УДК 517.95

М.І. Сєров, С.В. Спічак, В.І. Стогній, І.В. Рассоха

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОЛМОГОРІВСЬКОГО ТИПУ

We consider Kolmogorov nonlinear equations with an arbitrary function. The group-theoretical method is one of the methods for solving partial differential problem. Using this method, we integrate equations with a non-trivial symmetry group. Therefore, group classification is high priority. Specifically, we conduct the group classification of Kolmogorov nonlinear equations. Using obtained continuous equivalence transformations, we present nonequivalent subclasses of these equations. We calculate maximum invariance algebras for all these subclasses. By employing the obtained subalgebras of invariance algebras for some nonlinear equations, symmetry is reduced to equations with a smaller number of independent variables. The reduced equations are integrated and exact solutions of the corresponding nonlinear equations are obtained.

Вступ

Нелінійні рівняння колмогорівського типу

$$u_t - u_{xx} - uu_y = f(u), \tag{1}$$

де

$u = u(t,x,y)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $f(u)$ — довільна гладка функція, трапляються в багатьох задачах фінансової математики і в теорії дифузійних процесів [1, 2].

Поширеним методом розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Лі, в основу якого покладено принцип симетрії. С. Лі першим застосував алгебру інваріантності диференціального рівняння для симетрійної редукції та знаходження його точних розв'язків. Оскільки теоретико-групові методи дають змогу інтегрувати диференціальні рівняння, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації диференціального рівняння з довільною функцією, яка дає змогу із заданого класу рівнянь виділити ті, що мають широкі симетрійні властивості.

Інтерес до групової класифікації рівнянь спостерігається вже понад п'ятдесят років, після того як Л.В. Овсянніков у статті [3] сформулював сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, запропонував метод її розв'язання і здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Детальний огляд публікацій із групової класифікації диференціальних рівнянь станом на середину 90-х рр. XX ст. наведено в довіднику [4]. Групову класифікацію еволюційних рівнянь у просторах вищої розмірності, ніж у двовимірному просторі—часі, розглянуто в працях [5—11].

Постановка задачі

Метою статі є: знайти неперервні перетворення еквівалентності нелінійних рівнянь колмогорівського типу (1); виділити нееквівалентні підкласи цих рівнянь; виконати групову класифікацію рівнянь; використовуючи деякі підалгебри алгебри інваріантності одного із підкласів досліджених рівнянь, зробити симетрійну редукцію і побудувати точні розв'язки.

Основна алгебра інваріантності

Визначимо основну алгебру інваріантності рівнянь (1), тобто знайдемо максимальну алгебру інваріантності рівняння (1) при довільній функції f.

Теорема 1. Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1) при довільній гладкій функції f є алгебра

$$A^{\mathrm{pr}} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle, \tag{2}$$

де $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі [12, 13].

З умови $\tilde{X}(Lu)\,|_{Lu=0} = 0$, де $\tilde{X}$ — продовження інфінітезимального оператора

$$X = \xi^0(t,x,y,u)\partial_t + \xi^1(t,x,y,u)\partial_x + \xi^2(t,x,y,u)\partial_y + \eta(t,x,y,u)\partial_u,$$

$$Lu = u_t - u_{xx} - uu_y - f(u),$$

одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення координат оператора X та функції f:

$$\xi^0_x = \xi^0_y = \xi^0_u = \xi^1_t = \xi^1_y = \xi^1_u = \xi^2_x =$$

$$= \xi^2_u = \eta_{ux} = \eta_{uu} = 0; \qquad (3)$$

$$\xi^0_t = 2\xi^1_x, \qquad (4)$$

$$\eta = (\xi^2_y - 2\xi^1_x)u - \xi^2_t, \qquad (5)$$

$$\eta \dot{f} = (\eta_u - 2\xi^1_x)f - \eta_y u + \eta_t - \eta_{xx}. \qquad (6)$$

З рівнянь (3)–(5) випливає, що

$$\xi^0 = \xi^0(t);\ \xi^1 = \xi^1(x);\ \xi^2 = \xi^2(t,y);$$

$$\eta = \alpha(t,y)u + \beta(t,y), \qquad (7)$$

а система (4)–(6) набуває вигляду

$$\xi^0_t = 2\xi^1_x;\ \ \alpha = \xi^2_y - 2\xi^1_x;\ \ \beta = -\xi^2_t, \qquad (8)$$

$$(\alpha u + \beta)\dot{f} = (\alpha - 2\xi^1_x)f - \alpha_y u^2 + (\alpha_t - \beta_y)u + \beta_t.$$

