3327.910	3499.158	3665.824
$M$	9.621	10.204	10.773	11.327	11.867
$h$ , км	41.669	42.485	43.225	43.979	45.000
$\Theta$ , град	5.046	4.115	3.323	2.565	2.699
$m$ , кг	192249	189301	188368	187448	186541
$n_{xk}$	2.904	2.989	2.996	2.954	2.986
$\alpha$ , град	0.406	0.724	0.427	7.76400	6.613

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.311	0.552	0.830	1.116	1.421
$S - S_{\beta}$ , км	34.603	62.380	92.129	123.914	157.704
$t - t_{\beta}$ , с	16.148	27.943	39.427	50.629	61.524
$V$ , м/с	2242.995	2485.068	2723.987	2981.024	32450.781
$M$	7.873	9.029	9.801	10.590	11.383
$h$ , км	36.590	39.508	43.008	46.667	49.454
$\Theta$ , град	4.273	5.721	6.178	5.598	4.443
$m$ , кг	87970	83507	79223	75064	71009
$n_{xk}$	1.573	1.978	2.252	2.410	2.457
$\alpha$ , град	21.347	17.944	10.063	4.024	24.382

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	1.680	2.082	2.436	2.807	3.162
$S - S_{\beta}$ , км	186.469	231.010	270.305	311.463	350.862
$t - t_{\beta}$ , с	70.131	82.464	92.538	102.365	111.955
$V$ , м/с	3462.786	3785.701	4067.103	4367.340	4679.755
$M$	12.194	13.036	13.923	14.836	15.158
$h$ , км	52.740	55.370	57.831	60.751	63.777
$\Theta$ , град	5.332	3.994	3.465	4.082	3.808
$m$ , кг	67805	63215	59466	55808	52239
$n_{xk}$	2.657	2.819	2.977	3.199	3.407
$\alpha$ , град	0.788	5.944	18.548	6.331	17.380

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	3.607	4.033	4.477	4.937	5.412
$S - S_{\beta}$ , км	400.260	447.500	496.817	547.832	600.468
$t - t_{\beta}$ , с	121.327	130.482	139.435	148.206	156.815
$V$ , м/с	5001.543	5347.314	5698.630	5964.677	6295.755
$M$	16.718	17.715	18.767	19.858	20.960
$h$ , км	67.331	70.713	74.300	78.669	82.635
$\Theta$ , град	4.460	4.094	4.196	4.126	4.178
$m$ , кг	48751	45344	42011	38747	35852
$n_{xk}$	3.615	3.883	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	2.576	7.881	4.422	6.882	0.640

Продовження табл. 5.9

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_\beta$ , град	5.903	6.409	6.926	7.447	7.969
$S - S_\beta$ , км	654.971	711.127	768.425	826.224	884.158
$t - t_\beta$ , с	165.275	173.575	181.666	189.489	197.029
$V$ , м/с	6621.300	6940.684	7251.987	7552.900	7843.040
$M$	22.044	23.107	24.144	25.146	26.191
$h$ , км	86.318	88.222	92.504	96.698	100.000
$\Theta$ , град	3.902	3.753	3.594	3.499	3.484
$m$ , кг	33218	30823	28654	26702	24946
$n_{xk}$	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	0.336	-0.800	-0.371	-0.075	0.000

Таблиця 5.10

Допоміжний по  $\psi$  варіант оптимізації

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки 0-I, $\beta=0$					
$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.000	0.137	0.279	0.399	0.568	0.691
$S - S_\beta$ , км	0.000	15.210	30.951	44.297	63.119	76.692
$t - t_\beta$ , с	0.000	10.684	20.771	28.965	38.676	45.457
$V$ , м/с	1359.160	1488.132	1632.891	1779.934	1945.197	2065.821
$M$	4.400	4.817	5.286	5.762	6.297	6.687
$h$ , км	28.000	28.860	30.618	32.097	33.624	34.192
$\Theta$ , град	0.000	6.485	6.366	6.271	4.301	2.397
$m$ , кг	294000	292397	290884	289655	288198	287181
$n_{xk}$	1.004	1.755	1.766	1.825	1.817	1.801
$\alpha$ , град	17.503	6.561	6.094	1.924	-0.115	0.000

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.132	0.270	0.415	0.567	0.725
$S - S_\beta$ , км	14.696	29.965	46.081	62.914	80.524
$t - t_\beta$ , с	7.052	13.1934	20.665	27.259	33.728
$V$ , м/с	2153.143	2313.309	2475.206	2631.817	2807.543
$M$	6.970	7.488	8.012	8.519	9.088
$h$ , км	34.844	36.620	37.435	38.244	38.987
$\Theta$ , град	2.541	6.244	4.997	3.753	2.817
$m$ , кг	195123	194090	193081	192092	191121
$n_{xk}$	2.013	2.672	2.898	2.877	2.808
$\alpha$ , град	15.330	0.889	0.307	1.106	8.107

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.892	1.085	1.246	1.433	1.627
$S - S_{\beta}$ , км	98.990	118.262	138.307	159.093	180.583
$t - t_{\beta}$ , с	40.082	46.333	52.489	58.556	64.543
$V$ , м/с	2992.619	3174.494	3344.526	3506.389	3665.824
$M$	9.687	10.276	10.817	11.351	11.867
$h$ , км	40.077	41.318	42.476	43.715	45.000
$\Theta$ , град	3.382	3.689	3.309	3.415	3.426
$m$ , кг	190168	189231	188307	187397	186499
$n_{xk}$	2.828	2.976	2.948	2.966	2.986
$\alpha$ , град	7.710	3.426	6.956	6.709	6.613

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-11, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.313	0.566	0.831	1.126	1.432
$S - S_{\beta}$ , км	34.814	62.802	92.912	125.000	158.956
$t - t_{\beta}$ , с	16.0664	27.801	39.236	50.354	61.212
$V$ , м/с	2287.703	2529.075	2774.940	3016.308	3263.639
$M$	7.616	8.420	9.238	10.042	10.865
$h$ , км	39.131	43.106	45.771	48.421	51.154
$\Theta$ , град	8.321	7.745	5.885	4.586	4.482
$m$ , кг	87920	83560	79304	75162	71125
$n_{xk}$	1.863	2.151	2.280	2.414	2.557
$\alpha$ , град	10.325	1.721	4.237	13.608	0.703

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-11, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	1.755	2.095	2.452	2.826	3.216
$S - S_{\beta}$ , км	194.772	232.492	272.082	313.557	356.906
$t - t_{\beta}$ , с	71.788	82.110	92.184	102.028	111.653
$V$ , м/с	3527.230	3798.425	4077.185	4364.867	4662.742
$M$	11.743	12.646	13.574	14.531	15.523
$h$ , км	53.592	56.230	58.570	61.258	64.276
$\Theta$ , град	3.808	3.969	3.292	3.669	3.948
$m$ , кг	67189	63347	59598	55934	52352
$n_{xk}$	2.630	2.621	2.985	3.190	3.421
$\alpha$ , град	14.586	4.240	15.640	13.396	2.372

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	3.624	4.049	4.191	4.952
$S - S_\beta$ , км	402.135	449.285	498.369	549.495	602.500
$t - t_\beta$ , с	121.062	130.269	139.281	148.120	156.780
$V$ , м/с	4971.364	5292.025	5626.976	5967.135	6300.376
$M$	16.551	17.618	18.734	19.866	20.976
$h$ , км	67.035	70.253	73.692	76.945	79.590
$\Theta$ , град	3.469	3.895	3.997	3.637	3.853
$m$ , кг	48850	45423	42069	38845	35927
$n_{xk}$	3.609	3.880	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	13.330	7.886	0.409	7.315	7.505

Продовження табл. 5.10

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	5.923	6.429	6.942	7.460
$S - S_\beta$ , км	657.228	713.310	770.293	827.710	885.356
$t - t_\beta$ , с	165.268	173.553	181.598	189.710	885.356
$V$ , м/с	6626.686	6945.685	7255.065	7554.440	7843.040
$M$	22.062	23.124	24.154	25.151	26.111
$h$ , км	84.043	87.968	91.951	95.971	100.000
$\Theta$ , град	4.155	3.997	3.997	3.998	3.998
$m$ , кг	33279	30883	287722	26777	25025
$n_{xk}$	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	0.206	0.000	0.980	0.000	0.000

