

## ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 621.221

М.С. Бевзюк

### КІЛЬКА ТЕОРЕМ З ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

#### Вступ

Великі труднощі виникають при дослідженні діофантових рівнянь степеня  $n > 2$  [1–14]. Сформульовані і доведені автором даної статті кілька теорем із теорії чисел дали можливість дослідити деякі діофантові рівняння другого і вищих степенів. Це дало змогу дати відповідь на питання про наявність чи відсутність у них розв'язків у натуральних числах. Подібні публікації автору невідомі.

#### Постановка задачі

Метою статті є застосування тотожностей і нерівностей для дослідження наявності чи відсутності розв'язків у натуральних числах деяких діофантових рівнянь вищих степенів ( $n \geq 2$ ).

#### Основні теоретичні положення

Нехай

$$x + y = z + q, \quad (1)$$

де  $q \equiv x + y - z$ ,  $0 < q = x - (z - y) < x < y < z$ .

Рівність (1) є тотожністю, бо вона справедлива при будь-яких допустимих числових значеннях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Піднісши до степеня  $n \geq 2$  обидві її частини, одержимо нову тотожність:

$$x^n + y^n - z^n - q^n = S, \quad (2)$$

де  $S \equiv S_2 - S_1$ :

$$S_1 = C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-2} x^2 y^{n-2} + C_n^{n-1} x y^{n-1} = (x + y)^n - x^n - y^n, \quad (3)$$

$$S_2 = C_n^1 z^{n-1} q + C_n^2 z^{n-2} q^2 + \dots + C_n^{n-2} z^2 q^{n-2} + C_n^{n-1} z q^{n-1} = (z + q)^n - z^n - q^n. \quad (4)$$

Прирівнявши до нуля праву частину тотожності (2)

$$x^n + y^n - z^n - q^n = S = 0, \quad (5)$$

одержимо такі рівняння:

$$x^n + y^n - z^n - q^n = 0, \quad (6)$$

або, що те саме,

$$x^n + y^n - z^n - (x + y - z)^n = 0,$$

і

$$S = 0,$$

тобто

$$S_2 - S_1 = 0. \quad (7)$$

Запишемо тотожність (2) у такому вигляді:

$$x^n + y^n - z^n = q^n + S. \quad (8)$$

Прирівнявши праву частину цієї тотожності до нуля, одержимо такі рівняння:

$$x^n + y^n - z^n = 0, \quad (9)$$

$$q^n + S = 0, \quad (10)$$

або

$$(x + y - z)^n + S = 0, \quad (11)$$

$$S = s^n,$$

$$q = s. \quad (12)$$

Тут, згідно із співвідношеннями (3) і (4), маємо

$$S = S_2 - S_1 =$$

$$= [(z + q)^n - z^n - q^n] - [(x + y)^n - x^n - y^n] =$$

$$= (z + q)^n - (x + y)^n + x^n + y^n - z^n - q^n, \quad (13)$$

$$q^n + S = q^n + x^n + y^n - z^n - q^n = x^n + y^n - z^n, \quad (14)$$

тобто ліва і права частини рівняння (5), а також самі рівняння (6) і (7), (9) і (10) дорівнюють один одному. Тут  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $s$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Крім того, оскільки в тотожності (5) і в рівняннях (6) і (9) числа  $x$  і  $y$  рівноправні, то надалі, згідно з тотожністю (1), для визначеності вважатимемо, що  $0 < q < x < y < z$ , причому числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  попарно взаємно прості.

Рівняння (5)–(12) і є предметом нашого дослідження.

**Теорема 1.** Рівняння (6) і (7) рівносильні (еквівалентні).

**Доведення.** Оскільки рівність (2) є тотожністю, тобто рівністю двох аналітичних виразів, справедливих для будь-яких допустимих значень бук, що в неї входять, то при будь-яких

числових значеннях  $x, y$  і  $z$  її ліва частина дорівнює правій, і навпаки. Тому з рівняння (5) і співвідношення (13) видно, що якщо числа  $\langle x, y, z \rangle$  є розв'язком одного з двох даних рівнянь (6) і (7), то ці ж числа одночасно є розв'язком і другого рівняння з даних двох. Якщо ж натуральні числа  $x, y, z$  не є розв'язком будь-якого одного з них, то одночасно вони не будуть розв'язком і другого рівняння з них. Отже, в полі натуральних чисел множини розв'язків рівнянь (6) і (7) повністю збігаються, що й означає, що ці рівняння рівносильні (еквівалентні). Це також видно з тотожності (2) і співвідношення (13). Теорема доведена.