Оскільки функція f довільна, то розщепивши рівняння системи (6) за f і $\dot{f}$ одержимо такі рівності:

$$\begin{aligned} &\alpha u + \beta = 0; \alpha - 2\xi^1_x = 0, \\ &\alpha_y u^2 - (\alpha_t - \beta_y)u - \beta_t = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Врахувавши той факт, що α, β не залежать від змінної u, з (9) випливає, що $\alpha = \beta = 0$ і $\xi^1_x = 0$; тоді з системи (8) маємо

$$\xi^0_t = \xi^2_t = \xi^2_y = 0,$$

звідки

$$\xi^0 = c_1;\ \ \xi^1 = c_2;\ \ \xi^2 = c_3;\ \ \eta = 0, \qquad (10)$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

Оператор X з координатами (10) породжує алгебру (2).

Теорему доведено.

Основна група перетворень еквівалентності

Для дослідження симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливо знати перетворення еквівалентності цього класу, тобто такі перетворення змінних, які переводять будь-яке рівняння з класу (1) в деяке інше рівняння з цього самого класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів по одному представнику з найпростішим виглядом рівняння, які називаються канонічними рівняннями. Тоді досить дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь певного класу.

Дослідимо групу неперервних перетворень еквівалентності рівнянь (1), застосувавши метод, запропонований у працях [12, 13].

Теорема 2. Групою неперервних перетворень еквівалентності рівнянь (1) є група, яка задається перетвореннями

$$\begin{aligned} &\bar{t} = a_1^2 t + a_2;\ \bar{x} = a_1 x + a_3;\ \bar{y} = a_4 t + a_5 y + a_6; \\ &\bar{u} = \frac{1}{a_1^2}(a_5 u - a_4);\ \bar{f} = \frac{a_5}{a_1^4} f, \end{aligned} \qquad (11)$$

де $a_i (i = 1, ..., 6)$ довільні дійсні сталі, що задовольняють умову $a_1 > 0, a_5 > 0$.

Зауваження. Перетворення, отримані в теоремі 2, є тільки групою неперервних перетворень еквівалентності. Надалі цю групу будемо називати основною групою перетворень еквівалентності, а всі інші перетворення еквівалентності, які не входять до цієї групи, будемо називати додатковими.

Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності

Дослідимо, за яких значень функції f можливі розширення основної алгебри інваріантності.

Теорема 3. Якщо алгебра інваріантності рівняння (1) ширша порівняно з алгеброю (2), то функція $f(u)$ з точністю до перетворень основної групи еквівалентності (11) має один із таких виглядів:

$$\begin{aligned} &1)\ 0; \\ &2)\ \varepsilon u^m; \\ &3)\ \varepsilon u^2 + \gamma; \\ &4)\ \varepsilon e^u, \end{aligned} \qquad (12)$$

де $\varepsilon = \pm 1, \gamma = \pm 1$, m – довільна стала.

Доведення. Як показано в теоремі 1, рівняння (1) інваріантні відносно оператора X тоді і тільки тоді, коли функції $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \eta, f$ є розв'язками системи визначальних рівнянь (3)–(6) або з урахуванням (7) системи (8).

Для дослідження системи (8) застосуємо метод, використаний у працях [14, 15]. Оскільки функція f не залежить від змінних t, x, y, то з останнього рівняння системи (8) маємо

$$\alpha = k_1\varphi;\ \beta = k_2\varphi;\ \alpha - 2\xi^1_x = k_3\varphi; \qquad (13)$$
$$\alpha_y = -k_4\varphi;\ \alpha_t - \beta_y = -k_5\varphi;\ \beta_t = k_6\varphi;$$

де $\varphi = \varphi(t, x, y)$; $k_i (i = 1, ..., 6)$ — довільні сталі.

Тоді останнє рівняння системи (8) матиме вигляд

$$(k_1 u + k_2)\dot{f} = k_3 f + k_4 u^2 + k_5 u + k_6. \qquad (14)$$

Розглянемо всі можливі нееквівалентні випадки (з точністю до перетворень еквівалентності) рівняння (14).