Таблиця 5.11

## Альтернативний по ОЛ варіант оптимізації траєкторій

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки 0-I, $\beta=0$					
	$\lambda - \lambda_\beta$ , град	0.000	0.145	0.283	0.416	0.585
$S - S_\beta$ , км	0.000	16.188	31.420	46.230	64.994	81.391
$t - t_\beta$ , с	0.000	11.367	21.103	29.713	39.674	47.672
$V$ , м/с	1359.160	1489.102	1640.082	1794.932	1957.790	2095.676
$M$	4.400	4.820	5.309	5.810	6.402	6.826
$h$ , км	28.000	28.915	30.616	32.244	33.750	34.422
$\Theta$ , град	0.000	6.473	6.377	6.215	3.754	2.348
$m$ , кг	294000	292294	290834	289543	288052	285849
$n_{xk}$	1.054	1.766	1.769	1.830	1.809	1.797
$\alpha$ , град	16.840	6.160	5.947	0.963	2.202	0.000

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.147	0.294	0.446	0.606
$S - S_{\beta}$ , км	16.332	32.708	49.532	67.308	86.057
$t - t_{\beta}$ , с	7.808	12.401	16.719	25.026	33.531
$V$ , м/с	2168.098	2258.877	2358.505	2559.625	2757.745
$M$	7.018	7.312	7.635	8.286	8.927
$h$ , км	34.808	35.110	37.069	38.213	39.053
$\Theta$ , град	1.354	1.096	6.071	4.016	2.566
$m$ , кг	194207	193517	192869	191623	190347
$n_{xk}$	2.612	0.895	2.911	2.888	2.841
$\alpha$ , град	3.341	30.925	1.016	0.333	6.798

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-12, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.953	1.138	1.332	1.534
$S - S_{\beta}$ , км	105.754	126.350	147.876	170.224	193.416
$t - t_{\beta}$ , с	41.032	48.839	55.531	62.117	68.606
$V$ , м/с	2947.481	3139.324	3325.391	3484.816	3665.824
$M$	9.541	10.162	10.765	11.281	11.867
$h$ , км	40.048	41.312	42.383	43.653	45.000
$\Theta$ , град	2.894	3.516	2.850	3.256	3.327
$m$ , кг	189222	188051	187047	186060	185086
$n_{xk}$	2.809	2.987	2.917	2.963	2.986
$\alpha$ , град	8.846	1.869	9.001	7.181	6.613

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-11, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.311	0.563	0.830	1.117
$S - S_{\beta}$ , км	34.555	62.463	92.109	123.932	157.797
$t - t_{\beta}$ , с	15.692	27.107	38.238	49.075	59.649
$V$ , м/с	2317.400	2567.985	2821.006	3084.070	3348.812
$M$	7.715	8.549	9.402	10.267	11.149
$h$ , км	36.850	40.681	44.322	47.589	50.867
$\Theta$ , град	4.906	6.105	6.911	5.550	5.024
$m$ , кг	88067	83818	79675	75642	71707
$n_{xk}$	1.604	1.976	2.279	2.391	2.554
$\alpha$ , град	20.216	20.557	3.443	9.601	4.115

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	1.744	2.084	2.440	2.812	3.200
$S - S_{\beta}$ , км	193.583	231.249	270.715	311.995	355.057
$t - t_{\beta}$ , с	69.958	80.027	89.860	99.467	108.864
$V$ , м/с	3615.844	3887.290	4163.711	4445.153	4734.628
$M$	12.038	12.942	13.862	14.799	15.763
$h$ , км	53.296	56.342	59.239	61.551	64.519
$\Theta$ , град	4.077	4.620	4.190	3.406	3.941
$m$ , кг	67870	64122	60463	56887	53390
$n_{xk}$	2.607	2.817	3.003	3.184	3.414
$\alpha$ , град	18.845	6.962	1.399	16.827	12.033

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	3.603	4.023	4.459	4.911	5.381
$S - S_{\beta}$ , км	399.851	446.396	494.749	544.962	597.023
$t - t_{\beta}$ , с	118.059	127.053	135.860	144.496	152.972
$V$ , м/с	5033.085	5341.352	5662.370	5994.460	6320.771
$M$	16.756	17.783	18.851	19.957	21.043
$h$ , км	67.798	70.683	73.882	77.791	81.851
$\Theta$ , град	4.186	3.640	3.781	4.153	3.955
$m$ , кг	49967	46620	43342	40096	37145
$n_{xk}$	3.613	3.885	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	0.008	8.455	10.675	1.460	1.871

Продовження табл. 5.11

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	5.866	6.365	6.873	7.386	7.900
$S - S_{\beta}$ , км	650.851	706.186	762.575	819.482	876.555
$t - t_{\beta}$ , с	161.297	169.455	177.405	185.102	192.530
$V$ , м/с	6640.924	6954.921	7260.837	7557.133	7843.040
$M$	22.109	23.155	24.173	25.160	26.111
$h$ , км	85.284	88.899	92.541	96.279	100.000
$\Theta$ , град	3.858	3.734	3.693	3.754	3.746
$m$ , кг	34458	32014	29799	27801	26000
$n_{xk}$	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	0.656	0.861	1.838	0.0242	0.000

Таблиця 5.12

## Альтернативний по ЛН варіант оптимізації траєкторій

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки 0-1, $\beta=0$					
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.000	0.133	0.272	0.391	0.522
$S - S_{\beta}$ , км	0.000	14.856	30.208	43.459	57.966	69.609
$t - t_{\beta}$ , с	0.000	10.450	20.252	28.003	35.212	41.869
$V$ , м/с	1359.160	1484.224	1648.082	1771.239	1897.097	2011.950
$M$	4.400	4.804	5.335	5.733	6.141	6.513
$h$ , км	28.000	28.842	30.570	32.055	33.467	34.267
$\Theta$ , град	0.000	6.539	6.449	6.338	4.110	2.273
$m$ , кг	294000	292432	290962	289799	288613	287719
$n_{xk}$	0.981	1.767	1.765	1.835	1.823	1.808
$\alpha$ , град	17.834	6.175	6.039	0.055	-0.009	0.000

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки 1-12, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.121	0.249	0.382	0.524
$S - S_{\beta}$ , км	13.517	27.630	42.452	58.156	74.684
$t - t_{\beta}$ , с	6.498	12.860	19.096	25.218	31.236
$V$ , м/с	2150.434	2304.906	2480.156	2652.312	2819.289
$M$	6.961	7.461	8.028	8.586	9.126
$h$ , км	34.826	35.919	37.646	38.914	39.980
$\Theta$ , град	2.369	4.437	6.275	5.126	4.042
$m$ , кг	195744	194790	193855	192936	192034
$n_{xk}$	2.315	2.340	2.897	2.877	2.898
$\alpha$ , град	11.094	12.657	0.334	0.044	0.130

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки 1-12, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	0.829	0.992	1.162	1.368
$S - S_{\beta}$ , км	92.027	110.158	128.959	131.944	174.014
$t - t_{\beta}$ , с	37.159	42.994	48.746	55.924	62.980
$V$ , м/с	2985.232	3149.553	3315.022	3495.919	3665.824
$M$	9.664	10.195	10.731	11.317	11.867
$h$ , км	40.734	41.818	42.731	43.807	45.000
$\Theta$ , град	3.085	3.425	2.782	2.682	3.097
$m$ , кг	191145	190270	189407	188331	187272
$n_{xk}$	2.861	2.983	2.973	2.961	2.986
$\alpha$ , град	5.789	2.681	5.090	7.205	6.613

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ ,град	0.302	0.341	0.797	1.070
$S - S_{\beta}$ ,км	33.537	60.058	88.433	118.770	151.168
$t - t_{\beta}$ ,с	12.211	28.071	39.628	50.888	61.840
$V$ ,м/с	2136.052	2363.958	2584.526	2839.301	3107.565
$M$	7.111	7.870	8.604	9.452	10.346
$h$ ,км	37.649	40.857	45.009	48.077	51.378
$\Theta$ ,град	5.806	6.887	7.301	5.773	5.807
$m$ ,кг	87873	83459	79158	74967	70891
$n_{xk}$	1.655	2.005	2.288	2.367	2.558
$\alpha$ ,град	19.319	17.625	2.536	14.838	2.366

