

Міністерство освіти та науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

На правах рукопису

Богданов Олексій Вікторович



УДК 534.14:535

***ЗАСТОСУВАННЯ ФОТОТЕРМОАКУСТИЧНОГО
ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ДЕФЕКТОСКОПІЇ***

05.09.08 Прикладна акустика та звукотехніка

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Науковий керівник

Бабаєв Арташес Едуардович

доктор технічних наук, старший
науковий співробітник

Інститут механіки
ім. С.П. Тимошенко НАН України

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СИМВОЛІВ.....	5
ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. ОПТИЧНА ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ	13
1.1. Огляд літератури	13
1.1.1. Збудження звуку всередині середовища.....	13
1.1.2. Збудження звуку у поверхневому шарі речовини	14
1.1.3. Збудження звуку, обумовлене електрострикцією.....	16
1.2. Основні математичні співвідношення, які описують збуджений стан середовища.....	17
1.2.1. Рівняння теплопровідності, крайові умови	17
1.2.2. Рівняння термопружності.....	20
1.2.3. Рівняння термооптичного механізму збудження.....	23
1.2.4. Рівняння електропружності.....	26
РОЗДІЛ 2. НЕСТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ ПЛОСКОГО ПРУЖНОГО ШАРУ	29
2.1. Математична постановка задачі.....	29
2.2. Розв'язок нестационарної задачі	32
2.2.1. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду	32
2.2.2. Перетворення Лапласа за часом та отримання загальних розв'язків	33

2.2.3. Задовольняння крайовим умовам та перехід в область оригіналів.....	38
2.3. ЧИСЛЕННІ ДОСЛІДЖЕННЯ	50
2.3.1. Розрахунковий алгоритм	50
2.3.2. Чисельні результати та їх дослідження.....	54
ВИСНОВКИ ПО РОЗДІЛУ	89
РОЗДІЛ 3. ЗБУДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПРУЖНОГО ШАРУ	91
3.1. НЕСТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ	91
3.1.1. Математична постановка задачі	91
3.1.2. Розв’язок нестационарної задачі.....	94
3.2. СТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПРУЖНОГО ШАРУ	102
3.2.1. Математична постановка задачі	102
3.2.2. Розв’язок стаціонарної задачі	104
ВИСНОВКИ ПО РОЗДІЛУ	116
РОЗДІЛ 4. РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОАКУСТИЧНОГО ЗБУДЖЕННЯ ЧОТИРИШАРОВОГО ПАКЕТУ	117
4.1. Математична постановка задачі.....	117
4.2. Вибір розв’язку, приведення задачі до розв’язуючих співвідношень.	122
4.3. Розрахунки та їх аналіз.....	128
ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ.....	145
Список використаних джерел	150

ДОДАТКИ.....	159
--------------	-----

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СИМВОЛІВ

АЧХ	—	амплітудно-частотна характеристика,
ІЧ	—	інфрачервоний,
КЕМЗ	—	коефіцієнт електромеханічного зв'язку,
ФЧХ	—	фазо-частотна характеристика,
ЧХ	—	частотна характеристика;
x, y, z	—	координати,
A	—	потенціальна частина сторонньої нетермопружньої сили,
c	—	швидкість світла,
c_ϵ	—	питома теплоємність при наявності деформації,
C_{33}^E	—	пружна постійна п'єзокераміки,
C_ϵ	—	питома теплоємність,
c_l, c_t	—	відповідно швидкості розповсюдження поздовжніх та поперечних хвиль,
D	—	вектор електричної індукції,
E	—	вектор електричної напруженості,
E	—	модуль Юнга
e_{33}	—	п'єзомодуль,
F	—	об'ємна сила,
f	—	частота,
h	—	коефіцієнт теплопровідності зовнішнього простору,
I	—	інтенсивність джерел тепла,
I_0	—	амплітуда лазерного випромінювання,
J	—	інтенсивність випромінювання на границі з урахуванням коефіцієнта

проходження випромінювання через границю,

M	—	соленоїдальна частина сторонньої нетермопружної сили,
m	—	коефіцієнт модуляції інтенсивності випромінювання,
S	—	внутрішня густина ентропії,
T	—	температура тіла,
T_0	—	температура тіла в нормальному стані,
u	—	вектор переміщень,
v	—	швидкість розповсюдження пружних хвиль у середовищі,
V	—	електрична напруга;
α	—	коефіцієнт лінійного теплового розширення,
α_T	—	середній коефіцієнт теплового розширення,
β	—	оптичний коефіцієнт поглинання,
χ	—	коефіцієнт температуропровідності,
δ	—	символ Кронекера,
ε	—	тензор деформацій,
ϑ	—	кут нахилу вісі “термоакустичної антени”,
Φ	—	скалярний потенціал,
κ	—	коефіцієнт теплопровідності,
λ, μ	—	коефіцієнти Ламе,
ν	—	коефіцієнт Пуассона,
θ	—	відхилення температури тіла від температури в нормальному стані,
ρ	—	густина,
σ	—	тензор механічних напруг,
ϖ	—	антисиметричний тензор,
ω	—	циклічна частота,
Ψ	—	електричний потенціал,
$\hat{\Psi}$	—	векторний потенціал.

ВСТУП

Актуальність теми

Сучасне життя не можливо уявити без новітніх технологій. Основою усіх цифрових технологій є інтегральні схеми. Ці схеми будують з багатьох тонких шарів на основі кремнію. Внаслідок виникнення дефектів у багатошарових схемах припиняють функціонувати мікроелектронні прилади [3, 13, 14]. Таким чином, контроль дефектності матеріалів на різних етапах виробництва посідає значне місце та вимагає використання точних методів неруйнівного контролю.

Існуючі традиційні методи дослідження, такі як: оптичні, інфрачервоні, рентгенівські та растрова електронна мікроскопія — мають перелік обмежень щодо вивчення внутрішньої структури непрозорих матеріалів (пустоти, тріщини, мікровключення, неоднорідності). Тому, ці методи не дозволяють візуалізувати різноманітні підповерхневі дефекти та внутрішні напруги в напівпровідникових структурах, які можуть виникнути на різних стадіях виробництва мікроелектронних приладів та визначають їх механічні, електричні та інші властивості [19, 62].

Саме тому розробка неруйнівних методів, які можуть дати інформацію про цілісний стан напівпровідникових матеріалів та надають можливість одержання зображення розподілу параметрів підповерхневих шарів, є актуальною задачею.

На даному етапі серед методів неруйнівного контролю набув розвитку метод фототермоакустичної (ФТА) дефектоскопії. Цей метод дозволяє досліджувати неоднорідності напівпровідників [1, 36]. Основу ФТА дефектоскопії складає принцип перетворення енергії випромінювання з модульованою інтенсивністю на теплову енергію. У зразку виникають теплові хвилі, які збуджують виникнення пружних хвиль у матеріалі [1, 5, 15, 16, 61, 64, 69]. Велика кількість дослідів підтвердила унікальні можливості методу ФТА дефектоскопії щодо діагностування під поверхневого шару непрозорих об'єктів [22, 23, 33, 34, 36, 64,].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дослідження, викладені в дисертації, пов'язані з науковими тематиками та темами навчального процесу кафедри акустики та акустoeлектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», а також використовувались при виконанні Державної науково-технічної програми «Ресурс» в рамках виконання проекту «Розробка сучасних методологічних підходів та пакету прикладних програм для визначення допустимих рівнів завад у енергетично-інформаційних мережах низької напруги з метою підвищення ресурсу надійності і технологічної безпеки промислових об'єктів» (№ держреєстрації 0107U006830); при виконанні робіт в рамках Міжвідомчої науково-технічної програми «Нанофізика та нанoeлектроніка» НДР «Створення функціональних п'єзoeлектричних матеріалів для одержання плівкових MEMS-структур у складі нанoeлектронних комірок» (№ держреєстрації 0107U008827); в рамках програми міжнародного співробітництва Міністерства освіти і науки України з країнами Співдружності незалежних держав «Комплекс робіт з удосконалювання електричного і температурного регламенту роботи печі гравітації постійного струму з метою зниження витрат електричної потужності і збільшення виходу сортової продукції» (№ держреєстрації 0104U007646); програм Міністерства освіти і науки України НДР ІТ/494-2007 «Створення та впровадження у виробництво електроного підручника «Мікропроцесори та мікроконтролери» (№. держреєстрації 0107U007772); НДР «Математична модель та технологія об'ємних п'єзoeлектричних фільтрових елементів для монолітних MEMS-структур» (№. держреєстрації 0104U000132); НДР «Розроблення технології отримання функціональної сенсорної MEMS на основі наноструктурних п'єзoeлектричних плівок нітриду алюмінія та сполук кремнія» (№ держреєстрації 0107U002712).