**Теорема 2.** Рівняння (9) і (10) рівносильні (еквівалентні).

**Доведення.** Якщо врахувати тотожності (8), співвідношення (14) та рівняння (9) і (10), то доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 1. Теорема доведена.

**Зауваження 1.** З теорем 1 і 2 випливає, що при дослідженні рівнянь (6) і (7) на наявність чи відсутність у них розв'язків у натуральних числах  $x, y, z$  достатньо дослідити будь-яке одне з них.

Те саме стосується рівнянь (9) і (10).

**Теорема 3.** Якщо натуральні числа  $\langle x, y, z \rangle$  є розв'язком рівняння (9) (чи (10), що все одно), то  $x + y - z = q > 0$ , причому  $0 < q < x < y < z$ .

**Доведення.** Можливий лише один із трьох таких випадків: 1)  $x + y - z = q < 0$ ; 2)  $x + y - z = q = 0$ ; 3)  $x + y - z = q > 0$ .

1. Припустимо, що  $q \equiv x + y - z < 0$ , тобто  $x + y < z$ . Тоді  $(x + y)^n < z^n$ , або  $x^n + y^n + S_1 < z^n$ , де  $S_1 > 0$  (див. (3)). Оскільки  $S_1 > 0$ , то  $x^n + y^n - z^n = -S_1 < 0$ , тобто  $x^n + y^n - z^n < 0$ , що суперечить умові про те, що  $x^n + y^n - z^n = 0$ . Отже, цей випадок неможливий.

2. Припустимо тепер, що  $x + y - z = q = 0$ , тобто  $x + y = z$ . Тоді  $(x + y)^n = z^n$ , або  $x^n + y^n + S_1 = z^n$ , звідки  $x^n + y^n - z^n = -S_1 < 0$ , що теж суперечить умові.

3. Таким чином, залишається єдиний можливий випадок, коли  $x + y > z$ , тобто  $x + y = z + q$ , де  $q > 0$ . Отже,  $q \equiv x + y - z > 0$ . Крім того, маємо  $q \equiv x + y - z = x - (z - y) < x < y < z$ . Теорема доведена.

**Теорема 4.** Нехай натуральні числа  $\langle x, y, z \rangle$  є деяким розв'язком рівняння (9), тобто  $x^n + y^n - z^n = 0$  і  $x < y < z$ . Тоді

$$x^{n+m} + y^{n+m} - z^{n+m} < x^n + y^n - z^n = 0 < x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} < x^{n-k} < y^{n-k} < z^{n-k},$$

де  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n - k \geq 1$ .

**Доведення.** Маємо

$$\begin{aligned} x^{n+m} + y^{n+m} - z^{n+m} &= x^{n+m} + y^{n+m} - z^n z^m < \\ < x^{n+m} + y^{n+m} - y^m z^n &= x^{n+m} - y^m (z^n - y^n) < \\ < x^n x^m - x^m (z^n - y^n) &= x^m (x^n + y^n - z^n) = \\ = 0 = [\text{або}] &= x^{n+m} - x^m x^n = x^{n+m} - x^{n+m} = 0, \end{aligned}$$

тобто  $x^{n+m} + y^{n+m} - z^{n+m} < 0 = x^n + y^n - z^n$ .

З іншого боку, маємо

$$\begin{aligned} x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} &= \frac{x^n}{x^k} + \frac{y^n}{y^k} - \frac{z^n}{z^k} > \\ > \frac{x^n}{z^k} + \frac{y^n}{z^k} - \frac{z^n}{z^k} &= \frac{x^n + y^n - z^n}{z^k} = 0, \end{aligned}$$

тобто  $x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} > 0 = x^n + y^n - z^n$ .