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ ,град	1.672	1.999	2.343	2.704
$S - S_{\beta}$ ,км	185.258	221.809	259.968	300.031	342.083
$t - t_{\beta}$ ,с	72.502	82.893	93.029	102.915	112.566
$V$ ,м/с	3364.783	3636.422	3915.111	4218.81	4519.990
$M$	11.202	12.106	12.967	14.212	15.181
$h$ ,км	52.927	55.266	58.713	61.872	64.905
$\Theta$ ,град	4.648	3.585	5.174	4.485	4.079
$m$ ,кг	66923	63056	59283	55604	52012
$n_{xk}$	2.559	2.757	3.005	3.201	3.418
$\alpha$ ,град	1.486	25.639	0.281	0.467	8.450

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ ,град	3.480	3.897	4.332	4.787
$S - S_{\beta}$ ,км	386.160	432.377	480.731	531.171	583.526
$t - t_{\beta}$ ,с	121.994	131.210	140.222	149.049	157.695
$V$ ,м/с	4853.966	5201.859	5555.489	5901.861	6241.136
$M$	16.446	17.318	18.495	19.649	20.778
$h$ ,км	68.077	71.526	74.788	78.881	83.074
$\Theta$ ,град	4.059	4.196	3.809	4.297	4.044
$m$ ,кг	48503	45073	41719	38526	35636
$n_{xk}$	3.613	3.885	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ ,град	9.388	1.131	12.176	0.745	0.796

Продовження табл. 5.12

Параметри траєкторії	Величини параметрів траєкторії для ділянки I-II, $\beta=1$				
	$\lambda - \lambda_{\beta}$ , град	5.690	6.161	6.681	7.207
$S - S_{\beta}$ , км	631.303	383.600	741.285	799.628	858.175
$t - t_{\beta}$ , с	165.192	164.555	182.738	190.659	198.287
$V$ , м/с	6535.216	6902.620	7223.720	7534.540	7843.040
$M$	21.757	22.980	24.049	25.084	26.111
$h$ , км	87.365	90.444	93.608	96.801	100.000
$\Theta$ , град	3.889	3.696	3.485	3.422	3.402
$m$ , кг	33007	30609	28432	26472	24712
$n_{xk}$	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
$\alpha$ , град	0.0275	-1.503	0.0901	-0.0143	0.000

Таблиця 5.13

## Порівняння варіантів оптимізації

Варіанти	Параметри розгалуженої траєкторії			
	$\Delta t_1 = \hat{t}_1 - t_0$ , с	$\Delta t_{12} = \hat{t}_{12} - t_1$ , с	$\Delta t_{11} = \hat{t}_{11} - \hat{t}_1$ , с	$\hat{I} = \Delta t_1 + \Delta t_{12} + \Delta t_{11}$ с
1. Головний	46.669	63.164	192.940	302.773
2. Допоміжний по $H$	44.456	65.263	197.029	306.748
3. Допоміжний по $\Psi$	45.457	64.543	196.877	306.877
4. Альтернативний по ОЛ	47.672	68.606	192.530	308.808
5. Альтернативний по ЛН	41.869	62.980	198.287	303.136

Продовження табл. 5.13

Варіанти	Параметри розгалуженої траєкторії			
	$\Delta t_1 + \Delta t_{12}$ , с	$\Delta t_1 + \Delta t_{11}$ , с	$\alpha_1(t_0 + 0)$ , град	$n_1(t_0 + 0)$
1. Головний	109.833	239.609	17.020	1.046
2. Допоміжний по $H$	109.719	241.485	17.443	1.010
3. Допоміжний по $\Psi$	110.000	242.334	17.503	1.004
4. Альтернативний по ОЛ	116.278	240.020	16.840	1.054
5. Альтернативний по ЛН	104.849	240.156	17.834	0.981

Продовження табл. 5.13

Варіанти	Параметри розгалуженої траєкторії			
	$\hat{V}_1(\hat{t}_1)$ , м/с	$\hat{M}_1(\hat{t}_1)$ , м/с	$\hat{h}_1(\hat{t}_1)$ , км	$\theta_1(\hat{t}_1)$ , град
1. Головний	2091.10	6.769	34.217	2.242
2. Допоміжний по $H$	2050.15	6.636	34.045	2.448
3. Допоміжний по $\Psi$	2065.82	6.687	34.192	2.397
4. Альтернативний по ОЛ	2095.68	6.826	34.420	2.348
5. Альтернативний по ЛН	2011.95	6.513	34.267	2.273

Продовження табл. 5.13

Варіанти	Параметри розгалуженої траєкторії			
	$\hat{\alpha}_{11}(\hat{t}_1+0)$ , град	$\hat{\alpha}_{12}(\hat{t}_1+0)$ , град	$\Delta t_{n_{xk}}$ , с	$n_{x_{12}}(\hat{t}_1 + \Delta t_{n_{xk}})$
1. Головний	23.314	1.689	2.010	2.821
2. Допоміжний по $H$	16.240	3.763	4.219	2.794
3. Допоміжний по $\Psi$	28.247	4.220	3.823	2.778
4. Альтернативний по ОЛ	18.587	1.879	5.167	2.718
5. Альтернативний по ЛН	21.166	4.131	1.424	2.792

Продовження табл. 5.13

Варіанти	Параметри розгалуженої траєкторії				
	$n_{x_{11}}(\hat{t}_1+4)$	$\hat{m}_{11}(\hat{t}_{11})$ , кг	$S_1(\hat{t}_1)$ , км	$S_{12}(\hat{t}_1)$ , км	$S_{11}(\hat{t}_1)$ , км
1. Головний	1.487	25903	80.449	257.963	940.807
2. Допоміжний по $H$	1.754	24946	74.772	258.413	958.930
3. Допоміжний по $\Psi$	1.325	25025	76.692	257.275	962.048
4. Альтернативний по ОЛ	1.683	26000	81.391	274.807	957.946
5. Альтернативний по ЛН	1.611	24712	69.609	243.623	927.784

До даних про фазові координати і керування додано відомості про дальність

$$S_1(t) - S_0(t_0) = \int_{t_0}^t V_1 \cos \theta_1 d\tau, t \in [t_0, t_1],$$

$$S_{li}(t) - S_1(t_1) = \int_{t_0}^t V_{li} \cos \theta_{li} d\tau \quad (i=1,2), t \in [t_i, t_{li}]$$

і тангенціальне перевантаження  $n_{xk} = (mg_S)^{-1}(P \cos \alpha - X_a)$ , що виникає на кожній ділянці розгалуженої траєкторії під дією керування  $u = (P, \lambda)^T$ . Оптимізація керування  $\alpha$  на кожній з ділянок траєкторії здійснювалася в кінцевому числі точок. Для ділянки 0-1 в п'яти, для ділянки 1-12 в десяти і для ділянки 1-11 в двадцяти точках приблизно рівномірно розподілених по дальності польоту. В інтервалах між точками оптимізації здійснювалася лінійна інтерполяція керування.

Розрахунки показали, що при рівності нулю функціонального множника Лагранжа  $\mu(t) = 0$  при  $t_1 \leq t \leq t_{12}$ , за допомогою якого виконується розширення критерію (5.91) шляхом введення в нього обмеження (5.84), виникає перетин графіків висот польоту ОЛ і ЛН після точки розділення.

За фізичним змістом задачі це означає, що СН, звільнений від зовнішньої підвіски починає інтенсивно розганятися і набирати висоту. Це і зрозуміло, тому що розгін в менш щільних шарах атмосфери відбувається набагато швидше і, отже, вимога про мінімізацію часу руху до кінцевого пункту буде виконано оптимально.

