

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Навчально-науковий Інститут телекомунікаційних систем
Кафедра інформаційно-комунікаційних технологій та систем**

«На правах рукопису»
УДК 519.872

«До захисту допущено»
ВО завідувача кафедри
_____ МАРІЯ СКУЛИШ
«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка

**на тему: «Дослідження впливу властивості самоподібності трафіка на
якісні показники функціонування систем масового обслуговування»**

Виконав (-ла):

студент (-ка) II курсу, групи ТС-11мн

Сколець Анастасія Владиславівна _____

Керівник:

професор кафедри інформаційно-комунікаційних технологій та систем,

д.т.н., професор

Уривський Л. О. _____

Рецензент:

доцент кафедри інформаційно-комунікаційних технологій та систем,

к.т.н., доцент

Правило В.В _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць інших
авторів без відповідних посилань.

Студент (-ка) _____

Київ – 2023 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий Інститут телекомунікаційних систем
Кафедра інформаційно-комунікаційних технологій та систем

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою
 Спеціальність (освітня програма) – 172 «Телекомунікації та радіотехніка»
 («Системи та мережі електронних комунікацій»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

ВО завідувача кафедри

_____ МАРІЯ СКУЛИШ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Сколець Анастасії Владиславівни

1. Тема дисертації «Дослідження впливу властивості самоподібності трафіка на якісні показники функціонування систем масового обслуговування», науковий керівник дисертації Уривський Леонід Олександрович, професор, д.т.н., затверджені наказом по університету від «31» березня 2023 р. №1366-с
2. Термін подання студентом дисертації «15» травня 2023 р.
3. Об'єкт дослідження – дослідження СМО з заданим потоком подій і СМО з властивістю самоподібності.
4. Предмет дослідження – кількісні характеристики для забезпечення якості обслуговування СМО заданими параметрами і СМО з фактором самоподібності при тих самих вхідних показників.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити
 - Доведення необхідності врахування фактору самоподібності при порівнянні видів СМО в сучасних мережах.
 - аналіз теоретичного матеріалу, на основі якого буде здійснено розрахунок якісних характеристик СМО;

- формування математичної моделі для розрахунку якісних характеристик СМО;
- побудова графіків за отриманими результатами для порівняння систем масового обслуговування з заданими вхідними даними зі системою масового обслуговування з властивістю самоподібності;
- формулювання висновків за результатами дослідження та рекомендацій щодо практичного використання отриманих результатів.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу

Плакат №1 «Тема, мета, об'єкт та предмет дослідження магістерської роботи»

Плакат №2 «Завдання, що вирішуються у дослідженні»

Плакат №3 «Дослідженні якості обслуговування сучасних інформаційних систем з використанням моделей СМО»

Плакат №4 «Кількісні характеристики систем масового обслуговування, аналіз розподілу Пуассона, характеристики якості обслуговування, які відображені в формулах Літгла»

Плакат №5 «Аналіз особливостей моделей СМО із ознаками самоподібності»

Плакат №6 «Результати розрахунків і порівняльний аналіз традиційних СМО і СМО з властивістю самоподібністю»

Плакат №7 «Висновки по виконаній роботі»

7. Орієнтовний перелік публікацій

1. Уривський Л.О., Криклива А.В. Дослідження динаміки показників обслуговування в СМО із самоподібним трафіком / К.: ІТС КПІ ім. Ігоря Сікорського, XVI Міжнародна НТК «Перспективи телекомунікацій», /Збірник матеріалів. – 2022. - с.53-58.
2. Uryvsky L., Kryklyva A. Analysis of differences in characteristics in queuing systems with dynamics of input streams self-similarity / Information &Telecommunica-tion Sciences, № 1, 2022. - p.p. 22-26.

3. Уривський Л.О., Сколець А.В. Дослідження впливу фактору самоподібності на функціонування СМО трафіком / К.: ІТС КПІ ім. Ігоря Сікорського, XVII Міжнародна НТК «Перспективи телекомунікацій», /Збірник матеріалів. – 2023. - с. 68-71.

8. Дата видачі завдання 3.10.2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Обґрунтування актуальності дослідження впливу властивості самоподібності на якість обслуговування	01.11.2021 - 15.01.2022	Виконано
2	Аналіз показників якості обслуговування в СМО	15.01.2022	Виконано
3	Аналіз системи масового обслуговування з властивістю самоподібності	15.03.2022	Виконано
4	Розрахунок параметрів якості обслуговування для традиційних СМО і СМО з властивістю самоподібності.	15.04.2022	Виконано
5	Порівняльний аналіз параметрів систем масового обслуговування при різних видах розподілу	До 01.05.2023	Виконано
6	Оформлення результатів.	До 15.05.2023	Виконано

Студентка

Анастасія СКОЛЕЦЬ

Науковий керівник дисертації

Леонід УРИВСЬКИЙ

РЕФЕРАТ

Текстова частина дипломної роботи: 109 с., 21 рис., 37 табл., 36 джерела.

Актуальність роботи. Сучасна теорія масового обслуговування використовується в багатьох сферах діяльності. Новітні інформаційні технології виявили нові властивості потоків заявок і процедур в їх обслуговуванні, які узагальнено відображаються у властивості самоподібності трафіку. Тому на сьогоднішній день важливим моментом для аналізу параметрів щодо забезпечення якості обслуговування в системах масового обслуговування є використання властивості самоподібності, що визначає більш точні значення показників у порівнянні з аналізом параметрів при найпростішому потоці подій.

Метою роботи є теоретичне обґрунтування та кількісна оцінка розбіжностей в оцінці показників функціонування СМО з ознаками самоподібності у порівнянні із результатами їх розрахунків за допомогою традиційних математичних моделей з Пуасонівськими потоками.

Об'єктом дослідження є СМО з заданим потоком подій і з властивістю самоподібності.

Предметом дослідження є кількісні характеристики для забезпечення якості обслуговування традиційних СМО заданими параметрами і СМО з фактором самоподібності при тих самих вхідних показників.

В даній роботі вивчаються особливості впливу властивості самоподібності на параметри якості обслуговування в системах масового обслуговування.

В роботі проводиться розрахунок параметрів якості обслуговування в системах масового обслуговування при різних видах розподілу. На підставі отриманих результатів будуються графіки для порівняння значень, а також доводиться необхідність використання властивості самоподібності при розрахунку якісних параметрів в СМО. У висновках за результатами

дослідження формулюються рекомендації щодо практичного використання отриманих результатів.

Ключові слова: системи масового обслуговування, якість обслуговування, розподіл Пуассона, розподіл Вейбулла, властивості самоподібності, параметр Херста.

ABSTRACT

The master`s thesis consists of 109 pages, 21 figures, 37 tables and 36 references.

Actuality. Modern queuing theory is used in many fields. The latest information technologies have revealed new properties of request streams and procedures for their service, which are generalized in the property of self-similarity of traffic. Therefore, today an important point for the analysis of parameters to ensure the quality of service in queuing systems is the use of self-similarity, which determines more accurate values compared to the analysis of parameters in the simplest flow of events.

The purpose of this work is the theoretical justification and quantitative assessment of discrepancies in the assessment of indicators of the functioning of the QS with signs of self-similarity in comparison with the results of their calculations using traditional mathematical models with Poisson flows.

The object of research is queuing systems with a given flow of events and queuing systems with the property of self-similarity.

The subject of the study is the quantitative characteristics to ensure the quality of service of traditional queuing systems with the specified parameters and queuing systems with self-similarity factor at the same input indicators.

This graduate work investigates the features of the influence of self-similarity properties on the parameters of service quality in queuing systems.

Author the work also carried out the calculation the parameters of service quality in queuing systems with different types of distribution. Based on the results obtained, graphs are constructed to compare values, and the necessity of using the self-similarity property when calculating qualitative parameters in the queuing systems. In the conclusions based on the research results, recommendations are formulated regarding the practical use of the obtained results.

Key words: queuing systems, quality of service, Poisson distribution, Weibull distribution, self-similarity properties, Hirst parameter.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	12
ВСТУП.....	14
1 ОБҐРУНТУВАННЯ АКТУАЛЬНОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВЛАСТИВІСТЮ САМОПОДІБНОСТІ.	16
1.1 Аналіз особливостей використання моделей СМО	16
1.2 Дослідження прояву властивостей самоподібності в сучасних інформаційних системах	23
1.3 Мета і постановка завдання дослідницької роботи	28
Висновки до розділу 1	30
2 ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДМІННОСТЕЙ ВХІДНИХ ПОТОКІВ СМО ІЗ ВЛАСТИВІСТЮ САМОПОДІБНОСТІ.....	32
2.1 Аналіз відмінностей розподілів вхідних потоків СМО для опису властивості самоподібності.....	32
2.2 Аналіз властивостей розподілу Парето для опису властивості самоподібності.....	34
2.3 Аналіз властивостей розподілу Вейбулла для опису властивості самоподібності.....	41
2.4 Порівняння розподілів з «важкими хвостами» для опису властивості самоподібності.....	44
Висновки до розділу 2	50
3 ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК СМО З ВІДСУТНІСТЮ ТА НАЯВНІСТЮ ОЗНАК САМОПОДІБНОСТІ	54
3.1 Доведення асимптотичності розподілу Пуассона та розподілу Вейбулла в математичній моделі для розрахунку показників СМО	54

3.2	Опис базової математичної моделі для розрахунку показників СМО з розподілом Вейбулла	57
	Висновки до розділу 3	59
4	АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВЛАСТИВОСТІ САМОПОДІБНОСТІ ТРАФІКУ НА ЯКІСНІ ПОКАЗНИКИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СМО	60
4.1	Обґрунтування базисного набору показників функціонування СМО, суттєвого для аналізу прояв властивостей самоподібності	60
4.2	Порівняння кількісних значень показників базисного набору для аналізу прояв властивостей самоподібності	62
4.2.1	Аналіз показника середнього часу перебування заявки в системі.....	67
4.2.2	Аналіз показника середнього часу очікування заявки в черзі.....	71
4.2.3	Аналіз показника середньої довжини черги заявок.....	76
4.2.4	Аналіз показника середньої кількості заявок в системі	80
4.3	Узагальнений аналіз розглянутих показників	84
4.4	Рекомендації щодо врахування властивості самоподібності при визначенні якісних показників функціонування сучасних інформаційних систем	85
	Висновки до розділу 4	87
	ВИСНОВКИ.....	89
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	96
	ДОДАТОК А.....	100
	ДОДАТОК Б	102
	ДОДАТОК В	104
	ДОДАТОК Г	106

ДОДАТОК Д.....	108
----------------	-----

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

СМО	- Системи масового обслуговування;
QoS	- Quality of Service;
p_n	- ймовірність, що в системі знаходиться n запитів;
q	- ймовірність того, що запит, який надходить, буде втрачений;
s	- кількість каналів обслуговування;
λ	- інтенсивність надходження заявок в систему;
μ	- інтенсивність обслуговування;
ρ	- інтенсивність навантаження;
p_0	- ймовірність, що канал вільний;
p_1	- ймовірність, що канал канал зайнятий (черги немає);
p_2	- ймовірність, що канал канал зайнятий (одна заявка в черзі);
p_k	- ймовірність, що канал канал зайнятий ($k - 1$ заявок стоїть у черзі);
Q	- середня кількість заявок в СМО;
L	- середня довжина черги;
$W_{\text{сист}}$	- середній час перебування заявки в системі;
$W_{\text{оч}}$	- середній час очікування в черзі;
m	- математичне очікування;
σ^2	- дисперсія;
$R(k)$	- кореляційна функція;
$r(k)$	- коефіцієнт кореляції;
$N(T)$	- число подій досліджуваного потоку, що настали в інтервалі T ;
α	- параметр форми кривої розподілу;
H	- параметр Херста;
β	- параметр розподілу;
$\bar{t}_H$	- середнє значення інтервалу між надходженням чергових пакетів;
$\overline{t_{\text{обсл}}}$	- середній час обслуговування одного пакета в обслуговуючому

пристрої;

$C_{t_n}^2$ - квадратичний коефіцієнт варіації інтервалів надходження між пакетами вхідного потоку;

$C_{t_{\text{обсл}}}^2$ - квадратичний коефіцієнт варіації інтервалів надходження між тривалістю обслуговування пакетів у вузлі комутації;

$\Gamma(k)$ - гама-функція Ейлера;

ПЛС (F) - перетворення Лапласа-Стільтєса.

ВСТУП

У наш час глобальні мережі поширені повсюдно і складаються з кількох взаємопов'язаних серверів (або вузлів). Розробка та ефективність динамічних систем, призначених для обслуговування кількох клієнтських запитів, вивчається в рамках теорії масового обслуговування.

Загалом системи масового обслуговування (СМО) характеризується процесом надходження (який визначається часом між надходженнями), часом обслуговування, кількістю серверів (або каналів), розміром буфера та правилами черги. Загальний випадок системи масового обслуговування з традиційним аналітичним описом – це система з пуассонівським процесом надходження та експоненціально розподіленим часом обслуговування.

Проте в багатьох дослідженнях розглянуто, чому мережеві надходження не можуть бути точно змодельовані традиційним процесом Пуассона, так як однією з ознак сучасних телекомунікаційних мереж є властивість самоподібності, через що в мережі на різних випадкових інтервалах часу виникають пульсації навантаження, які можуть призводити до великих затримок та втрат пакетів, якщо в мережі заздалегідь не будуть здійснені певні заходи щодо забезпечення якості обслуговування. Тому при обслуговуванні пакетного трафіку особлива увага приділяється підтримці характеристик якості обслуговування QoS (Quality of Service).

Метою роботи є теоретичне обґрунтування та кількісна оцінка розбіжностей в оцінці показників функціонування СМО з ознаками самоподібності у порівнянні із результатами їх розрахунків за допомогою традиційних математичних моделей з Пуассонівськими потоками.

В першому розділі здійснюється постановка завдання і задачі, які необхідно виконати в магістерській роботі, а також розглядається теоретична база СМО.

В другому розділі розглядається порівняння СМО з розподілом Паретто та Вейбула, для вибору адекватного розподілу для опису властивості самоподібності в системах масового обслуговування, так як вказані розподіли описуються «важкими хвостами» (кореляційними ознаками), які притаманні самоподібності.

В третьому розділі представляється модель розрахунку та порівняння характеристик якості обслуговування при розподілі Пуассона і вибраного адекватного розподілу між Парето і Вейбула. Оскільки ступінь самоподібності визначається параметром Херста, то порівняння здійснюється при різних значеннях параметру H (Херста), а саме в інтервалі значень $0,5 \dots 0,8$.

В четвертому розділі здійснюється аналіз отриманих значень. За результатами дослідження формулюються рекомендації щодо практичного використання отриманих результатів.

Загальний підсумок магістерської дипломної роботи полягає у формуванні висновків щодо отриманих залежностей при відповідних параметрах Херста та доведення важливості врахування властивості самоподібності при розрахунках традиційних характеристик в сучасних СМО.

1 ОБҐРУНТУВАННЯ АКТУАЛЬНОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВЛАСТИВІСТЮ САМОПОДІБНОСТІ

1.1 Аналіз особливостей використання моделей СМО

Існує широкий клас дискретних динамічних систем, які отримали загальну назву "системи масового обслуговування" (СМО). Процеси у СМО, як правило, складні і найчастіше випадкові. Але необхідність їх моделювання постійно зростає, оскільки інтернет трафік, без якого немислиме сучасне інформаційне суспільство, є типовим представником СМО.

Системи масового обслуговування - це такі системи, в які у випадкові моменти часу надходять заявки (запити, вимоги) на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

З позиції моделювання процесу масового обслуговування ситуації, коли утворюються черги заявок (вимог) на обслуговування, виникають таким чином.

Надійшовши в систему обслуговування заявка приєднується до черги інших (які раніше надійшли) вимог. Канал обслуговування вибирає заявку з тих, що знаходяться в черзі, для того, щоб приступити до її обслуговування. Після завершення процедури обслуговування чергової вимоги канал обслуговування приступає до обслуговування наступної заявки, якщо така є в черзі. Цикл функціонування системи масового обслуговування подібного роду повторюється багаторазово протягом усього періоду роботи системи обслуговування. При цьому передбачається, що перехід системи на обслуговування чергової вимоги після завершення обслуговування попередньої вимоги відбувається миттєво, у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть служити:

- а) інтернет трафік;

б) сервери, що обслуговують заявки робочих станцій на інформацію або сервіс;

в) телефонні станції тощо.

Зауважимо, що саме на основі задач оптимізації кількості операторів телефонних комутаторів на початку XX сторіччя данським математиком Агнером Крарупом Ерлангом [1] започаткована теорія масового обслуговування - «Теорія ймовірностей і телефонні переговори». Наразі актуальність теорії масового обслуговування різко зросла, оскільки вона надає основний апарат для розрахунку параметрів СМО.

Основними компонентами системи масового обслуговування будь-якого вигляду є:

- а) вхідний потік вимог, що надходять на обслуговування;
- б) дисципліна черги;
- в) механізм обслуговування.

За кількістю каналів СМО поділяють на:

- а) одноканальні;
- б) багатоканальні, коли система містить S каналів, призначених для одночасного обслуговування декількох запитів.

Залежно від обмежень, що накладаються на довжину черги, розрізняють:

- а) СМО з обмеженою довжиною черги. При цьому запити, що надходять на вхід системи, коли черга заповнена, вважаються втраченими (СМО з втратами). Окремим випадком є СМО, для яких черга неприпустима;
- б) СМО з необмеженою довжиною черги. При цьому запити знаходяться в стані очікування до тих пір, поки не звільниться якийсь з каналів.

Залежно від усталеного порядку (дисципліни) обслуговування, розрізняють:

- а) СМО з пріоритетним обслуговуванням O_i ($i=1,2,..$) - чим більше i , тим менший пріоритет;

б) СМО з дисципліною «першим надійшов - першим обслуговується» (справедлива дисципліна), а також

- в) прийшов останнім - обслуговується першим;
- г) випадковий відбір заявок;
- д) обмеження часу очікування моменту настання обслуговування.

Усі показники якості обслуговування систем можна умовно розділити на три види.

а) Ймовірнісні характеристики:

- 1) p_n - ймовірність того, що в системі знаходиться n запитів;
- 2) q - ймовірність того, що запит, який надходить, буде втрачений.

б) Моментні характеристики:

- 1) середня кількість запитів у системі –

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n; \quad (1.1)$$

- 2) середня кількість запитів у черзі –

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} (n - s) \cdot p_n; \quad (1.2)$$

де s - кількість каналів обслуговування;

- 3) середня кількість запитів, що обслуговуються у системі –

$$\bar{j} = \sum_{n=0}^s n \cdot p_n; \quad (1.3)$$

- 4) середня кількість вільних каналів –

$$\bar{r} = \sum_{n=0}^s (n - s) \cdot p_n; \quad (1.4)$$

- 5) середній час очікування у черзі –

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau \cdot dF(\tau), \quad (1.5)$$

де $F(\tau)$ - функція розподілу часу очікування у черзі;

б) середня тривалість перебування запиту у системі –

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} T \cdot dG(T), \quad (1.6)$$

де $G(T)$ - ймовірність того, що тривалість перебування в системі менша або дорівнює T .

в) Економічні характеристики якості обслуговування найчастіше подаються у вигляді узагальненого критерію, який враховує збитки, до яких призвели простої каналів та очікування запитів [2].

Розглянемо досліджувану систему, тобто одноканальну СМО з очікуванням без обмеження на довжину черги, тобто нескінченну.

Система масового обслуговування має один канал. Вхідний потік заявок на обслуговування - найпростіший потік з інтенсивністю λ . Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює μ (тобто в середньому безперервно зайнятий канал видаватиме μ обслужених заявок за одиницю часу). Тривалість обслуговування – це випадкова величина, яка підпорядкована експоненціальному закону розподілу. Потік обслуговувань є найпростішим, тобто пуассонівським потоком подій. Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу і чекає обслуговування. Дана система може вмістити будь яку кількість заявок, так як $N \rightarrow \infty$ (довжина черги). Тобто на чергу не накладено ніяких обмежень: ні на довжину черги, ні на час перебування заявки в черзі. Оскільки черга немає обмежень по черзі, система має нескінченну кількість станів [2].

Граф станів СМО в цьому випадку має вигляд, зображений на рисунку 1.1

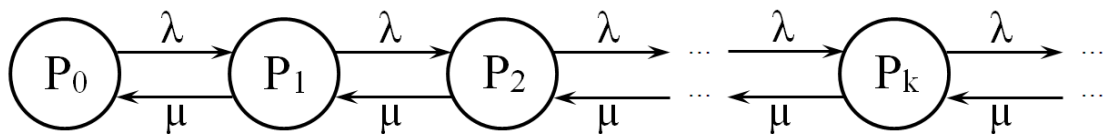


Рисунок 1.1 – Одноканальна СМО без відмов

Стани СМО мають нижчевказану інтерпретацію:

P_0 - канал вільний;

P_1 - канал зайнятий (черги немає);

P_2 - канал зайнятий (одна заявка стоїть у черзі);

P_k - канал зайнятий ($k - 1$ заявок стоїть у черзі), де k – номер стану.

Інтенсивність потоку заявок (λ) не залежить ні від стану каналу обслуговування (вільний, зайнятий), ні від числа заявок, що перебувають у черзі, тому перехід від будь-якого стану P_k до стану P_{k+1} , який відбувається під впливом потоку заявок, відбувається з постійною інтенсивністю, рівної інтенсивності потоку заявок (з інтенсивністю λ). Канал обслуговування один, інтенсивність його звільнення після обслуговування чергової заявки дорівнює інтенсивності потоку обслуговувань і не залежить від кількості заявок у черзі. Як тільки канал звільниться, найближча заявка з черги надходить у канал обслуговування, черга зменшується однією заявкою, тобто система перетворюється зі стану P_k у стан P_{k-1} . Отже, перехід із будь-якого стану P_k у стан P_{k-1} відбувається з постійною інтенсивністю, що дорівнює інтенсивності потоку обслуговувань, тобто з інтенсивністю μ .

Система працює за схемою процесу гибелі та розмноження. Вважаючи, що граничні можливості станів системи існують, скористаємося формулами цієї схеми. Запишемо вираз для p_0 :

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^3}{\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1} \\ &= (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

В дужках стоїть геометрична прогресія зі знаменником $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Така прогресія матиме кінцеву суму, тобто буде схожою, якщо її знаменник менше одиниці. Таким чином, гранична ймовірність p_0 стану P_0 існує за умови $\rho < 1$. За формулою суми безмежно спадної геометричної прогресії маємо [3]

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^k + \dots = \frac{1}{1 - \rho} \quad (1.8)$$

Нескінченно спадною геометричною прогресією називають таку геометричну прогресію (b_n) , у якій знаменник $|q| < 1$ і яка містить нескінченне число доданків.