Крім того, оскільки  $x < y < z$  і  $z > y$ , то  $z^{n-k} > y^{n-k}$ , тому

$$\begin{aligned} x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} &= \\ = x^{n-k} - (z^{n-k} - y^{n-k}) &< x^{n-k} < y^{n-k} < z^{n-k}. \end{aligned}$$

Отже, отримали

$$\begin{aligned} x^{n+m} + y^{n+m} - z^{n+m} &< x^n + y^n - z^n = \\ = 0 < x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} &< x^{n-k} < y^{n-k} < z^{n-k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Іншими словами, якщо показник степеня  $n$  зростає, то  $\delta_n \equiv x^n + y^n - z^n$  спадає, і навпаки, якщо  $n$  спадає, то  $\delta_n$  зростає (при цьому величина  $q = x + y - z$  залишається незмінною). Пояснюється це тим, що із зміною числового значення показника степеня  $n$  більші числа змінюються швидше (на більшу величину), ніж менші (у нашому випадку  $z > y > x$ ). Теорема доведена.

**Наслідок 1.** Якщо  $x + y - z \equiv q = 0$ , то  $x^n + y^n - z^n < 0$ , тобто рівняння  $x^n + y^n - z^n =$

$= 0$  не має розв'язків у натуральних числах (бо замість рівняння матимемо нерівність). Тут  $x, y, z, n \in N, n > 1$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $x^n + y^n - z^n = 0$ , то  $0 < x + y - z \equiv q < x < y < z$ , де  $x, y, z, n \in N, n > 1$ .

**Наслідок 3.** Якщо  $x^n + y^n - z^n = 0$ , то  $(x^n)^m + (y^n)^m - (z^n)^m < 0$ , тобто  $x^{nm} + y^{nm} - z^{nm} < 0$ ; якщо  $m = n$ , то  $x^{n^2} + y^{n^2} - z^{n^2} < 0$ . Це означає, що в цьому випадку рівняння  $x^{nm} + y^{nm} - z^{nm} = 0$  і  $x^{n^2} + y^{n^2} - z^{n^2} = 0$  не мають розв'язків у натуральних числах (вони мають лише ірраціональні розв'язки). Тут  $x, y, z, n, m \in N, n, m > 1$ .

**Наслідок 4.** Якщо  $x^n + y^n - z^n = 0$ , то  $x^n + y^n - z^n - q^n < 0$  (бо  $q > 0$ ); тут  $x, y, z, n \in N, n \geq 2$ .

**Наслідок 5.** Якщо  $x^n + y^n - z^n = a$ , то

$$x^{n+m} + y^{n+m} - z^{n+m} < a = x^n + y^n - z^n < x^{n-k} + y^{n-k} - z^{n-k} < x^{n-k} < y^{n-k} < z^{n-k},$$

де  $x, y, z, n, m, k, a \in N, n - k \geq 1$ .

**Зауваження 2.** Нерівність (15) можна продовжити в обидва боки. Для прикладу візьмемо трійку піфагорових чисел  $\langle 3, 4, 5 \rangle$ :

$$\dots < 3^4 + 4^4 - 5^4 = -288 < 3^3 + 4^3 - 5^3 = -34 < 3^2 + 4^2 - 5^2 = 0 < 3 + 4 - 5 = 2.$$

**Зауваження 3.** У тотожностях (1), (2), (8) сума  $\delta_n \equiv x^n + y^n - z^n$  залежно від числових значень змінних  $x, y, z$  може набувати як додатних ( $\delta_n > 0$ ), так і від'ємних ( $\delta_n < 0$ ) значень, або ж дорівнювати нулю ( $\delta_n = 0$ ).

Дійсно, нехай  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  — деякий розв'язок рівняння (9), тобто  $\delta_{0n} \equiv x_0^n + y_0^n - z_0^n = 0$ ,  $x_0^n + y_0^n = z_0^n$ ,  $z_0 = \sqrt[n]{x_0^n + y_0^n}$ ,  $y_0 = \sqrt[n]{z_0^n - x_0^n}$ ,  $x_0 = \sqrt[n]{z_0^n - y_0^n}$ ,  $q_0 \equiv x_0 + y_0 - z_0$ . Звідси видно, що якщо взяти  $z < z_0$  (або  $y > y_0$  чи  $x > x_0$ ), то одержимо, що в цьому випадку  $\delta_n > \delta_{0n} = 0$ ,  $q > q_0$  (бо  $x^n + y^n > z^n$ ). Якщо ж  $z > z_0$ , то  $\delta_n < \delta_0 = 0$  (бо  $x^n + y^n < z^n$ ),  $q < q_0$ . У цих випадках замість рівнянь матимемо нерівності.