Орбітальний літак протягом перших 4-х секунд після відділення взагалі не розганяється, тому що РРД не включений, щоб уникнути попадання ЛН в його супутній струмінь. Після включення маршового РРД розгін ОЛ відбувається повільніше, ніж розгін ЛН, так як що маса ОЛ ще завелика. Орбітальний літак відстає від ЛН і по дальності і по висоті, що може призвести до потрапляння в супутній струмінь ЛН. Уникнути цього явища, і при цьому зберегти оптимальність рішення задачі, вдається за рахунок введення обмеження (5.99), за допомогою множника  $\mu(t)$ , в критерій (5.91). Результати розрахунку наведені на рис. 5.17.

Вплив на керування, яким є кут атаки, здійснюється опосередковано через спряжені змінні. Спеціально розрахований графік зміни  $\mu(t)$ , дозволяє знайти оптимальний компроміс між деяким пригальмовуванням ЛН в щільних шарах атмосфери і не дуже інтенсивним збільшенням кута нахилу траєкторії та

набором висоти ОЛ, при якому відбувається його гальмування за рахунок складової сили тяжіння, яка проектується на напрям вектора швидкості.

Графіки зміни оптимальних значень кутів атаки для ступенів АКС показані на рис. 5.18.

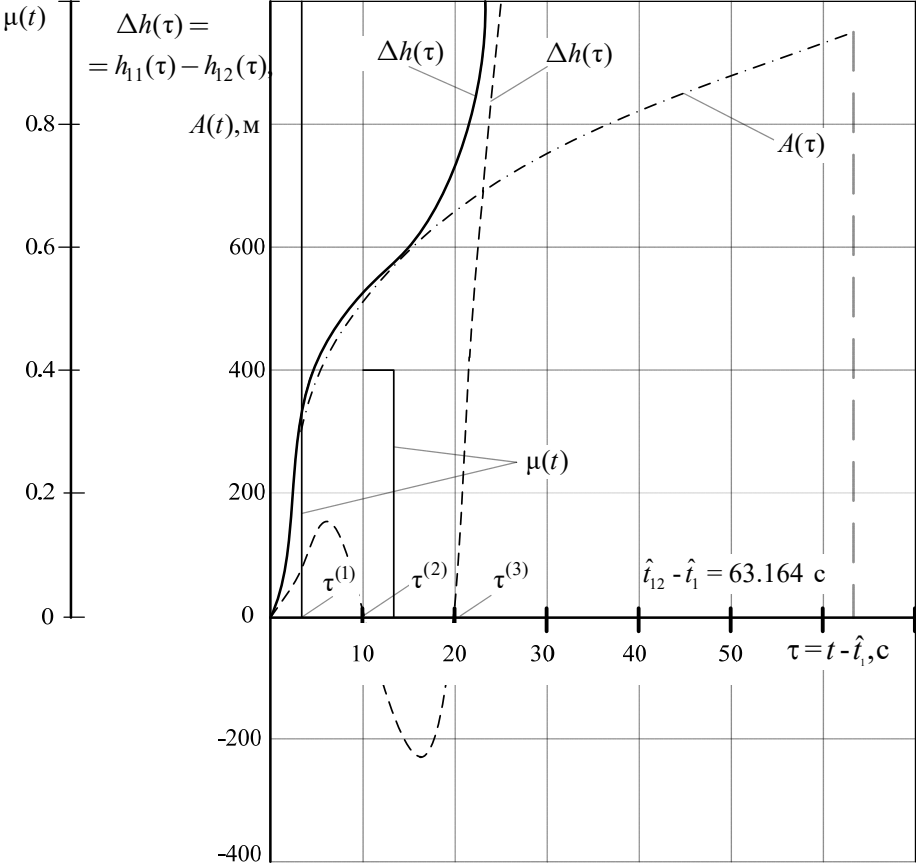
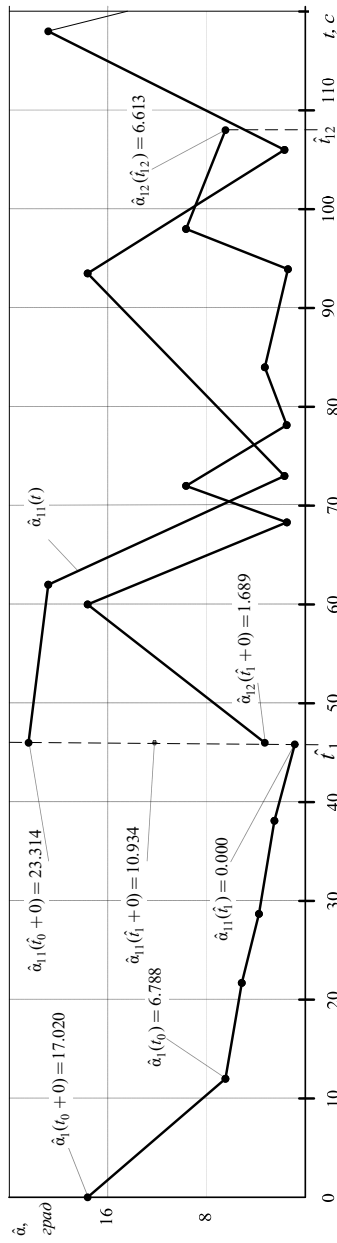
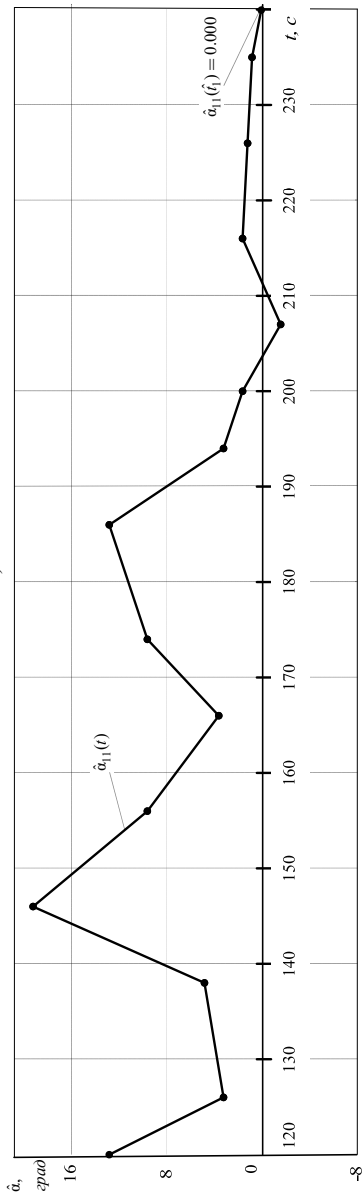


Рис 5.17. Графіки відносної висоти  $\Delta h(\tau)$ ; обмеження  $A(\tau)$ ; функціонального множника Лагранжа  $\mu(\tau)$ ;  $\tau^{(1)} = 4 \text{ с}$ ,  $\tau^{(2)} = 10 \text{ с}$ ,  $\tau^{(3)} = 13,5 \text{ с}$ ;  $\Delta h_0(\tau)$  – графік відносної висоти при  $\mu(\tau) = 0$



a)



б)

Рис. 5.18. Програма зміни в часі оптимального кута атаки: а) – для ЛН+ОЛ ( $\hat{\alpha}_1(t)$ ), ЛН ( $\hat{\alpha}_2(t)$ ) та ОЛ ( $\hat{\alpha}_{11}(t)$ ), б) – продовження графіка ( $\hat{\alpha}_{11}(t)$ );  $t_1=46.669$  с,  $t_{12}=109.833$  с,  $t_{11}=239.609$  с

Підйом-розгін ступеню ЛН + ОЛ починається з режиму рівномірного горизонтального польоту, коли  $P_1(t_0) = X_{a1}$ ,  $\alpha_1(t_0) = 6,785^\circ$ . Тяга приймає значення  $P = P_{\max}$ , а кут атаки збільшується до  $\hat{\alpha}_1(t_0 + 0) = 17,02^\circ$ . Великі значення кута атаки протягом перших десяти секунд розгону дозволяють збільшити на кілька градусів кут нахилу траєкторії, перейти в режим набору висоти і виконати маневр «гірка», в кінці якого  $\alpha_1(\hat{t}) = 0^\circ$ , що забезпечує виконання обмеження  $n_{zk}(\hat{t}_1) = 0$ . Відзначимо, що маневр «гірка» для даної АКС, у якої ступені володіють аеродинамічною якістю  $K_{\max} \geq 3$ , виконується в майже на порядок меншому діапазоні кутів нахилу траєкторії в порівнянні з триступеневою АКС з дозвуковим літаком-носієм [81].