I. $k_1 = 1, k_2 = 0$. Тоді $\beta = 0$ і $k_6 = 0$.

Нехай $k_3 = m \neq 1$, тоді із системи (13) випливає, що $k_4 = k_5 = 0$, і рівняння (14) матиме вигляд

$$u\dot{f} = mf,$$

розв'язками якого будуть функції

$$f = \lambda_1 u^m, \qquad (15)$$

де λ_1 — довільна стала. Використовуючи перетворення еквівалентності (11) для рівнянь (1) з функціями (15), отримаємо перший та другий випадки (12) цієї теореми.

Якщо $k_3 = 1$, з урахуванням розв'язків системи (13) випливає, що $k_5 = 0$, і розв'язуючи рівняння $u\dot{f} = f + k_4 u^2$, отримаємо $f = k_4 u^2 + \lambda_1 u$, λ_1 — довільна стала. Використовуючи перетворення еквівалентності для відповідних рівнянь (1), отримаємо функції, які відповідають третьому випадку (12).

II. $k_1 = 0, k_2 = 1$. У цьому випадку із системи (13) отримаємо $k_4 = 0$ і рівняння (14) для функції f має вигляд

$$\dot{f} = k_3 f + k_5 u + k_6. \qquad (16)$$

Якщо $k_3 = 0$, тоді із системи (13) $k_5 = 0$ і маємо розв'язок $f = k_6 u + \lambda_1$ (λ_1 — довільна стала). За допомогою перетворень еквівалентності (11) функція f зводиться до другого випадку (12).

Якщо $k_3 \neq 0$, тоді із системи (13) $k_5 = k_6 = 0$ і рівняння (16) набуде вигляду $\dot{f} = k_3 f$, звідки $f = \lambda_1 e^{k_3 u}$. Використовуючи перетворення еквівалентності, отримаємо функцію f, яка наведена в четвертому випадку (12) цієї теореми.

Теорему доведено.

Додаткові перетворення еквівалентності

Клас рівнянь (1) має й додаткові перетворення еквівалентності, які не входять до основної групи еквівалентності. Використовуючи їх, можна дещо спростити вигляд рівнянь, одержаних у теоремі 3.

Розглянемо рівняння з другого випадку теореми 3 при $m = 0$:

$$u_t - u_{xx} - uu_y = \varepsilon. \qquad (17)$$

Перетворення вигляду

$$\bar{t} = t;\ \bar{x} = x;\ \bar{y} = y + \frac{\varepsilon t^2}{2};\ \bar{u} = u - \varepsilon t,$$

яке є узагальненням перетворення (2.21) в [14], зводить рівняння (17) до рівняння

$$\bar{u}_{\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{u}\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} = 0.$$

Дискретним перетворенням

$$\bar{t} = t;\ \bar{x} = x;\ \bar{y} = -y;\ u = -u \qquad (18)$$

рівняння (1) з функцією $f(u)$ вигляду $-u^2$; $-u^2 + \gamma$ може бути зведене до рівняння з правою частиною $u^2; u^2 + \gamma$ відповідно.

Достатні умови розширення основної алгебри інваріантності

У теоремі 3 сформульовано лише необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності рівнянь (1). Наведемо достатні умови її розширення та відповідні максимальні алгебри інваріантності.

Теорема 4. Для того щоб максимальна алгебра інваріантності рівняння (1) була ширшою порівняно з алгеброю (2), необхідно і достатньо, щоб рівняння (1) мало один із нееквівалентних відносно перетворень (11) виглядів, записаних у першій колонці таблиці. Відповідні максимальні алгебри інваріантності наведено в другій колонці цієї таблиці.