Отже, рівняння (9)–(14) можуть мати розв'язки в натуральних (якщо такі існують) або в ірраціональних числах тоді і тільки тоді, коли  $q = q_0$ . У цьому випадку  $\delta_n = 0$ ,  $z = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ ,  $y = \sqrt[n]{z^n - x^n}$ ,  $x = \sqrt[n]{z^n - y^n}$ ,  $q = x + y - z$ .

Проте зазначимо, що в рівняннях (5), (6), (9), а отже, і в рівняннях та співвідношеннях (7), (10)–(12), числові значення  $x, y, z$  тісно пов'язані між собою і обмежені нерівностями:  $0 < q \equiv x + y - z < x < y < z$ ,  $x + y > z$ ,  $2x^n < z^n < 2y^n$ , тобто  $\sqrt[n]{2}x < z < \sqrt[n]{2}y$ . Наприклад, для  $n = 2$  маємо  $\sqrt{2}x < z < \sqrt{2}y$  або  $1,414x < z < 1,414y$ . Так, для піфагорової трійки чисел  $x = 3$ ,  $y = 4$  одержимо, що  $4,24 < z < 5,66$ , тобто  $z = 5$ ; для  $n = p = 97$  матимемо  $\sqrt[97]{2}x < z < \sqrt[97]{2}y$ , або  $1,00717x < z < 1,00717y$ . Отже, розв'язки таких рівнянь у натуральних числах, якщо такі існують, чи ірраціональні розв'язки лежатимуть у межах  $\sqrt[n]{2}x < z < \sqrt[n]{2}y$ .

Існує обмеження і на показник степеня  $n$ . Можна показати, що якщо рівняння (9) має розв'язки в натуральних числах і показник степеня є простим непарним числом  $p$ , то

$$p = \frac{q}{uvwq_0} < q < x < y < z, \text{ де непарне число } q_0 \geq 1, \text{ а } u, v, w \text{ — попарно взаємно прості дільники відповідно чисел } x, y, z \in N.$$

Тому, якщо показник степеня  $p$  матиме інше числове значення (буде більшим чи меншим вказаного тут значення), рівняння (9) в принципі не може мати розв'язків у натуральних числах.

Відзначимо, що в 1995 р. англійський математик Уайлс довів, що рівняння (9) не має розв'язків у натуральних числах. З цього випливає, що при  $n > 2$  і рівняння (10)–(12) теж їх не мають, тобто  $q^n \neq S_1 - S_2$ ,  $S_1 - S_2 \neq s^n$ ,  $q \neq s$  (інакше б рівняння (9) мало розв'язки в натуральних числах). Крім того, це означає, що  $(x^n \pm y^n) : (x \pm y) = U(x, y) \neq u^n$ , де  $n$  — непарне число,  $s, u \in N$ . Звідси, між іншим, також випливає, що  $S_1 - S_2 \neq 0$ , тобто  $S_1 \neq S_2$ , інакше рівняння (6) мало б розв'язки в натуральних числах, що неможливо згідно з доведеною нижче теоремою 5.

**Зауваження 4.** З тотожностей (13) і (14) маємо, що  $S = x^n + y^n - z^n - q^n$  і  $q^n + S = x^n + y^n - z^n$ , де  $S = S_2 - S_1 = -(S_1 - S_2)$ ,  $n \geq 2$ . або  
Звідси видно, що якщо  $x^n + y^n - z^n - q^n = 0$ , то і  $S = 0$ ; якщо ж  $x^n + y^n - z^n - q^n \neq 0$ , то і  $S \neq 0$ .

І аналогічно, якщо  $x^n + y^n - z^n = 0$ , то і  $S + q^n = 0$ , тобто  $S_1 - S_2 = s^n = q^n$ ,  $s = q$ ; якщо ж  $x^n + y^n - z^n \neq 0$ , то  $S_1 - S_2 \neq q^n$ .