У точці розділення ступенів в момент часу  $\hat{t}_1$  тяга СН зменшується до значення  $P = X_{a1}$ , що забезпечує виконання умови  $n_{xk}(\hat{t}_1) = 0$ . Одночасно з цим, за допомогою спеціальних механічних підйомників ОС займає таке положення в набігаючому повітряному потоці, при якому його кут атаки становить  $\alpha_{11}(\hat{t}_1) = 10,934^\circ$ .

Після спрацьовування замків кріплення ОЛ до СЛ кут атаки ОЛ різко збільшується до  $\hat{\alpha}_{11}(\hat{t}_1 + 0) = 23,314^\circ$ , що забезпечує енергійне віддалення ОЛ від ЛН. Кут атаки ЛН змінюється незначно від 0 до  $\hat{\alpha}_{12}(\hat{t}_1 + 0) = 1,689^\circ$ , що дозволяє плавно зменшувати його кут нахилу траєкторії і не дуже інтенсивно набирати висоту, виходячи з умови виконання обмеження (5.84).

В силу того, що впродовж 4-х секунд маршовий РРД ОЛ не працює, а швидкість польоту залишається постійною тільки завдяки РРД СОМ, виконати обмеження (5.84) лише за рахунок керування кутами атаки ОЛ і ЛН, не збільшуючи час їх руху до кінцевих пунктів, неможливо.

Розширення критерію шляхом введення в нього обмеження (5.84) за допомогою множників Лагранжа  $\mu(t)$  призводить до того, що в інтервалі часу  $[\hat{t}_1, \hat{t}_1 - \Delta t_{nzk}^0]$

$$H_{\alpha, \psi}^{P_f} > 0 \text{ та } P_{12} = [X_{12} + m_{12} g(r, \omega_C) \sin \theta] / \cos \alpha,$$

тобто СН летить з постійною швидкістю. Величини  $[\hat{t}_1, \hat{t}_1 - \Delta t_{nxk}^0] \Delta t_{nxk}^0$  наведені в табл. 4.13 для всіх п'яти варіантів що порівнюються. Слід зазначити, що для ступенів ЛН + ОЛ та ЛН зміна кута нахилу траєкторії і компенсація сили тяжіння відбувається, в основному, за рахунок підйомної сили  $Y_\alpha$ .

Для ОЛ до моменту часу  $t \approx 135 \text{ с} + \hat{t}_1$  ( $h_1 \approx 73 \text{ км}$ ,  $M \approx 18,8$ ) зміна кута нахилу траєкторії і компенсація сили тяжіння відбувається за рахунок сукупної дії сил: складової тяги двигуна, підйомної та центробіжної сили. Після  $t > 135 \text{ с} + \hat{t}_1$  польоту ОЛ його висота і швидкість такі, що  $Y_\alpha$  прямує до нуля, сила тяжіння компенсується, в основному, центробіжною силою, а незначна зміна кута нахилу траєкторії відбувається за рахунок складової тяги РРД.

Порівняльний аналіз п'яти варіантів оптимізації розгалуженої траєкторії за основним показником, яким є критерій (5.55) при  $b_1 = b_{11} = b_{12} = 1$  (табл. 5.13) дозволяє зробити висновок про те, що найбільшою ефективністю володіє головний варіант оптимізації розгалуженої траєкторії.

Далі слідує альтернативний по літаку-носію варіант оптимізації, але він істотно програє головному по масі що виводиться на орбіту і альтернативному по орбітальному літаку варіантам.

За умови, що маса ОЛ без палива складає 20 000 кг і 3 000 кг становить маса корисного вантажу, в альтернативному по ЛН варіанті на борту ОЛ залишається мінімально допустимий залишок палива 1712 кг.

В альтернативному по ОЛ варіанті на борту ОЛ в момент виходу на задану висоту і швидкість польоту знаходиться номінальний запас палива 3000 кг.

У головному варіанті орбітальний політ починається з запасом палива на 97 кг менше номінального. Це паливо було витрачено на поліпшення основного критерію (5.55), за яким оптимізувалася розгалужена траєкторія.

Час руху по ділянці 0-1-11 (виведення ОЛ) розгалуженої траєкторії у головного варіанта на 0,593 с менше, ніж у альтернативного по ОЛ варіанту і на 0,597 с менше, ніж у альтернативного по ЛН варіанту.

При цьому час руху по ділянці 0-1-12 (виведення ЛН) розгалуженої траєкторії у головного варіанта на 6,445 с менше, ніж у альтернативного по ОЛ варіанту і на 4,989 с більше, ніж у альтернативного по ЛН варіанту.

Таким чином, якщо крім основного критерію при аналізі результатів розрахунку проводити порівняння варіантів за додатковими показниками  $(\Delta t_1 + \Delta t_{11})$ ,  $(\Delta t_1 + \Delta t_{12})$ ,  $[91000 - m_{11}(t_{11})]$ , виникає необхідність звернутися до методів формування критеріїв переваги, які використовуються в векторній оптимізації для вибору найкращого варіанту. Глибокий аналіз цієї проблеми виходить за рамки цієї роботи.

Тому ми покажемо лише формальне застосування принципу рівномірної оптимальності в безрозмірному вигляді і принципу справедливого компромісу для порівняння варіантів розрахунку по векторному показнику [99].

$$W_l(l) = \{R_1(l), R_2(l), R_3(l), R_4(l)\},$$

де  $l=1,2,3,4,5$  – номер варіантів оптимізації, що порівнюються по табл. 4.13,

$$R_1(l) = \Delta t_1 + \Delta t_{11} + \Delta t_{12}, R_2(l) = \Delta t_1 + \Delta t_{12}, R_3(l) = \Delta t_1 + \Delta t_{11}, R_4(l) = 91000 - m_{11}(t_{11}).$$

Умовний критерій переваги (УКП) в разі застосування принципу рівномірної оптимальності має вигляд

$$\varphi_{P0}(l) = \sum_{v=1}^4 [R_v(l) - R_v^{\min}] / [R_v^{\max} - R_v^{\min}],$$

$$\text{де } R_v^{\min} = \min_{1 \leq l \leq 4} R_v(l), R_v^{\max} = \max_{1 \leq l \leq 4} R_v(l).$$

Для принципу справедливого компромісу УКП буде мати вигляд

$$\varphi_{CK}(l) = \prod_{v=1}^4 R_v(l).$$

Значення умовного критерію переваги для п'яти варіантів оптимізації, визначені за принципом рівномірної оптимальності і за принципом справедливого компромісу наведено в таблиці 5.14.

Таблиця 5.14

Значення умовного критерію переваги

Умовний критерій переваги	Варіанти оптимізації				
	1. Головний	2. Допоміжний по $H$	3. Допоміжний по $\psi$	4. Альтернативний по ОС	4. Альтернативний по СН
$\Phi_{PO}(l)$	0,511	2,591	2,886	2,217	1,260
$\Phi_{СК}(l) \cdot 10^{-11}$ $c^3 \cdot \text{кг}$	5,186	5,368	5,396	5,606	5,059

Із аналізу значень умовного критерію переваги (табл. 5.14) слідує, що відповідно до принципу рівномірної оптимальності слід віддати перевагу головному варіанту оптимізації. Цей результат цілком логічний, тому що адитивний критерій (5.55) відповідає саме цьому принципу, а витрати палива на траєкторії, що забезпечує мінімальний час, близькі до мінімально можливих витрат палива. Хоча принцип справедливого компромісу вказує на альтернативний по ЛН варіант, ми не можемо вважати його кращим, ніж головний варіант з тих міркувань, що ОЛ має мінімальний запас палива на орбіті. Наступний за відкинутим альтернативним по ЛН варіантом йде головний варіант оптимізації розгалуженої траєкторії.