Мета і задачі дослідження

Розробити теоретичні основи ФТА дефектоскопії, шляхом створення математичної моделі, яка описує процеси перетворення оптичної енергії в механічну для тришарового пружного пакету, до якого прикріплено четвертий п'єзопружний шар, в стаціонарному режимі, зокрема, необхідно поставити та розв'язати наступні задачі:

- розробити методиї аналізу перехідних процесів ФТА дефектоскопії шляхом створення математичної моделі, яка описує процес перетворення оптичної енергії в механічну для пружного шару та напівпростору, в нестационарному режимі;
- виявити залежність поширення пружних хвиль в шарі та напівпросторі у випадку обмеженого по поздовжній координаті лазерного навантаження, в нестационарному режимі;
- виявити залежності механічних коливань від фізичних властивостей додаткового внутрішнього шару в структурі матеріалу, таких як: фізико-механічні характеристики додаткового шару, його товщина та місцеположення;
- виявити залежність ефективності ФТА дефектоскопії від типу приймача (контактного або безконтактного);
- розробити метод розрахунку глибини розташування внутрішнього шару та його товщини в залежності від сигналу ФТА дефектоскопії.

Об'єкт та предмет дослідження

Об'єктом дослідження є фототермоакустичний ефект.

Предметом дослідження є процес перетворення оптичної енергії в енергію пружних коливань з їх (коливань) наступною реєстрацією та аналізом.

Методи дослідження.

Теоретичні дослідження ґрунтуються на аналітичному постановці задачі ФТА перетворення та розв'язку зв'язаних систем рівнянь теорії термопружності

та електродинаміки. Застосовано перетворення Лапласа за часом та Фур'є по просторовій координаті, для розв'язку диференціальних рівнянь термопружності. Аналітично строге повернення в область оригіналів і задовільнення крайовим умовам задачі. Використано методи сучасного програмування для проведення чисельних досліджень.

Наукова новизна одержаних результатів

Вперше розроблені теоретичні основи використання ФТА перетворення для дефектоскопії тонких оптично непрозорих об'єктів, які охоплюють:

- вперше отримані аналітичні розв'язки нестационарної задачі термопружності в одновимірній та двовимірній постановках;
- вперше встановлено, що від параметрів внутрішнього шару залежить частота ефективної ФТА дефектоскопії та амплітуда сигналу. В процесі проведення дефектоскопії зразка на підставі інформації про частоту модуляції оптичного випромінювання, можна зробити прогноз про характеристики дефекту (його розмір та глибину залягання);
- вперше виявлена залежність ефективності ФТА дефектоскопії від типу амплітудної модуляції оптичного випромінювання. Показано, що форма механічних коливань зберігає форму функції модуляції у випадку гармонійної модуляції;
- вперше показано, що ефективність перетворення оптичної енергії в механічну вища, ніж ефективність перетворення теплової енергії (на поверхні) в механічну. ККД ФТА перетворення майже в 2 рази більший за ККД перетворення теплової енергії в механічну, яка описана в «задачі Даніловської» [53];
- встановлено, що основну інформацію про геометрію об'єкта несуть поздовжні хвилі, тому немає потреби використання додаткового приймача зсувних пружних коливань. Для ФТА дефектоскопії досить використовувати лише один приймач;

- встановлено, що ефективність використання ФТА дефектоскопії з оптичним приймачем пружних коливань вища, ніж з п'єзокерамічним приймачем.

Практичне значення одержаних результатів

Розроблені теоретичні основи застосування ФТА перетворення для дефектоскопії які: є фундаментом для розробки засобів неруйнівного контролю виробів; дають можливість контролювати точність вимірювань за допомогою попереднього калібрування на «зразках-свідках» (зразки із попередньо відомою товщиною шарів); дозволяє проводити удосконалення технології виробництва тонкошарових конструкцій, шляхом створення пристроїв контролю товщини багатошарових інтегральних схем на первинних етапах виробництва.

Запропонований метод ФТА неруйнівної дефектоскопії є унікальним для застосування в твердотільній електроніці під час масового виробництва великих інтегральних схем (BIC), оскільки лише цей метод дозволяє збуджувати пружну хвилю в тонкошарових об'єктах, які є не магнітними та оптично непрозорими.

Особистий внесок здобувача

Автор вперше отримав математичні вирази для розрахунку теплових та механічних параметрів пружних матеріалів при ФТА дефектоскопії; написав програму для чисельних досліджень, побудови амплітудних, фазових та часових картин розподілу теплових і механічних параметрів.

Всі матеріали, які викладені у дисертації, опубліковані в роботах здобувача окремо та разом із співавторами. У всіх роботах здобувач безпосередньо брав участь в постановці розглянутих задач, розробці методів їх розв'язку, аналізі результатів досліджень, написанні та оформленні статей і матеріалів конференцій. Основні чисельні результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації

Основні результати дисертації були представлені, доповідалися і обговорювалися на: Международных молодежных научно-практических конференциях «Человек и Космос». (Днепропетровск, 2002, 2004); Международной конференции «Dynamical system modeling and stability

investigation». (Київ, 2003, 2005, 2007, 2009); Другій науково – практичній конференції «Проблеми та перспективи розвитку транспортних систем: техніка, технологія, економіка і управління» (Київ, 2004); Акустическом симпозиуме Консонанс. (Київ, 2005); IX Международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии» (Одесса, 2008) та семінарі в відділі приймачів випромінювання інституту фізики НАН України (2009), на XXX Міжнародній науково-технічній конференції «Електроніка і нанотехнології» (2010) і на наукових семінарах кафедри акустики і акустoeлектроніки.

Публікації

В ході виконання роботи за темою дисертації опубліковано 16 наукових праць (у тому числі: 5 статей у фахових журналах рекомендованих ВАК та 10 в матеріалах міжнародних наукових конференцій). Отримано Патент України.

РОЗДІЛ 1. ОПТИЧНА ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ

1.1. Огляд літератури

1.1.1. Збудження звуку всередині середовища

В оптично поглинаючих середовищах при малих густинах енергії основну роль відіграє тепловий механізм генерації звуку. В цьому випадку не виникає зміна агрегатного стану речовини в області поглинання світла, а генерація звуку обумовлена розширенням ділянок середовища, що нагріваються оптичним випромінюванням, й основні закономірності описуються лінійною теорією [64].

Вперше про генерацію звуку при поглинанні лазерного випромінювання було повідомлено у 1963 році. При фокусуванні інтенсивного променя оптичного квантового генератору на поверхні тіла, зануреного у рідину, спостерігалися різні нестационарні ефекти, наприклад кумулятивний викид рідини від місця пропалювання поверхні тіла. Випромінювання акустичною хвилі стиску при цьому виникає в результаті швидкого розширення парової порожнини. Якщо швидкість розширення порожнини стає сумірною зі швидкістю звуку, то в рідині збуджується ударна хвиля, яка й приводила до згаданого ефекту. Введення у рідину красильної речовини, для підвищення поглинання світла, приводило к різкому підсиленню спостереженого ефекту, який був названий світлогидровличним.