Сума нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою [4].

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (1.9)$$

В нашому випадку

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho/(1 - \rho)} = 1 - \rho \quad (1.10)$$

Відповідно, граничні ймовірності інших станів системи знайдемо за формулами

$$p_1 = \rho \cdot p_0, p_2 = \rho^2 \cdot p_0, p_3 = \rho^3 \cdot p_0, \dots, p_k = \rho^k \cdot p_0, \dots \quad (1.11)$$

Підставляючи знайдене значення $p_0 = 1 - \rho$, отримаємо [2, 3]

$$p_1 = \rho(1 - \rho), p_2 = \rho^2(1 - \rho), p_3 = \rho^3(1 - \rho), \dots, p_k = \rho^k(1 - \rho), \dots \quad (1.12)$$

Умова нормування в нормі:

$$\sum_{i=0}^N P_i = (1 - \rho) \cdot \left(1 + \frac{\rho}{(1 - \rho)}\right) = 1 \quad (1.13)$$

Як основними показниками якості обслуговування найбільш зручно в обчислювальному сенсі використовувати середній час очікування, середній час перебування заявки в системі, середню довжину черги та середню кількість заявок в системі, які виступають в ролі показників своєчасності обслуговування трафіку.

Характеристики одноканальної СМО з очікуванням, без обмеження на довжину черги [5, 6, 7]:

а) середня кількість заявок що знаходяться в системі заявок на обслуговування:

$$Q = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (1.14)$$

б) середня довжина черги, тобто заявки, які очікують на обслуговування:

$$L = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (1.15)$$

в) середня тривалість перебування заявки в системі:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)} \quad (1.16)$$

г) середня тривалість очікування заявки в черзі:

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)} \quad (1.17)$$

У загальному випадку час передачі (обслуговування) може мати довільний розподіл, зокрема, «з довгим хвостом», характерним для самоподібних випадкових процесів. Однак на практиці у зв'язку з підвідомчою, тобто внутрішньосистемною роллю даного параметра в телекомунікаційній мережі, яка може ним керувати або, принаймні, достатньо точно його прогнозувати, у більшості математичних моделей навіть із самоподібним вхідним трафіком допускається час обслуговування вважати детермінованим (D – Deterministic) або розподіленим за експонентним (характерним для пуассонівського або марківського випадкового процесу) закону (M - Markovian).

Інша складова частина часу затримки – це час очікування початку обслуговування, з одного боку, залежить від зазначеного вище часу обслуговування, а з іншого боку, безпосередньо пов'язана з характеристиками вхідного потоку заявок (зокрема, з його інтенсивністю λ), а отже, насамперед «відчуває на собі» вплив усіх проявів властивості самоподібності.

Отже, класична пуассонівська модель трафіку, яка використовується при проектуванні мережевих протоколів, не відображає реальної дійсності: дані реального мережевого трафіку мають властивість самоподібності.

1.2 Дослідження прояву властивостей самоподібності в сучасних інформаційних системах

Останнє десятиліття ознаменувалося істотним досягненням у сфері теорії телетрафіку – відкриттям самоподібних властивостей процесів, що протікають у мережах передачі.

Вперше про самоподібний телетрафік заговорили з моменту його відкриття в 1993 році групою вчених W.Leland, M.Taqqu, W.Willinger і D.Wilson [8], які досліджували Ethernet-трафік у мережі корпорації Bellcore і виявили, що на великих масштабах він має властивість самоподібності.

Постійне використання комп'ютерних мереж прогресує з динамічним зростанням. Мережеві додатки примножуються, і зокрема, соціальні мережі не припиняють розвиватися. Таке швидке зростання в основному пов'язане з популяризацією використання комп'ютерів, мобільних телефонів і легкого доступу до Інтернету. Передача даних аудіо та відео через такі мережі представляють вимоги, які змінюються з часом, і потребують диференційованих послуг (високошвидкісних даних, резервування смуги каналів і пріоритетного трафіку для аудіо або відео), що створює трафік з високою швидкістю та великою варіабельністю. Знання про саму природу та поведінку мережевого трафіку є фундаментальною вимогою для проектування, експлуатації та обслуговування мереж, що вимагає виконання кількох дій, серед яких можна виділити:

а) Розмір ресурсів: фундаментальна діяльність з проектування та обслуговування. Розміри ресурсів спрямовані на кваліфікацію та кількісну оцінку встановлених мережевих компонентів (типовими прикладами для визначення розміну є канал зв'язку та розподіл буферів вузлів конкуренції, таких як маршрутизатори та комутатори).

б) Якість обслуговування (QoS): підтримка якості обслуговування мережі завжди є проблемою, і прогнозування пікового використання залишається вирішальним для прийняття рішення про те, які коригувальні заходи можна вжити.

в) Розробка протоколу: як основа для роботи мережі, адекватність протоколів до типу мережевого трафіку є важливою. У цьому випадку розробка та впровадження нових політик для контролю потоку та перевантаження є ключовою частиною процесу [9].

Сервіс соціальних мереж представляє собою складну систему розподілу трафіку між тисячами серверів і мільйонами користувачів. Отже соціальні мережі є прикладом сучасної інформаційної системи з самоподібністю.

Самоподібність в Інтернет-трафіку виникає, коли пакети з однаковою довжиною надходять на сервер одночасно або з однаковим інтервалом між надходженнями.

Херст [10] був першим, хто визначив самоподібність, яка зараз визнається присутньою в багатьох процесах, що пояснюють природні та штучні події.

Популярність можна простежити до досліджень, які продемонстрували самоподібний характер Інтернет-потoku та підкреслили важливість розуміння поведінки трафіку в точках агрегації мережі в світлі самоподібності.

Неформально самоподібний процес можна визначити як випадковий процес, статистичні характеристики якого виявляють властивості масштабування. Самоподібний процес суттєво не змінює вигляду при розгляді у різних масштабах за шкалою часу. Зокрема, на відміну від процесів, що не мають даних властивостей, не відбувається швидкого «згладжування» процесу при усередненні за шкалою часу – процес зберігає схильність до сплесків.

Нехай $\{X_k; k = 0; 1; 2; \dots\}$ – стаціонарний випадковий процес. Враховуючи стаціонарність та припущення про існування та кінцівки двох перших моментів, введемо позначення:

$$m = E[X_t] \quad (1.18)$$

де (1.18) – середнє значення, або математичне очікування;

$$\sigma^2 = E[X_t - m]^2 \quad (1.19)$$

де (1.19) – дисперсія;

$$R(k) = E[(X_{t+k} - m)(X_t - m)] \quad (1.20)$$

де (1.20) – кореляційна функція;

$$r(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \frac{R(k)}{\sigma^2} \quad (1.21)$$

де (1.21) – коефіцієнт кореляції.

При моделюванні мережного трафіку значення X_k інтерпретуються як число пакетів, що надійшли до мережі або каналу протягом k -го інтервалу часу. Початковий процес при цьому вже є усередненим. У деяких випадках, коли необхідно уникнути такого початкового усереднення, розглядається точковий процес, або потік подій, тобто послідовність моментів надходження одиничних пакетів до мережі.

Випадковий процес $X(t)$ є самоподібним з параметром Херста H , якщо $X(t)$ та $a^{-H}Z(at)$ мають ідентичні кінцеві розподіли ймовірностей для всіх $a > 0$.

Основною мірою ступеня самоподібності трафіку є показник Херста H , який може набувати значень в інтервалі від 0,5 (мінімальний ступінь самоподібності, тобто фактично його відсутність) до 1 (максимальний ступінь самоподібності, який на практиці не зустрічається). Що ближче цей параметр до одиниці, то яскравіше проявляються самоподібні властивості [11].

Ознаки самоподібності описують різні аспекти даного поняття та допомагають розуміти, як самоподібні системи працюють і як їх можна моделювати. Основними ознаками самоподібності є:

а) Асимптотика: Асимптотика є характеристикою самоподібності, яка описує поведінку системи на границі нескінченності. Наприклад, під час аналізу

складних функцій або розглядування поведінки систем на великих масштабах може виникнути необхідність вивчити їх асимптотичну поведінку [12].

б) Подібність: Подібність є однією з найважливіших ознак самоподібності, яка описує властивість систем, що схожі на самі себе в різних масштабах. Такі системи можна описати математичними формулами або моделями, що мають однакові закономірності на різних рівнях деталізації [13].

в) Внутрішня кореляція: Внутрішня кореляція є ще однією ознакою самоподібності, яка описує стаціонарний процес, де значення сигналу на різних часових шкалах є корельованими. Це означає, що значення на довших шкалах пов'язані зі значеннями на коротших шкалах [10].

Прикладом процесу, які має властивості подібності, але не має властивості внутрішньої кореляції є «білий шум». «Білий шум» має одну з ознак самоподібності, яка описує стаціонарний процес, де частотні складові мають рівномірний спектральний розподіл. Це означає, що кожна частота в спектрі має однаковий внесок до сигналу. Але «білий шум» характеризується незалежністю між сусідніми значеннями [14].

Самоподібні процеси мають ряд властивостей, що істотно відрізняють їх від потоків, що розглядаються в класичній теорії телетрафіку.

а) Довготривала залежність.

Самоподібні процеси мають гіперболічно загасаючий коефіцієнт кореляції виду

$$r(k) = \frac{1}{2} \cdot ((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}) \quad (1.22)$$

або, для асимптотично самоподібних процесів, кореляційна функція

$$R(k) \approx k^{2H-2} \cdot L(t) \text{ при } k \rightarrow \infty \quad (1.23)$$

де $L(t)$ – функція, що повільно змінюється до нескінченності (тобто

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$ для всіх $x > 0$). Отже, кореляційна функція є несумованою – ряд, утворений послідовними значеннями кореляційної функції, розходиться. Ця

властивість характеризує практично всі самоподібні процеси та відрізняє їх від процесів без довготривалої залежності, у яких кореляційна функція зменшується за показовим законом і підсумовується.

Довготривала залежність є причиною яскраво виражених пульсацій процесу, проте дозволяє говорити про деяку передбачуваність у невеликих межах часу. З погляду теорії черг, важливим наслідком корельованості потоку є неприйнятність оцінок параметрів черги, що ґрунтуються на припущенні про однаковий та незалежний розподіл інтервалів у вхідному потоці.

б) Повільно спадаюча дисперсія.

При усередненні процесу дисперсія вибіркового середнього згасає повільніше, ніж величина, обернена до розміру вибірки, за законом:

$$\sigma^2(X^{(m)}) \propto m^{2H-2}, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (1.24)$$

у той час як для традиційних стаціонарних випадкових процесів

$$\sigma^2(X^{(m)}) = \frac{1}{m} \cdot \sigma^2(X) \quad (1.25)$$

тобто зменшується обернено пропорційно обсягу вибірки.

Властивість дисперсії, що повільно зменшується, говорить про можливість істотних, не згладжуваних усередненням, «викидів» у випадковому процесі, і пов'язує самоподібність з таким поняттям, як розподіли з важкими хвостами. Важливий наслідок властивості повільно загасаючої дисперсії полягає в тому, що у разі класичних статистичних тестів загальноприйнятий захід середньоквадратичного відхилення σ є помилковим.

З цією властивістю пов'язана і «нехарактерна» поведінка індексу дисперсії, або індексу розкиду для відліків процесу, так званого фактором Фано. Відлік процесів визначається як відношення дисперсії числа подій на заданому часовому інтервалі T до математичного очікування цієї величини:

$$F(T) = \frac{\text{Var}[N(T)]}{E[N(T)]} \quad (1.26)$$

де $N(T)$ - число подій досліджуваного потоку, що настали в інтервалі T .

Для самоподібних процесів логарифм індексу розкиду $F(T)$ лінійно зростає [11]:

$$\ln[F(T) - 1] = (2H - 1) \ln T + y. \quad (1.27)$$

1.3 Мета і постановка завдання дослідницької роботи

Системи масового обслуговування (СМО) є дуже актуальними в телекомунікаційній галузі на сьогоднішній день, оскільки зростає кількість користувачів. А велика кількість клієнтів та різноманітність їх запитів та проблем можуть приводити до очікування в черзі, затримок у виконанні запитів.

Через специфіку характеру трафіку, що генерується в таких системах мають властивість самоподібності. Отже дослідження СМО з властивістю самоподібності на сьогоднішній день стає все більш актуальною, так як самоподібний трафік є все більш поширеним явищем в сучасних мережах, включаючи мережі зв'язку, Інтернет, соціальні мережі та хмарні сервіси.

Розглядаючи соціальні мережі, які є важливим засобом комунікації та обміну інформацією між користувачами, що мають самоподібний трафік може відрізнятися від класичного трафіку, який приймається для проектування систем масового обслуговування. Так, властивості самоподібності можуть викликати затримки у передачі повідомлень, збільшення навантаження на сервери та інші проблеми, які не спостерігаються при роботі з класичним трафіком.

Метою роботи є теоретичне обґрунтування та кількісна оцінка розбіжностей в оцінці показників функціонування СМО з ознаками самоподібності у порівнянні із результатами їх розрахунків за допомогою традиційних математичних моделей з Пуасонівськими потоками.

Тобто дослідження властивостей самоподібності трафіку та аналіз впливу самоподібного трафіку на якісні показники функціонування систем масового обслуговування, таких як час очікування, час перебування в системі, довжина черги та кількість заявок в системі.

Для досягнення цієї мети необхідно виконати наступні завдання:

а) Вивчити теорію систем масового обслуговування та її основні показники.

б) Проаналізувати теоретичні аспекти самоподібної поведінки трафіка і його властивості. Порівняти розподіли з «важкими хвостами», що є методом дослідження самоподібності, який базується на порівнянні характеристик розподілів різних параметрів системи, а саме: розподіл Вейбулла і розподіл Паретто.

в) Розробити математичну модель системи масового обслуговування для найпростішого потоку та з урахуванням властивостей самоподібного трафіку для подальшого порівняння.

г) Порівняти результати функціонування системи масового обслуговування з врахуванням і без врахуванням властивостей самоподібності трафіка.

д) Аналізувати отримані результати та зробити висновки щодо впливу властивостей самоподібного трафіку на якісні показники функціонування систем масового обслуговування.

Результати дослідження можуть бути корисними для практичного застосування в області проектування, розробки більш ефективних інформаційних систем масового обслуговування, що забезпечить зменшення часу очікування користувачів на отримання послуг, підвищення якості обслуговування та оптимізації систем масового обслуговування.

Висновки до розділу 1

1. Згідно з поставленим завданням роботи, в першому розділі розглянуто та виконано пункт: вивчення теорії систем масового обслуговування та її основні показники.

За підсумком розгляду цього пункту зазначено, що системи масового обслуговування – це такі системи, в яких у випадкові моменти часу надходять заявки на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування. Започаткована теорія масового обслуговування данським математиком Агнером Крарупом Ерлангом, на основі задач оптимізації кількості операторів телефонних комутаторів ще на початку XX сторіччя.

На основі аналізованої літератури, розглянуто одноканальну СМО без обмежень на довжину черги та описано граф станів даної системи.

Характеристиками СМО, які досліджуються в роботі: середній час очікування заявок у черзі, середній час перебування заявок в системі, довжина черги, середня кількість заявок в системі.

2. Згідно з завданням до роботи, в даному розділі розглянуто та виконано наступний пункт: аналіз теоретичних аспектів самоподібної поведінки трафіка і його властивості.

Використання комп'ютерних мереж стали надзвичайно поширеними і це пов'язано зі збільшенням кількості мережевих додатків, зокрема соціальних мереж. Зі зростанням кількості користувачів і об'єму передачі даних в мережі збільшується навантаження на систему, що може призвести до погіршення якості обслуговування. З появою нових технологій та послуг, є вимоги до розробки нових ефективних методів управління мережевим навантаженням та оптимізації СМО.

Отже, дослідження та оптимізація СМО є важливим елементом розвитку телекомунікаційних мереж у сучасному світі.

3. Значним досягненням в теорії телетрафіку є відкриття самоподібних властивостей процесів, що протікають у мережах передачі.

Самоподібність в Інтернет-трафіку виникає, коли пакети з однаковою довжиною надходять на сервер одночасно або з однаковим інтервалом між надходженнями. Основною мірою ступеня самоподібності трафіку є показник Херста H , який може набувати значень в інтервалі від 0,5 (мінімальний ступінь самоподібності, тобто фактично його відсутність) до 1 (максимальний ступінь самоподібності, який на практиці не зустрічається). Що ближче цей параметр до одиниці, то яскравіше проявляються самоподібні властивості. Ознаками самоподібності є: білий шум, внутрішня кореляція, асимптотика та подібність.

Отже, СМО розглядається на прикладі соціальних мереж, так як це на сьогодні є актуальною темою для вивчення і аналізу для забезпечення необхідної якості обслуговування.

Для опису самоподібності використовуються розподіли з «важкими хвостами», тобто із ознаками кореляції між завками вхідного потоку.

Отже, в наступному розділі роботи розглянуто детально розподіли з «важкими хвостами» і обрано розподіл для подальшого аналізу.

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДМІННОСТЕЙ ВХІДНИХ ПОТОКІВ СМО ІЗ ВЛАСТИВІСТЮ САМОПОДІБНОСТІ

2.1 Аналіз відмінностей розподілів вхідних потоків СМО для опису властивості самоподібності

Кровелла М., Кім Г. і Парк К. [15] провели об'ємне дослідження з моделювання, щоб оцінити причини та наслідки самоподібності в ситуаціях, які включали вузли уповільнення, буфери, різні швидкості та різні параметри хвоста. Еррамілі А. та Віллінгер В. [16] використовували експериментальний аналіз черги, щоб показати, чому класичні моделі без довгострокової залежності серйозно недооцінюють затримки. Резнік С. і Самородницький Г. [17] побудували приклад одного експоненціального сервера, що живиться залежним вхідним сигналом великої дії, які мали довжину черги та час очікування, що були дуже обмеженими.

Спроби пояснити самоподібність мережі здебільшого зосереджені на тривалому часі передачі джерел, які надсилають дані на один або більше серверів.

Отже, розглянемо показники, за допомогою яких можна досягти необхідної якості обслуговування. Для систем масового обслуговування, які функціонують у стаціонарному режимі, найсприйнятливішими для опису СМО, є формули Літтла, які пов'язують важливіші характеристики СМО. Формули названі на честь дослідника Дж. Д. К. Літтла [7], який їх обґрунтував. Ці формули відіграють важливу роль у теорії масового обслуговування, оскільки дають змогу за певних умов унеможливити складні перетворення під час виведення характеристик системи [18].

Характеристики якості обслуговування у телекомунікаційній системі, модельованій як СМО, виражені в 14 формулах Літтла [7]:

$$P_0 + P_{\text{исп}} = 1 \quad (2.1)$$

$$P_{\text{исп}} = \sum_{i=1}^N P_i \quad (2.2)$$

$$P_{\text{обсл}} + P_{\text{відм}} = 1 \quad (2.3)$$

$$P_{\text{обсл}} = \sum_{i=0}^{N-1} P_i, P_{\text{відм}} = P_N \quad (2.4)$$

$$P_{\text{исп}} = P_{\text{обсл}} + P_{\text{черги}} \quad (2.5)$$

$$Z_{\text{сист}} = K_{\text{обсл}} + r_{\text{черги}} \quad (2.6)$$

$$\tau_{\text{сист}} = \tau_{\text{обсл}} + \tau_{\text{черги}} \quad (2.7)$$

$$\tau_{\text{сист}} = \frac{Z_{\text{сист}}}{\lambda} \quad (2.8)$$

$$\tau_{\text{обсл}} = \frac{K_{\text{обсл}}}{\lambda} \quad (2.9)$$

$$\tau_{\text{черги}} = \frac{r_{\text{черги}}}{\lambda} \quad (2.10)$$

$$\frac{\tau_{\text{сист}}}{\tau_{\text{пов}}} = \left(\frac{Z_{\text{сист}}}{\lambda} \right) * \mu = \frac{Z_{\text{сист}}}{\rho} \quad (2.11)$$

$$Y_{\text{обсл}} = P_{\text{обсл}} * \rho \quad (2.12)$$

$$Y_{\text{обсл}} = \sum_{i=1}^n i * P_{\text{обсл}i} = K_{\text{обсл}} \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1 \quad (2.14)$$

Одні з найважливіших характеристик СМО що забезпечують якість обслуговування, і які впливають з формул Літтла, є: середній час перебування заявки в системі, середній час очікування, середня кількість заявок в системі та середня кількість заявок в черзі.

Отже, варто приділити увагу рекомендаціям щодо якості обслуговування QoS (Quality of Service).

Згідно рекомендації ITU-T E.800 під якістю обслуговування QoS будемо розуміти сукупність характеристик, що відображають ступінь задоволення користувача послугою, наданою хмарними технологіями. При цьому характеристики QoS можуть визначатися як на кожному етапі представлення послуг, так і на мережевому рівні [19]. Згідно рекомендації ITU-T Y.1541 до основних мережевих характеристик QoS в пакетних мережах віднесемо: пропускну здатність, надійність, показники доставки пакетного трафіку, такі як, затримка пакетів, варіації затримок, довжина пакетної черги, втрати пакетів і т.д [20].

Отже, дані характеристики є важливими з технічної точки зору, оскільки вони впливають на технічну реалізацію процесу обслуговування та його ефективність. Для забезпечення високої якості обслуговування в СМО потрібно розробляти технічні рішення, які враховують ці характеристики.

В подальшому в роботі буде графічне порівняння вказаних показників при різних вхідних параметрах. В подальшому за допомогою даних розрахунків можна досягти необхідної якості обслуговування.

2.2 Аналіз властивостей розподілу Парето для опису властивості самоподібності

Одним із розподілів, який активно використовується в багатьох дослідженнях СМО із самоподібністю є розподіл Парето завдяки прояву в ньому властивості «важкого хвосту».

Розподіл Парето, названий на честь італійського інженера – будівельника, економіста та соціолога Вільфредо Парето [21], є степеневим законом розподілу ймовірностей, який використовується для опису контролю якості, соціальних, наукових, геофізичних, та багато інших видів спостережуваних явищ.

Цей розподіл уперше з'явився у роботах Вільфредо Парето з економічної статистики. Воно визначає розподіл доходів у суспільстві, за умови, що всі ці доходи перевищують певний базовий рівень.