Таким чином, всебічне дослідження та порівняння варіантів розгалужених траєкторій закінчено. В результаті приходимо до висновку про те, що головний варіант оптимальної розгалуженої траєкторії, розрахований на підставі зазначених у монографії необхідних умов оптимальності, є об'єктивно найкращим.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алемасов В.Е. Теория ракетных двигателей/ В.Е. Алемасов, Л.Ф. Дрегалин, Л.П. Тишив // – М.: Машиностроение, 1989. – 464 с.
2. Андреев Н.И. Теория статистически оптимальных систем управления. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
3. Андреевский В.В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. – М.: Машиностроение. 1970. – 232 с.
4. Аппазов Р.Ф. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли /Р.Ф. Аппазов, О.Г. Сытин //.– М.: Наука , 1987. – 440 с.
5. Аслаян А.Э. Оптимизация ветвящихся траекторий с учетом взаимного влияния разделяющихся и группирующихся подсистем/ А.Э. Аслаян, А.И. Лысенко// Математическое обеспечение БЦВМ в задачах управления, оценивания и идентификации.– М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1989. – С. 106-114
6. Аслаян А.Э. Достаточные условия оптимальности ветвящейся траектории/А.Э. Аслаян, А.И. Лысенко// Математическое обеспечение БЦВМ в задачах управления, оценивания и идентификации. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1989. – С. 115-121.
7. Аслаян А.Э. Применение функций Кротова в задаче оптимизации ветвящейся траектории/ А.Э. Аслаян, А.И. Лысенко // Адаптив. системы автом. упр. – 1990. – Вып. 18. – С. 55-61.
8. Атанс М. Оптимальное управление/ М. Атанс , П. Фалб П. // . – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
9. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления/ В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, Е.Р. Носов // . – М.: Высшая школа, 1989. – 447 с.
10. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.

11. Ащепков Л.Т. Оптимизация скользящих движений разрывной системы// Автом. и телемех. – 1983. – №11. – С. 30–37.
12. Аэромеханика самолета/ Под ред. Л.Ф.Бочкарева и В.В.Андреевского. – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.
13. Бек В.В. Интегрированные системы терминального управления / В.В. Бек, Ю.С. Вишняков, А.Р. Махлин // . – М.: Наука, 1989. – 224 с.
14. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
15. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования/ Р. Беллман, С. Дрейфус // . – М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1965. — 460 с.
16. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
17. Богомаз Г. И. Динамика старта жидкостных ракет-носителей космических аппаратов/Г. И. Богомаз, Н. Е. Науменко, М. Б. Соболевская и др.// . — Київ: Наук. думка, 2005. — 248 с.
18. Боднер В.А. Оптимизация терминальных стохастических систем/ В.А. Боднер, Н.Е. Роднищев, Е.П. Юриков // . – М.: Машиностроение, 1987. – 208 с.
19. Боднер В.А. Системы автоматического управления двигателями летательных аппаратов/ В.А. Боднер , Ю.А. Рязанов , Ф.А. Шаймарданов // . – М.: Машиностроение, 1973. – 248 с.
20. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1968. – 408 с.
21. Босс В. Оптимальное управление. –Palmarium Academic Publishing, 2016, –2018 с.
22. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 554 с.

23. Брусов В.С. Оптимальное проектирование летательных аппаратов: многоцелевой подход/ В.С. Брусов, К.С. Баранов // . – М.: Машиностроение, 1989. – 232 с.
24. Бузулук В.И. Оптимизация параметров аэрокосмической системы с помощью CFD-моделирования / В.И. Бузулук, С.М. Михалёв // Инженерный журнал: наука и инновации.– МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.– №9.–С. 1–10.
25. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. – М.: Наука, 1987. – 232 с.
26. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. – 552 с.
27. Венцель Е.С. Теория вероятности и ее инженерные приложения/ Е.С. Венцель // . – М.: Наука, 1988. – 480 с.
28. Верлань А. Ф. Алгоритмізація методів точностної параметричної редукції математичних моделей/ А. Ф. Верлань, С. А. Положаєнко // Інформатика та математичні методи в моделюванні. 2017.–Т. 7, № 1-2.– С. 7 – 18.
29. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
30. Воронин А. Н. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю.К. Зиятдинов– К.: Техника, 1999. – 284 с.
31. Гилл Ф. Практическая оптимизация/Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт//. Пер. с англ. –М.: Мир, 1985.
32. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления/ Р. Габасов, Ф.М. Кириллова//. –М.–2011. 272 с.
33. Грабин Б.В. Основы конструирования ракет-носителей космических аппаратов/ Б.В. Грабин, О.В. Давыдов, В.И. Жихарев // . — М.: Машиностроение, 1991. — 416 с.
34. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

35. Гусинін А.В. Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень/ А.В. Гусинін, О.М. Тачиніна// Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2013. – Вип.4(44). – С.37-43.
36. Гусинін В.П. Многокритериальная оптимизация движения автоматически управляемого аэростатического летательного аппарата/ В.П. Гусинін, А.В. Гусинін, О.М. Тачиніна// Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2015. – Вип. 4(52). – С.22-31.
37. Дмитриевский А.А. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов/ А.А. Дмитриевский, Л.Н.Лысенко // . – М.: Наука, 1978.– 328 с.
38. Иванов В.А. Теория оптимальных систем автоматического управления/ В.А. Иванов, Н.В. Фалдин // . – М.: Наука, 1981. – 336 с.
39. Иванов Н.М. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет/ Н.М. Иванов, А.И. Мартынов // . – М.: Наука, 1985. – 384с.
40. Иванов Н.И. Оптимизация траектории полета беспилотного летательного аппарата при оповещении. - М.: Университетская книга, 2008. - 424 с.
41. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров // . – М.: Наука, 1989. – 1974 с.
42. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
43. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Том 1. Линейные системы. - М.: Физматлит, 2003.–288 с.
44. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления/ Х. Квакернаак, Р. Сиван // . – М.: Мир, 1977. – 650 с.

45. Кваско М. З. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми: Навч. посібник. / М. З. Кваско, А.І. Кубрак, А. І. Жученко.—К.: Політехніка, 2003. —360с.
46. Кожевников Ю.Е. Статистическая оптимизация летальных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 137 с.
47. Колесников К.С. Динамика разделения ступеней летательных аппаратов/ К.С. Колесников, В.И. Козлов, В.В. Кокушкин //. –М.: Машиностроение, 1977.
48. Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
49. Колмогоров А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин //. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
50. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. –К.:Освіта України, 2011.–455 с.
51. Красовский А.А. Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем// Автом. и телемех. – 1976. - №10. – С.53-71.
52. Красовский А.А. Пилотажно-навигационные комплексы. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1975. – 184 с.
53. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.
54. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 232 с.
55. Красовский А.А. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами/ А.А. Красовский, В.Н. Буков, В.С. Шендрик //. – М.: Наука, 1977. – 270 с.
56. Красовский А.А. Теоретические основы пилотажно-навигационных комплексов/ А.А. Красовский, А.В. Лебедев, В.В. Невструев .//. – М.: ВВИА им проф. Н.Е. Жуковского, 1981. – 374 с.
57. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления/В.Ф.Кротов, В.И. Гурман //. –М.: Наука, 1973. – 448 с.

58. Кротов В.Ф. Основы теории оптимального управления.–М.: Высшая школа, 1990. - 431 с.

59. Курзинер Р.И. Реактивные двигатели для больших сверхзвуковых скоростей полета. М.: Машиностроение, 1989. – 264 с.

60. Лазарев Ю.Н.. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов . – Самара: Самар. науч. центр РАН , 2007. – 274 с.

61. Лебедев А.А. Статистическая динамика и оптимизация управления летательного аппарата.– М.: Машиностроение, 1985. -280 с.

62. Лебедев А.А. Динамика полёта беспилотных летательных аппаратов/ А.А. Лебедев, Л.С. Чернобровкин Л.С. //.– М.: Машиностроение, 1963. -310 с.

63. Лозино-Лозинский Г.Е. «Буран» – путь создания// Авиакосмическая техника и технология, 1998, № 3.