Встановлено, що при досягненні деяких визначених граничних значень інтенсивності падаючого випромінювання відбувається оптичний пробій. При цьому в фокальній площині виникає щільна плазма, яка починає поглинати світло в результаті її вільно-вільних переходів. Це призводить до подальшого вкладення енергії, розігріву виникаючої порожнини, її швидкому розширенню та збудження ударних хвиль. Таке збудження потужних звукових імпульсів при пробіі може

виникати як у рідині й газах, так і у твердих тілах [61]. У твердих тілах ударні хвилі приводили до спостережених руйнувань зразків.

Коли уся поглинута енергія мала, то середовище не випаровується, генерація звуку виникає за рахунок розширення швидко нагрітого об'єму речовини. Але для цього потрібно достатньо великі потужності падаючого випромінювання.

При розгляді нестационарного сферично-симетричного збудження звуку в рідині, яке дуже цікаве для таких прикладних задач як мікрохірургія ока, звукова хвиля має вигляд імпульсу стиску та розрідження, які сліднують один за одним. Це пояснюється тим, що після вмикання лазера речовина, в фокальній площині оптичного потоку, починає нагріватися та розширюватися, в результаті чого в середовищі виникають деформації та додаткові напруження, пов'язані зі зміною температури. Спочатку тиск росте, а потім, в силу сферичної симетрії, починає спадати.

Збудження звуку може виникати й при поглинанні випромінювання в твердих тілах. Хоч фізичні явища і цьому випадку протікають аналогічним чином, математичний опис виявляється більш складним.

1.1.2. Збудження звуку у поверхневому шарі речовини

Розглянемо збудження звуку, обумовлене поглинанням випромінювання в тонкому поверхневому шарі, товщина якого мала в порівнянні з характерними розмірами тіла. Причому товщина цього шару припускається більшою в порівнянні з довжиною хвилі падаючого випромінювання. В цьому розумінні середовище є слабо поглинаючим.

Нехай лазерний імпульс падає нормально на границю розподілу прозорого та поглинаючого середовищ. Розглянемо випадок коли густина поглинутої енергії мала в порівнянні з питомою теплотою випаровування. Тоді виникає нагрів поверхневого шару речовини, яке не супроводжується випаровуванням. В

результаті в середовищі виникнуть термопружні напруження, які призведуть до збудження звукових хвиль, які розповсюджуються від поверхні.

Коли границя напівпростору вільна, в середовищі, при оптичному імпульсному збудженні, виникають імпульси стиску та розрядження, які сліднують один за одним; в випадку коли границя жорстка — лише імпульс стиску.

При випаровуванні рідини, виникає збудження звуку, яке викликається імпульсом віддачі (збудження звуку при випаровуванні поблизу жорсткої поверхні виникає таким самим чином, як й при фокусуванні потужного лазерного випромінювання в товщі речовини). Помітне випаровування починається, коли поверхневий шар нагрівається до температури кипіння. Якщо інтенсивність падаючого випромінювання мала, так що за весь час тривалості імпульсу в поверхневому шарі поглинається енергія, менша за приховану теплоту фазового переходу, тоді генерація звуку із-за випаровування незначна та носить другорядний характер.

Якщо інтенсивність лазерного випромінювання достатньо велика так, що форсоване випаровування починається раніше за формування імпульсу стиску із-за розширення нагрітої рідини, то основну роль в збудженні звуку буде відігравати механізм випаровування. Після встановлення квазістаціонарного процесу випарювання з поверхні рідини уся енергія, яка підводиться з випромінюванням, йде в основному на випарювання.

В цьому разі при опроміненні рідини на її поверхні утворюється невелика лунка, з якої витікання пару проходить практично нормально до поверхні. При цьому на поверхні рідини діє імпульс віддачі, який призводить к збудженню звуку. Були спостережені імпульси стиску та розрядження, які сліднують один за одним. Відстань між ними приблизно дорівнювалось тривалості лазерного імпульсу [37, 61].

1.1.3. Збудження звуку, обумовлене електрострикцією

При взаємодії двох світових хвиль різної частоти в речовині внаслідок ефектів електрострикції та фотопружності можуть генеруватися гармонічні хвилі. Така генерація, в частому випадку, спостерігається при вимушеному розсіюванні Мандельштама-Бриллюена в результаті нелінійної взаємодії [10, 61].

Електрострикція — деформація твердих, рідких та газоподібних діелектриків в електричному полі, обумовлена їх поляризацією та пропорційна квадрату напруженості електричного поля. Квадратична залежність деформації від поля E означає, в частості, що знак електрострикції (тобто розширюється чи стискається речовина в електричному полі) не залежить від напрямлення поля. В змінному полі в результаті електрострикції механічні коливання виникають з частотами вдвічі більшими, ніж частота поля [7, 11, 20].

Електрострикція обумовлена поляризацією діелектриків в електричному полі, тобто зміщенням під дією поля, атомів, які несуть на собі електричні заряди (іони, електричні диполі), або зміною орієнтацією диполів. Електрострикцією володіють всі тверді діелектрики незалежно від їх структури та симетрії. З другої сторони, створення механічних напруг в речовинах, які володіють електрострикцією, але не є п'єзоелектриками, не супроводжується виникненням електричної поляризації та відповідно електричного поля. В середовищах, які володіють центром симетрії, однорідна деформація, яка виникає під дією механічних напруг, викликає однорідну зміну відстаней між зарядами атомів та, отже, не призводить до виникнення електричного моменту, тобто поляризації. Тому, в принципі, електрострикцію можна використовувати для збудження звуку (з подвійної частотою), але не для перетворення звукових коливань в електрику.

Електрострикція спостерігається в газах, які володіють дипольними моментами. Серед рідин найбільшою електрострикцією також володіють дипольні, проте, в принципі, залежність густини від електричного поля має місце в будь-якій рідині. В середовищах, які сильно проводять електрику, наприклад в металах, електричне поле дорівнює нулеві й, отже, електрострикція відсутня.

1.2. Основні математичні співвідношення, які описують збуджений стан середовища

1.2.1. Рівняння теплопровідності, крайові умови

Більшість задач фізики призводить до диференціальних рівнянь з частковими похідними другого порядку відносно шуканої функції. Виведемо рівняння, яке описує розподіл температури в тілі.

Нехай дано ізотропне тіло: T – температура тіла, ρ – його густина, C_e – питома теплоємність, I – інтенсивність джерел тепла, тобто кількість тепла, яка виділяється одиницею об'єму тіла за одиницю часу. Підрахуємо баланс тепла за одиницю часу частинок тіла, які заповнюють об'єм G . Згідно з гіпотезою Фур'є, кількість тепла, яка поступає в G через елемент поверхні ΔS , визначається формулою:

$$\Delta Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \Delta S,$$

де κ – додатний коефіцієнт пропорційності, який характеризує тіло і називається коефіцієнтом теплопровідності, $\vec{n}$ – внутрішня нормаль до границі області G . Отже, кількість тепла, яка поступає в G через поверхню S , згідно з формулою Остроградського буде дорівнювати 9]

$$-\iint_S \kappa \frac{\partial T}{\partial n} dS = \iiint_G \operatorname{div}(\kappa \nabla T) d\tau.$$

Загальна кількість тепла, яка поступає в G , визначається рівністю:

$$W_1 = \iiint_G \operatorname{div}(\kappa \nabla T) d\tau + \iiint_G I d\tau,$$

де другий складник правої частини рівності — тепло, яке поступає за рахунок джерел.

Для підвищення температури елемента об'єму $d\tau$ на величину dT за час Δt потрібна кількість тепла

$$C_e dT \rho d\tau = C_e \rho \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t d\tau.$$

Загальна кількість тепла, яка йде на підвищення температури часток тіла, які заповнюють об'єм G , за одиницю часу буде

$$W_2 = \iiint_G C_e \rho \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Поклавши $W_1 = W_2$, отримаємо

$$\iiint_G [\operatorname{div}(\kappa \nabla T) + I] d\tau = \iiint_G C_e \rho \frac{\partial T}{\partial t} d\tau.$$

Враховуючи, що область G довільна, по теоремі о середнім значенні отримаємо [69]

$$\operatorname{div}(\kappa \nabla T) - C_e \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -I. \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) представляє собою диференціальне рівняння розповсюдження тепла в неоднорідній речовині. У випадку однорідної речовини це рівняння запишеться у вигляді

$$\Delta T - \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{I}{\kappa}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\kappa}{C_e \rho}} \quad (1.2)$$

та представляє собою одне з основних рівнянь математичної фізики — рівняння теплопровідності [38].