Згодом було відкрито багато нових важливих сфер застосування цього розподілу: лінгвістика, розподіл довжин файлів в інтернет-трафіку, популярність імен, техногенні катастрофи та т.п.

Розподіл Парето має функцію розподілу:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \quad (2.15)$$

де α – параметр форми розподілу Парето (індекс “хвоста”), який характеризується, чи буде розподіл мати кінцеве чи нескінченне середнє значення і дисперсію,

β – параметр нижньої границі (мінімальне значення випадкової величини x).

Даний вираз справедливий за умов що, $x > \beta > 0$ і $\alpha > 0$.

Щільність розподілу Парето можна задати функцією виду:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases} \quad (2.16)$$

При $\alpha \leq 2$ дисперсія величини x нескінченна, при $\alpha \leq 1$ нескінченне і математичне очікування.

$$M[x] = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha \leq 1; \end{cases} \quad (2.17)$$

$$D[x] = \begin{cases} \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-2)}, & \alpha > 2, \\ \infty, & \alpha \leq 2; \end{cases} \quad (2.18)$$

$$C^2[x] = \frac{D[x]}{(M[x])^2} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}, & \alpha > 2, \\ \infty, & \alpha \leq 2; \end{cases} \quad (2.19)$$

де $M[x]$ – математичне очікування величини x ,

$D[x]$ – дисперсія величини x ,

$C^2[x]$ – квадратичний коефіцієнт варіації випадкової величини x [22, 23].

Існує взаємозв'язок параметра форми розподілу α та параметра ступеня самоподібності – параметр Херста H [24]:

$$H = \frac{3 - \alpha}{2} \quad (2.20)$$

Отже, вибираючи параметр форми розподілу Парето, можна задавати параметр Херста – ступінь самоподібності вхідного трафіку.

Як вже було зазначено, що у самоподібного трафіку коефіцієнт Херста лежить у діапазоні $0,5 < H < 1$, для самоподібного трафіку параметр розподілу Парето буде знаходитися в діапазоні $1 < \alpha < 2$.

Розподіл Парето в діапазоні $1 < \alpha < 2$ має нескінченну дисперсією, що обумовлено відсутністю обмежень на максимальний розмір переданих блоків даних і унеможливорює отримання стійких оцінок.

Проте у реальних мережах зв'язку розміри переданих протокольних блоків даних обмежені. При моделюванні самоподібних процесів для вирішення даної суперечності, пропонується використання усічених розподілів. При цьому усічений розподіл дозволяє не змінюючи значення параметра форми «хвоста розподілу», задати як мінімальне – β так і максимальне – γ значення випадкової величини x , що характеризує розміри протокольних блоків даних або інтервали часу між їх надходженнями. Відповідно для щільності розподілу введені межі інтегрування, які дозволяють отримати щільність розподілу ймовірностей для зрізаного розподілу Парето:

$$f(x) = \frac{\alpha \cdot \beta^\alpha}{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\alpha} \cdot x^{\alpha+1}, \quad \beta \leq x \leq \gamma, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.21)$$

При цьому основні параметри розподілу кінцеві і мають вигляд:

$$M[x] = \frac{\alpha \cdot (\gamma \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta)}{(1 - \alpha) \cdot (\gamma^\alpha - \beta^\alpha)}; \quad (2.22)$$

$$D[x] = \frac{\alpha}{\gamma^\alpha - \beta^\alpha} \cdot \left(\frac{\gamma^2 \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta^2}{2 - \alpha} - \frac{\alpha \cdot (\gamma \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta)^2}{(1 - \alpha)^2 \cdot (\gamma^\alpha - \beta^\alpha)} \right); \quad (2.23)$$

$$C^2[x] = \left(\frac{\gamma^2 \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta^2}{2 - \alpha} - \frac{\alpha \cdot (\gamma \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta)^2}{(1 - \alpha)^2 \cdot (\gamma^\alpha - \beta^\alpha)} \right) \cdot \left(\frac{(1 - \alpha)^2 \cdot (\gamma^\alpha - \beta^\alpha)}{\alpha \cdot (\gamma \cdot \beta^\alpha - \gamma^\alpha \cdot \beta)^2} \right), \quad (2.24)$$

де $M[x]$ – математичне очікування величини x .

$D[x]$ – дисперсія величини x .

$C^2[x]$ – квадратичний коефіцієнт варіації випадкової величини x для усіченого розподілу Парето.

Продуктивність вузла комутації описується показником інтенсивності обслуговування пакетів у вузлі. Середня кількість пакетів, які надійшли у систему обслуговування за одиницю часу, називається інтенсивністю надходження пакетів і визначається наступним співвідношенням:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_n}, \quad (2.25)$$

де $\bar{t}_n$ – середнє значення інтервалу між надходженням чергових пакетів.

Середня кількість пакетів, що обслуговуються (оброблюються) у системі обслуговування за одиницю часу, називається інтенсивністю обслуговування пакетів і визначається наступним виразом:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обсл}}}, \quad (2.26)$$

де $\bar{t}_{\text{обсл}}$ – середній час обслуговування одного пакета в обслуговуючому пристрої.

Важливим параметром роботи вузла комутації є коефіцієнт навантаження ρ , який вказує на кількість пакетів, що надходять до вузла за час обслуговування одного пакета одним обслуговуючим пристроєм, і визначається, як відношення

інтенсивності надходження пакетів λ до інтенсивності обслуговування μ . Якщо виконується умова $\rho \leq 1$, то існує стаціонарний режим функціонування системи.

З урахуванням того, що середній час інтервалу між надходженням чергових пакетів і середній час обслуговування одного пакета обслуговуючим пристроєм розподілені за законом Парето, як аналітичний вираз для розрахунку середньої довжини черги в СМО P/M/1 і P/D/1 можемо використовувати формулу Поллячека-Хінчина, що призначена спочатку для розрахунку середньої довжини черги L в СМО M/G/1 (M – вхідний потік з експоненціальним розподілом, G – вихідний потік з невідомим розподілом та відомим математичним очікуванням та дисперсією), узагальнюючи її до СМО G/G/1 (з невідомим розподілом на вході та відомим математичним очікуванням дисперсією).

Середня довжина черги (тобто середня кількість пакетів в черзі) розраховується за такою формулою:

$$L = P(\rho, m) \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{C_{t_n}^2 + C_{t_{обсл}}^2}{2}, \quad (2.27)$$

де множник $P(\rho, m)$ визначає ймовірність того, що пакет, що надійшов до вузла комутації, застане всіх обслуговуючих пристроїв зайнятими і встане до черги;

ρ – коефіцієнт завантаження вузла комутації;

m – кількість обслуговуючих пристроїв у системі;

$C_{t_n}^2$ і $C_{t_{обсл}}^2$ – квадратичні коефіцієнти варіації інтервалів надходження між пакетами вхідного потоку та тривалістю обслуговування пакетів у вузлі комутації відповідно.

Множник $P(\rho, m)$ може бути розрахований за наближеною другою формулою Ерланга (С формула Ерланга) [25, 5]:

$$P(\rho, m) \approx m(1 - \rho) \cdot \frac{\rho^m}{1 - \rho^m} \quad (2.28)$$

В одноканальній системі масового обслуговування при $m=1$, даний множник буде дорівнювати $P(\rho, 1) = \rho$.

Середня кількість пакетів у системі масового обслуговування дорівнює сумі середньої кількості пакетів у черзі та середньої кількості пакетів в обслуговуючому пристрої:

$$n = P(\rho, m) \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{C_{t_n}^2 + C_{t_{обсл}}^2}{2} + m\rho. \quad (2.29)$$

Час очікування пакета в черзі складатиме:

$$T_{оч} = P(\rho, m) \frac{\overline{t_{обсл}}}{m(1 - \rho)} \cdot \frac{C_{t_n}^2 + C_{t_{обсл}}^2}{2}. \quad (2.30)$$

Час затримки пакета у вузлі комутації складає сумарний час очікування пакета в черги і час обслуговування пакету в обслуговуючому пристрої і обчислюється за формулою:

$$D_{затр} = T_{оч} + \overline{t_{обсл}}. \quad (2.31)$$

Втрати пакетів у вузлі комутації (P_n) залежать від інтенсивності трафіку, розміру буфера, застосовуваної політики обслуговування черг, а також від використовуваних методів запобігання перевантаження. У загальному випадку для розрахунку втрат пакетів у вузлі комутації можна запропонувати використовувати вираз:

$$P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{\frac{2}{C_{t_n}^2 + C_{t_{обсл}}^2} \cdot k + 1}} \cdot \rho^{\frac{2}{C_{t_n}^2 + C_{t_{обсл}}^2} \cdot k}, \quad (2.32)$$

де k – розмір буфера вузла комутації.

Однак, відповідно до наведених аналітичних виразів, можна розглядати інструмент отримання верхньої граничної оцінки середньої довжини черги, причому тільки в області низьких і середніх навантажень (і відносно невеликих значеннях параметра Херста H), оскільки при дуже великій навантаженні

(великих значеннях N) значення середньої довжини черги, розраховані за допомогою імітаційної моделі, перевищують середню довжину черги. Таким чином можна зробити висновок про те, що використання представленої вище аналітичної моделі дозволяє отримати верхні граничні оцінки основних параметрів якості трафіку, що передається, а для отримання більш точних результатів необхідно застосувати розподіл Вейбула для розрахунку показників при різних значеннях параметру Херста H [26].

Отже, розподіл Паретто може бути корисним для опису деяких явищ у технічних системах, хоча він має значні недоліки:

- а) не є стійким до змін масштабу часу та простору. В інших словах, якщо розмір системи змінюється, розподіл Паретто може втратити свою властивість самоподібності, яка важлива для моделювання потоків даних;
- б) розподіл Паретто показує тільки загальну нерівномірність в розподілі трафіку, не відображаючи деталей щодо того, як саме відбувається цей розподіл. Таким чином, він може не надавати достатньої інформації для аналізу трафіку на більш докладному рівні;
- в) має нескінченну дисперсію, що означає високу мінливість вхідного трафік;
- г) не враховує кореляцій між різними компонентами системи, що може призвести до неточностей в моделюванні потоків даних;
- д) розподіл Паретто є екстремальною формою розподілу, що означає, що його застосування може бути обмеженим в практичних застосуваннях.

Тому, хоча розподіл Паретто може бути корисним для деяких застосувань, він не є універсальним рішенням для моделювання потоків даних і має свої обмеження.

Отже, використання розподілу Паретто для дослідження СМО із властивостями самоподібності не є коректним.

2.3 Аналіз властивостей розподілу Вейбулла для опису властивості самоподібності

Альтернативним розподілом, який також має властивість описувати процеси із внутрішньої кореляцією («важкими хвостами») є розподіл Вейбулла.

Розподіл Вейбулла – це безперервний розподіл ймовірностей, який використовується для аналізу даних про термін служби, моделювання часу відмови та доступу до надійності продукту.

Розподіл Вейбулла названо на честь шведського математика Валодді Вейбулла. Вейбулл [27, 28] не був першою людиною, яка використовувала дистрибутив, але був першим, хто ретельно його вивчив і визнав його широке використання в програмах. Також причиною використання розподілу Вейбулла є його гнучкість. Тому що він може симулювати різні розподіли, такі як нормальний і експоненціальний розподіли.

Розподіл Вейбулла є одним із найбільш широко використовуваних розподілів у розробці надійності.

Випадкова величина має розподіл Вейбулла з параметром λ_0 і α , якщо її функція розподілу та функція щільності ймовірностей мають відповідно вигляд [29, 30]:

$$F(x) = 1 - e^{-\beta \cdot x^\alpha} \quad (2.33)$$

$$P(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot x^\alpha} \quad (2.34)$$

Або заданий диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot x^\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Основними характеристиками розподілу Вейбулла є [31]:

– математичне очікування:

$$M = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (2.36)$$

– дисперсія:

$$D = \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right) \quad (2.37)$$

де α – параметр форми кривої розподілу, $0 < \alpha < 1$;

$$\alpha = 2 - 2 \cdot H \quad (2.38)$$

H – параметр Херста, $0,5 < H < 1$,

$$\beta = \left[\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]^\alpha \quad (2.39)$$

β – параметр розподілу, $\beta > 0$,

λ – інтенсивність надходження пакетів на обслуговування в СМО,

$\Gamma(k)$ – гама-функція Ейлера вигляду

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} t^{k-1} \cdot e^{-t} \cdot dt. \quad (2.40)$$

Розглянемо ключові властивості параметрів α та β .

α – параметр форми, але іноді називають нахилом або пороговим параметром Вейбулла.

Якщо $\alpha < 1$ – то частота відмов зменшується з часом;

Якщо $\alpha > 1$ – то частота відмов зростає з часом;

Якщо $\alpha = 1$ – постійна інтенсивність відмов (експоненціальна).

Тобто якщо параметр альфа (α) дорівнює 1, то розподіл Вейбулла стає експоненціальним розподілом.

Параметр β іноді ще називають параметром масштабу або параметр нахилу. Зі збільшенням параметру бета (β), розподіл Вейбулла стає більш симетричним. На рис. 2.1 зображено графічне порівняння кривих при зміні значення параметру β [32].

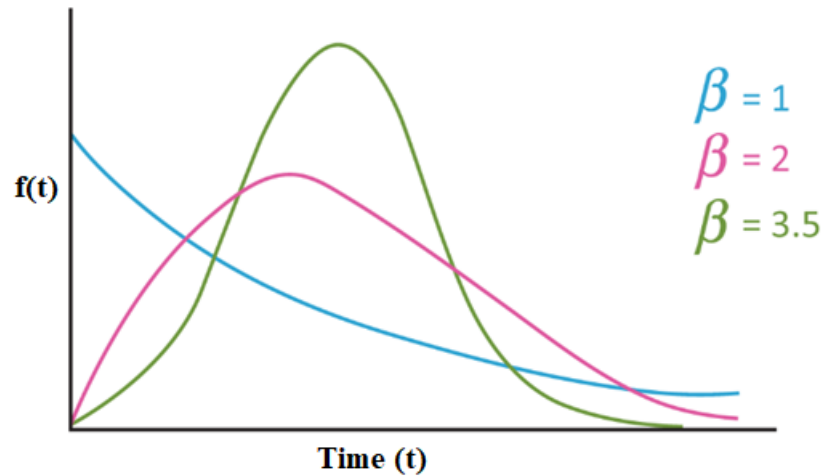


Рисунок 2.1 – Крива щільності Вейбулла

З [5] відомо, що для СМО $W_B/M/1/\infty$ ймовірність того, що заявка, яка надійшла в СМО, застане n заявок на обслуговуванні, визначається як:

$$r_n = (1 - \sigma) \cdot \sigma^n \quad (2.41)$$

де σ – корінь рівняння $0 \leq \sigma < 1$:

$$\sigma = F(\mu - \mu \cdot \sigma) \quad (2.42)$$

$$0 \leq \sigma < 1$$

де F – перетворення Лапласа-Стільтєса (ПЛС) щільності розподілу інтервалів між заявками $f(t)$ в СМО та має вигляд:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt \quad (2.43)$$

s – комплексна змінна,

μ – інтенсивність обслуговування пакетів в СМО [заявок/час, пак/с].

Отже:

$$\sigma = \alpha \cdot \beta \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu - \mu \cdot \sigma) \cdot t} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot t^\alpha} \cdot dt \quad (2.44)$$

2.4 Порівняння розподілів з «важкими хвостами» для опису властивості самоподібності

Самоподібні процеси можна описати за допомогою розподілу з «важкими хвостами». Головною особливістю розподілів із важкими хвостами (PBX) є те, що вони спадають гіперболічно, а не експоненціально, як у розподілів із легкими хвостами.

Існує тісний зв'язок між довгостроковою залежністю та розподілу з «важкими хвостами». Випадкова величина S має розподіл із «важким хвостом» (PBX), якщо ймовірність $P[S > x] \sim cx^\alpha$ при $x \rightarrow \infty$, тобто «хвіст» розподілу спадає за ступеневим законом. Прикладом розподілу із «важким хвостом» є розподіли Паретто та Вейбулла. При $0 < \alpha < 2$ величина S має нескінченну дисперсію, а при $0 < \alpha < 1$ середнє значення також нескінченно.

Найбільш суттєвою особливістю випадкової величини, що має розподіл з «важким хвостом», є надзвичайна мінливість. З ймовірністю, яка не є дуже малою, у вибірці може бути деяка кількість «дуже великих» значень. Такі розподіли суттєво знижують точність статистичних оцінок, тобто, кінцевий обсяг вибірки призводить до заниженої оцінки середнього та дисперсії.

Наявність PBX у зовнішніх по відношенню до аналізованих процесів явищ є однією з причин виникнення самоподібності у відповідних стохастичних моделях.

Зазвичай під час розгляду самоподібних процесів говорять про комплекс взаємопов'язаних понять: самоподібність, масштабування, довготривала залежність, PBX і ступінних законах статистичних характеристик. Цей комплекс властивостей відрізняє процеси, які називаються самоподібними, від класичних випадкових процесів, наприклад, пуасонівського [33, 23].

Таким чином, для моделювання самоподібного трафіку можуть використовуватися багато розподілів із «важкими хвостами». Найбільш

популярними, які розглядаються вченими минулого століття і теперішнього, є розподіли Парето (P – Pareto) та Вейбулла (W – Weibull).

Проте точні аналітичні функціональні залежності для СМО типу $P/M/1$ чи $P/D/1$, і навіть $W/M/1$ чи $W/D/1$, тобто при надходженні на вхід пристрою комутації потоків даних, що описуються розподілами Парето (P) та Вейбулла (W), невідомі. Тому для розрахунку показників обслуговування таких СМО широко використовується імітаційне моделювання. Однак досить великі витрати на отримання результатів імітаційного моделювання (з необхідною точністю) ускладнюють їх використання для оперативного прогнозування якості обслуговування самоподібного трафіку при виборі та налаштуванні відповідних механізмів керування трафіком. Але зазначені аналітичні моделі є або надто наближеними (що суперечать результатам імітаційного моделювання), або справедливими (досить точними) лише в обмеженому діапазоні значень навантаження та показника Херста.

Тому в даний час залишається актуальною проблема пошуку та/або розробки інших або нових досить точних та зручних у обчислювальному сенсі аналітичних моделей, що застосовуються у всьому діапазоні можливих значень параметрів самоподібного трафіку.

Відомості про характер потоків заявок та тривалість обслуговування є важливими для обґрунтування нормативів якості обслуговування. Насамперед, як правило, потік вимог, що надходить на обслуговування, вважався найпростішим і для систем масового обслуговування (СМО) з втратами та чергами отримані всі аналітичні висловлювання для розрахунку основних характеристик якості обслуговування. Наприклад, для розрахунку повнодоступної багатоканальної системи при експоненціальному часі обслуговування використовуються формули Ерланга, а для розрахунку одноканальної системи з очікуванням при довільному часі обслуговування – формула Поллачека-Хінчина .

Однак, для випадку самоподібного трафіку аналогічних методів розрахунку характеристик якості обслуговування невідомо. Причиною цього є слабка формалізованість моделі самоподібних потоків, внаслідок чого і неможливо отримати аналітично обґрунтовані результати для характеристик СМО, в яких обслуговуються дані потоки. Незважаючи на популярність моделі самоподібного трафіку, досі ряд завдань оцінки якості функціонування СМО залишаються невирішеними. Зокрема, через відсутність суворої теоретичної бази, здатної доповнити класичну теорію масового обслуговування при проектуванні СМО з самоподібним трафіком, немає достовірної та визнаної методики розрахунку параметрів та показників якості систем розподілу інформації в умовах ефекту самоподібності.

З наведеного вище обґрунтування актуальності розробки аналітичної моделі обслуговування трафіку з розподілом Парето або Вейбулла, необхідної для оперативного прогнозу очікуваних показників якості при виборі та налаштуванні відповідних механізмів забезпечення якості, випливає наступна постановка задачі.

Як модель самоподібного трафіку розглядається порівняння розподілів Парето та Вейбулла. Отже ціллю є обґрунтування можливості застосування методів розрахунку параметрів якості обслуговування відомих розподілів, наприклад таких, як Парето або Вейбулла в умовах самоподібного трафіку при обмеженнях на діапазон завантаження системи, параметр Херста і точність розрахунку.

Деякі вчені зазначають, що розподіл Парето є найпростішим розподілом з важкими хвостами, доступним на даний момент. За даними представленими Шелухіним, Смольським та Осіним, показник степеня H (Херста) має життєво важливе значення для теорії самоподібного процесу, оскільки служить індикатором випадковості самоподібного процесу та демонструє властивість довгострокової залежності (Long Range Dependence - LRD). Довгострокова

залежність описує ефект пам'яті, за якого поточне значення стохастичного процесу сильно залежить від його попереднього значення, і пояснюється його автокореляційною функцією.

Діапазон $0 < H < 0,5 \rightarrow \text{SRD}$ (Short Range Dependence), виключається для дослідження самоподібного трафіку, так як це є залежність короткого діапазону та відсутності подібності.

Досліджується діапазон $0,5 < H < 1 \rightarrow \text{LRD}$, тобто залежність на великі відстані та самоподібність [33].

Розподіл ймовірностей є важливим інструментом для опису випадкових явищ в СМО. Для аналітики проведено порівняння функцій розподілу Пуассона, Вейбулла та Парето.

Експоненційна функція розподілу, яка описує розподіл Пуассона має наступний вигляд:

$$F(x) = 1 - e^{-x} \quad (2.45)$$

Дана рівняння містить експоненційну функцію e^{-x} , що свідчить про експоненційний характер випадкової величини.

Функція розподілу Вейбулла має вигляд:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\lambda^k} \quad (2.46)$$

Дана функція містить e^{-x/λ^k} , що також свідчить про експоненційний характер випадкової величини.

Функція розподілу Парето має вигляд:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k, \quad (x > k; \alpha > 0) \quad (2.47)$$

Функція розподілу Парето містить $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k$, що свідчить про степеневий характер випадкової величини.

Саме степеневий характер унеможливорює використання розподілу Парето для опису самоподібності трафіку, хоча має властивість «важкого хвоста»,

тобто відображення кореляційної залежності подій. На жаль, значна кількість дослідників все ж використовує цей розподіл, порушуючи умови адекватності опису процесу.

Навпаки, функція Вейбула, яка теж має властивість «важкого хвоста», має асимптотичні властивості по відношенню до розподілу Пуассона, а саме: при $\lambda = 0,5$ розподіли експоненційний (властивий розподілу Пуассона) і розподіл Вебулла співпадають.