64. Лысенко А.И. Синтез ветвящихся траекторий оптимальных по критерию обобщенной работы// Алгоритмическое обеспечение интегрированных бортовых комплексов. – М.: ВВИ им. проф. Н.Е. Жуковского, 1987 – 1987. – С. 46-52.

65. Лысенко А.И. Оптимизация ветвящихся траекторий методом сопряженных переменных// Системы навигации летательных аппаратов. – М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1987. – С. 103-113.

66. Лысенко А.И. Необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы// Авиационные приборы, навигационные системы жизнедеятельности экипажей Л.А. – М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1988. –С. 82-95.

67. Лысенко А.И. Условие скачка в задаче оптимального управления объектом// Адаптив. системы автом. упр.- 1988. – Вып. 16 - С. 136-141

68. Лысенко А.И. Оценивание вектора состояния и управления траекторией динамической системы// Автоматизация управления полетом. – М.: Изд.-во МАИ, 1989. С. 32-36.

69. Лисенко О.І. Моделі застосування інформаційно-телекомунікаційних технологій на основі безпілотних авіаційних комплексів у надзвичайних ситуаціях/ О. І. Лисенко, О.М. Тачиніна, С.М. Чумаченко та ін.// Монографія.–К.: НАУ, 2016. – 335 с.

70. Лозино-Лозинский Г.Е. Проблемы создания и эксплуатации многоразовых космических систем. Доклад на 1 международной авиакосмической выставке в Советском союзе. –М., 1990 – 21-26 сентября.

71. Лукашевич В.П. Космические крылья/ В.П. Лукашевич, И.Б. Афанасьев //.–М.: ООО «Лента странствий», 2009.–496 с.

72. Малышев В. В. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами/ В. В. Малышев, А. И. Кибзун // . – М.: Машиностроение, 1987.

73. Михайлов В.В. Дросселируемые жидкости ракетные двигатели/ В.В. Михайлов, В.Г. Базаров // . – М.: Машиностроение, 1985. – 168 с.

74. Мишин В.П. Основы проектирования летательных аппаратов (транспортные системы)/ В.П. Мишин, В.К. Безвербый, Б.М. Панкратов и др. // . – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.

75. Васильев В.И. Многоуровневое управление динамическими объектами/ В.И. Васильев, Ю.М. Гусев, В.Н. Ефремов, В.Г. Крымский, В.Ю. Рутковский, В.А. Семеран. Под редакцией В.Ю. Рутковского, С.Д. Землякова. – М.: Наука, 1987. – 309 с.

76. Микеладзе В.Г. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет/ В.Г. Микеладзе, В.М. Титов //: Справочник. – М.: Машиностроение, 1990. – 144 с.

77. Мубаракшин Р.В. Комплексное наведение летательных аппаратов и отделяемых средств. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.

78. Михайлов В.В. Дросселируемые жидкости ракетные двигатели/В.В. Михайлов, В.Г. Базаров // . – М.: Машиностроение, 1985. – 168 с.

79. Моделирование систем полуавтоматического управления космических кораблей/ под ред. Яковлева А.И. – М.: Машиностроение, 1986. – 280 с.
80. Остославский И.В. Динамика полета. Траектория летательных аппаратов/ И.В. Остославский, И.В. Стражева // . – М., 1963. – 430 с.
81. Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
82. Охоцимский Д.Е. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу/ Д.Е. Охоцимский, Ю.Ф. Голубев, Ю.Г. Сихарулидзе // . – М.: Наука. – 1975. – 399 с.
83. Охоцимский Д.Е. Основы механики космического полета/ Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе // . – М.: Наука, 1990. – 448 с.
84. Павлов В.В. Синтез стратегий в человеко-машинных систем. – Киев: Вища школа, 1989. – 162 с.
85. Полет космических аппаратов: примеры и задачи: Справочник/ Ю.Ф. Авдеев, Л.В. Брыков и др.; под общ. ред. Г.С. Титова. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
86. Пономарев А.Н. Авиация настоящего и будущего. – М.: Воениздат, 1984. – 256 с.
87. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов/ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко // . – М.: Наука, 1969.–356 с.
88. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 3-е изд., 1976. – 392 с.
89. Попов И.А. Исследование, синтез и функционально-структурное проектирование больших технических систем/ И.А. Попов, О.Г. Коврижкин // . – Киев: КВВАИУ, 1990. – 364 с.
90. Припадчев А. Д. Расчет массы и размеров летательных аппаратов. Оренбург: ОГУ, 2013.–162 с.

91. Пугачев В.С. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
92. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969. – 152 с.
93. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах/ Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин // . – М.: Наука, 1975. – 320 с.
94. Райкунов Г.Г. Оптимизация баллистического обеспечения облета системы космических аппаратов на круговой орбите.–М: Физматлит, 2011.– 214 с.
95. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем// Автом. и телемех. – 1959. – Т. 20, № 10-12.
96. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием/ А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // . – Киев: Выща школа, 1987. – 228 с.
97. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами/ Э.П. Сейдж , Ч.С. Уайт // . – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
98. Сильвестров М.М. Автоматизация управления летательными аппаратами с учетом человеческого фактора/ М.М. Сильвестров, Л.М. Козиров, В.А. Пономаренко // . – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
99. Силков В.И. Динамика полета летательных аппаратов.– К.:КМУГА, 1997.–422 с.
100. Сиразетдинов Т.К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем. – М.: Машиностроение, 1988. – 160 с.
101. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. — М.: Наука, 1982.–352 с.
102. Скороделов В.А. Многоцелевой демонстратор технологий авиационно-космических транспортных систем// Авиакосмическая техника и технология. - 1997. - №3. - С. 12-16.
103. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А. Красовского. – М. Наука, 1987. – 712 с.

104. Суздаль В.С. Редукция модели при синтезе регуляторов / В.С. Суздаль, Ю. М. Епифанов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. –2011. –Том 2. – Выпуск № 3 (50).–С. 31–34.

105. Теория автоматического управления. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления/ Под. ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. -504 с.

106. Теория и расчет воздушно-реактивных двигателей/ Под ред. С. М. Шляхтенко. –М.: Машиностроение, 1987. – 568 с.

107. Тимошенко В. И. Исследование гиперзвуковых технологий при создании перспективных транспортных космических систем / В. И. Тимошенко, В. П. Гусынин // Космічна наука і технологія. – 1999. – 5, No 1. – С. 97–107.

108. Федосеев А.С. Алгоритм оптимального управления с обобщенной прогнозирующей моделью// Автом. и телемех. – 1977. - №7. – С. 16-21.

109. Филатьев А. С. Оптимальный запуск искусственного спутника Земли с использованием аэродинамических сил // Космические исследования, Т.29, вып. 2. - 1991. - С. 255-271.

110. Филатьев А. С. Сквозная оптимизация ветвящихся траекторий выведения космических летательных аппаратов в атмосфере на основе принципа максимума Понтрягина. Диссертац. докт. техн. наук. – Жуковский, 2001.–396 с.

111. Филатьев А. С. Сквозная оптимизация ветвящихся траекторий космических систем с учётом случайных возмущений/ А. С. Филатьев, О.В. Янова // Весник Самарского государственного аэрокосмического университета, №1(21).– 2010.–С. 244-250.

112. Филатьев А.С. Оптимизация ветвящихся траекторий авиакосмических систем. Труды первой международной авиакосмической конференции. – Москва: Российская инженерная академия, 1995.– Т. 3, С. 72-79.