У випадку, коли  $n = 2$ , маємо  $S_1 - S_2 = x^2 + y^2 - z^2 - q^2$ , де  $S_1 = 2xy$ ,  $S_2 = 2zq$ . Звідси видно, що якщо  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  (це буде тоді і тільки тоді, коли  $\langle x, y, z \rangle$  – піфагорова трійка чисел), то  $S_1 - S_2 = q^2$ ; якщо ж  $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$  (це буде тоді, коли трійка чисел  $\langle x, y, z \rangle$  не є піфагоровою), то  $S_1 - S_2 \neq q^2$ , тобто  $S_1 - S_2 \neq s^2$ ,  $q \neq s$  (але завжди має місце тотожність  $x^2 + y^2 - z^2 = q^2 + S$ ). Це впливає з тотожностей (13) і (14). Можна дати і окреме незалежне доведення. Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} S = S_2 - S_1 &= 2zq - 2xy = [(2zq + z^2 + q^2) - \\ &- z^2 - q^2] - [(2xy + x^2 + y^2) - x^2 - y^2] = \\ &= (z + q)^2 - (x + y)^2 + x^2 + y^2 - z^2 - q^2 = \\ &= \{x + y = z + q\} = x^2 + y^2 - z^2 - q^2. \end{aligned}$$

Отже,  $S = x^2 + y^2 - z^2 - q^2$ , або  $x^2 + y^2 - z^2 = q^2 + S$ .

**Зауваження 5.** Змінні  $x, y, z, q$  подамо в такому вигляді:

$$x = \frac{(z - y) - (z - x) + (x + y)}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

$$y = \frac{-(z - y) + (z - x) + (x + y)}{2} = \frac{2y}{2} = y,$$

$$z = \frac{(z - y) + (z - y) + (x + y)}{2} = \frac{2z}{2} = z,$$

$$q = \frac{-(z - y) - (z - x) + (x + y)}{2} =$$

$$= \frac{2(x + y - z)}{2} = \frac{2q}{2} = q,$$

$$x = \frac{a - b + c}{2} = \frac{a - (b - c)}{2} = \frac{a - d}{2},$$

$$y = \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + (b - c)}{2} = \frac{a + d}{2},$$

$$z = \frac{a + b + c}{2} = \frac{a + (b + c)}{2} = \frac{a + h}{2},$$

$$q = \frac{a - b - c}{2} = \frac{a - (b + c)}{2} = \frac{a - h}{2},$$

або

$$2x = a - d, 2y = a + d, 2z = a + h, 2q = a - h, (16)$$

де

$$a = x + y = z + q; \quad b = z - x = y - q;$$

$$c = z - y = x - q; \quad d = (z - x) - (z - y) = b - c;$$

$$h = (z - x) + (z - y) = z - q = b + c.$$

Оскільки  $q < x < y < z$ , то  $x + y = z + q > z - q > z - x > z - y$ , тобто  $a > h > b > c$  і  $h > d$ .

**Теорема 5.** Якщо  $n > 2$ , то рівняння (6) і (7) не мають розв'язків у натуральних числах.

Подамо три доведення цього твердження.

**Доведення 1.** Із співвідношень (16) маємо

$$\begin{aligned} 2^n x^n &= a^n - C_n^1 a^{n-1} d + C_n^2 a^{n-2} d^2 - \dots - \\ &- C_n^{n-2} a^2 d^{n-2} + C_n^{n-1} a d^{n-1} - d^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^n y^n &= a^n + C_n^1 a^{n-1} d + C_n^2 a^{n-2} d^2 + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} a^2 d^{n-2} + C_n^{n-1} a d^{n-1} + d^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^n z^n &= a^n + C_n^1 a^{n-1} h + C_n^2 a^{n-2} h^2 + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} a^2 h^{n-2} + C_n^{n-1} a h^{n-1} + h^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^n q^n &= a^n - C_n^1 a^{n-1} h + C_n^2 a^{n-2} h^2 - \dots - \\ &- C_n^{n-2} a^2 h^{n-2} + C_n^{n-1} a h^{n-1} - h^n. \end{aligned}$$