Отже, для наглядного порівняння традиційної моделі СМО з розподілом Пуассона та СМО, що має властивість самоподібності, яка може описуватись розподілом Вейбулла або розподілом Паретто, побудовано графіки – рис.2.2-2.4.

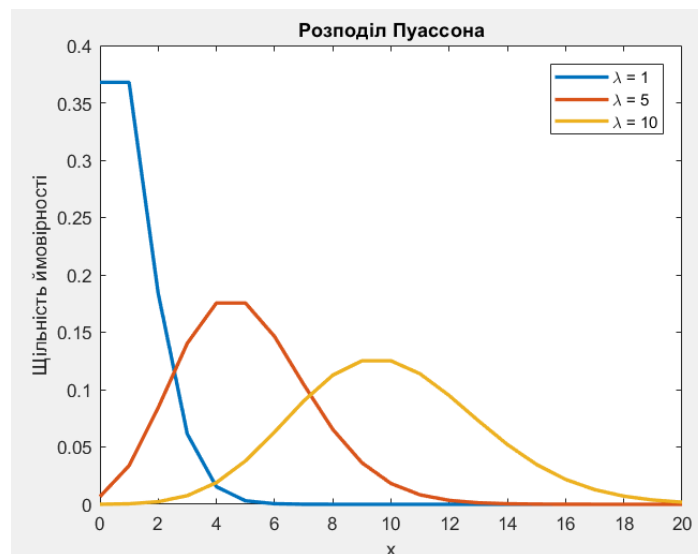


Рисунок 2.2 – Функції щільності розподілу Пуассона

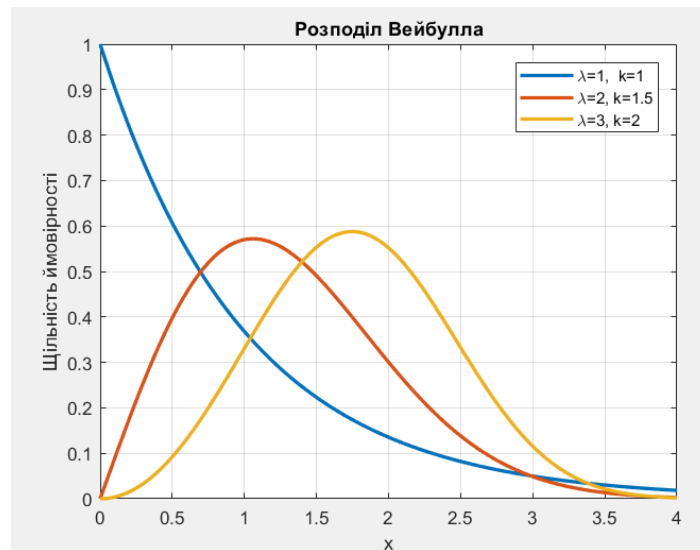


Рисунок 2.3 – Функції щільності розподілу Вейбулла

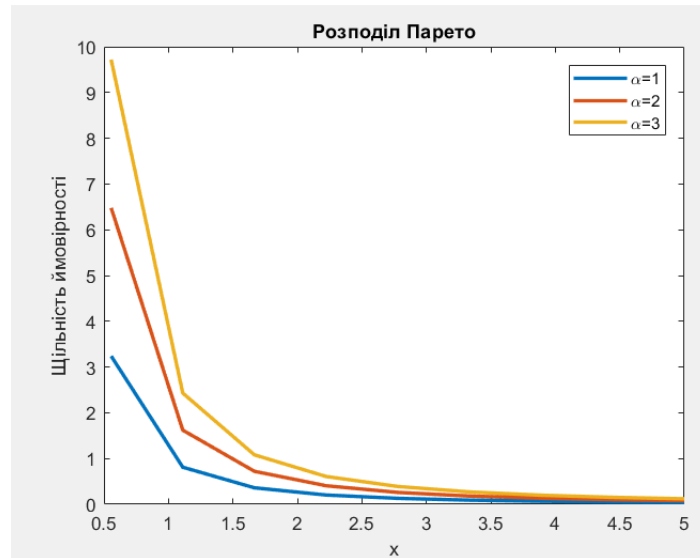


Рисунок 2.4 – Функції щільності розподілу Парето

Можна спостерігати, що функції розподілів Пуассона і Вейбулла є показниковими, оскільки вони мають вигляд експоненційної функції, тоді як функція розподілу Парето є степеневою, оскільки має вигляд степеневі функції. Отже для коректного порівняння якісних характеристик доречно буде використати розподіли Пуассона і Вейбулла. Також розподіл Вейбулла є найбільш представленим у відомій літературі.

Також зауважимо, що розподіл Парето зазвичай використовується для опису екстремальних значень, тому в контексті СМО він може бути застосований для моделювання дуже довгих часів очікування, які відбуваються дуже рідко. Розподіл Вейбулла ж, на відміну від розподілу Парето, враховує різні часові масштаби та властивість самоподібності, що робить його більш універсальним для застосування в СМО [36].

Отже, розподіл Вейбулла є математично коректним для опису властивості самоподібності, тоді як розподіл Парето не може описати цю властивість, так як має ряд недоліків.

Висновки до розділу 2

1. Згідно з завданням до роботи, в другому розділі розглянуто та виконано пункт: порівняння розподілів з «важкими хвостами», що є методом дослідження самоподібності, який базується на порівнянні характеристик розподілів різних параметрів системи, а саме: розподіл Вейбулла і розподіл Парето.

За підсумком розгляду цього пункту показано, що масове використання соціальних мереж та збільшення різноманітних послуг призвело до того, що мережевий трафік став більш складним і непередбачуваним, що робить актуальною проблему забезпечення якості обслуговування.

Ідея технології QoS полягає у забезпеченні непомітної для користувача гарантованої передачі пакетів даних. Ця технологія може застосовуватись в різних місцях, таких як Інтернет, соціальні мережі, вдома, в офісі, бібліотеці, аеропорту тощо. Завдяки QoS можна гарантувати, що користувачі не матимуть проблем з завантаженням файлів, відеовикликами, розмовами через IP-телефонію та переглядом будь-яких онлайн-документів у локальній або глобальній мережі.

Для досягнення необхідної якості обслуговування, в роботі розглядаються показники, які описуються за допомогою формул Літтла. Дані формули є важливим елементом теорії масового обслуговування, оскільки дозволяють уникнути складних перетворень при виведенні характеристик системи за певних умов.

2. В наступному пункті було аналізовано розподіл Парето, для опису властивості самоподібності.

Розподіл Парето може використовуватись для опису властивості самоподібності, яка притаманна багатьом системам і являється ключовою у побудові математичних моделей для аналізу поведінки цих систем.

Основною характеристикою розподілу Парето є параметр форми, який відповідає за степінь хвоста розподілу та визначає його самоподібність. В даному пункті було розглянуто формули для опису розподілу, а саме: функція розподілу, математичне очікування, дисперсія, зв'язок з параметром Херста, а також якісні показники.

Але недоліком даного розподілу є те, що він не враховує взаємодію між компонентами системи, що може привести до невірної оцінки поведінки системи в цілому. Це означає, що різні масштаби часових інтервалів не мають подібного розподілу. У розподілі Парето, чим більша величина, тим менше ймовірність її появи.

Також має властивість нескінченної дисперсії, тобто висока мінливість вхідного трафіку.

Одним з недоліків є те, що розподіл Парето не враховує зв'язків між різними складовими системи, що може призвести до неточностей в прогнозуванні потоків даних.

Отже, ці властивості не відповідають властивості самоподібності.

3. Завданням наступного пункту було аналізувати розподіл Вейбулла, який також може описувати СМО з властивістю самоподібності.

Розподіл Вейбулла – це безперервний розподіл ймовірностей, який використовується для моделювання часу затримки передачі даних та часу відмови елементів мережі. Застосування розподілу Вейбулла дозволяє збільшити ефективність та надійність мережі.

Основна характеристика розподілу Вейбулла - параметр форми, який відповідає за швидкість зменшення ймовірності відмови з часом. А також параметр форми впливає на форму розподілу та ступінь його самоподібності.

Було також розглянуто формули для опису розподілу, а саме: функції розподілу та щільності ймовірності, математичне очікування, дисперсію та зв'язок з параметром Херста.

4. Вирішено задачу порівняння розподілів з «важкими хвостами», так як за допомогою них описуються самоподібні процеси. Найбільш часто розглядаються вченими в минулому і теперішньому століттях розподіли Парето та Вейбулла.

В даному пункті проведено порівняння функцій розподілів Пуассона, Вейбулла та Парето. Так як формули розподілів Пуассона та Вейбулла є експоненційними функціями, то розподіл буде показниковим, а формула розподілу Парето є степеневою функцією, що свідчить про степеневий характер випадкової величини.

Розподіл Парето не є достатньо адекватним для опису загальної моделі СМО в даній ситуації. А Розподіл Вейбулла має асимптотику, тобто він не втрачає адекватності при значенні співпадіння з експоненціальним розподілом між подільною Пуассоннівського потоку 0,5 та 0,001.

Але при зміні коеф Херста на одну тисячну при розподілі Паретто, буде злам розподілу, тому що експоненційний розподіл для Пуассона – це експонента, а розподіл Паретто – це показний закон розподілу.

Отже, для коректного порівняння якісних характеристик доречно буде використати розподіли Пуассона і Вейбулла, так як вони мають аналогічну

асимптотику. Це дозволяє коректно використовувати обидва розподіли для порівняння якісних характеристик.

Відповідно в наступному розділі буде розглянуто математичні моделі для розрахунку показників СМО з розподілом Пуассона та розподілом Вейбулла.

3 ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК СМО З ВІДСУТНІСТЮ ТА НАЯВНІСТЮ ОЗНАК САМОПОДІБНОСТІ

3.1 Доведення асимптотичності розподілу Пуассона та розподілу Вейбулла в математичній моделі для розрахунку показників СМО

Розподіл Пуассона є традиційним і тому одним з найбільш поширених розподілів в теорії ймовірностей та статистиці.

Для розрахунку показників СМО з розподілом Пуассона використовують математичну модель, що базується на теорії випадкових процесів. За цією моделлю, кількість заявок, які надходять до СМО, можна розглядати як випадкову величину, яка підпорядковується розподілу Пуассона. Розподіл Пуассона є дискретним розподілом і використовується для опису кількості рідкісних подій, які відбуваються незалежно від інших подій із певною середньою інтенсивністю.

Розподіл Пуассона має декілька важливих властивостей, які роблять його корисним для моделювання різних явищ:

- а) описує кількість подій, які відбуваються за фіксований період часу або в певному обсязі простору;
- б) розподіл Пуассона має властивість відсутності пам'яті. Це означає, що кількість подій, яка сталася до певного моменту, не впливає на імовірність того, що відбудеться подія в майбутньому;
- в) середнє значення та дисперсія розподілу Пуассона рівні λ , де λ - це середня кількість подій на одиницю часу або простору;
- г) розподіл Пуассона є асимптотично нормальним, коли λ стає дуже великим. Тоді розподіл Пуассона можна апроксимувати нормальним розподілом зі середнім значенням λ і дисперсією λ . [34]

Отже, розподіл Пуассона є потужним інструментом для моделювання і аналізу процесів з випадковою кількістю подій.

Раніше було визначено, що при параметрі Херста рівним $H=0,5$ має місце відсутність властивості самоподібності, тобто буде найпростіший розподіл, тобто розподіл Пуассона.

Отже, розглянемо доведення співпадіння математичного опису розподілу Пуассона з розподілом Вейбулла при параметрі Херста рівним $0,5$, використаємо формулу (2.34):

$$P(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot x^\alpha}$$

$$\alpha = 2 - 2 \cdot H \rightarrow \alpha = 2 - 2 \cdot 0,5 = 1 \quad (3.1)$$

Підставляючи отримане значення α в формулу (2.39), отримуємо:

$$\beta = \left[\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]^\alpha \rightarrow \beta = [\lambda \cdot \Gamma(2)]^1 \quad (3.2)$$

де отримуємо гамма функцію рівною, $n > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(2) &= 1! = 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отже підставивши в (3.2), отримуємо:

$$\beta = \lambda \cdot 1 = \lambda \quad (3.4)$$

Використовуючи формулу (2.44), підставимо отримані значення з рівнянь α та β в рівняння σ і отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha \cdot \beta \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu-\mu \cdot \sigma) \cdot t} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot t^\alpha} \cdot dt \\ \sigma &= 1 \cdot \lambda \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu-\mu \cdot \sigma) \cdot t} \cdot t^0 \cdot e^{-\lambda \cdot t^1} \cdot dt \\ &= \lambda \\ &\cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu-\mu \cdot \sigma) \cdot t} \cdot e^{-\lambda \cdot t^1} \cdot dt \\ &= \lambda \\ &\cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu-\mu \cdot \sigma) \cdot t - \lambda \cdot t} dt \\ &= \frac{\lambda}{(\mu(1-\sigma) + \lambda)} \\ &\cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\mu(1-\sigma)+\lambda) \cdot t} dt \cdot (\mu(1-\sigma) + \lambda) = \frac{\lambda}{\mu(1-\sigma) + \lambda} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отже, виконуючи ряд перетворень:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu \cdot (1 - \sigma) + \lambda}$$

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (\mu \cdot (1 - \sigma) + \lambda) &= \lambda \\ \sigma \cdot \mu - \mu \cdot \sigma^2 + \sigma \cdot \lambda &= \lambda \\ \sigma \cdot \mu \cdot (1 - \sigma) &= \lambda - \sigma \cdot \lambda \\ \sigma \cdot \mu \cdot (1 - \sigma) &= \lambda \cdot (1 - \sigma) \\ \sigma \cdot \mu &= \lambda\end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad (3.6)$$

Отже, підставляючи отримане значення сігми ($\sigma = \rho$) в рівняння показників при розподілі Вейбулла, отримуємо, що

$$L = \frac{\rho \cdot \sigma}{1 - \sigma} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (3.7)$$

$$W_{\text{оч}} = \frac{\sigma}{\mu \cdot (1 - \sigma)} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)} \quad (3.8)$$

показники середньої довжини черги (L) та середнього часу очікування заявки в черзі ($W_{\text{оч}}$) рівносильні розподілу Пуассона.

А щодо показників середньої кі-сть заявок в СМО (Q) і середнього часу перебування заявки в системі ($W_{\text{сист}}$) вони не рівносильні:

$$Q = \frac{\rho \cdot \sigma}{\mu \cdot (1 - \sigma)} = \frac{\rho^2}{\mu \cdot (1 - \rho)} \quad (3.9)$$

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho \cdot \sigma}{\mu \cdot \lambda (1 - \sigma)} = \frac{\rho^2}{\mu \cdot \lambda (1 - \rho)} \quad (3.10)$$

З формул Літтла отримуємо:

$$Q = \lambda \cdot W_{\text{сист}} \quad (3.11)$$

$$L = \lambda \cdot W_{\text{оч}} \quad (3.12)$$

$$W_{\text{сист}} = W_{\text{оч}} + \frac{1}{\mu} \quad (3.13)$$

Можемо з даних формул знайти $W_{\text{сист}}$ і Q для розподілу Вейбулла:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\sigma}{\mu \cdot (1 - \sigma)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \sigma)} \quad (3.14)$$

$$Q = \lambda \cdot \frac{1}{\mu \cdot (1 - \sigma)} = \frac{\rho}{1 - \sigma} \quad (3.15)$$

В такому випадку, підставляючи отримане раніше значення сігми, дані значення показників при розподілі Вейбулла будуть рівносильні значенням показників при розподілі Пуассона:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \sigma)} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)} \quad (3.16)$$

$$Q = \frac{\rho}{1 - \sigma} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (3.17)$$

Отже, припущення щодо співпадіння математичного опису розподілу Пуассона з розподілом Вейбулла при параметрі Херста рівним 0.5 вірне [35].

3.2 Опис базової математичної моделі для розрахунку показників СМО з розподілом Вейбулла

Математична модель СМО з розподілом Вейбулла базується на моделі масового обслуговування з одним каналом та нескінченною чергою з очікуванням.

У цій моделі вважається, що час обслуговування кожної заявки має розподіл Вейбулла. Це означає, що час, необхідний для обслуговування кожної заявки, має функцію щільності ймовірності, яка визначається параметрами форми та масштабу.

Доводячи раніше актуальність використання розподілу Вейбулла, у порівнянні з розподілом Паретто, проведемо розрахунок основних значень, для подальшого розрахунку σ .

Для $H = 0,6$,

$$\alpha = 2 - 2 \cdot H \rightarrow \alpha = 2 - 2 \cdot 0,6 = 0,8 \quad (3.18)$$

$$\beta = \left[\lambda \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^\alpha \rightarrow \beta = [\lambda \cdot \Gamma(2,25)]^{0,8} \quad (3.19)$$

де отримуємо гамма функцію рівною, $n > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(2,25) &= 1,25! = 1,13 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отже підставивши в (3.19), отримуємо:

$$\beta = (1,13 \cdot \lambda)^{0,8} \quad (3.21)$$

Для $H=0,7$

$$\alpha = 2 - 2 \cdot H \rightarrow \alpha = 2 - 2 \cdot 0,7 = 0,6 \quad (3.22)$$

$$\beta = \left[\lambda \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^\alpha \rightarrow \beta = [\lambda \cdot \Gamma(2,67)]^{0,6} \quad (3.23)$$

де отримуємо гамма функцію рівною, $n > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(2,67) &= 1,67! \approx 1,5 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отже підставивши в (3.23), отримуємо:

$$\beta = (1,5 \cdot \lambda)^{0,6} \quad (3.25)$$

Для $H=0,8$

$$\alpha = 2 - 2 \cdot H \rightarrow \alpha = 2 - 2 \cdot 0,8 = 0,4 \quad (3.26)$$

$$\beta = \left[\lambda \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^\alpha \rightarrow \beta = [\lambda \cdot \Gamma(3,5)]^{0,4} \quad (3.27)$$

де отримуємо гамма функцію рівною, $n > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(3,5) &= 2,5! \approx 3,3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Отже підставивши в 3.27, отримуємо:

$$\beta = (3,3 \cdot \lambda)^{0,4} \quad (3.29)$$

Висновки до розділу 3

1. Згідно з завданням до роботи, в третьому розділі розглянуто та виконано пункт: розробки математичної моделі системи масового обслуговування для найпростішого потоку, тобто розподілу Пуассона.

Розподіл Пуассона або найпростіший потік розглядається, у раніше зазначеному випадку, коли параметр Херста рівний 0,5 (відсутність самоподібності), для подальшого порівняння якісних показників. Отже впливає задача доведення цього твердження.

2. З попереднього розділу було визначено адекватний розподіл для опису самоподібності – розподіл Вейбулла. Використовуючи формули для даного розподілу, було проведено ряд розрахунків і доведено вірність твердження – $H=0,5$ – найпростіший розподіл. Після розрахунків отримано рівність $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$, тобто можна зазначити що формули для підрахунку показників для розподілу Пуассона і розподілу Вейбулла є рівносильними.

3. В наступному пункті даного розділу було виконано завдання: розробки математичної моделі з урахуванням властивостей самоподібності, яка описується розподілом Вейбулла. Було проведено розрахунок основних значень, для подальшого розрахунку σ , при різних значень параметру Херста, а саме 0,6, 0,7 та 0,8.

4 АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВЛАСТИВОСТІ САМОПОДІБНОСТІ ТРАФІКУ НА ЯКІСНІ ПОКАЗНИКИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СМО

4.1 Обґрунтування базисного набору показників функціонування СМО, суттєвого для аналізу прояв властивостей самоподібності

Базисний набір показників функціонування СМО представляє собою певний набір основних показників, які використовуються для опису роботи системи масового обслуговування. Ці показники можуть бути виміряні або розраховані і використовуються для оцінки ефективності та продуктивності СМО.

Використання таких показників дозволить зрозуміти, як працює СМО в цілому та які аспекти його функціонування можна покращити. Базисний набір показників може бути розширеним або скороченим залежно від конкретної задачі, але він завжди містить найбільш інформативні та суттєві показники для аналізу роботи СМО.

Для кожної конкретної задачі можуть використовуватися додаткові показники, які дозволяють більш точно відобразити функціонування системи масового обслуговування в даному випадку. Проте базисний набір показників завжди є основою для оцінки роботи СМО.

Розглядаючи в роботі СМО з властивістю самоподібності, що притаманна соціальним мережам, важливим етапом у дослідженні є обґрунтування базисного набору показників функціонування.

Наприклад, базисний показник може бути пов'язаний з інтенсивністю надходження заявок до СМО. Якщо інтенсивність надходження заявок змінюється у кілька разів, а середній час очікування на обслуговування змінюється в певному співвідношенні з цією зміною, то можна стверджувати, що інтенсивність надходження заявок також має властивість самоподібності.

Також, якщо середній час очікування на обслуговування залежить від розміру черги та навантаження на систему, то виявлення самоподібності у цій залежності дозволить зробити прогноз зміни середнього часу очікування на обслуговування при зміні навантаження на систему.

З цього випливає цікавість до дослідження таких показників, як:

а) час очікування на обслуговування - середній час, який заявка проводить у черзі перед початком обслуговування. Даний показник важливий для оцінки того, наскільки швидко СМО реагує на заявки та як швидко здійснює обслуговування;

б) кількість заявок в черзі - середня кількість заявок, які знаходяться в черзі в даний момент часу. Він важливий для оцінки того, наскільки ефективно організовано чергування заявок та які ресурси СМО використовуються;

в) час перебування в системі - середній час, який заявка проводить в системі, включаючи час очікування в черзі та час обслуговування. Цей показник характеризує продуктивність СМО та дозволяє оцінити, наскільки ефективно використовуються ресурси СМО;

г) кількість заявок в системі - середня кількість заявок, які перебувають у черзі на обслуговування та тих, які перебувають на обслуговуванні. Даний показник важливий для оцінки того, який обсяг роботи виконується в СМО.

Ці показники дозволяють провести аналіз функціонування СМО та виявити прояв властивостей самоподібності, які характеризуються тим, що певні статистичні показники СМО не залежать від масштабу часу, тобто збільшення часового інтервалу в кілька разів не впливає на ці показники. Наприклад, якщо час очікування на обслуговування у деякої СМО складає 10 хвилин, то при збільшенні часового інтервалу в 2 рази (до 20 хвилин), середній час очікування на обслуговування залишиться незмінним, якщо система є самоподібною.