Таблиця. Повна групова класифікація рівнянь (1)

Вигляд функції $f(u)$	Максимальна алгебра інваріантності
0	$A^{\mathrm{pr}};\ t\partial_y - \partial_u;$ $2t\partial_t + x\partial_x + 2y\partial_y,\ y\partial_y + u\partial_u$
εu	$A^{\mathrm{pr}};\ y\partial_y + u\partial_u;$ $e^{\varepsilon t}(\partial_y - \varepsilon\partial_u)$
u^2	$A^{\mathrm{pr}};\ 2t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u;$ $e^{-y}(\partial_y - u\partial_u);\ e^{-y}(t\partial_y - (tu+1))\partial_u$
u^2+1	$A^{\mathrm{pr}};$ $e^{-y}(-\sin t\partial_y + (\cos t + u\sin t)\partial_u);$ $e^{-y}(-\cos t\partial_y - (\sin t - u\cos t)\partial_u)$
u^2-1	$A^{\mathrm{pr}};$ $e^{-y}(-sht\partial_y + (cht + usht)\partial_u);$ $e^{-y}(-cht\partial_y + (sht + ucht)\partial_u)$
$\varepsilon u^m, m \neq 0;1;2$	$A^{\mathrm{pr}};$ $2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2(m-2)}{m-1}y\partial_y - \frac{2}{m-1}u\partial_u$
εe^u	$A^{\mathrm{pr}};$ $2t\partial_t + x\partial_x + 2(y+t)\partial_y - 2\partial_u$

Примітка. $A^{\mathrm{pr}} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle$, $\varepsilon = \pm 1$.

Симетрійні редукції і точні розв'язки

Одним із застосувань симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними є симетрійна редукція рівнянь із нетривіальною симетрією до рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних.

Розглянемо використання операторів алгебри інваріантності для симетрійної редукції та побудови точних розв'язків рівнянь вигляду (1) на прикладі рівняння (1) при $f(u) = 0$:

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0. \tag{19}$$

Як випливає з теореми 4, алгебра інваріантності рівняння (19) є шестивимірною алгеброю Лі з базисними операторами:

$$\partial_t;\ \partial_x;\ \partial_y;\ G = t\partial_y - \partial_u;$$

$$D_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2y\partial_y;\ D_2 = y\partial_y + u\partial_u.$$

Розглянемо оператор

$$\partial_x + \partial_y. \tag{20}$$

Виходячи з повного набору інваріантів оператора (20)

$$I_1 = t;\ I_2 = y - x;\ I_3 = u,$$

шукаємо інваріантний розв'язок у вигляді

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2);\ \omega_1 = t;\ \omega_2 = y - x. \tag{21}$$

Підставляючи (21) у вихідне рівняння (19), отримаємо відоме рівняння Бюргерса:

$$\varphi_{\omega_1} - \varphi_{\omega_2\omega_2} - \varphi\varphi_{\omega_2} = 0.$$

У праці [2] розглянуто задачу Коші для рівняння (1):

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0;\ u(0,x,y) = g(x,y). \tag{22}$$

Якщо вимагати, щоб розв'язки рівняння (19) і функція $g(x,y)$ були інваріантними відносно оператора (20), тобто $g = g(\omega_2)$, то розв'язок задачі Коші

$$\varphi_{\omega_1} - \varphi_{\omega_2\omega_2} - \varphi\varphi_{\omega_2} = 0,$$

$$\varphi(0,\omega_2) = g(\omega_2),$$

який має вигляд (див., наприклад, [16])

$$\varphi(\omega_1,\omega_2) = 2\frac{\partial}{\partial\omega_2}\ln G(\omega_1,\omega_2),$$

де

$$G(\omega_1,\omega_2) = $$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\omega_2-\xi)^2}{4\omega_1} - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} g(\tau)d\tau\right]d\xi,$$

приводить до розв'язків (21) задачі Коші (22).

Побудуємо інваріантний розв'язок рівняння (19), який відповідає операторам

$$\partial_y + \alpha\partial_x,\ \partial_x + G = \partial_x + t\partial_y - \partial_u,\ \alpha \neq 0. \tag{23}$$

На основі повного набору інваріантів операторів (23)

$$I_1 = t,\ I_2 = u - \frac{x - \alpha y}{\alpha t - 1}$$

шукаємо інваріантний розв'язок у вигляді

$$u = \frac{x - \alpha y}{\alpha t - 1} + \varphi(t).$$

Зробивши редукцію і розв'язавши редуковане рівняння, отримаємо такий інваріантний розв'язок:

$$u = \frac{x - \alpha y + c}{\alpha t - 1}, \qquad (24)$$

де c — довільна стала.

У праці [2] розглянуто точний розв'язок рівняння (1):

$$u = \frac{x + y}{1 - t}.$$

Цей розв'язок можна отримати з (24) при $c = 0$, $\alpha = 1$ і з використанням дискретних перетворень (18).