Звідси одержимо

$$\begin{aligned} & 2^n(x^n + y^n - z^n - q^n) = \\ & = 2C_n^2 a^{n-2}(d^2 - h^2) + 2C_n^4 a^{n-4}(d^4 - h^4) + \dots + \\ & + 2C_n^{n-3} a^3(d^{n-3} - h^{n-3}) + 2C_n^{n-1} a(d^{n-1} - h^{n-1}), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & x^n + y^n - z^n - q^n = \\ & = \frac{1}{2^{n-1}} [C_n^2 a^{n-2}(d^2 - h^2) + C_n^4 a^{n-4} \times \\ & \times (d^4 - h^4) + \dots + C_n^{n-3} a^3(d^{n-3} - h^{n-3}) + \\ & + C_n^{n-1} a(d^{n-1} - h^{n-1})] (< 0). \end{aligned} \quad (17)$$

Рівність (17) – тотожність, тому ця рівність виконується при будь-яких допустимих числових значеннях  $x, y, z$ . Оскільки  $d < h$ , то при будь-яких натуральних числах  $x, y, z$  всі доданки в правій частині цієї тотожності від’ємні, тобто  $x^n + y^n - z^n - q^n < 0$ , а тому в натуральних числах  $x^n + y^n - z^n - q^n \neq 0$ . Крім того, оскільки, згідно з рівняннями (5) і (7),  $x^n + y^n - z^n - q^n = S_2 - S_1 (< 0)$ , то при будь-яких натуральних числах  $x, y, z$  і  $S_2 - S_1 < 0$  (тобто  $S_1 > S_2$ ), а тому рівняння (6) і (7) не мають розв’язків у натуральних числах. (Ці рівняння мають нульові або ірраціональні розв’язки, наприклад,  $x, y, z, q = \sqrt[n]{x^n + y^n - z^n}$ .) Розв’язки в натуральних попарно взаємно простих числах  $x, y, z$  відсутні. Теорема доведена.

Доведення 2. Для зручності введемо такі позначення:  $x_1 = x - q, y_1 = y - q, z_1 = z - q$ , де  $q = x + y - z$ . Тоді матимемо

$$\begin{aligned} x^n &= (x_1 + q)^n = x_1^n + C_n^1 x_1^{n-1} q + C_n^2 x_1^{n-2} q^2 + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} x_1^2 q^{n-2} + C_n^{n-1} x_1 q^{n-1} + q^n, \\ y^n &= (y_1 + q)^n = y_1^n + C_n^1 y_1^{n-1} q + C_n^2 y_1^{n-2} q^2 + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} y_1^2 q^{n-2} + C_n^{n-1} y_1 q^{n-1} + q^n, \\ z^n &= (z_1 + q)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1} q + C_n^2 z_1^{n-2} q^2 + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} z_1^2 q^{n-2} + C_n^{n-1} z_1 q^{n-1} + q^n, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} x^n + y^n - z^n - q^n &= (x_1^n + y_1^n - z_1^n) + C_n^1 q(x_1^{n-1} + \\ &+ y_1^{n-1} - z_1^{n-1}) + C_n^2 q^2(x_1^{n-2} + y_1^{n-2} - z_1^{n-2}) + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} q^{n-2}(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2) + C_n^{n-1} q^{n-1}(x_1 + \\ &+ y_1 - z_1) (< 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv x_1 + y_1 - z_1 = (x - q) + (y - q) - (z - q) = \\ &= (x + y - z) - q = q - q = 0, \end{aligned}$$

то, згідно з наслідком 1,  $x_1^k + y_1^k - z_1^k < 0$ , де  $k = 2, 3, \dots, n$ . А тому  $x^n + y^n - z^n - q^n < 0$ , а також і  $S_2 - S_1 < 0$ , тобто  $x^n + y^n - z^n - q^n \neq 0$  і  $S_2 - S_1 \neq 0$ . Отже, розв’язків у натуральних попарно взаємно простих числах  $x, y, z$  вони не мають. Теорема доведена.