При вирішенні задач фізики чи інших областей науки математичними методами необхідно перш за все дати математичну постановку задачі, а саме: написати рівняння (чи систему рівнянь), якому задовольняє шукана функція (чи система функцій), яка описує досліджуване явище; написати додаткові умови, яким повинна задовольняти шукана функція на границях областей її визначення [37].

В якості однієї з основних крайових задач для рівняння (1.2) ставиться наступна так звана *задача Коши*.

Потрібно знайти рішення рівняння (1.2), яке диференціюється неперервно два рази по просторовим координатам та диференціюється неперервно по часу t в усіх точках n - вимірного простору при $t > 0$, неперервне при $t = 0$ та задовольняє початковим умовам

$$T|_{t=0} = \psi(P),$$

де $\psi(P)$ – задана неперервна та обмежена функція точки P n – вимірного простору. Це *початкова умова*.

Розглядаючи цю задачу з точки зору фізики, коли $n = 3$, можна сказати, що вона представляє собою задачу знаходження температури точок простору, який заповнений однорідною речовиною, в усі наступні моменти часу, якщо температура в усіх точках простору в початковий момент часу $t = 0$ відома.

При вирішенні задач математичної фізики виділяють три типи крайових умов. Запишемо ці умови стосовно задачі теплопровідності.

Крайова умова першого типу.

$$T|_S = \Phi(P, t), \quad t \geq t_0,$$

задається температура границі S , яка оточує об'єм G в якому знаходиться однорідна речовина, температуру якої потрібно обчислити.

Крайова умова другого типу.

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = \Phi(P, t), \quad t \geq t_0,$$

задається потік тепла через площину S .

Крайова умова третього типу.

$$\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial n} - hT \right) \Big|_S = \Phi(P, t), \quad t \geq t_0,$$

дана умова відповідає випадку, коли з поверхні тіла випромінюється тепло у простір, h – коефіцієнт теплопровідності зовнішнього простору. Ця умова виводиться за допомогою закону Ньютона [37].

1.2.2. Рівняння термопружності

Термопружність розглядає пружне тіло як термодинамічну систему, взаємодія якої з навколишнім середовищем виявляється лише в механічній роботі зовнішніх сил та в теплообміні [10].

Термодинамічна система характеризується кінцевим числом незалежних змінних — макроскопічних величин, які називаються термодинамічними параметрами. Одним з незалежних макроскопічних параметрів термодинамічної системи, який відрізняє її від механічної, є температура як міра інтенсивності теплового руху. Зв'язок деформації та температури встановлюється з допомогою термодинаміки.

При механічній та тепловій дії в пружному тілі виникають поля переміщень u , деформації ε та напруг σ , а також температурне поле T . Під механічними розуміють дія на тіло зовнішніх сил (об'ємних та поверхневих), а під тепловими — процеси теплообміну між поверхнею тіла та навколишнім середовищем та виділення або поглинання тепла джерелами, розподіленими в тілі.

В загальному вигляді задача термопружності полягає в наступному. Необхідно при заданих механічних та теплових діях визначити 16 функцій координат x_k та часу t : шість компонент тензору напруги σ_{ij} , шість компонент тензору деформації ε_{ij} , три компоненти вектору переміщень u_i та температуру T , які задовольняють:

трьом рівнянням руху

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

де F_i — об'ємна сила, ρ — густина речовини;

шести співвідношенням між напругами та деформаціями

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\theta]\delta_{ij} \quad (1.4)$$

де λ та μ — коефіцієнти Ламе, α_T — середній коефіцієнт теплового розширення, $\theta = T - T_0$ — зміна температури, δ_{ij} — символ Кронекера;

шести співвідношенням між деформаціями та переміщеннями

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.5)$$

рівнянню теплопровідності

$$(\kappa T_{,i})_{,i} + \varpi = T\dot{S} \quad (1.6)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності, $\dot{S}$ – швидкість внутрішнього виникнення густини ентропії, ϖ – антисиметричний тензор, $-\kappa T_{,i} = q_i$ – компонент вектору густини теплового потоку, при визначених початкових та граничних умовах.

У випадку коли $\frac{\theta}{T_0} \ll 1$ замість нелінійного рівняння теплопровідності (1.6)

використовується рівняння:

$$\kappa T_{,ii} + \varpi = c_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0 \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (1.7)$$

де $\tilde{n}_\varepsilon$ – питома теплоємність при наявності деформації, задача термопружності стає лінійною. Підставляючи формулу (1.4) в (1.3) та враховуючи, що члени які містять ε_{kk} й θ , зберігаються лише при $i = j$, отримаємо [10]:

$$2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk,i} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\theta_{,i} + F_i - \rho\ddot{u}_i = 0.$$

Після заміни в цьому рівнянні деформації на переміщення по формулі (1.5), а також замінюючи j німим індексом k та враховуючи, що $u_{k,ik} = u_{k,ki}$, знаходимо

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu)u_{k,ki} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\theta_{,i} + F_i - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad (1.8)$$

Три рівняння (1.8) разом з четвертим (1.7) при визначених початкових та граничних умовах описують зміну в просторі та часі поля деформації та температури. Перепишучи ці рівняння у векторній формі отримаємо:

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\text{grad div}\vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad}\theta + \vec{F} - \rho\ddot{\vec{u}} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla^2\theta - \frac{1}{\chi}\theta + \frac{\varpi}{\kappa} - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0}{\kappa} \text{div}\dot{\vec{u}} = 0 \quad (1.10)$$

де $\chi = \frac{\kappa}{c_\varepsilon}$ – коефіцієнт температуропровідності.

Система рівнянь (1.9) та (1.10) є зв'язаною завдяки третьому члену в рівнянні (1.9) та четвертому членові в рівнянні (1.10); при цьому рівняння (1.9) враховує сили інерції. Таким чином, ця система рівнянь описує деформацію тіла, яка виникає від нестационарних механічних та теплових дій, а також зворотній ефект — зміна його температурного поля, обумовлене деформацією. Така задача називається *зв'язаною динамічною задачею термопружності*.

Вектор переміщення $\vec{u}$ може бути розкладений на потенційну та соленоїдальну частини й представлений у вигляді

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \hat{\Psi} \quad (1.11)$$

де Φ – скалярний потенціал; $\hat{\Psi}$ – векторний потенціал.

Після підстановки виразу (1.11) в рівняння (1.9) та (1.10) отримаємо для функції Φ та $\hat{\Psi}$ при $\vec{F} = 0$ наступні рівняння [10]:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi} - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T \theta = 0;$$

$$\nabla^2 \hat{\Psi} - \frac{1}{c_2^2} \ddot{\hat{\Psi}} = 0;$$

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{\chi} \theta - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0}{\kappa} \nabla^2 \Phi = -\frac{\omega}{\kappa};$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Отримані рівняння є зв'язаними рівняннями термопружності. В більшості випадків є можливість розділити ці рівняння. У випадку одновимірної, в напрямку вісі $0z$, задачі, вони приймуть наступний вигляд:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial \theta}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \theta + \frac{\varpi}{\kappa} = 0.$$

1.2.3. Рівняння термооптичного механізму збудження

Запишемо рівняння динамічної термопружності для однорідного та ізотропного тіла у наступному вигляді:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \left(3 - \frac{4}{n^2} \right) \alpha \theta - \frac{A}{c_l^2 \rho}, \quad (1.12)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta - \frac{\left(3 - \frac{4}{n^2} \right) \alpha c_l^2 T_0}{\chi C_e} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{Q}{\chi C_e \rho}, \quad (1.13)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} \right) \hat{\Psi} = - \frac{\mathbf{M}}{c_e^2 \rho}, \quad (1.14)$$

Φ та $\hat{\Psi}$ – відповідно скалярний та векторний потенціали вектору переміщень твердого тіла $\mathbf{u}$: $\mathbf{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \hat{\Psi}$, c_l та c_t – відповідно швидкості розповсюдження поздовжніх та поперечних звукових хвиль, $n = c_l / c_t$, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення твердого тіла, θ – відхилення температури твердого тіла від температури і нормального стані, T_0 – температура твердого тіла у нормальном стані, χ – коефіцієнт температуропровідності, C_e – питома теплоємність твердого тіла, ρ – його густина, Q – густина потужностей теплових джерел, A та $\mathbf{M}$ – потенціальна та соленоїдальну частини сторонньої нетермопружної сили $\mathbf{F}$, яка прикладена до одиниці об'єму твердого тіла: $\mathbf{F} = \text{grad } A + \text{rot } \mathbf{M}$.