У випадку операторів

$$\partial_t + \partial_x;\ \partial_y + \beta\partial_x,\ \beta > 0$$

маємо підстановку

$$u = \varphi(\omega),\ \ \omega = \beta y + t - x,$$

яка зводить рівняння (19) до такого редукованого рівняння:

$$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi} + \beta\varphi\dot{\varphi} = 0.$$

Розв'язуючи це звичайне диференціальне рівняння, отримаємо інваріантні розв'язки рівняння (19) у вигляді трьох множин:

$$u = \frac{2}{\beta(\beta y + t - x + c_1)} + \frac{1}{\beta};$$

$$u = \frac{\sqrt{-1-2c\beta}}{\beta}\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\sqrt{-1-2c\beta}}{2}(\beta y + t - x) + c_1\right) + \frac{1}{\beta},$$

де c, c_1 — довільні сталі за умови $2c\beta + 1 < 0$;

$$u = \frac{-2\sqrt{1+2c\beta}}{\beta(c_1 e^{-\sqrt{1+2c\beta}(\beta y + t - x)} - 1)} + \frac{1-\sqrt{1+2c\beta}}{\beta},$$

$$2c\beta + 1 > 0,$$

де c, c_1 — довільні сталі за умови $c_1 > 0$, $2c\beta + 1 > 0$.

Висновки

У цій статті знайдено неперервні перетворення еквівалентності класу нелінійних рівнянь колмогорівського типу і зроблено групову класифікацію цих рівнянь, у результаті якої виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу, ніж основна алгебра інваріантності рівнянь класу (1). Також знайдені деякі додаткові перетворення еквівалентності, які не входять до основної групи еквівалентності. Використовуючи їх, вдалося спростити вигляд рівнянь, одержаних у теоремі 3. Для кількох конкретних рівнянь класу (1), з використанням деяких підалгебр відповідних алгебр інваріантності, зроблено їх симетрійну редукцію до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Отримані редуковані рівняння вдалося проінтегрувати та отримати інваріантні точні розв'язки розглянутих рівнянь.

Ми плануємо для рівнянь, які є представниками нееквівалентних підкласів (див. таблицю), зробити класифікацію всіх одновимірних і двовимірних підалгебр їх алгебр інваріантності. А далі, використовуючи інваріанти операторів цих підалгебр, провести симетрійну редукцію і знайти всі нееквівалентні інваріантні розв'язки.

1. *G. Citti et al.,* "On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance", Differential and Integral Equations, vol. 14, no. 6, pp. 701–738, 2001.
2. *A. Pascucci and S. Polidoro,* "On the Cauchy problem for a nonlinear Kolmogorov equation", SIAM J. Math. Anal., vol. 35, no. 3, pp. 579–595, 2003.
3. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С. 492–495.
4. *Handbok* of Lie Group Analysis of Differential Equations, N. Ibragimov, Ed. CRC Pres, 1994, vol. 1, 400 p.
5. *Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двухмерном и трехмерном случаях // Диференц. уравнения. – 1983. – **19.** – С. 1215–1223.
6. *R. Cherniha and J.R. King,* "Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I", J. Phys. A. Math. Gen., vol. 33, pp. 267–282, 2000.
7. *R. Cherniha and J.R. King,* "Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II", Ibid, vol. 36, pp. 405–425, 2003.
8. *R. Cherniha and J.R. King,* "Lie symmetries and conservation laws of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems with variable diffusivities", J. Appl. Math., vol. 71, pp. 391–408, 2006.
9. *E. Demetriou et al.,* "Group analysis of (2+1)- and (3+1)-dimensional diffusion-convection equations", J. Math. Anal. Appl., vol. 348, pp. 55–65, 2008.

10. *Нікітін А.Г., Попович Р.О.* Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1053–1060.
11. *A.G. Nikitin,* "Group Classification of Systems of Non-Linear Reaction-Diffusion Equations", Ukr. Math. Bull., vol. 2, no. 2, pp. 153–204, 2005.
12. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
13. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. – 360 с.
14. *R. Cherniha and M. Serov,* Symmetries, ansдtze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro J. Appl. Math., vol. 9, pp. 527–542, 1998.
15. *R. Cherniha et al.,* "Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations", J. Math. Anal. Appl., vol. 342, pp. 1363–1379, 2008.
16. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 лютого 2013 року