Доведення 3. Запишемо тотожність (18) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} & x^n + y^n - z^n - q^n = \\ &= [(x - q)^n + (y - q)^n - (z - q)^n] + \\ &+ C_n^1 q[(x - q)^{n-1} + (y - q)^{n-1} - (z - q)^{n-1}] + \\ &+ C_n^2 q^2[(x - q)^{n-2} + (y - q)^{n-2} - (z - q)^{n-2}] + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} q^{n-2}[(x - q)^2 + (y - q)^2 - (z - q)^2] + \\ &+ C_n^{n-1} q^{n-1}[(x - q) + (y - q) - (z - q)] (< 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Оскільки  $x + y = z + q$ , то  $z = x + y - q$  і  $z - q = x + y - 2q = (x - q) + (y - q)$ . Тоді маємо

$$\begin{aligned} (x - q)^m + (y - q)^m - (z - q)^m &= (x - q)^m + \\ &+ (y - q)^m - [(x - q) + (y - q)]^m = \\ &= -[C_m^1 (x - q)^{m-1} (y - q) + \\ &+ C_m^2 (x - q)^{m-2} (y - q)^2 + \dots + \\ &+ C_m^{m-2} (x - q)^2 (y - q)^{m-2} + \\ &+ C_m^{m-1} (x - q)(y - q)^{m-1}] < 0. \end{aligned}$$

Останній доданок у тотожності (19) дорівнює нулю, а всі інші доданки – від’ємні, а тому і  $x^n + y^n - z^n - q^n < 0$ .

Отже, якщо  $n > 2$  і натуральні попарно взаємно прості числа  $x, y, z$  такі, що  $x + y - z =$

$= q$  і  $q > 0$ , то  $x^n + y^n - z^n - q^n \neq 0$  і  $S_2 - S_1 \neq 0$ ,  $S_1 > S_2$ ,  $x^n + y^n - z^n < q^n$ . Теорема доведена.

**Зауваження 6.** Якщо  $n > 2$ , але  $q \neq x + y - z$ , то рівняння (6) при різних числових значеннях показника степені  $n$ , можливо, може мати розв'язки в натуральних числах. Наприклад, для  $n = 4$  маємо [15]

$$7^4 + 239^4 - 227^4 - 157^4 = 0,$$

$$133^4 + 134^4 - 158^4 - 59^4 = 0$$

(тут умова  $q = x + y - z$  не виконується; проте — це окрема тема).

**Зауваження 7.** Вилучивши останній (нульовий) доданок, тотожність (19) можна записати в коротшому вигляді:

$$\begin{aligned} x^n + y^n - z^n - q^n &= (x_1^n + y_1^n - z_1^n) + \\ &+ C_n^1 q (x_1^{n-1} + y_1^{n-1} - z_1^{n-1}) + \\ &+ C_n^2 q^2 (x_1^{n-2} + y_1^{n-2} - z_1^{n-2}) + \dots + \\ &+ C_n^{n-2} q^{n-2} (x_1^2 + y_1^2 - z_1^2) = S (< 0), \end{aligned} \quad (20)$$

де  $x_1 = x - q$ ;  $y_1 = y - q$ ;  $z_1 = z - q$ ;  $q = x + y - z$ .

Застосуємо тотожність (20) до конкретних рівнянь.

**Приклад 1.** Якщо  $n = 1$ , то  $x + y - z = q$  — тотожність (рівність виконується при будь-яких значеннях  $x, y, z \in N$ ,  $q = x + y - z > 0$ );  $x + y - z = 0$  — рівняння, яке має нескінченну множину розв'язків у натуральних числах, наприклад  $z = x + y$ .

**Приклад 2.** Нехай  $n = 2$ . У цьому випадку тотожність (20) матиме такий вигляд (нульовий доданок відкинуто):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \\ &= (x - q)^2 + (y - q)^2 - (z - q)^2 + q^2 = q^2 + S, \end{aligned} \quad (21)$$

або

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - q^2 &= \\ &= (x - q)^2 + (y - q)^2 - (z - q)^2 = S, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $S = S_2 - S_1$ .

Прирівнявши праві частини тотожності (21) і (22) до нуля, одержимо такі рівняння:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad (23)$$

$$q^2 + S = 0, \quad (24)$$

$$(x - q)^2 + (y - q)^2 - (z - q)^2 + q^2 = 0, \quad (25)$$

або ж, що те саме,

$$\begin{aligned} (z - y)^2 + (z - x)^2 - (2z - x - y)^2 + \\ + (x + y - z)^2 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Якщо обидві частини тотожності  $x + y = z + q$  піднести до квадрата, то одержимо таку тотожність:

$$x^2 + y^2 - z^2 = q^2 + 2(zq - xy), \quad (27)$$

або

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \\ &= (x + y - z)^2 - 2[xy - z(x + y - z)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Якщо  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , то

$$(x + y - z)^2 - 2[xy - z(x + y - z)] = 0. \quad (29)$$

Рівняння (23) і (24)–(29) рівносильні (еквівалентні).