Рівняння (1.12) являє собою хвильове рівняння для поздовжніх хвиль, джерела яких є зміна об'єму тіла, обумовлене зміною його температури, а також потенційною частиною нетермопружної об'ємної сили. Рівняння (1.13) являє собою баланс тепла, причому перший складник є звичайний дифузійний член, а другий складник зобов'язаний своїм походженням зміні температури тіла при розповсюдженні в ньому поздовжньої хвилі та має назву ділатаційного складника; права частина рівняння — джерело теплової енергії. Рівняння (1.14) являє собою

хвильове рівняння для поперечних хвиль, джерелом яких є соленоїдальну частина нетермопружної об'ємної сили [11].

Застосуємо до рівняння (1.12) оператор $\left(\Delta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t}\right)$ та замінімо в отриманому таким чином рівнянні праву частину згідно рівнянню (1.13). Отримаємо

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta^2 - \left[1 + \left(3 - \frac{4}{n^2} \right)^2 \frac{\alpha^2 T_0 c_l^2}{C_e} \right] \frac{1}{\chi} \Delta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi c_l^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right\} \Phi = \\ = - \frac{\left(3 - \frac{4}{n^2} \right) \alpha Q}{\chi C_e \rho} - \left(\Delta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{A}{c_l^2 \rho} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{\Psi} = - \frac{\mathbf{M}}{c_t^2 \rho}. \end{aligned}$$

Ділатаційний член $\left(3 - \frac{4}{n^2} \right)^2 \frac{\alpha^2 T_0 c_l^2}{C_e}$ для більшості твердих тіл дуже малий (знаходиться у межах $10^{-5} \div 10^{-3}$) та його можна не враховувати [11]. В цьому випадку ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta^2 - \frac{1}{\chi} \Delta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi c_l^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right\} \operatorname{div} \mathbf{u} = - \frac{\left(3 - \frac{4}{n^2} \right) \alpha \Delta Q}{\chi C_e \rho} - \left(\Delta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}}{c_l^2 \rho}; \\ \left(\Delta - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \operatorname{rot} \mathbf{u} = - \frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}}{c_t^2 \rho}. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння оптичної генерації звуку в твердому ізотропному тілі для гармонічних коливань. Відмітимо, що при розгляді лазерного термооптичного збудження звуку в твердому тілі буде враховуватися вплив теплопровідності, оскільки в багатьох випадках теплопровідність твердих тіл значно вища, ніж у рідинах. Фактор $e^{-i\omega t}$ при цьому опускаємо:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_l^2}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\left(3 - \frac{4}{n^2}\right) \alpha}{C_e \rho} \frac{1 - \frac{i\omega\chi}{c_l^2}}{1 + \frac{\omega^2\chi^2}{c_l^4}} \frac{i}{\omega} \Delta Q - \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}}{\rho c_l^2} \quad (1.15)$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}}{\rho c_t^2} \quad (1.16)$$

Нехай на границю твердого тіла, під деяким кутом до нормалі, падає модульоване по інтенсивності лазерне випромінювання. При поглинанні випромінювання в твердому тілі виникають так звані теплові «джерела звуку» з густиною потужності Q :

$$Q(x, y, z, t) = \beta J(x, y) \cdot m \cdot \exp\left(-\frac{\beta z}{\cos \vartheta}\right) \cdot \exp(-i\omega t),$$

де β – оптичний коефіцієнт поглинання, $J(x, y)$ – інтенсивність випромінювання на границі з урахуванням коефіцієнта проходження випромінювання через границю, m – коефіцієнт модуляції інтенсивності випромінювання, ϑ – кут нахилу вісі «термоакустичної антени» до вісі z , який, в загальному випадку, не співпадає з кутом падіння випромінювання на границю внаслідок ефекту заломлення.

Відмітимо, що, окрім теплових, взагалі, виникають також й так звані динамічні «джерела звуку» з об'ємною силою F , направленою вздовж вісі фіктивної «термоакустичної антени» та рівній $F = \frac{Q}{c}$, де c – швидкість світла.

Розв'язуючи рівняння (1.15) та (1.16), можна показати, що амплітуда зміщень в звукових хвилях, обумовлених динамічними джерелами звуку, приблизно на п'ять порядків менша за амплітуду зміщення в звукових хвилях, обумовлених тепловими джерелами звуку. Тому динамічні джерела звуку можуть грати яку-небудь значну роль тільки у випадках, коли теплові джерела не збуджують усіх можливих компонентів звукового поля. В твердому тілі, окрім поздовжніх хвиль, можуть існувати ще й поперечні хвилі. Поперечні хвилі з поляризацією у площині падіння можуть виникати в результаті відбиття від

границі поздовжніх хвиль. Їх амплітуда по порядку такої ж величини, як і амплітуда поздовжніх хвиль, обумовлених тепловим механізмом. Тому для хвиль подібного типу впливом динамічного механізму на генерацію звуку можна також знехтувати. Що стосується поперечних хвиль з поляризацією в площині границі, то вони не можуть виникати в наслідок відбиття від границі поздовжніх хвиль. Поперечні хвилі цієї поляризації збуджуються лише завдяки динамічному механізму генерації звуку. Проте внаслідок порівняно малої ефективності цей механізм збудження, як правило, не розглядається [11].

1.2.4. Рівняння електропружності

В класичній теорії пружності зміна сил електричною взаємодією (механічної напруги) при деформації визначаються такими інтегральними характеристиками, як модуль пружності та коефіцієнт Пуассона. Встановлені таким чином лінійні співвідношення є вираженням добре відомого закону Гука. Проте є спеціальні класи матеріалів, внутрішня електрична структура яких не дозволяє описати процеси їх деформування співвідношеннями закону Гука. Це відомі п'єзоелектричні матеріали.

При розробці математичної теорії враховується, що кераміки є крихкими матеріалами без помітно виражених пластичних властивостей та їх руйнування виникає при малих рівнях деформації. Це дозволяє з високим ступенем точності описувати кінематику речовини, як і в класичній теорії пружності, лінійним тензором деформації. При обмеженнях на рівні механічної та електричної напруги в теорії можливо використовувати постійні значення характеристик п'єзоефекту, діелектричних та механічних властивостей матеріалу. Якщо додатково припустити, що процес деформування є адіабатичним (ізотермічним), то рівняння стану п'єзокерамічної середі, по суті, буде співпадати з аналогічним рівнянням для кристалів кварцу, на яких вперше в 1881 р. Брати Жак та П'єр Кюрі відкрили явище п'єзоелектричного ефекту. [20]

Специфіка постановки електричних граничних умов буде в тому, що необхідне ретельне врахування характеристик властивостей зовнішніх електричних кіл, розташування поверхневих та внутрішніх (розташованих в об'ємі тіла) електродів по відношенню до напрямлення поля попередньої поляризації. Важливим елементом механіки сполучених полів є введення в польову теорію характеристик перетворення енергії. Для п'єзокерамічних середовищ такими характеристиками є так звані ефективні (динамічні) коефіцієнти електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Для однорідної деформації існують формули, за якими виконується розрахунок КЕМЗ. Відомо, що відміна польових рівнянь п'єзоефекту керамічних середовищ від аналогічних рівнянь класичної теорії пружності обумовлено необхідністю введенням до розгляду нових термодинамічних змінних, які характеризують електричний стан середовища. В результаті замість 15 змінних, які описують пружне поле (переміщення, деформації та напруги), використовується 22 змінних (додатково к пружному полю — вектори напруги та індукції електричного поля та електричний потенціал).