Для розрахунку вище зазначених показників буде використано наступні формули:

Таблиця 4.1 – Формули для виконання розрахунків

Показник	Пуассон (М/М/1/∞)	Вейбулл (М/М/1/∞)
Середня кількість заявок в СМО (Q)	$Q = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$Q = \frac{\rho}{1 - \sigma}$
Середня довжина черги (L)	$L = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$L = \frac{\rho \cdot \sigma}{1 - \sigma}$
Середній час перебування заявки в системі ($W_{\text{сист}}$)	$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)}$	$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \sigma)}$
Середній час очікування заявки в черзі ($W_{\text{оч}}$)	$W_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}$	$W_{\text{оч}} = \frac{\sigma}{\mu \cdot (1 - \sigma)}$

Отже, виявлення самоподібності у функціонуванні СМО дозволяє встановити зв'язки між різними показниками та зробити прогноз їх змін у випадку зміни параметрів СМО.

4.2 Порівняння кількісних значень показників базисного набору для аналізу прояв властивостей самоподібності

Для доведення важливості врахування фактору самоподібності проведено графічне порівняння показників якості обслуговування при розподілі Пуассона і розподілі Вейбулла, використовуючи формули, виведені вище.

Було використано програмне забезпечення “Matlab” для розрахунку значення σ (сігми) для параметру Херста рівним 0,6, 0,7 та 0,8 (додаток А), та ПЗ “Excel” для розрахунку формул для отриманих значень та побудови самих графіків [36].

Отримані результати для всіх значень μ зображено в табл. 4.2 – 4.5:

Таблиця 4.2 – Отримані значення для $\mu = 1,25$:

Параметр	Значення					
при Н = 0,5						
λ	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
ρ	0,48	0,56	0,64	0,72	0,8	0,88
$W_{\text{сист}}$	1,54	1,82	2,22	2,86	4	6,67
$W_{\text{оч}}$	0,74	1,02	1,42	2,06	3,20	5,87
L	0,44	0,71	1,14	1,85	3,20	6,45
Q	0,92	1,27	1,78	2,57	4,00	7,33
при Н = 0,6						
σ	0,564	0,638	0,708	0,777	0,845	0,913
$W_{\text{сист}}$	1,83	2,21	2,74	3,59	5,16	9,20
$W_{\text{оч}}$	1,03	1,41	1,94	2,79	4,36	8,40
L	0,62	0,99	1,55	2,51	4,36	9,23
Q	1,10	1,55	2,19	3,23	5,16	10,11
при Н = 0,7						
σ	0,682	0,742	0,797	0,849	0,898	0,946
$W_{\text{сист}}$	2,52	3,10	3,94	5,30	7,84	14,81
$W_{\text{оч}}$	1,72	2,30	3,14	4,50	7,04	14,01
L	1,03	1,61	2,51	4,05	7,04	15,42
Q	1,51	2,17	3,15	4,77	7,84	16,30
при Н = 0,8						
σ	0,839	0,875	0,907	0,935	0,96	0,999
$W_{\text{сист}}$	4,97	6,40	8,60	12,31	20,00	800,00
$W_{\text{оч}}$	4,17	5,60	7,80	11,51	19,20	799,20
L	2,50	3,92	6,24	10,36	19,20	879,12
Q	2,98	4,48	6,88	11,08	20,00	880,00

Таблиця 4.3 – Отримані значення для $\mu = 2$:

при $H = 0,5$										
λ	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
ρ	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
$W_{\text{сист}}$	0,71	0,77	0,83	0,91	1,00	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00
$W_{\text{оч}}$	0,21	0,27	0,33	0,41	0,50	0,61	0,75	0,93	1,17	1,50
L	0,13	0,19	0,27	0,37	0,50	0,67	0,90	1,21	1,63	2,25
Q	0,43	0,54	0,67	0,82	1,00	1,22	1,50	1,86	2,33	3,00
при $H = 0,6$										
σ	0,389	0,44	0,489	0,537	0,583	0,629	0,673	0,717	0,76	0,802
$W_{\text{сист}}$	0,82	0,89	0,98	1,08	1,20	1,35	1,53	1,77	2,08	2,53
$W_{\text{оч}}$	0,32	0,39	0,48	0,58	0,70	0,85	1,03	1,27	1,58	2,03
L	0,19	0,28	0,38	0,52	0,70	0,93	1,23	1,65	2,22	3,04
Q	0,49	0,63	0,78	0,97	1,20	1,48	1,83	2,30	2,92	3,79
при $H = 0,7$										
σ	0,525	0,573	0,617	0,658	0,698	0,735	0,77	0,804	0,836	0,868
$W_{\text{сист}}$	1,05	1,17	1,31	1,46	1,66	1,89	2,17	2,55	3,05	3,79
$W_{\text{оч}}$	0,55	0,67	0,81	0,96	1,16	1,39	1,67	2,05	2,55	3,29
L	0,33	0,47	0,64	0,87	1,16	1,53	2,01	2,67	3,57	4,93
Q	0,63	0,82	1,04	1,32	1,66	2,08	2,61	3,32	4,27	5,68
при $H = 0,8$										
σ	0,73	0,765	0,796	0,824	0,848	0,871	0,892	0,91	0,928	0,944
$W_{\text{сист}}$	1,85	2,13	2,45	2,84	3,29	3,88	4,63	5,56	6,94	8,93
$W_{\text{оч}}$	1,35	1,63	1,95	2,34	2,79	3,38	4,13	5,06	6,44	8,43
L	0,81	1,14	1,56	2,11	2,79	3,71	4,96	6,57	9,02	12,64
Q	1,11	1,49	1,96	2,56	3,29	4,26	5,56	7,22	9,72	13,39

Таблиця 4.4 – Отримані значення для $\mu = 2,25$:

при $H = 0,5$										
λ	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
μ	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25
ρ	0,27	0,31	0,36	0,40	0,44	0,49	0,53	0,58	0,62	0,67
$W_{\text{сист}}$	0,61	0,65	0,69	0,74	0,80	0,87	0,95	1,05	1,18	1,33
$W_{\text{оч}}$	0,16	0,20	0,25	0,30	0,36	0,43	0,51	0,61	0,73	0,89
L	0,10	0,14	0,20	0,27	0,36	0,47	0,61	0,79	1,02	1,33
Q	0,36	0,45	0,55	0,67	0,80	0,96	1,14	1,37	1,65	2,00
при $H = 0,6$										
σ	0,354	0,4	0,445	0,489	0,531	0,573	0,613	0,653	0,693	0,731
$W_{\text{сист}}$	0,69	0,74	0,80	0,87	0,95	1,04	1,15	1,28	1,45	1,65
$W_{\text{оч}}$	0,24	0,30	0,36	0,43	0,50	0,60	0,70	0,84	1,00	1,21
L	0,15	0,21	0,29	0,38	0,50	0,66	0,84	1,09	1,40	1,81
Q	0,41	0,52	0,64	0,78	0,95	1,14	1,38	1,67	2,03	2,48
при $H = 0,7$										
σ	0,491	0,536	0,578	0,617	0,654	0,689	0,722	0,755	0,785	0,815
$W_{\text{сист}}$	0,87	0,96	1,05	1,16	1,28	1,43	1,60	1,81	2,07	2,40
$W_{\text{оч}}$	0,43	0,51	0,61	0,72	0,84	0,98	1,15	1,37	1,62	1,96
L	0,26	0,36	0,49	0,64	0,84	1,08	1,39	1,78	2,27	2,94
Q	0,52	0,67	0,84	1,04	1,28	1,57	1,92	2,36	2,89	3,60
при $H = 0,8$										
σ	0,704	0,738	0,769	0,796	0,821	0,843	0,864	0,883	0,9	0,916
$W_{\text{сист}}$	1,50	1,70	1,92	2,18	2,48	2,83	3,27	3,80	4,44	5,29
$W_{\text{оч}}$	1,06	1,25	1,48	1,73	2,04	2,39	2,82	3,35	4,00	4,85
L	0,63	0,88	1,18	1,56	2,04	2,63	3,39	4,36	5,60	7,27
Q	0,90	1,19	1,54	1,96	2,48	3,11	3,92	4,94	6,22	7,94

Таблиця 4.5 – Отримані значення для $\mu = 2,75$:

при $H = 0,5$										
λ	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
μ	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75
ρ	0,22	0,25	0,29	0,33	0,36	0,40	0,44	0,47	0,51	0,55
$W_{\text{сист}}$	0,47	0,49	0,51	0,54	0,57	0,61	0,65	0,69	0,74	0,80
$W_{\text{оч}}$	0,10	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,28	0,33	0,38	0,44
L	0,06	0,09	0,12	0,16	0,21	0,27	0,34	0,42	0,53	0,65
Q	0,28	0,34	0,41	0,49	0,57	0,67	0,77	0,90	1,04	1,20
при $H = 0,6$										
σ	0,302	0,342	0,38	0,417	0,453	0,489	0,524	0,558	0,591	0,624
$W_{\text{сист}}$	0,52	0,55	0,59	0,62	0,66	0,71	0,76	0,82	0,89	0,97
$W_{\text{оч}}$	0,16	0,19	0,22	0,26	0,30	0,35	0,40	0,46	0,53	0,60
L	0,09	0,13	0,18	0,23	0,30	0,38	0,48	0,60	0,74	0,91
Q	0,31	0,39	0,47	0,56	0,66	0,78	0,92	1,07	1,24	1,45
при $H = 0,7$										
σ	0,438	0,478	0,516	0,552	0,585	0,617	0,647	0,676	0,704	0,731
$W_{\text{сист}}$	0,65	0,70	0,75	0,81	0,88	0,95	1,03	1,12	1,23	1,35
$W_{\text{оч}}$	0,28	0,33	0,39	0,45	0,51	0,59	0,67	0,76	0,86	0,99
L	0,17	0,23	0,31	0,40	0,51	0,64	0,80	0,99	1,21	1,48
Q	0,39	0,49	0,60	0,73	0,88	1,04	1,24	1,46	1,72	2,03
при $H = 0,8$										
σ	0,66	0,693	0,723	0,75	0,774	0,796	0,816	0,835	0,853	0,869
$W_{\text{сист}}$	1,07	1,18	1,31	1,45	1,61	1,78	1,98	2,20	2,47	2,78
$W_{\text{оч}}$	0,71	0,82	0,95	1,09	1,25	1,42	1,61	1,84	2,11	2,41
L	0,42	0,57	0,76	0,98	1,25	1,56	1,94	2,39	2,95	3,62
Q	0,64	0,83	1,05	1,31	1,61	1,96	2,37	2,87	3,46	4,16

Раніше було обрано базисний набір показників функціонування СМО:

- а) середній час перебування заявки в системі,
- б) середній час перебування заявки в черзі,
- в) середня довжина черги та
- г) середня кількість заявок в системі.

Для кращого порівняння результатів в наступних пунктах проведено графічний аналіз кожного з показників для різних значень інтенсивності обслуговування.

Будуючи графіки для кожного показника якості обслуговування, зображається залежність відповідного показника від інтенсивності навантаження для кожного параметру Херста, зокрема $H=0,5$, що відповідає розподілу Пуассона, та $H=\{0,6\ 0,7\ 0,8\}$, що відповідає розподілу Вейбулла (як ознака самоподібності)

4.2.1 Аналіз показника середнього часу перебування заявки в системі.

Середній час перебування заявки в системі вказує на час, який займає обробка заявки в системі, починаючи з моменту її надходження до моменту виходу з системи. Для підвищення ефективності роботи системи необхідно забезпечити мінімальний середній час перебування заявки в системі.

У даному підрозділі проведений аналіз показника середнього часу перебування заявки в системі, визначеного за формулою (1,16), на основі графічного порівняння при різних значеннях параметра Херста для інтенсивності навантаження $\mu = 1,25, 2, 2,25, 2,75$.

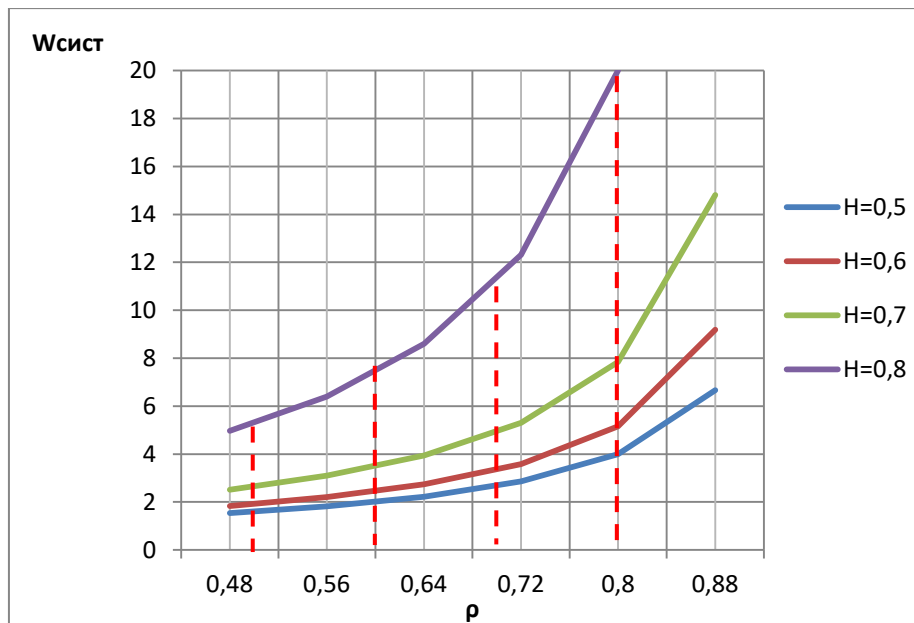


Рисунок 4.1 – Середній час перебування заявки в системі при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 1,25$

Із залежностей на рис. 4.1. можна бачити, що для $\mu = 1,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,48 до 0,88.

Інтервал середнього часу для $N = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 1,54 до 6,67.

При самоподібності з параметром Херста $N = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 1,83 до 9,2; при $N=0,7$ (зелена лінія) – від 2,52 до 14,8; при $N=0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 4,97 до 20.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 3,0 при зміні параметра Херста від $N = 0,5$ до $N = 0,8$ для $\mu = 1,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,48 \dots 0,88$.

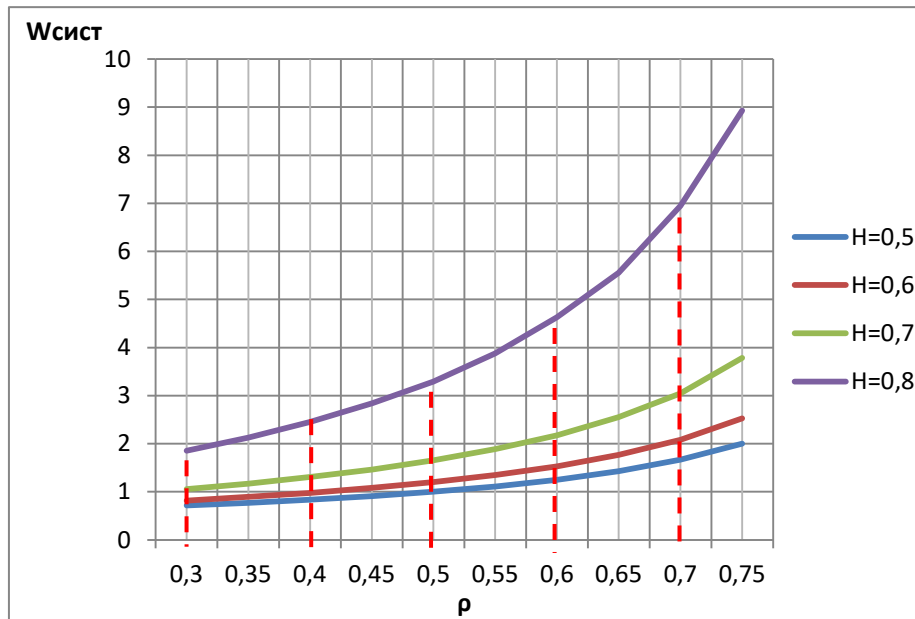


Рисунок 4.2 – Середній час перебування заявки в системі при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2$

Із залежностей на рис. 4.2. можна бачити, що для $\mu = 2$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,3 до 0,75.

Інтервал середнього часу для $N = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 0,71 до 2.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 0,82 до 2,53; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 1,05 до 3,79; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 1,85 до 8,93.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 4,47 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2$ і зміні навантаження $\rho = 0,3 \dots 0,75$.

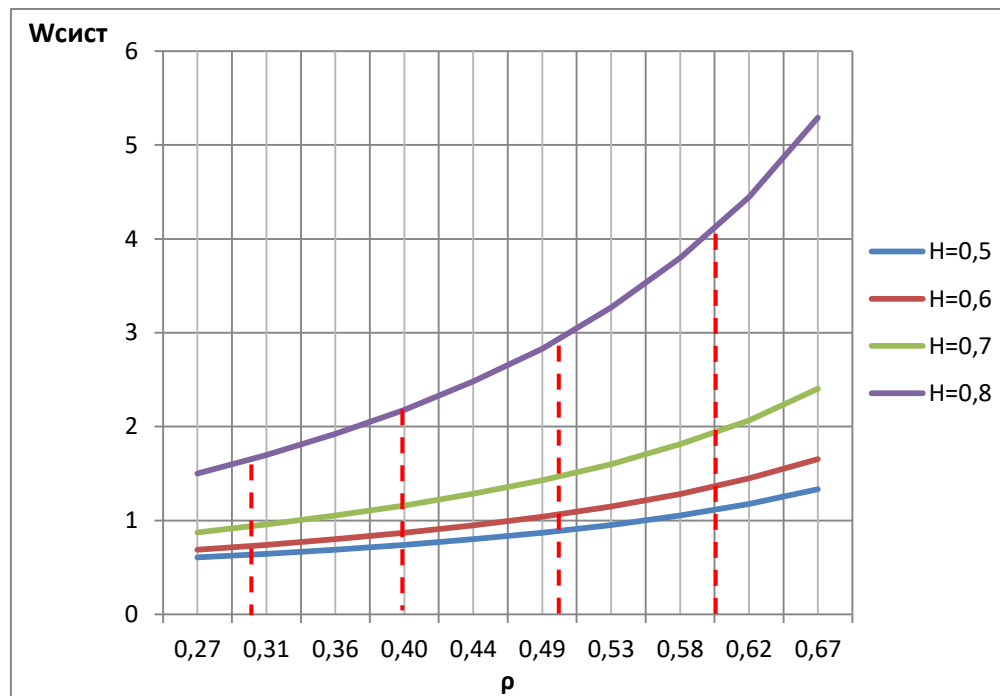


Рисунок 4.3 – Середній час перебування заявки в системі при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,25$

Із залежностей на рис. 4.3. можна бачити, що для $\mu = 2,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,27 до 0,67.

Інтервал середнього часу для $H = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 0,61 до 1,33.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 0,69 до 1,65; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,87 до 2,4; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 1,5 до 5,29.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 3,97 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,27 \dots 0,67$.

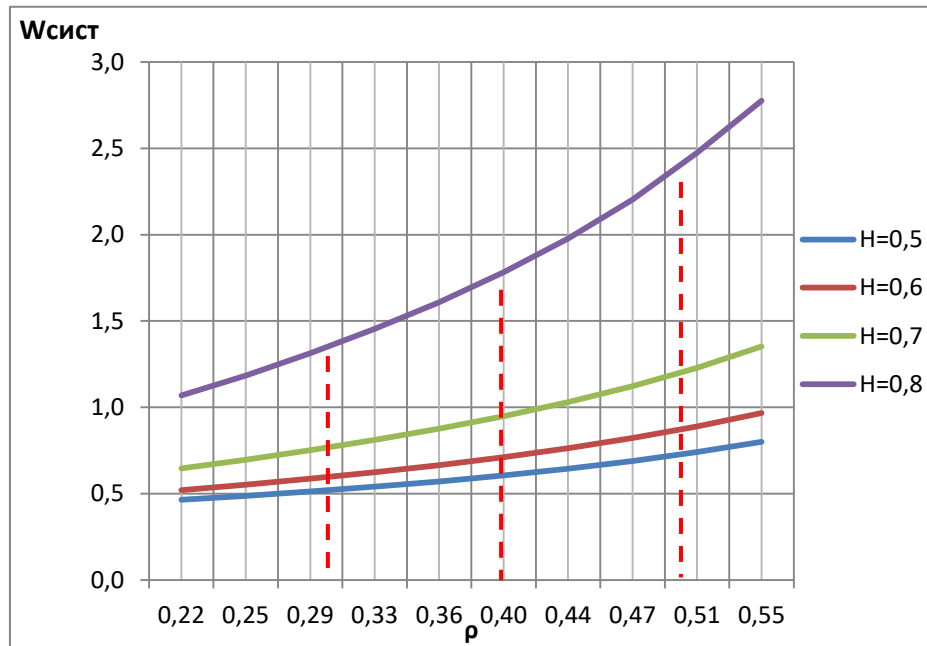


Рисунок 4.4 – Середній час перебування заявки в системі при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,75$

Із залежностей на рис. 4.4. можна бачити, що для $\mu = 2,75$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,22 до 0,55.

При $H = 0,5$ і $\rho = 0,22$ $W_{\text{сист}} = 0,47$, при збільшенні ρ до 0,55 $\rightarrow W_{\text{сист}} = 0,8$.

При самоподібності, з параметром Херста рівним $H = 0,6$, значення середнього часу змінюється від 0,52 до 0,97; при $H = 0,7$ значення середнього часу змінюється від 0,65 до 1,35; при параметрі Херста рівним $H = 0,8$ значення $W_{\text{сист}}$ змінюються від 1,07 до 2,78.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 3,48 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,75$ і зміні навантаження $\rho = 0,22 \dots 0,55$.

При розрахунку середнього часу перебування заявки в системі при різних значеннях параметру Херста (показника $W_{\text{сист}}$) найбільша залежність між розподілом Пуассона ($H = 0,5$) і самоподібністю, що описана розподілом Вейбулла за параметром Херста $H = 0,8$ припадає на значення інтенсивності навантаження 0,8 при інтенсивності обслуговування 2,0 і дорівнює 4,5!

Інші порівняння значень середнього часу перебування заявки в системі в залежності від параметру Херста і кожного значення інтенсивності навантаження відображено у Додатку Б в таблицях Б.1 – Б.7.

4.2.2 Аналіз показника середнього часу очікування заявки в черзі

Середній час очікування заявки в черзі вказує на час, який займає обробка заявки в черзі, починаючи з моменту її надходження до моменту початку обробки. Для підвищення ефективності роботи системи чергування необхідно забезпечити мінімальний середній час очікування заявки в черзі.