Розв'язками рівняння (23) у натуральних числах є піфагорові трійки чисел  $\langle x, y, z \rangle$ . Одночасно вони є розв'язками і рівнянь (23)–(29).

Із тотожності (22) одержимо такі рівняння:

$$S = 0, \text{ або } S_1 - S_2 = 0, \quad (30)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 - q^2 = 0. \quad (31)$$

Оскільки  $S < 0$ , то ці два рівняння не мають розв'язків у натуральних числах. Тут  $S_1 = 2xy$ ,  $S_2 = 2zq$ ,  $S_1 > S_2$ . Якщо  $n = 2$  і  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , то  $S_1 - S_2 = q^2$ , де  $\langle x, y, z \rangle$  — піфагорова трійка чисел. Якщо ж трійка чисел  $x, y, z$  не є піфагоровою, то  $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$  і  $q^2 + S \neq 0$ , тобто  $S_1 - S_2 \neq q^2$ . Але завжди (у будь-якому випадку) має місце тотожність  $x^2 + y^2 - z^2 = q^2 + S$ .

## Висновки

Застосування тотожностей і нерівностей дало можливість одержати і дослідити ряд діофантових рівнянь степенів  $n \geq 2$  на наявність чи відсутність у них розв'язків у натуральних числах.

Якщо  $n \geq 2$  і  $q = x + y - z$ , то рівняння (6) і (7), а також (30) і (31) не мають розв'язків у натуральних числах (теорема 5).

Якщо  $n \geq 2$ , то  $S < 0$  і  $x^n + y^n - z^n < q^n$  (інакше б рівняння (6) і (7), (30) і (31) мали б

розв'язки в натуральних числах, що неможливо за теоремою 5).

Якщо  $n \geq 2$ , то  $S_1 > S_2$ , причому, якщо  $n > 2$ , то  $S \neq s^n \neq q^n$ ,  $s \neq q$ ; якщо ж  $n = 2$ , то  $S_1 - S_2 = s^2 = q^2$ ,  $s = q$  (теорема 5, зауваження 3, 4, приклад 2).

Піфагорові трійки чисел  $\langle x, y, z \rangle$  є розв'язками не тільки загальновідомого рівняння Піфагора (23), але й рівнянь (24)–(29) та ін.

На нашу думку, дослідження можуть бути продовжені.

Н.С. Бевзюк

### НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Доказанные в данной статье теоремы и применение тождеств и неравенств дали возможность исследовать некоторые диофантовые уравнения высших степеней и дать ответ на вопрос о наличии или отсутствии в них решений в натуральных числах.

M.S. Bevzyuk

### SOME THEOREMS OF NUMBER THEORY

This study introduces a novel approach to the analysis of some Diophantine high-degree equations from the perspective of theorems proved and inequations as well as identities applied. The research also enables to identify whether solutions of Diophantine high-degree equations really exist in natural numbers.

1. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1964. – 566 с.
3. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
4. *Башмакова И.Г.* Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
5. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1983. – 64 с.
6. *Серпинский В.О.* Решение уравнений в целых числах. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 88 с.
7. *Чудновский Г.В.* Некоторые арифметические проблемы. – К.: Препринт ИМ-71-3, 1971. – 40 с.
8. *Спринджук В.Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
9. *Постников М.М.* Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
10. *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
11. *Эдвардс Г.* Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. – М.: Мир, 1980. – 484 с.
12. *Диофант.* Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – 328 с.
13. *Большой энциклопедический словарь.* Математика. – М.: Большая российская энциклопедия, 1998. – 608 с.
14. *Проблемы Гильберта /* Под общ. ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
15. *Плахотник В.* Про суми третіх і четвертих степенів натуральних чисел // У світі математики. – 2004. – 10, № 4. – С. 20–24.

Рекомендована Радою  
фізико-математичного факультету  
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
5 вересня 2007 року