В теорії електропружності, як і в класичній теорії пружності, розрізняють дві основні постановки задач: в переміщеннях (аналог рівнянь Ламе) та в напругах [20]. Відмітимо важливу особливість постановки задач електропружності для п'єзокерамічних середовищ. Електричні властивості даних матеріалів виявились таким, що постановка зв'язаних задач електропружності в визначеному аспекті виявилась аналогічною класичній постановці задач теорії пружності. Як електричні, так і механічні складові пов'язаних полів відшукуються лише всередині об'єму тіла. Зовнішні електромагнітні поля розсіювання виявились такими, що ними можна було знехтувати внаслідок великої різниці в діелектричних проникливостях кераміки та вакууму (повітря). Відносно початкових умов задачі відмітимо наступне. Враховуючи, що швидкість електромагнітних хвиль в керамічному середовищі на п'ять порядків перевищує швидкість розповсюдження пружних хвиль, обґрунтовано приймаємо миттєву

зміну електричного поля по об'єму керамічного тіла, тобто приймаємо значення, які розраховані по рівнянням змущеної електростатики.

Прямий п'єзоелектричний ефект був відкритий у 1880 р., при механічному напруженні кристалів кварцу на їх поверхні з'являються електричні заряди. Пізніше, Ж. Липпманом теоретично, а потім братами Кюрі на практиці, був виявлений зворотній п'єзоелектричний ефект — розміщений в електричному полі кристал змінює свої розміри. Для нашої праці обмежимося рівняннями які описують лінійні процеси в п'єзокераміці. Три закони збереження (маси, кількості руху та моменту кількості руху) в математичний запис яких входять лише механічні зміни зв'язаного поля, використовуються далі в тому ж вигляді, що і для лінійної теорії пружності, єдина відмінність полягає в тому, що необхідно врахувати в рівнянні балансу енергій потоку електричної енергії.

Для попередньо поляризованих п'єзокерамік, з врахуванням властивості симетрії та при виборі вісі Oz системи декартових координат в напрямку силових ліній електричного поля попередньої поляризації, а також враховуючи одновимірну модель нашої задачі, рівняння п'єзоефекту приймуть наступний вигляд (в прямокутній системі координат)

рівняння руху Ньютона (без врахування об'ємних сил)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial y} = \rho \ddot{u}; \quad (1.17)$$

рівняння вимушеної електростатики (акустичне наближення)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Psi \quad (1.18)$$

рівняння стану

$$\sigma_z = c_{33}^E \varepsilon_z - e_{33} E_z, \quad D_z = \varepsilon_{33}^S E_z + e_{33} \varepsilon_z \quad (1.19)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

РОЗДІЛ 2. НЕСТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ ПЛОСКОГО ПРУЖНОГО ШАРУ

2.1. Математична постановка задачі

В даному розділі була вирішена одновимірна задача генерації акустичних хвиль, за допомогою лазерного випромінювання. В якості об'єкту досліджу виступає пружний шар. Розглянемо об'єкт досліджу більш докладно.

Лазерне випромінювання, поглинаючись в шарі, викликає його неоднорідне теплове розширення. Це теплове розширення речовини, в свою чергу, викликає збудження в середовищі акустичної хвилі. Падіння лазерного потоку вважалось нормальним до границі розподілу повітря – шар. Випромінювання було модульоване по інтенсивності. Функція амплітудної модуляції може мати будь який вигляд.

Для подальшого аналізу та розрахунків прийнята наступна модель — об'єкт має вигляд нескінченного в повздовжніх напрямках пружного шару, на який діє плоский потік лазерного випромінювання з амплітудною модуляцією, яка описується функцією $f(t)$.

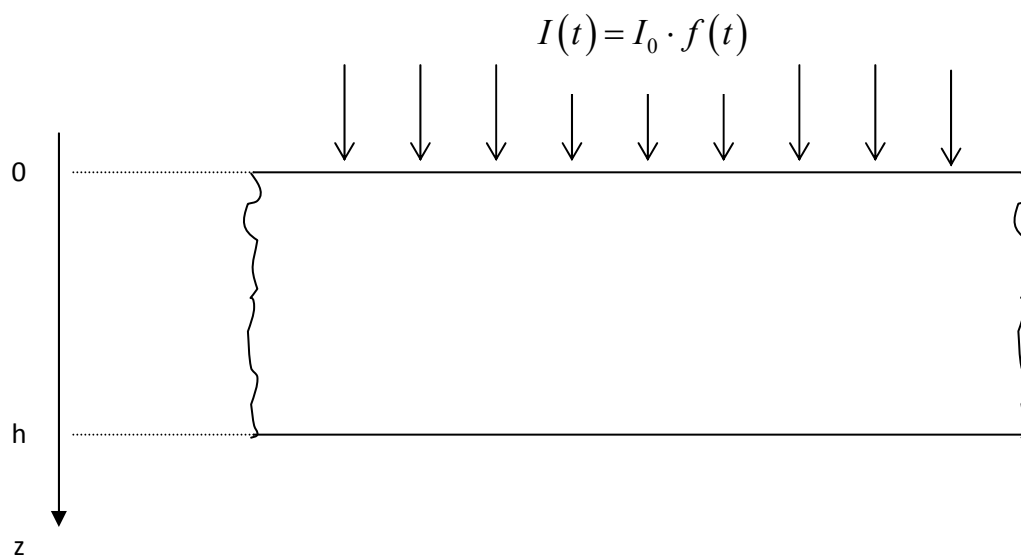


рис. 2.1

Лазерне випромінювання викликає прогрівання шару з заданим законом розподілу густини теплових джерел. При цьому виникає термооптична генерація звукових хвиль. Під впливом лазеру в шарі починають розповсюджуватися поздовжні хвилі, в напрямку вісі Oz . Коли акустична хвиля добігає границі шару, частина її енергії відбивається — отже рішення запропонованої задачі, повинно враховувати пружні хвилі, які йдуть в напрямку вісі Oz та хвилі з протилежним напрямком розповсюдження.

Вважається що при описі процесів, які протікають в пружному шарі, виправдано використання рівнянь теорії незв'язаної термопружності. [8]

Підсумовуючи усе раніш сказане запишемо математичні рівняння, які описують процеси в шарі, а також крайові умови для кожної з границь та початкові умови для процесу. При зроблених допущеннях вихідна система включає в себе рівняння незв'язаної теплопровідності та рівняння руху пружного шару:

$$\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = -\frac{\beta e^{-\beta z}}{2\kappa} I_0 f(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \eta \alpha \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}. \quad (2.2)$$

В приведених диференціальних рівняннях прийняті наступні позначення: $\theta(z,t)$ — різниця між температурою речовини в збудженому стані та температурою в стані спокою; χ , κ , β — коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та оптичного поглинання, відповідно; $u(z,t)$ — виникаючи в

шарі переміщення; $v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ — швидкість розповсюдження пружних поздовжніх хвиль (λ та μ — коефіцієнти Ламе, ρ — густина шару); α —

коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу; $\eta = \frac{B^*}{C^T}$, $B^* = 3\lambda + 2\mu$,

$$C^T = \lambda + 2\mu.$$

Рівняння механічної напруги в шарі має вигляд:

$$\sigma(z, t) = C^T \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \alpha B^* \theta(z, t) \quad (2.3)$$

Крайові умови можуть мати різноманітні комбінації з наступних умов:
на границі $z = 0$:

$$\theta(z, t)|_{z=0} = 0, \quad (2.4) \quad \kappa \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.5)$$

$$u(z, t)|_{z=0} = 0, \quad (2.6) \quad \sigma(z, t)|_{z=0} = 0; \quad (2.7)$$

на границі $z = h$:

$$\theta(z, t)|_{z=h} = 0, \quad (2.8) \quad \kappa \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (2.9)$$

$$u(z, t)|_{z=h} = 0, \quad (2.10) \quad \sigma(z, t)|_{z=h} = 0. \quad (2.11)$$

Треба також задати початкові умови для процесу який досліджується:

$$\theta(z, t)|_{t=0} = 0, \quad (2.12) \quad \kappa \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.13)$$

$$u(z, t)|_{t=0} = 0, \quad (2.14) \quad \sigma(z, t)|_{t=0} = 0. \quad (2.15)$$

Для аналізу нестационарного процесу, були вибрані наступні крайові умови (2.5), (2.7), (2.9) та (2.11).