У даному підрозділі проведений аналіз показника середнього часу очікування в черзі, визначеного за формулою (1.19), на основі графічного порівняння при різних значеннях параметра Херста для інтенсивності навантаження рівній 1,25, 2, 2,25, 2,75.

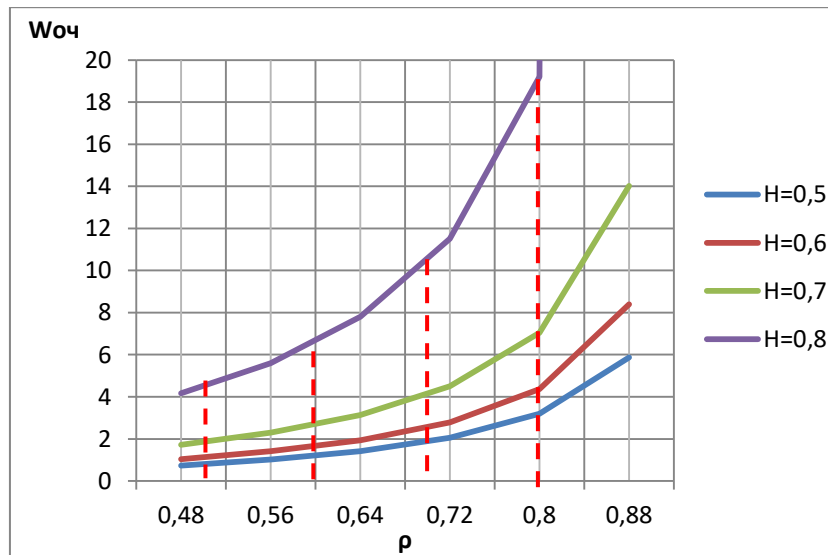


Рисунок 4.5 – Середній час очікування заявки при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 1,25$

Із залежностей на рис. 4.5 можна бачити, що для $\mu = 1,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,48 до 0,88.

При $H = 0,5$ (синя лінія) інтервал середнього часу очікування заявки в черзі змінюється від 0,74 до 5,87.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 1,03 до 8,4; при $H=0,7$ (зелена лінія) – від 1,72 до 14,01; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) середній час очікування заявки змінюється від 4,17 до 18,9.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 3,22 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 1,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,48 \dots 0,88$.

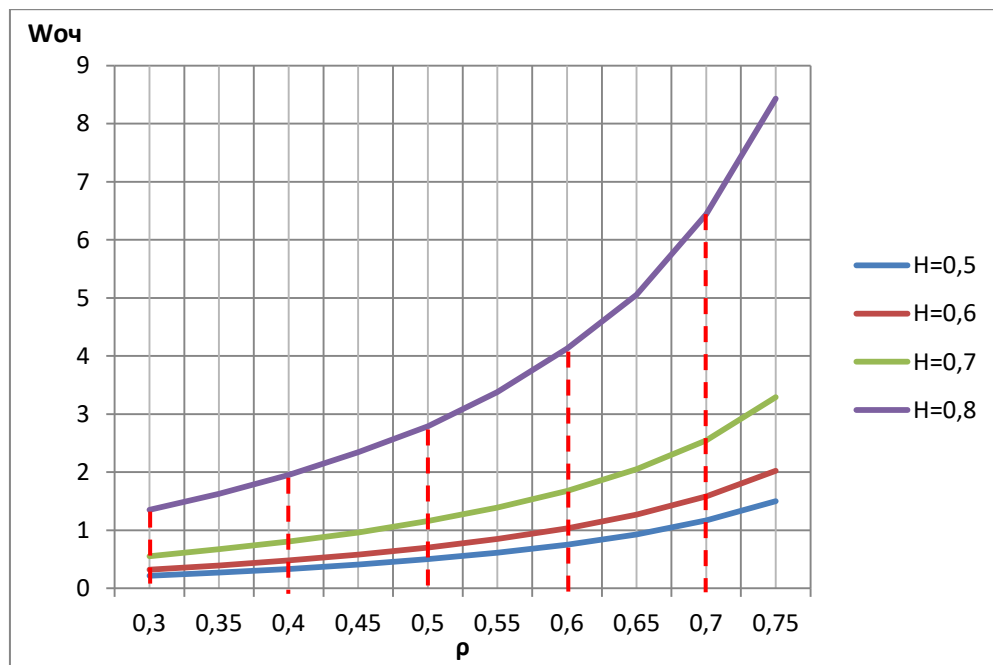


Рисунок 4.6 – Середній час очікування заявки при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2$

Із залежностей на рис. 4.6 можна бачити, що для $\mu = 2$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,3 до 0,75.

Інтервал середнього часу очікування заявки для $H = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 0,21 до 1,5.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 0,32 до 2,03; при $H=0,7$ (зелена лінія) – від 0,55 до 3,29; при $H=0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 1,35 до 8,43.

Отже, різниця в значаннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 5,62 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2$ і зміні навантаження $\rho = 0,3 \dots 0,75$.

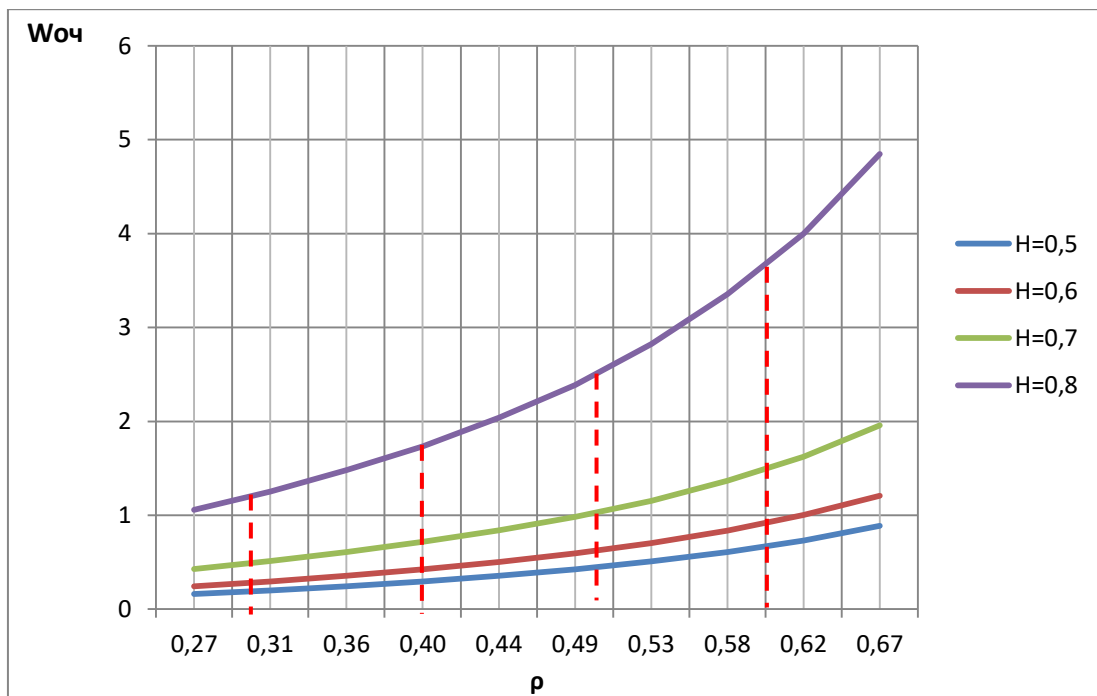


Рисунок 4.7 – Середній час очікування заявки при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,25$

Із залежностей на рис. 4.7 можна бачити, що для $\mu = 2,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,27 до 0,67.

Інтервал середнього часу очікування заявки для $H = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 0,16 до 0,89.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал змінюється від 0,24 до 1,21; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,43 до 1,96; при $H=0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 1,06 до 4,85.

Отже, різниця в значаннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 5,45 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,27 \dots 0,67$.

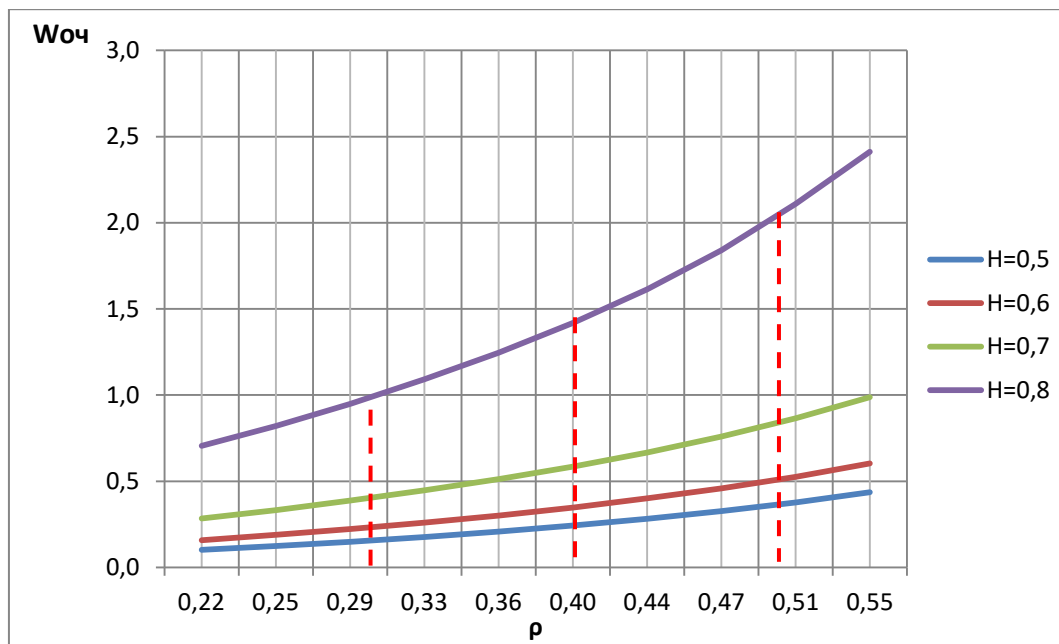


Рисунок 4.8 – Середній час очікування заявки при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,75$

Із залежностей на рис. 4.8 можна бачити, що для $\mu = 2,75$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,22 до 0,55.

Інтервал середнього часу очікування заявки для $H = 0,5$ (синя лінія) змінюється від 0,1 до 0,44.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) інтервал середнього часу перебування заявки змінюється від 0,16 до 0,6; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,28 до 0,99; при $H=0,8$ (фіолетова лінія) середній час змінюється від 0,71 до 2,41.

Отже, різниця в значеннях середнього часу перебування заявки може сягати числа 5,47 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,75$ і зміні навантаження $\rho = 0,22 \dots 0,55$.

При розрахунку показника середнього часу очікування заявки ($W_{оч}$) найбільша залежність між розподілом Пуассона ($H = 0,5$) і самоподібністю з параметром Херста $H = 0,8$ припадає на значення інтенсивності навантаження 0,75 при інтенсивності обслуговування $\mu = 2,0$ і рівна вона 5,6!

Інші порівняння значень середнього часу очікування заявки в черзі в залежності від параметру Херста і кожного значення інтенсивності навантаження відображено у Додатку В в таблицях В.1 – В.7.

4.2.3 Аналіз показника середньої довжини черги заявок

Середня довжина черги заявок визначається як середня кількість заявок, які перебувають в черзі на обробку в певний момент часу.

У даному пункті буде проаналізовано результати вимірювання показника середньої довжини черги заявок, визначеної за формулою (1.15), протягом певного періоду часу на основі графічного порівняння при різних значеннях параметра Херста для інтенсивності навантаження рівній 1,25, 2, 2,25, 2,75.

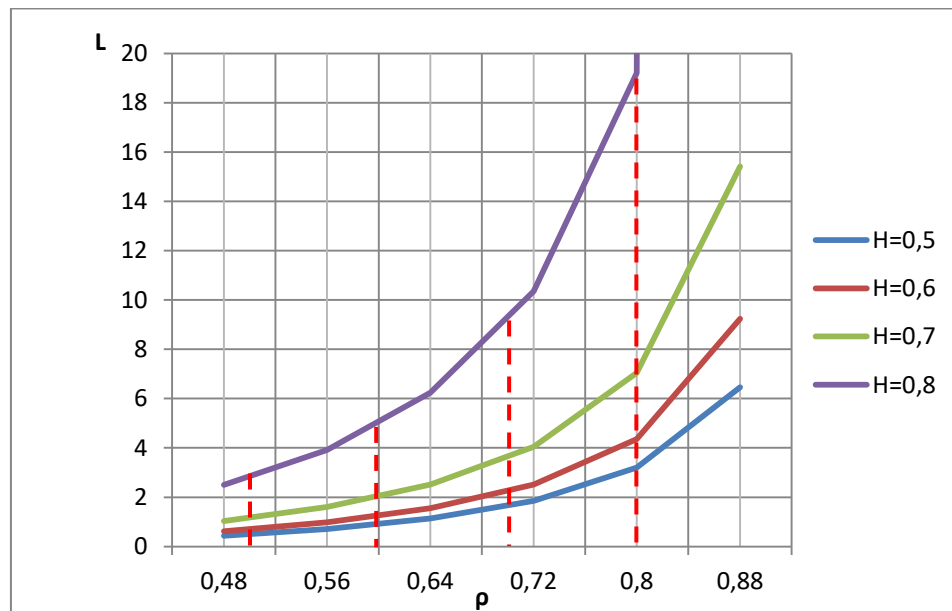


Рисунок 4.9 – Довжина черги заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 1,25$

Із залежностей на рис. 4.9 можна бачити, що для $\mu = 1,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,48 до 0,88.

При $H = 0,5$ (синя лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,44 до 6,45.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) довжина черги змінюється від 0,62 до 9,23; при $H=0,7$ (зелена лінія) – від 1,03 до 15,42; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) довжина черги заявок змінюється від 2,5 до 18,9.

Отже, різниця в значеннях довжини черги заявок може сягати числа 2,93 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 1,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,48 \dots 0,88$.

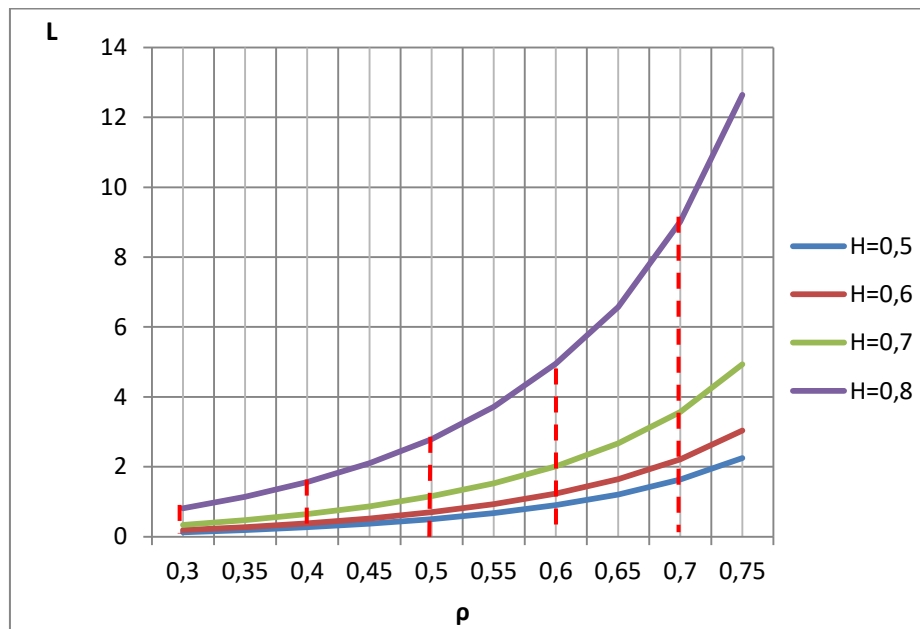


Рисунок 4.10 – Довжина черги заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2$

Із залежностей на рис. 4.10 можна бачити, що для $\mu = 2$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,3 до 0,75.

При $H = 0,5$ (синя лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,13 до 2,25.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) довжина черги змінюється від 0,19 до 3,04; при $H=0,7$ (зелена лінія) – від 0,33 до 4,93; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,81 до 12,64.

Отже, різниця в значеннях довжини черги заявок може сягати числа 5,61 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2$ і зміні навантаження $\rho = 0,3 \dots 0,75$.

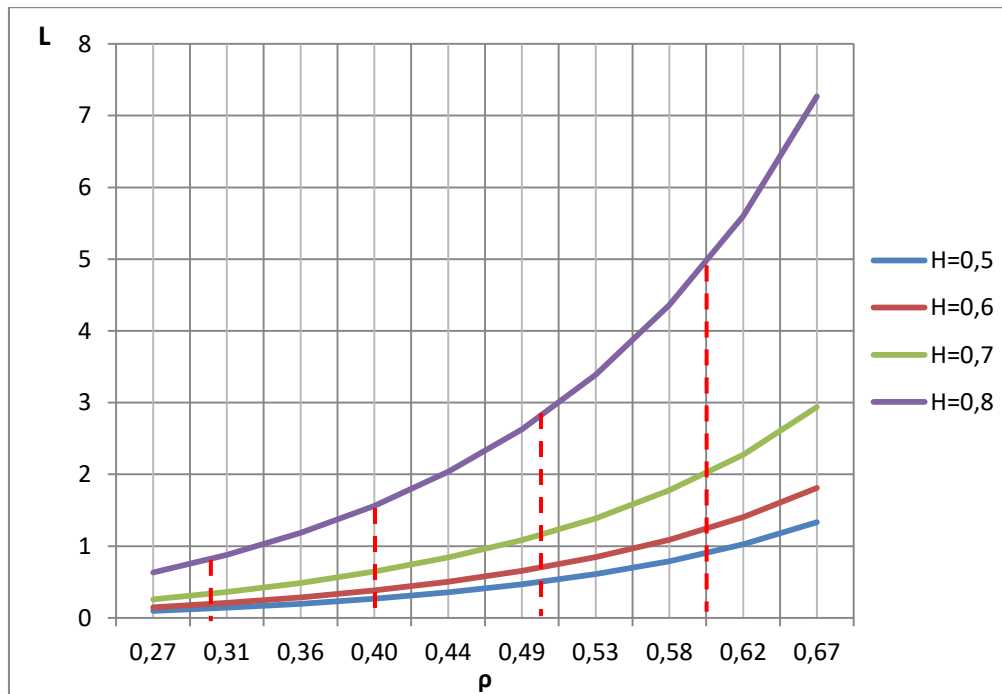


Рисунок 4.11 – Довжина черги заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,25$

Із залежностей на рис. 4.11 можна бачити, що для $\mu = 2,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,27 до 0,67.

При $H = 0,5$ (синя лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,1 до 1,33.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) довжина черги змінюється від 0,15 до 1,81; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,26 до 2,94; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,63 до 7,27.

Отже, різниця в значеннях довжини черги заявок може сягати числа 5,47 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,27 \dots 0,67$.

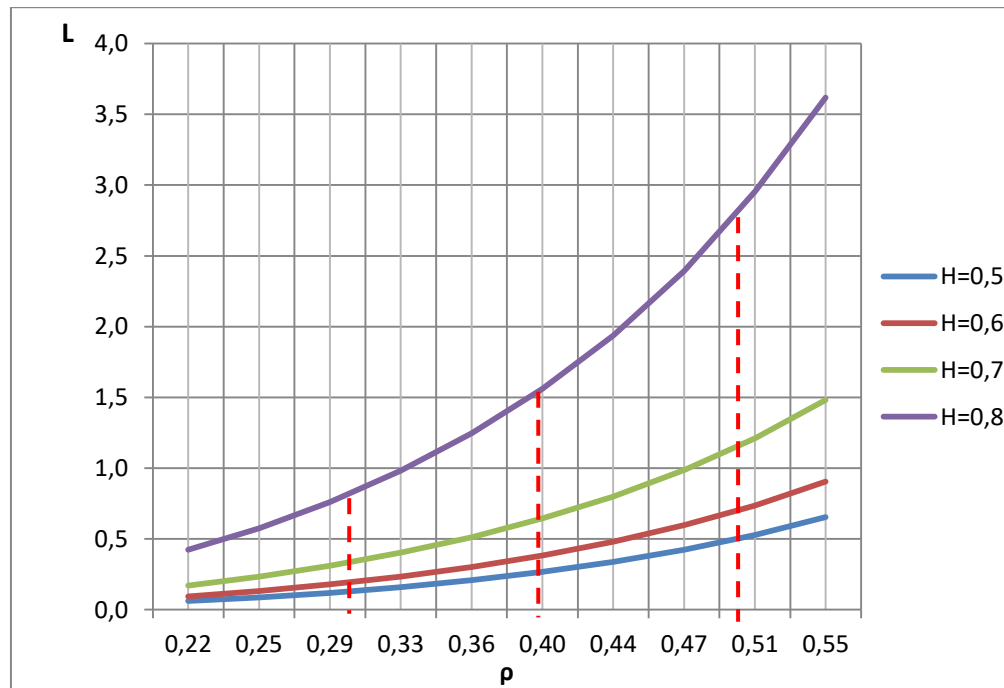


Рисунок 4.12 – Довжина черги заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,75$

Із залежностей на рис. 4.12 можна бачити, що для $\mu = 2,75$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,22 до 0,55.

При $H = 0,5$ (синя лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,06 до 0,65.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) довжина черги змінюється від 0,09 до 0,91; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,17 до 1,48; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) довжина черги заявок змінюється від 0,42 до 3,62.

Отже, різниця в значеннях довжини черги заявок може сягати числа 5,57 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,75$ і зміні навантаження $\rho = 0,22 \dots 0,55$.

При розрахунку показника довжини черги заявок L найбільша залежність між розподілом Пуассона ($H = 0,5$) і самоподібністю, що описана розподілом Вейбулла за параметром Херста $H = 0,8$ припадає на значення інтенсивності навантаження 0,75 при інтенсивності обслуговування 2,0 і рівна вона 5,61!

Інші порівняння значень довжини черги заявок в залежності від параметру Херста і кожного значення інтенсивності навантаження відображено у Додатку Г в таблицях Г.1 – Г.7.

4.2.4 Аналіз показника середньої кількості заявок в системі

Середня кількість заявок в системі визначається як середня кількість заявок, які перебувають в системі на обробку в певний момент часу.

У даному пункті буде проаналізовано результати вимірювання показника середньої кількості заявок протягом певного періоду часу, визначеної за формулою (1.14), на основі графічного порівняння при різних значеннях параметра Херста для інтенсивності навантаження рівній 1,25.