113. Флеминг У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами/ У.Флеминг, Р. Ришел // – М.: Мир,1978. – 316 с.
114. Фомин В. М. Анализ траекторий полета летательного аппарата с прямоточным воздушно-реактивным двигателем / В. М.Фомин, С. М. Аульченко, В. И. Звегинцев, Л. А. Устинов // Прикладная механика и техническая физика.–2014.– Т. 55, №6. –С.35- 42.
115. Шалыгин А.С. Параметрические методы оптимизации в динамике полета беспилотных летательных аппаратов/ А.С. Шалыгин, И.Л. Петрова, В.А. Санников // — Санкт-Петербург, 2010. – 127 с.
116. Швец А.И. Сверхзвуковые летательные аппараты. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 240 с.
117. Яковлева А.И. Моделирование систем полуавтоматического управления космических кораблей. – М.: Машиностроение, 1986. – 280 с.
118. Ярошевский В. А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях/ В. А. Ярошевский , В. П. Кузьмин . // . - М.: Наука, 1995.
119. Ashish Tewari. Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets. – John Wiley & Sons, Inc., 2011.–446 p.
120. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming, SIAM, 2001. –190 p.
121. Betts, John T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Non-linear Programming. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2nd edition, 2010.
122. Boiko, I. Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design / I.Boiko//. —Birkhauser, Boston, 2008. — 212 p.
123. Bollino Kevin P. High-fidelity real-time trajectory optimization for reusable launch vehicles. PhD Dissertation, Naval Postgraduate School, 2006

124. Bryson A.E. Applied Optimal Control/ A.E. Bryson, Y.-C. Ho. // John Willey& Sons, New , AIAA 2001, 41st AIAA GN&C Conference, 2001, Montreal, Canada, pp. 234-241.

125. Chao-Fang Hu. Reentry trajectory optimization for hypersonic vehicles using fuzzy satisfactory goal programming method/Chao-Fang Hu, Yue Xin// International Journal of Automation and Computing, April 2015, Vol. 12, pp 171–181.

126. Filatyev A. S. Optimization of branched trajectories for aerospace transport systems. ICAS-94-5.2.3, 19th ICAS Congress, 1994, AnaheimCA, USA, pp. 325-331.

127. Filatyev A. S. Aster program package for the thorough trajectory optimization/ A. S. Filatyev and O.V. Yanova // Conference: AIAA Guidance, navigation, and control conference and exhibit, August 2001, pp. 48-56.

128. Filatyev, A. S. The through optimization of fail-safe branched injection trajectories of launch vehicles in view of aerodynamic load constraints on the basis of the maximum principle/ A. S. Filatyev and O.V. Yanova // Progress in Flight Dynamics, GNC and Avionics, Vol. 6, 2013.–p.p. 569-582.

129. Filatyev, A. S. Through optimization of a winged booster trajectory of reusable aerospace system and peculiarities of its flight try-out/ A. S. Filatyev and O.V. Yanova // Acta Astronautica Vol. 68, №7-8, 2011.–p.p. 1042-1050.

130. George Richards. Trajectory Optimization using mixed-integer linear programming. Department of Aeronautics and Astronautics May 5, 2002.–129 p.

131. Grant Michael J. Rapid Simultaneous hypersonic aerodynamic and trajectory optimization using variational methods/Grant Michael J., Ian G.//. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, Portland, 2011, pp 8–11.

132. Gusynin V. Aviation and Space Laboratory for Development of Hypersonic Technologies/ V. Gusynin, I.Serdyuk // Visnyk NAU.– Kiev, 2000, № 1-2, pp. 292-295.

133. Gusynin A. V. Estimate of accuracy of approximate solutions of non-linear boundary value problems by the multi-step differential transform method /

A. V. Gusynin, V. P. Gusynin, O. M. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. –K.: NAU, 2017. –№ 1. – pp. 48-54.

134. Gusynin A. V. The use of differential transformations for solving non-linear boundary value problems/ A. V. Gusynin, V. P. Gusynin, O. M. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. –K.: NAU, 2016. –№ 4. – pp. 44-55.

135. Gusynin A. V. Algorithm of guaranteed-and-adaptive control of aerostatic vehicle under undetermined external turbulences / A. V. Gusynin, O. M. Tachinina / Proceedings of the National Aviation University. –K.: NAU, 2014. –№ 4. – pp. 36-44.

136. Hung-i Bruce Tsai. Optimal trajectory designs and systems engineering analyses of reusable launch vehicles. A dissertation submitted to the graduate faculty in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. Iowa State University Ames, Iowa, 2003.– 319 p.

137. John R. Olds. Launch Vehicle Systems Analysis. Grant NAG8 -1302, NASA- Marshall Space Hight Center, January 27, 1999.–42 p.

138. Ledsinger, Laura A. Solutions to decomposed branching trajectories with powered flyback using multidisciplinary design optimization. Thesis. June, 2000.–162 p.

139. Liberzon, D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. — Birkhauser, Boston, 2003.

140. Lozino-Lozinsky G. Comparative analysis of reusable space transportation systems/ G. Lozino-Lozinsky, E. Dudar // Problems of mechanics and reliability of machines.– 1995, vol. 4., pp. 3–12. York, 1975.–448 p.

141. Mason J. Some optimal branched trajectories. National aeronautic and space administration, Washington, 1969.–62 p.

142. Michael W. On-line Trajectory Generation for Hypersonic Vehicles/ W. Michael, Daniel Allwine, and it.// Proceedings of the 2005 AIAA Guidance, Navigation,

143. Oliver Montenbruck. Satellite orbits: models, methods and applications. – Springer Verlag, 2011.–369 p.

144. Peter Friedrich Gath. CAMTOS - A Software Suite Combining Direct and Indirect Trajectory Optimization Methods. Institute fur Flugmechanik und Flugregelung Universityet Stuttgart, 2002.–172 p.
145. Richards M. A. Fundamentals of Radar Signal Processing. McGraw-Hill Education, 2014.– 472 p.
146. Sineglazov V.M. A new aproch in cluster analysis / V.M. Sineglazov, O.I. Chumachenko, V.S. Gorbatiuk // IEEE 4th International Conference, «Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments» (Kyiv, Ukraine, October, 17-19, 2017).– K.: NAU, 2017. – pp. 223-226.
147. Sineglazov V.M. Intelligent system for visual navigation/ V.M. Sineglazov, V. Ischenko // IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18-20, 2016).– K.: NAU, 2016. – pp. 7–11.
148. Tachinina O. M. Method of path constructing of information robot on the basis of unmanned aerial vehicle /O. M.Tachinina, O. I. Lysenko // Proceedings of the National Aviation University. –K.: NAU, 2017. –№ 4(73). – P. 60-68.
149. Tachinina O. M. Path constructing method of unmanned aerial vehicle/ Tachinina O. M., Lysenko O. I., Alekseeva I. V. // IEEE 4th International Conference, «Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments» (Kyiv, Ukraine, October, 17-19, 2017).– K.: NAU, 2017. – pp. 254-259.
150. Tachinina O. M. The scenario-based approach for control of multi-object dynamic system motion/ Tachinina O. M., Lysenko O. I. // IEEE 3rd International Conference, “Actual Problems of Unmanned Air Vehicles Developments” (Kyiv, Ukraine, october 13-15, 2015).– K.: NAU, 2015. – pp. 305-309.
151. Tachinina O. M.. The method of injection of earth remote monitoring subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on AN-124-100 and AN-225 airplanes / Tachinina O. M., Gusynin A., Lysenko O., Chumachenko S.// IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18-20, 2016).– K.: NAU, 2016. – pp. 200–205.

152. Tadeusz J. Masternak. Multi-objective trajectory optimization of a hypersonic reconnaissance vehicle with temperature constraints. Dissertation of the requirements for the degree of doctor of philosophy . Dayton, December 2014.–382 p.

153. Viorel Badescu. Optimal control in thermal engineering. –Technology & engineering, 2017.–588 p.

154. Windhorst R. Minimum Heating Reentry Trajectories for Advanced Hypersonic Launch Vehicles /R.Windhorst, R. Ardema, J. Bowles // AIAA-97-3535. 1997.

Наукове видання

ЛИСЕНКО Олександр Іванович,  
ТАЧИНІНА Олена Миколаївна,  
ПОНОМАРЕНКО Сергій Олексійович,  
ГУЙДА Олександр Григорович

# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗГАЛУЖЕНИХ ТРАЄКТОРІЙ

Монографія

Підписано до друку 20.12.2022. Формат 60x84/16.  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Цифровий друк.  
Ум. друк. арк. 15,11. Тираж 200 прим. Зам. № 2112-22.

Видавець і виготовлювач ТОВ «7БЦ»  
03087, м. Київ, вул. Олекси Тихого, 84  
e-mail: 7bc@ukr.net, тел: (044) 592-00-80  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №5329 від 11.04.2017