Вище наведені рівняння повністю описують процеси, які протікають в шарі.

2.2. Розв'язок нестационарної задачі

Процес розв'язку задачі нестационарного термооптичного збудження пружного шару, було поділено на декілька етапів.

2.2.1. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду

Задля спрощення розрахунків та отримання більш уніфікованих розв'язків, було вирішено записати вирази, які описують нестационарний процес, крайові та початкові умови в безрозмірному вигляді. Це було зроблено за наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x/h, \quad \tilde{t} = tv/h, \quad \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \theta(z, t)\alpha \\ \tilde{u}(\tilde{z}, \tilde{t}) &= u(z, t)/h, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sigma(z, t)/C^T\end{aligned}\quad (2.16)$$

Після перетворення отримаємо наступні диференціальні рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} - A_1 \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = A_2 \tilde{f}(\tilde{t}) e^{-\beta h \tilde{z}} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = \eta \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} \quad (2.18)$$

де $A_1 = \frac{\nu h}{\chi}$, $A_2 = -\frac{\alpha \beta h^2 I_0}{2\kappa}$. Рівняння механічної напруги буде мати наступний вигляд:

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} - \eta \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t}) \quad (2.19)$$

Крайові умови, з урахуванням (2.16), запишуться в наступному вигляді:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (2.20)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}, \tilde{t})|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=1} = 0, \quad (2.22)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}, \tilde{t})|_{\tilde{z}=1} = 0; \quad (2.23)$$

початкові умови матимуть вигляд:

$$\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})|_{\tilde{t}=0} = 0, \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0, \quad (2.25)$$

$$\tilde{u}(\tilde{z}, \tilde{t})|_{\tilde{t}=0} = 0, \quad (2.26)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}, \tilde{t})|_{\tilde{t}=0} = 0. \quad (2.27)$$

2.2.2. Перетворення Лапласа за часом та отримання загальних розв'язків

Для того щоб розв'язати диференціальних рівнянь (2.17) та (2.18), до них було застосовано перетворення Лапласа за часом. З використанням початкових умов (2.24) – (2.27), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}^2} - A_1 p \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p) = A_2 \tilde{f}^L(p) e^{-\beta h \tilde{z}} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}^2} - p^2 \tilde{u}^L(\tilde{z}, p) = \eta \frac{\partial \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}} \quad (2.29)$$

механічна напруга:

$$\tilde{\sigma}^L(\tilde{z}, p) = \frac{\partial \tilde{u}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}} - \eta \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p) \quad (2.30)$$

Крайові умови:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\sigma}^L(\tilde{z}, p)|_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (2.32)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}^L(\tilde{z}, p)}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=1} = 0, \quad (2.33)$$

$$\tilde{\sigma}^L(\tilde{z}, p)|_{\tilde{z}=1} = 0. \quad (2.34)$$

В подальшому позначення $(\tilde{z}, p)$ та (p) будемо опускати.

Часткові розв'язки рівнянь (2.28) та (2.29) було отримано за допомогою метода варіації постійних (тільки цей метод дав розв'язки у формі, яка дозволила проводити чисельні дослідження). Загальні розв'язки мають вигляд:

$$\tilde{\theta}^L = C_1^L RM_{11}^L + C_2^L RM_{12}^L + \tilde{f}^L \left(RS_{1-1}^L + RS_{1-2}^L \right) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}^L = & C_1^L \left(RM_{31-1}^L + RM_{31-2}^L \right) + C_2^L \left(RM_{32-1}^L + RM_{32-2}^L \right) + \\ & + C_3^L RM_{33}^L + C_4^L RM_{34}^L + \\ & + \tilde{f}^L \left(RS_{3-1}^L + RS_{3-2}^L + RS_{3-3}^L + RS_{3-4}^L + RS_{3-5}^L + RS_{3-6}^L + \right. \\ & \left. + RS_{3-7}^L + RS_{3-8}^L + RS_{3-9}^L + RS_{3-10}^L + RS_{3-11}^L \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Співвідношення для теплового потоку та механічної напруги:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}^L}{\partial \tilde{z}} = C_1^L RM_{21}^L + C_2^L RM_{22}^L + \tilde{f}^L \left(RS_{2-1}^L + RS_{2-2}^L \right) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^L = & C_1^L \left(RM_{41-1}^L + RM_{41-2}^L \right) + C_2^L \left(RM_{42-1}^L + RM_{42-2}^L \right) + \\ & + C_3^L RM_{43}^L + C_4^L RM_{44}^L + \\ & + \tilde{f}^L \left(RS_{4-1}^L + RS_{4-2}^L + RS_{4-3}^L + RS_{4-4}^L + RS_{4-5}^L + RS_{4-6}^L + \right. \\ & \left. + RS_{4-7}^L + RS_{4-8}^L + RS_{4-9}^L + RS_{4-10}^L + RS_{4-11}^L \right) - \eta \tilde{\theta}^L \end{aligned} \quad (2.38)$$

При записі виразів (2.35) – (2.38) використані наступні заміни:

$$\begin{aligned} RM_{11}^L &= \frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{p}, & RM_{21}^L &= -\sqrt{\frac{A_1}{p}} e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}, \\ RM_{31-1}^L &= \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{p(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{p(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} \right], \\ RM_{31-2}^L &= \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{p(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} - \frac{e^{-\sqrt{pA_1}-(1-\tilde{z})p}}{p(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} \right], \\ RM_{41-1}^L &= \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[-\frac{\sqrt{A_1}e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} + \frac{e^{-\tilde{z}p}}{(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} \right], \\ RM_{41-2}^L &= \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[-\frac{\sqrt{A_1}e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} - \frac{e^{-\sqrt{pA_1}-(1-\tilde{z})p}}{(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} \right], & RM_{12}^L &= \frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}}{p}, \end{aligned}$$

$$RM_{22}^L = \sqrt{\frac{A_1}{p}} e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}, \quad RM_{32-1}^L = \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[\frac{e^{-(1-\tilde{z})p}}{p(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} - \frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}}{p(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} \right],$$

$$RM_{32-2}^L = \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[\frac{e^{-\sqrt{pA_1}-\tilde{z}p}}{p(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} - \frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}}{p(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} \right];$$

$$RM_{42-1}^L = \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[\frac{e^{-(1-\tilde{z})p}}{(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} - \frac{\sqrt{A_1}e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt{A_1})} \right],$$

$$RM_{42-2}^L = \frac{\eta\sqrt{A_1}}{2} \left[-\frac{e^{-\sqrt{pA_1}-\tilde{z}p}}{(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} - \frac{\sqrt{A_1}e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{A_1})} \right];$$

$$RM_{33}^L = \frac{e^{-\tilde{z}p}}{p}, \quad RM_{43}^L = -e^{-\tilde{z}p};$$

$$RM_{34}^L = \frac{e^{-(1-\tilde{z})p}}{p}, \quad RM_{44}^L = e^{-(1-\tilde{z})p}.$$

$$RS_{1-1}^L = \frac{A_2}{2A_1} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right],$$