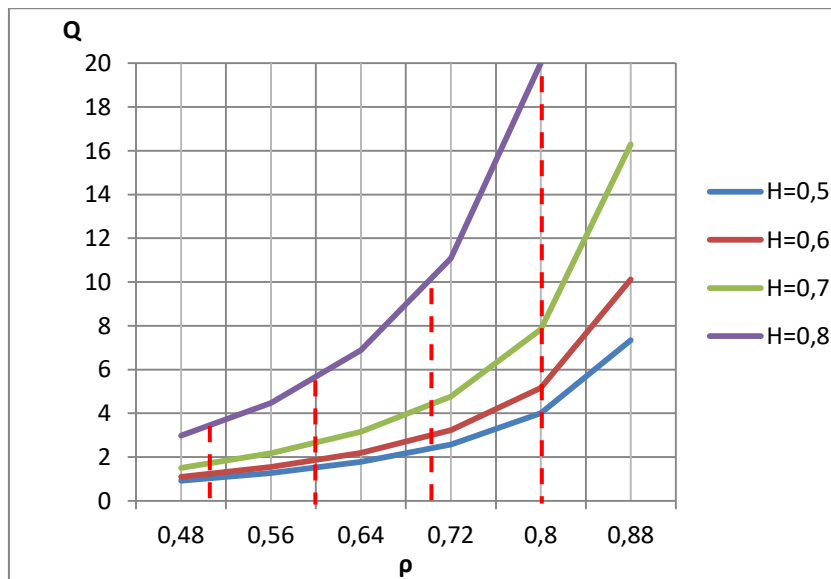


Рисунок 4.13 – Середня кількість заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 1,25$

Із залежностей на рис. 4.13 можна бачити, що для $\mu = 1,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,48 до 0,88.

При $H = 0,5$ (синя лінія) кількість заявок змінюється від 0,92 до 7,33.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) кількість заявок змінюється від 1,1 до 10,11; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 1,51 до 16,3; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) кількість заявок змінюється від 2,98 до 20,5.

Отже, різниця в значеннях кількості заявок може сягати числа 2,8 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 1,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,48 \dots 0,88$.

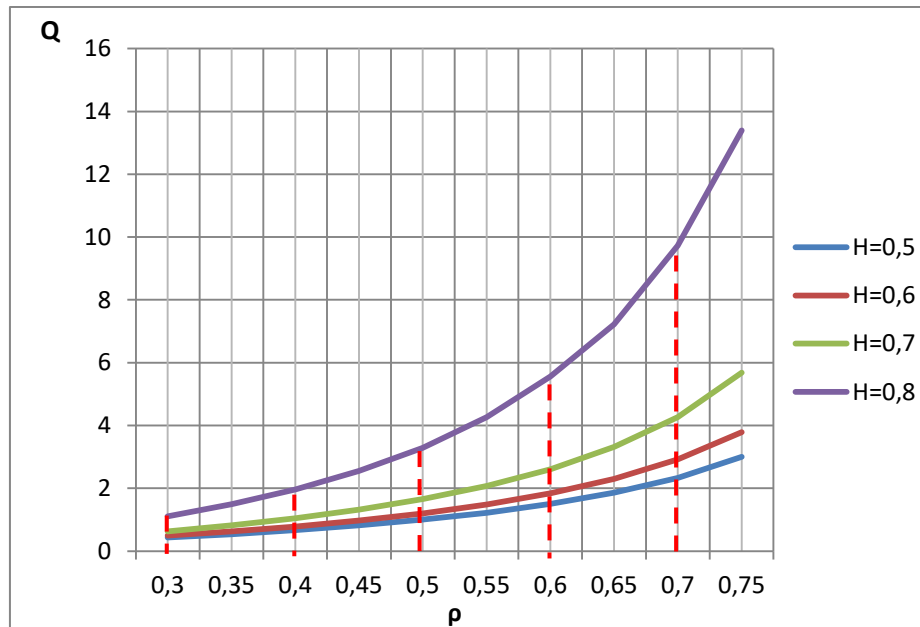


Рисунок 4.14 – Середня кількість заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2$

Із залежностей на рис. 4.14 можна бачити, що для $\mu = 2$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,3 до 0,75.

При $H = 0,5$ (синя лінія) кількість заявок змінюється від 0,43 до 3.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) кількість заявок змінюється від 0,49 до 3,79; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,63 до 5,68; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) кількість заявок змінюється від 1,11 до 13,39.

Отже, різниця в значеннях кількості заявок може сягати числа 4,46 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2$ і зміні навантаження $\rho = 0,3 \dots 0,75$.

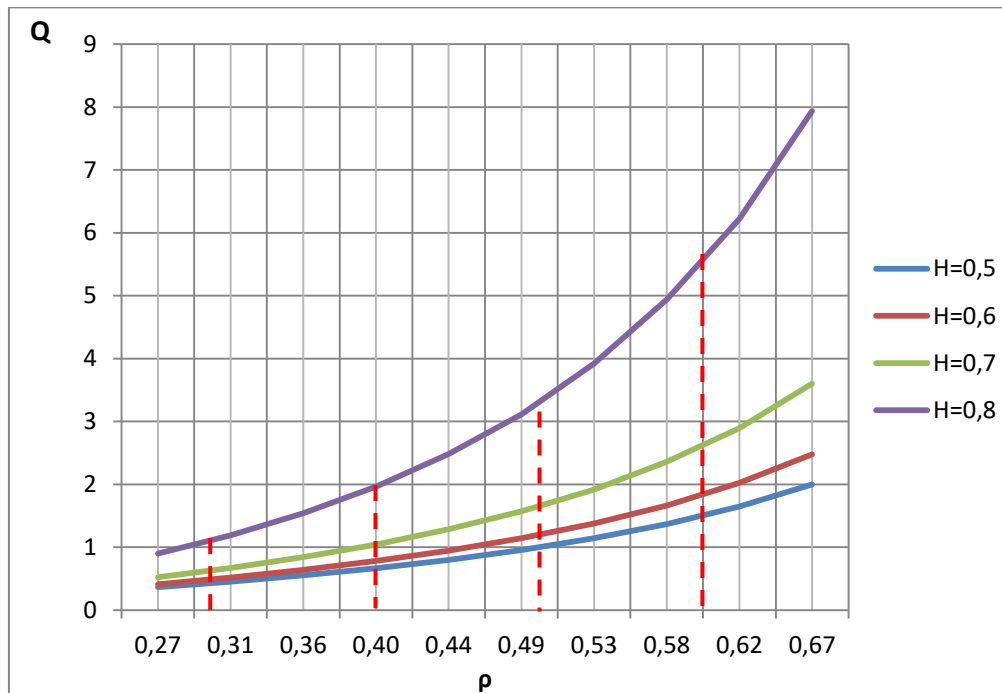


Рисунок 4.15 – Середня кількість заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,25$

Із залежностей на рис. 4.15 можна бачити, що для $\mu = 2,25$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,27 до 0,67.

При $H = 0,5$ (синя лінія) кількість заявок змінюється від 0,36 до 2.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) кількість заявок змінюється від 0,41 до 2,48; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,52 до 3,6; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) кількість заявок змінюється від 0,9 до 7,94.

Отже, різниця в значеннях кількості заявок може сягати числа 3,97 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,25$ і зміні навантаження $\rho = 0,27 \dots 0,67$.

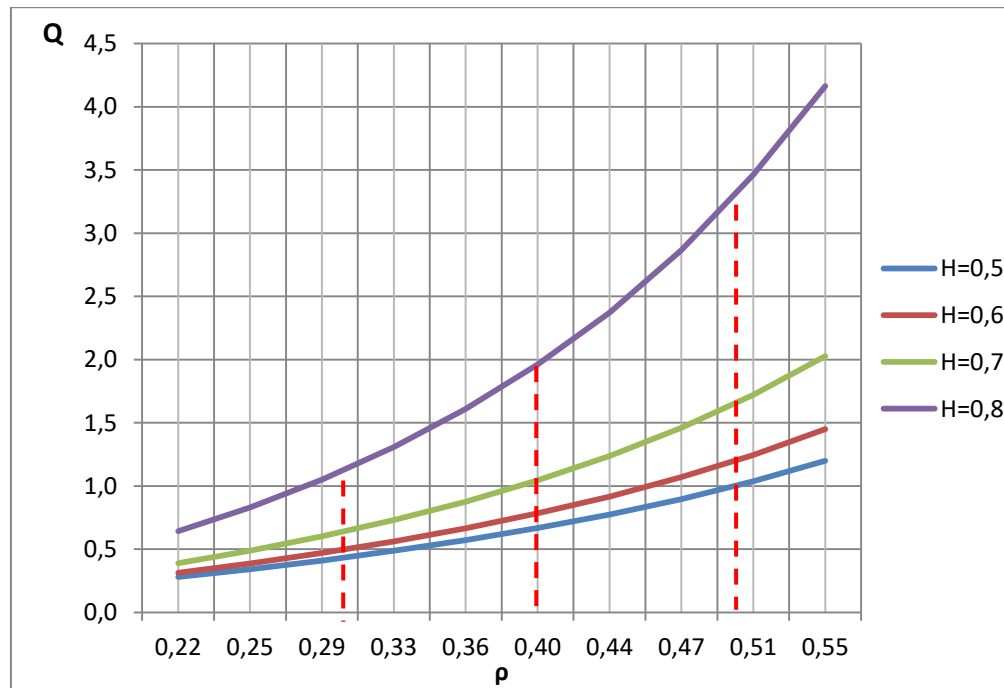


Рисунок 4.16 – Середня кількість заявок при різних значеннях параметру Херста для $\mu = 2,75$

Із залежностей на рис. 4.16 можна бачити, що для $\mu = 2,75$ інтервал інтенсивності навантаження змінюється від 0,22 до 0,55.

При $H = 0,5$ (синя лінія) кількість заявок змінюється від 0,28 до 1,2.

При самоподібності з параметром Херста $H = 0,6$ (червона лінія) кількість заявок змінюється від 0,31 до 1,45; при $H = 0,7$ (зелена лінія) – від 0,39 до 2,03; при $H = 0,8$ (фіолетова лінія) кількість заявок змінюється від 0,64 до 4,16.

Отже, різниця в значеннях кількості заявок може сягати числа 3,47 при зміні параметра Херста від $H = 0,5$ до $H = 0,8$ для $\mu = 2,75$ і зміні навантаження $\rho = 0,22 \dots 0,55$.

При розрахунку показника середньої кількості заявок Q найбільша залежність між розподілом Пуассона ($H=0,5$) і самоподібністю з параметром Херста $H=0,8$ припадає на значення інтенсивності навантаження 0,8 при інтенсивності обслуговування 2 і рівна вона 4,46!

Інші порівняння значень середньої кількості заявок в залежності від параметру Херста і кожного значення інтенсивності навантаження відображено у Додатку Д в таблицях Д.1 – Д.7.

4.3 Узагальнений аналіз розглянутих показників

Підсумовуючи отримані результати аналізу розглянутих показників, можна зробити висновок, що самоподібність є важливим фактором, який впливає на ефективність роботи системи.

Для кожного з розглянутих показників (середнього часу перебування заявки в системі, середнього часу очікування заявки в черзі, середньої довжини черги заявок та середньої кількості заявок в системі) було побудовано графіки, що дозволили порівняти найпростіший потік з потоками, що мали самоподібність з різними параметрами Херста (0,6, 0,7, 0,8). Було визначено тенденції у зміні показників та виявлення причин, які впливають на цей показник. Однією з причин було виявлено, що показники значно змінюються при зміні параметрів самоподібності, особливо при значенні параметра Херста, що наближується до 0,8.

Отже, дані дослідження про врахування фактору самоподібності можуть бути корисні для прогнозування та управління рівнем навантаження на сучасні телекомунікаційні мережі.

Узагальнюючи розглянуті залежності показників самоподібного потоку від найпростішого потоку, їх можна об'єднати вирахувавши середнє значення залежностей між різними інтенсивностями обслуговування для кожного показника якості обслуговування і отримуємо такі результати:

Таблиця 4.6

W _{сист}						
ρ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
H = 0,5	1	1	1	1	1	1
H = 0,6	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3
H = 0,7	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
H = 0,8	2,7	3,1	3,0	3,7	4,4	5

Таблиця 4.7

W _{оч}						
ρ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
H = 0,5	1	1	1	1	1	1
H = 0,6	1,5	1,5	1,5	1,3	1,3	1,4
H = 0,7	2,5	2,4	2,4	2,1	2,2	2,2
H = 0,8	6,3	6,0	5,9	5,3	5,5	6

Таблиця 4.8

L						
ρ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
H = 0,5	1	1	1	1	1	1
H = 0,6	2	1,3	1,4	1,3	1,4	1,4
H = 0,7	3,3	2,2	2,5	2,1	1,8	2,2
H = 0,8	8,3	5,4	5,9	5,4	5,3	6

Таблиця 4.9

Q						
ρ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
H = 0,5	1	1	1	1	1	1
H = 0,6	1,2	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3
H = 0,7	1,5	1,4	1,7	1,7	1,7	2
H = 0,8	2,6	2,9	3,3	3,8	4,3	5

Із розгляду Таблиць 4.6 – 4.9 можна зробити висновок, що найбільш чутливим показником щодо врахування фактора самоподібності є показники середнього часу очікування W_{оч} та середньої довжини черги L, для яких розбіжність у показниках у порівнянні із розподлом Пуассона складає до 6 разів. Решта показників теж вразлива щодо обрання умов функціонування інформаційної системи, оскільки розбіжністю у 5 разів теж нехтувати не можна.

4.4 Рекомендації щодо врахування властивості самоподібності при визначенні якісних показників функціонування сучасних інформаційних систем

Теорія масового обслуговування є ключовою для розуміння процесів, що відбуваються в сучасних інформаційних системах. Ця теорія дозволяє досліджувати процеси обслуговування та оптимізувати роботу системи.

Самоподібність є властивістю багатьох систем, в тому числі інформаційних систем, яка дозволяє використовувати спеціальні методи аналізу даних та зменшувати обсяг вимірювань.

Застосування методів самоподібності може допомогти в оптимізації процесів обслуговування та зменшенні ризиків відмов, а також забезпечити більш точне прогнозування майбутніх випадків відмов та підвищити якість функціонування системи в цілому.

В дослідженні визначено, що самоподібні процеси описуються за допомогою розподілів з «важкими хвостами». В якості адекватного розподілу для сучасних інформаційних систем обрано розподіл Вейбулла та досліджено математичну модель даного розподілу.

Також для визначення ступеня самоподібності, необхідно обрати показники функціонування СМО, що забезпечують необхідну якість обслуговування. В роботі було досліджено такі якісні показники, як середній час перебування заявки в черзі, середня довжина черги, середній час перебування заявки в системі, середня кількість заявок в системі.

Після виконання розрахунків необхідно перевірити правильність використання самоподібності, порівнявши отримані результати з іншим розподілом СМО, наприклад, з розподілом Пуассона.

Перевірити, чи дійсно відбувається самоподібність можна за допомогою графіків, які дозволяють відобразити залежності між показниками СМО та іншими параметрами. Отже, використовуючи розподіли, що не описує та описує властивість самоподібності, можна зробити висновок щодо розбіжностей значень показників у кілька разів.

За допомогою приблизної низки завдань, можна прогнозувати майбутнє функціонування СМО та визначити його ефективність, використовуючи властивість самоподібності.

Отже якщо досліджується телефонний трафік, то можна використовувати закон Ерланга. Якщо ми досліджуємо характеристики мереж обміну інформації сучасних мереж як об'єкти СМО і використовуємо традиційний математичний апарат, ми не можемо отримати адекватних характеристик, різниця може бути в

5 разів, в 7 разів, в 8,5 разів. І при цьому цікаво, що чутливість є не тільки з інтенсивністю вхідного потоку ρ , а і показника обслуговування μ . Якщо ми змінюємо ці параметри різниця в результатах по мірі того як ми додаємо фактор самоподібності все більше і більше розрізняється.

Узагальнюючи, врахування властивості самоподібності є важливим для досягнення більш точних та надійних результатів при визначенні якісних показників СМО, а також для прогнозування його роботи у майбутньому. Ця властивість дозволяє зменшити кількість експериментів та витрат на їх проведення, а також зробити більш обґрунтований вибір між різними варіантами СМО. Однак, для використання самоподібності необхідно зробити припущення та враховувати обмеження, а також перевірити правильність її застосування шляхом порівняння результатів з іншими розподілами СМО та за допомогою графіків. Загалом, врахування властивості самоподібності є важливим інструментом при аналізі та оптимізації СМО.

Висновки до розділу 4

Згідно з завданням до роботи, в четвертому розділі розглянуто та виконано пункт: побудови графіків за отриманими результатами для порівняння систем масового обслуговування з заданими вхідними даними зі системою масового обслуговування з властивістю самоподібності.

Оскільки самоподібність є важливою властивістю СМО, то обґрунтування базисного набору показників функціонування СМО повинно враховувати цю властивість.

В першому пункті визначено базисний набір показників для аналізу прояву властивостей самоподібності в системі масового обслуговування.

Отже основними показниками, які необхідно включити до базисного набору, є: середній час очікування на обслуговування, середня кількість заявок

в черзі, середній час перебування в системі, середня кількість заявок в системі. Оскільки вони дозволяють провести аналіз ефективності СМО та виявити властивості самоподібності. Ці властивості полягають у тому, що деякі статистичні показники СМО залишаються незмінними незалежно від масштабу часу.

Порівняння кількісних значень є важливим етапом аналізу прояву властивостей самоподібності у функціонуванні СМО. Отже в наступному пункті проведено порівняння кількісних значень показників базисного набору функціонування системи масового обслуговування з врахуванням і без врахуванням властивостей самоподібності трафіка. Це дозволяє встановити залежності між показниками та виявити відхилення від самоподібного поведінки.

Тобто, обравши в попередньому пункті базисний набір показників, проведено їх розрахунки і побудовано графіки порівняння за допомогою програмного забезпечення “Matlab” та “Excel”.

Обравши інтервал інтенсивності надходження заявок від 0,6 до 1,5 було розглянуто окремо випадки при сталій інтенсивності навантаження, а саме при: 1,25, 2, 2,25, 2,75. Розглядаючи кожен випадок окремо для кожного показника, було також визначено залежності самоподібного потоку з різними значеннями параметру Херста від найпростішого потоку. В деяких випадках залежність досягає 6! Це свідчить про важливість врахування фактору самоподібності у сучасних СМО.

В четвертому підрозділі виконано поставлене завдання щодо формування рекомендацій щодо практичного використання отриманих результатів.

Рекомендації передбачають проведення послідовного дослідження, яке базується на актуальному розподілі та визначенні необхідних показників. З використанням властивостей самоподібності можна прогнозувати майбутнє функціонування СМО та оцінювати його ефективність.

ВИСНОВКИ

Згідно з поставленим завданням роботи, в першому розділі розглянуто та виконано пункт: вивчення теорії систем масового обслуговування та її основні показники.

За підсумком розгляду цього пункту зазначено, що системи масового обслуговування – це такі системи, в яких у випадкові моменти часу надходять заявки на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування. Започаткована теорія масового обслуговування данським математиком Агнером Крарупом Ерлангом, на основі задач оптимізації кількості операторів телефонних комутаторів ще на початку XX сторіччя.

На основі аналізованої літератури, розглянуто одноканальну СМО без обмежень на довжину черги та описано граф станів даної системи.

Згідно з завданням до роботи, в даному розділі розглянуто та виконано наступний пункт: аналіз теоретичних аспектів самоподібної поведінки трафіка і його властивості.

Використання комп'ютерних мереж стали надзвичайно поширеними і це пов'язано зі збільшенням кількості мережевих додатків, зокрема соціальних мереж. Зі зростанням кількості користувачів і об'єму передачі даних в мережі збільшується навантаження на систему, що може призвести до погіршення якості обслуговування. З появою нових технологій та послуг, є вимоги до розробки нових ефективних методів управління мережевим навантаженням та оптимізації СМО.

Отже, дослідження та оптимізація СМО є важливим елементом розвитку телекомунікаційних мереж у сучасному світі.

Значним досягненням в теорії телетрафіку є відкриття самоподібних властивостей процесів, що протікають у мережах передачі.

Самоподібність в Інтернет-трафіку виникає, коли пакети з однаковою довжиною надходять на сервер одночасно або з однаковим інтервалом між надходженнями. Основною мірою ступеня самоподібності трафіку є показник Херста H , який може набувати значень в інтервалі від 0,5 (мінімальний ступінь самоподібності, тобто фактично його відсутність) до 1 (максимальний ступінь самоподібності, який на практиці не зустрічається). Що ближче цей параметр до одиниці, то яскравіше проявляються самоподібні властивості. Ознаками самоподібності є: білий шум, внутрішня кореляція, асимптотика та подібність.

Отже, СМО розглядається на прикладі соціальних мереж, так як це на сьогодні є актуальною темою для вивчення і аналізу для забезпечення необхідної якості обслуговування.

Для опису самоподібності використовуються розподіли з «важкими хвостами», тобто із ознаками кореляції між завками вхідного потоку.

Згідно з завданням до роботи, в другому розділі розглянуто та виконано пункт: порівняння розподілів з «важкими хвостами», що є методом дослідження самоподібності, який базується на порівнянні характеристик розподілів різних параметрів системи, а саме: розподіл Вейбулла і розподіл Парето.

За підсумком розгляду цього пункту показано, що масове використання соціальних мереж та збільшення різноманітних послуг призвело до того, що мережевий трафік став більш складним і непередбачуваним, що робить актуальною проблему забезпечення якості обслуговування.

Ідея технології QoS полягає у забезпеченні непомітної для користувача гарантованої передачі пакетів даних. Ця технологія може застосовуватись в різних місцях, таких як Інтернет, соціальні мережі, вдома, в офісі, бібліотеці, аеропорту тощо. Завдяки QoS можна гарантувати, що користувачі не матимуть проблем з завантаженням файлів, відеовикликами, розмовами через IP-телефонію та переглядом будь-яких онлайн-документів у локальній або глобальній мережі.

Для досягнення необхідної якості обслуговування, в роботі розглядаються показники, які описуються за допомогою формул Літтла. Дані формули є важливим елементом теорії масового обслуговування, оскільки дозволяють уникнути складних перетворень при виведенні характеристик системи за певних умов.

В наступному пункті було аналізовано розподіл Парето, для опису властивості самоподібності.

Розподіл Парето може використовуватись для опису властивості самоподібності, яка притаманна багатьом системам і являється ключовою у побудові математичних моделей для аналізу поведінки цих систем.

В даному пункті було розглянуто формули для опису розподілу, а саме: функція розподілу, математичне очікування, дисперсія, зв'язок з параметром Херста, а також якісні показники.

Але недоліком даного розподілу є те, що він не враховує взаємодію між компонентами системи, що може привести до невірної оцінки поведінки системи в цілому. Це означає, що різні масштаби часових інтервалів не мають подібного розподілу. У розподілі Парето, чим більша величина, тим менше ймовірність її появи. Також має властивість нескінченної дисперсії, тобто висока мінливість вхідного трафік.

Одним з недоліків є те, що розподіл Паретто не враховує зв'язків між різними складовими системи, що може призвести до неточностей в прогнозуванні потоків даних.

Ці властивості не відповідають властивості самоподібності.

Завданням наступного пункту було аналізувати розподіл Вейбулла, який також може описувати СМО з властивістю самоподібності.

Розподіл Вейбулла – це безперервний розподіл ймовірностей, який використовується для моделювання часу затримки передачі даних та часу

відмови елементів мережі. Застосування розподілу Вейбулла дозволяє збільшити ефективність та надійність мережі.

Було також розглянуто формули для опису розподілу, а саме: функції розподілу та щільності ймовірності, математичне очікування, дисперсію та зв'язок з параметром Херста.

Вирішено задачу порівняння розподілів з «важкими хвостами», так як за допомогою них описуються самоподібні процеси. Найбільш часто розглядаються вченими в минулому і теперішньому століттях розподіли Парето та Вейбулла.

В даному пункті проведено порівняння функцій розподілів Пуассона, Вейбулла та Парето. Так як формули розподіл Пуассона та Вейбулла мають експоненційні множники, то розподіл буде показниковим, а формула розподілу Парето містить степеневий множник, що свідчить про степеневий характер випадкової величини.

Розподіл Парето не є достатньо адекватним для опису загальної моделі СМО в даній ситуації. А Розподіл Вейбулла має асимптотику, тобто він не втрачає адекватності при значенні співпадіння з експоненціальним розподілом між подільною Пуассоннівського потоку 0,5 та 0,001.

Але при зміні коеф Херста на одну тисячну при розподілі Паретто, буде злам розподілу, тому що експоненційний розподіл для Пуассона – це експонента, а розподіл Паретто – це показний закон розподілу.

Отже, для коректного порівняння якісних характеристик доречно буде використати розподіли Пуассона і Вейбулла, так як вони мають аналогічну асимптотику. Це дозволяє коректно використовувати обидва розподіли для порівняння якісних характеристик.

Згідно з завданням до роботи, в третьому розділі розглянуто та виконано пункт: розробки математичної моделі системи масового обслуговування для найпростішого потоку, тобто розподілу Пуассона.

Розподіл Пуассона або найпростіший потік розглядається, у раніше зазначеному випадку, коли параметр Херста рівний 0,5 (відсутність самоподібності), для подальшого порівняння якісних показників. Отже впливає задача доведення цього твердження.

З попереднього розділу було визначено адекватний розподіл для опису самоподібності – розподіл Вейбулла. Використовуючи формули для даного розподілу, було проведено ряд розрахунків і доведено вірність твердження – $H=0,5$ – найпростіший розподіл. Після розрахунків отримано рівність $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$, тобто можна зазначити що формули для підрахунку показників для розподілу Пуассона і розподілу Вейбулла є рівносильними.

В наступному пункті даного розділу було виконано завдання: розробки математичної моделі з урахуванням властивостей самоподібності, яка описується розподілом Вейбулла. Було проведено розрахунок основних значень, для подальшого розрахунку σ , при різних значень параметру Херста, а саме 0,6, 0,7 та 0,8.

Згідно з завданням до роботи, в четвертому розділі розглянуто та виконано пункт: побудови графіків за отриманими результатами для порівняння систем масового обслуговування з заданими вхідними даними зі системою масового обслуговування з властивістю самоподібності.

Оскільки самоподібність є важливою властивістю СМО, то обґрунтування базисного набору показників функціонування СМО повинно враховувати цю властивість.

В першому підрозділі визначено базисний набір показників для аналізу прояву властивостей самоподібності в системі масового обслуговування.

Отже, основними показниками, які необхідно включити до базисного набору, є: середній час очікування на обслуговування, середня кількість заявок в черзі, середній час перебування в системі, середня кількість заявок в системі. Оскільки вони дозволяють провести аналіз ефективності СМО та виявити властивості самоподібності. Ці властивості полягають у тому, що деякі статистичні показники СМО залишаються незмінними незалежно від масштабу часу.

Порівняння кількісних значень є важливим етапом аналізу прояву властивостей самоподібності у функціонуванні СМО. Отже в наступному пункті проведено порівняння кількісних значень показників базисного набору функціонування системи масового обслуговування з врахуванням і без врахування властивостей самоподібності трафіка. Це дозволяє встановити залежності між показниками та виявити відхилення від самоподібного поведінки.

Тобто, обравши в попередньому пункті базисний набір показників, проведено їх розрахунки і побудовано графіки порівняння за допомогою програмного забезпечення “Matlab” та “Excel”.

Обравши інтервал інтенсивності надходження заявок від 0,6 до 1,5 було розглянуто окремо випадки при сталій інтенсивності навантаження, а саме при: 1,25, 2, 2,25, 2,75. Розглядаючи кожен випадок окремо для кожного показника, було також визначено залежності самоподібного потоку з різними значеннями параметру Херста від найпростішого потоку. В деяких випадках залежність досягає 6! А це свідчить про важливість врахування фактору самоподібності у сучасних СМО.

В четвертому підрозділі виконано поставлене завдання щодо формування рекомендацій щодо практичного використання отриманих результатів.

Рекомендації передбачають проведення послідовного дослідження, яке базується на актуальному розподілі та визначенні необхідних показників. З

використанням властивостей самоподібності можна прогнозувати майбутнє функціонування СМО та оцінювати його ефективність.

Отже, всі пункти Завдання на магістерську дисертацію виконано.

Мета дисертаційного дослідження досягнута.

Результати магістерської дисертації опубліковано в статті видання групи «Б» [35] та в текстах двох тез на науково-технічних конференціях [30, 36].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Erlang, Agner K. (1909), "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations", in The Life and Works of A.K. Erlang, by Brockmeyer, E.; Halstrøm, H. L.; Jensen, Arne (eds.), Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences, 2, Akademiet for de Tekniske Videnskaber, pp. 131-137
2. https://nmetau.edu.ua/file/03_3.3_lbr_gr_rbr_.pdf
3. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів. Навчальний посібник, ч. 2, Суми ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2013 р., ст. 104.
4. https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/6mihalevich_elementarna_matematik_a_algebra_ch1/44.htm
5. Kleynrok L. Theory of queuing system service: [I.I. Grushko; transl from Eng.]. – М.: Engineering, 1979.
6. Пустовойтов П. Є. Математичні моделі мереж зв'язку, навчальний посібник, м. Харків, 2019 р., ст.. 104
7. Little, J.D.C. (1961): A Proof for the Queueing Formula $L = \lambda W$. Operations Research, Vol. 9 (1961), pp. 383–387.
8. Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., and Wilson D.V. On the self-similarity of ethernet traffic // IEEE/ACM Transactions of Networking, 2(1), 1994. — P.1-15.
9. Ernande F. Melo and H. M. de Oliveira “An Overview of Self-Similar Traffic: Its Implications in the Network Design”, 2020 p.9
10. Hurst, H.E. (1951). "Long-term storage capacity of reservoirs". Transactions of the American Society of Civil Engineers. v.116, p.770.
11. Струбицький Р. П. «Самоподібна модель завантаженості хмаркових сховищ даних». Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2015. – №814. – С. 147–156.

12. Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Third Edition, 2014, 400pp.
13. Peitgen, Heinz-Otto and Michael F. Barnsley. “The science of fractal images.”, 2011. 312 pp.
14. Mandelbrot, B. B., *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. San Francisco. W. H. Freeman and Company. 1977. 365 pp.
15. Crovella, M., Kim, G. and Park, K. (1996). On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols* 171–180.
16. Erramilli, A., Narayan, O. and Willinger, W. (1996). Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic. *IEEE/ACM Trans. Network Comput.* 4 209–223.
17. Resnick, S. and Samorodnitsky, G. (1997). Performance decay in a single server exponential queueing model with long range dependence. *Oper. Res.* 45 235–243.
18. А. Л. Литвинов *Теорія систем масового обслуговування : навч. посібник / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018, 141 с.*
19. ITU-T Rec. E.800 «Definitions of terms related to quality of service» 2008 32 p.
20. ITU-T Rec. Y.1541 «Network performance objectives for IP-based services» 2011 66 p.
21. V. Pareto (1897). *Cours d'Economie Politique*. F. Rouge, Lausanne, Switzerland.
22. Morella M., Rossi F., Falato D., Lubrano M. “Legge di Pareto e sue applicazioni” 2021, p. 21.
23. Park K., Willinger W. *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*. — New York: Wiley, 2000. — 576 p.

24. Klemm A., Lindemann C., Lohmann M. Traffic Modeling of IP Networks Using the Batch Markovian Arrival Process // Performance Evaluation 54 (2) (2003) 149-173.
25. Guoping Zeng "Two common properties of the erlang-B function, erlang-C function, and Engset blocking function", Mathematical and Computer Modelling, Elsevier Science, 37 (12–13), June 2003, p. 1287–1296.
26. Ageyev D., Qasim N. “LTE EPS Network with Self-Similar Traffic Modeling for Performance Analysis” 2015 Second International Scientific-Practical Conference “Problems of Infocommunications. Science and Technology” 2015, p. 275-277.
27. Weibull, W. A Statistical Theory of Strength of Materials; Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag: Stockholm, Sweden, 1939.
28. Weibull, W. A statistical distribution function of wide applicability. J. Appl. Mech. 1951, 18, 293–297.
29. Erramilli, A., Narayan, O. and Willinger, W. (1996). Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic. IEEE/ACM Trans. Network Comput. 4 209–223.
30. Уривський Л.О., Криклива А.В. Дослідження динаміки показників обслуговування в СМО із самоподібним трафіком / К.: ІТС КПІ ім. Ігоря Сікорського, XVI Міжнародна НТК «Перспективи телекомунікацій», /Збірник матеріалів. – 2022. - с.53...58.
31. Millán, G.; Lefranc, G. “A fast multifractal model for self-similar traffic flows in high-speed computer networks,” Procedia Computer Science, Vol. 17, P. 420–425, 2013.
32. <https://calcworkshop.com/continuous-probability-distribution/weibull-lognormal-distribution/>
33. Sheluhin O, Smolskiy S and Osin A 2007 Self-similar processes in telecommunications. John Wiley & Sons.

34. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis “Introduction to Probability”, Second edition, 2008, pp. 539.
35. Uryvsky L., Kryklyva A. Analysis of differences in characteristics in queuing systems with dynamics of input streams self-similarity / Information & Telecommunication Sciences, № 1, 2022. - p.p. 22-26.
36. Уривський Л.О., Сколець А.В. Дослідження впливу фактору самоподібності на функціонування СМО трафіком / К.: ІТС КПІ ім. Ігоря Сікорського, XVII Міжнародна НТК «Перспективи телекомунікацій», /Збірник матеріалів. – 2023. - с. 68-71.

ДОДАТОК А

Код для підрахунку значень в ПЗ «MATLAB»

Для визначення σ при $H = 0,6$, використано:

```

%exp = the exponent
%t = time variable
s = 0.001:0.001:0.9; %s =  $\sigma$ , бо  $0 \leq \sigma < 1$ 
h1 = 0.6;
l1 = 0.6:0.1:1.5; %  $0.5 \leq \lambda \leq 1.5$ 
n1 = [0.75 1 1.25 1.5 2 2.25 2.5 2.75 3 3.25]; %  $0.5 \leq \mu \leq 3.25$ 
r1 = [0.8 0.7 0.64 0.6 0.5 0.49 0.48 0.47 0.46 0.45]; %  $0.45 \leq \rho \leq 1$ 
f = (@(t,n,s,b,a) exp((-n+n*s).*t).*t.^(a-1).*exp(-
b*(t.^a)));
    for i = 1:length(s)
        for j = 1:10
            a1 = 2-2.*h1; % a =  $\alpha$ 
            funB1 = 1+1./a1;
            b1 = (l1(j)*gamma(funB1)).^a1; %b =  $\beta$ , gamma - Euler
            gamma function
            b2 = gamma(funB1);
            sigma(i,j) = a1*b1*integral(@(t) f(t,n1(j),s(i),b1,a1),
            0, 100); % H=0.6
        end
    end
end

```

Для визначення σ при $H = 0,7$, використано:

```

%exp = the exponent
%t = time variable
s = 0.001:0.001:0.9; %s =  $\sigma$ , бо  $0 \leq \sigma < 1$ 
h1 = 0.7;
l1 = 0.6:0.1:1.5; %  $0.5 \leq \lambda \leq 1.5$ 
n1 = [0.75 1 1.25 1.5 2 2.25 2.5 2.75 3 3.25]; %  $0.5 \leq \mu \leq 3.25$ 
r1 = [0.8 0.7 0.64 0.6 0.5 0.49 0.48 0.47 0.46 0.45]; %  $0.45 \leq \rho \leq 1$ 
f = (@(t,n,s,b,a) exp((-n+n*s).*t).*t.^(a-1).*exp(-
b*(t.^a)));

```

```

    for i = 1:length(s)
        for j = 1:10
a1 = 2-2.*h1; % a =  $\alpha$ 
funB1 = 1+1./a1;
b1 = (l1(j)*gamma(funB1)).^a1; %b =  $\beta$ , gamma - Euler
gamma function
b2 = gamma(funB1);
sigma(i,j) = a1*b1*integral(@(t) f(t,n1(j),s(i),b1,a1),
0, 100); % H=0.7
        end
    end
end

```

Для визначення σ при $H = 0,8$, використано:

```

%exp = the exponent
%t = time variable
s = 0.001:0.001:0.9; %s =  $\sigma$ , бо  $0 \leq \sigma < 1$ 
h1 = 0.8;
l1 = 0.6:0.1:1.5; %  $0.5 \leq \lambda \leq 1.5$ 
n1 = [0.75 1 1.25 1.5 2 2.25 2.5 2.75 3 3.25]; %  $0.5 \leq \mu \leq 3.25$ 
r1 = [0.8 0.7 0.64 0.6 0.5 0.49 0.48 0.47 0.46 0.45]; %
0.45  $\leq \rho \leq 1$ 
f = @(t,n,s,b,a) exp((-n+n*s).*t).*t.^(a-1).*exp(-
b*(t.^a));
    for i = 1:length(s)
        for j = 1:10
a1 = 2-2.*h1; % a =  $\alpha$ 
funB1 = 1+1./a1;
b1 = (l1(j)*gamma(funB1)).^a1; %b =  $\beta$ , gamma - Euler
gamma function
b2 = gamma(funB1);
sigma(i,j) = a1*b1*integral(@(t) f(t,n1(j),s(i),b1,a1),
0, 100); % H=0.8
        end
    end
end

```

ДОДАТОК Б

Порівняння значень середнього часу перебування заявки в системі в залежності від параметру Херста

Таблиця Б.1 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	1,55	2	2,55	3,4	2	2,4	3,5	7,5
Залежність	1	1,29	1,65	2,19	1	1,2	1,75	3,75

Таблиця Б.2 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,7 та 0,8

ρ	0,7				0,8			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	2,5	3,5	5	11,5	4	5,2	8	20
Залежність	1	1,4	2	4,6	1	1,3	2	5

Таблиця Б.3 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 2$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	0,7	0,8	1	1,8	0,8	1	1,3	2,5	1	1,2	1,7	3,3
Залежність	1	1,14	1,43	2,57	1	1,25	1,63	3,13	1	1,2	1,7	3,3

Таблиця Б.4 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 2$ для ρ 0,6 та 0,7

ρ	0,6				0,7			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	1,3	1,5	2,2	4,6	1,7	2,1	3	7
Залежність	1	1,15	1,69	3,54	1	1,24	1,76	4,12

Таблиця Б.5 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,3 та 0,4

ρ	0,3				0,4			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	0,6	0,7	0,9	1,6	0,7	0,8	1,2	2,2
Залежність	1	1,17	1,5	2,67	1	1,14	1,71	3,14

Таблиця Б.6 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	0,9	1,0	1,5	2,9	1,1	1,4	2	4,1
Залежність	1	1,11	1,67	3,22	1	1,27	1,82	3,73

Таблиця Б.7 – Залежності показника $W_{\text{сист}}$, коли $\mu = 2,75$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{\text{сист}}$	0,5	0,6	0,8	1,4	0,6	0,7	0,9	1,8	0,7	0,9	1,2	2,4
Залежність	1	1,2	1,6	2,8	1	1,17	1,5	3	1	1,29	1,71	3,43

ДОДАТОК В

Порівняння значень середнього часу очікування заявки в черзі в залежності від параметру Херста.

Таблиця В.1 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,75	1,1	1,9	4,5	1,2	1,7	2,5	6,7
Залежність	1	1,47	2,53	6	1	1,42	2,08	5,58

Таблиця В.2 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,7 та 0,8

ρ	0,7				0,8			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	1,9	2,5	4,1	10,7	3,2	4,4	7	19,2
Залежність	1	1,32	2,16	5,63	1	1,38	2,19	6

Таблиця В.3 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 2$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,2	0,3	0,5	1,4	0,3	0,5	0,8	2	0,5	0,7	1,2	2,8
Залежність	1	1,5	2,5	7	1	1,67	2,67	6,67	1	1,4	2,4	5,6

Таблиця В.4 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 2$ для ρ 0,6 та 0,7

ρ	0,6				0,7			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,8	1	1,7	4,1	1,2	1,6	2,6	6,5
Залежність	1	1,25	2,13	5,13	1	1,33	2,17	5,42

Таблиця В.5 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,3 та 0,4

ρ	0,3				0,4			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,2	0,3	0,5	1,1	0,3	0,4	0,6	1,7
Залежність	1	1,5	2,5	5,5	1	1,33	2	5,67

Таблиця В.6 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,5	0,7	1	2,5	0,7	0,9	1,5	3,7
Залежність	1	1,4	2	5	1	1,29	2,14	5,29

Таблиця В.7 – Залежності показника $W_{оч}$, коли $\mu = 2,75$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
Н	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
$W_{оч}$	0,15	0,2	0,4	1	0,25	0,4	0,6	1,4	0,3	0,5	0,8	2,1
Залежність	1	1,33	2,67	6,67	1	1,6	2,4	5,6	1	1,67	2,67	7

ДОДАТОК Г

Порівняння значень довжини черги в залежності від параметру Херста.

Таблиця Г.1 – Залежності показника L, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,45	0,7	1,3	3	1	1,3	2	5
Залежність	1	1,56	2,89	6,67	1	1,3	2	5

Таблиця Г.2 – Залежності показника L, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,7 та 0,8

ρ	0,7				0,8			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	1,8	2,4	3,7	9	3,2	4,4	7	19,2
Залежність	1	1,33	2,06	5	1	1,38	2,19	6

Таблиця Г.3 – Залежності показника L, коли $\mu = 2$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,1	0,2	0,3	0,8	0,3	0,4	0,6	1,6	0,5	0,7	1,2	2,8
Залежність	1	2	3	8	1	1,33	2	5,33	1	1,4	2,4	5,6

Таблиця Г.4 – Залежності показника L, коли $\mu = 2$ для ρ 0,6 та 0,7

ρ	0,6				0,7			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,9	1,2	2	5	1,6	2,2	3,6	9
Залежність	1	1,33	2,22	5,56	1	1,38	1,64	5,63

Таблиця Г.5 – Залежності показника L, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,3 та 0,4

ρ	0,3				0,40			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,1	0,2	0,4	0,9	0,3	0,4	0,8	1,7
Залежність	1	2	4	9	1	1,33	2,67	5,67

Таблиця Г.6 – Залежності показника L, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,5	0,7	1,1	2,8	0,9	1,2	2	5
Залежність	1	1,4	2,2	5,6	1	1,33	2,22	5,56

Таблиця Г.7 – Залежності показника L, коли $\mu = 2,75$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
L	0,1	0,2	0,3	0,8	0,3	0,4	0,6	1,6	0,5	0,7	1,2	2,8
Залежність	1	2	3	8	1	1,33	2	5,33	1	1,4	2,4	5,6

ДОДАТОК Д

Порівняння значень середньої кількості заявок в залежності від параметра
Херста

Таблиця Д.1 – Залежності показника Q, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	1	1,2	1,7	3,3	1,5	1,9	2,6	5,7
Залежність	1	1,2	1,7	3,3	1	1,27	1,73	3,8

Таблиця Д.2 – Залежності показника Q, коли $\mu = 1,25$ для ρ 0,7 та 0,8

ρ	0,7				0,8			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	2,3	3	4,4	10,2	4	5,2	7,8	20
Залежність	1	1,3	1,91	4,43	1	1,3	1,95	5

Таблиця Д.3 – Залежності показника Q, коли $\mu = 2$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	0,4	0,5	0,6	1,1	0,7	0,8	1	2	1	1,2	1,7	3,3
Залежність	1	1,25	1,5	2,75	1	1,14	1,43	2,86	1	1,2	1,7	3,3

Таблиця Д.4 – Залежності показника Q, коли $\mu = 2$ для ρ 0,6 та 0,7

ρ	0,6				0,7			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	1,5	1,8	2,6	5,6	2,3	2,9	4,3	9,7
Залежність	1	1,20	1,73	3,73	1	1,26	1,48	4,22

Таблиця Д.5 – Залежності показника Q, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,3 та 0,4

ρ	0,3				0,4			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	0,5	0,6	0,7	1,1	0,7	0,8	1	2
Залежність	1	1,2	1,4	2,2	1	1,14	1,43	2,86

Таблиця Д.6 – Залежності показника Q, коли $\mu = 2,25$ для ρ 0,5 та 0,6

ρ	0,5				0,6			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	1	1,2	1,7	3,2	1,5	1,9	2,6	5,6
Залежність	1	1,2	1,7	3,2	1	1,27	1,73	3,73

Таблиця Д.7 – Залежності показника Q, коли $\mu = 2,75$ для ρ 0,3 – 0,5

ρ	0,3				0,4				0,5			
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8
Q	0,4	0,5	0,6	1,1	0,7	0,8	1	2	1	1,2	1,6	3,3
Залежність	1	1,25	1,5	2,75	1	1,14	1,43	2,86	1	1,2	1,6	3,3