$$RS_{1-2}^L = \frac{A_2}{2A_1} \left[\frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1}-\beta h}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right];$$

$$RS_{2-1}^L = \frac{A_2}{2A_1} \left[-\frac{\sqrt{A_1}e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\left(\sqrt{p}-\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} + \frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}-\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right],$$

$$\begin{aligned}
RS_{2-2}^L &= \frac{A_2}{2A_1} \left[\frac{\sqrt{A_1} e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{\left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} + \frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right]; \\
RS_{3-1}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{2(\beta h)}{(\beta h)^2 - A_1^2} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right], \\
RS_{3-2}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{2(\beta h)}{(\beta h)^2 - A_1^2} \left[\frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right], \\
RS_{3-3}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{e^{-\sqrt{pA_1} - \beta h - \tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} + \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right], \\
RS_{3-4}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1}\right)} + \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1}\right)} \right], \\
RS_{3-5}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{A_1}\right)} + \frac{e^{-\sqrt{pA_1} - \beta h - \tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{A_1}\right)} \right], \\
RS_{3-6}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{\beta h}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{\beta h}\right)} \right], \\
RS_{3-7}^L &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{\beta h}\right)} - \frac{e^{-\tilde{z}p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{\beta h}\right)} \right],
\end{aligned}$$

$$RS_{3-8}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[-\frac{e^{-\sqrt{pA_1} - (1-\tilde{z})p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} + \frac{e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} \right],$$

$$RS_{3-9}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[-\frac{e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1} \right)} - \frac{e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1} \right)} \right],$$

$$RS_{3-10}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[-\frac{e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{A_1} \right)} + \frac{e^{-\sqrt{pA_1} - (1-\tilde{z})p}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \sqrt{A_1} \right)} \right],$$

$$RS_{3-11}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{2}{\beta h + A_1} \left[\frac{e^{-\tilde{z}\beta h}}{p + \beta h} - \frac{e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{p + \beta h} \right];$$

$$RS_{4-1}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{2(\beta h)}{(\beta h)^2 - A_1^2} \left[-\frac{\sqrt{A_1} e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} + \frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} \right],$$

$$RS_{4-2}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{2(\beta h)}{(\beta h)^2 - A_1^2} \left[\frac{\sqrt{A_1} e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{\left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} + \frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p} \left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} \right],$$

$$RS_{4-3}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[\frac{\sqrt{p} e^{-\sqrt{pA_1} - \beta h - \tilde{z}p}}{\left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} + \frac{\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} e^{-\tilde{z}p}}{\left(\sqrt{p} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right)} \right],$$

$$RS_{4-4}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[\frac{\sqrt{A_1} e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{\left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1} \right)} - \frac{\sqrt{A_1} e^{-\tilde{z}p}}{\left(\sqrt{p} - \sqrt{A_1} \right)} \right],$$

$$RS_{4-5}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{\sqrt{A_1} e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{(\sqrt{p} + \sqrt{A_1})} - \frac{\sqrt{p} e^{-\sqrt{pA_1} - \beta h - \tilde{z}p}}{(\sqrt{p} + \sqrt{A_1})} \right],$$

$$RS_{4-6}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p}(\sqrt{p} - \sqrt{\beta h})} + \frac{\sqrt{\beta h} e^{-\tilde{z}p}}{(\sqrt{p} - \sqrt{\beta h})} \right],$$

$$RS_{4-7}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left[-\frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{\sqrt{p}(\sqrt{p} + \sqrt{\beta h})} - \frac{\sqrt{\beta h} e^{-\tilde{z}p}}{(\sqrt{p} + \sqrt{\beta h})} \right],$$

$$RS_{4-8}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[-\frac{\sqrt{p} e^{-\sqrt{pA_1} - (1-\tilde{z})p}}{\left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} + \frac{\frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{\left(\sqrt{p} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}}\right)} \right],$$

$$RS_{4-9}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[-\frac{\sqrt{A_1} e^{-(1-\tilde{z})\sqrt{pA_1} - \beta h}}{(\sqrt{p} - \sqrt{A_1})} - \frac{\sqrt{A_1} e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{(\sqrt{p} - \sqrt{A_1})} \right],$$

$$RS_{4-10}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left[\frac{\sqrt{A_1} e^{-\tilde{z}\sqrt{pA_1}}}{(\sqrt{p} + \sqrt{A_1})} + \frac{\sqrt{p} e^{-\sqrt{pA_1} - (1-\tilde{z})p}}{(\sqrt{p} + \sqrt{A_1})} \right],$$

$$RS_{4-11}^L = \frac{\eta A_2}{4} \frac{2}{\beta h + A_1} \left[-\frac{\beta h e^{-\tilde{z}\beta h}}{p + \beta h} + \frac{\beta h e^{-\beta h - (1-\tilde{z})p}}{p + \beta h} \right].$$

2.2.3. Задовольняння крайовим умовам та перехід в область оригіналів

Для того, щоб знайти невідомі функції $C_1 - C_4$ (вони є функціями p) необхідно задовольнити крайові умови. Після підстановки співвідношень (2.37) та (2.38) в (2.31) – (2.34) буде отримана наступна система алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} &C_1^L GM_{11}^L + C_2^L GM_{12}^L + \tilde{f}^L (GS_{1_1}^L + GS_{1_2}^L) = 0 \\ &C_1^L GM_{21}^L + C_2^L GM_{22}^L + \tilde{f}^L (GS_{2_1}^L + GS_{2_2}^L) = 0 \\ &C_1^L (GM_{31_1}^L + GM_{31_2}^L) + C_2^L (GM_{32_1}^L + GM_{32_2}^L) + \\ &+ C_3^L GM_{33}^L + C_4^L GM_{34}^L + \\ &+ \tilde{f}^L \left(GS_{3_1}^L + GS_{3_2}^L + GS_{3_3}^L + GS_{3_4}^L + GS_{3_5}^L + GS_{3_6}^L + \right. \\ &\quad \left. + GS_{3_7}^L + GS_{3_8}^L + GS_{3_9}^L + GS_{3_10}^L + GS_{3_11}^L \right) - \eta \tilde{\theta}^L \Big|_{\tilde{z}=0} = 0 \\ &C_1^L (GM_{41_1}^L + GM_{41_2}^L) + C_2^L (GM_{42_1}^L + GM_{42_2}^L) + \\ &+ C_3^L GM_{43}^L + C_4^L GM_{44}^L + \\ &+ \tilde{f}^L \left(GS_{4_1}^L + GS_{4_2}^L + GS_{4_3}^L + GS_{4_4}^L + GS_{4_5}^L + GS_{4_6}^L + \right. \\ &\quad \left. + GS_{4_7}^L + GS_{4_8}^L + GS_{4_9}^L + GS_{4_10}^L + GS_{4_11}^L \right) - \eta \tilde{\theta}^L \Big|_{\tilde{z}=1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.39)$$

При записі система (2.39) було прийнято наступне позначення:

$$\begin{aligned} GM_{1i}^L &= RM_{2i}^L \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad GM_{2i}^L = RM_{2i}^L \Big|_{\tilde{z}=1} \quad (i=1,2); \quad GM_{3i_j}^L = RM_{4i_j}^L \Big|_{\tilde{z}=0}, \\ GM_{4i_j}^L &= RM_{4i_j}^L \Big|_{\tilde{z}=1} \quad (i=1,2 \ j=1,2); \quad GM_{3i}^L = RM_{4i}^L \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad GM_{4i}^L = RM_{4i}^L \Big|_{\tilde{z}=1} \quad (i=3,4); \\ GS_1^L &= RS_2^L \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad GS_2^L = RS_2^L \Big|_{\tilde{z}=1}; \quad GS_{3_i}^L = RS_{4_i}^L \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad GS_{4_i}^L = RS_{4_i}^L \Big|_{\tilde{z}=1} \quad (i=1,2..11). \end{aligned}$$

Розв'язувати систему (2.39), відносно невідомих $C_1 - C_4$, будемо в області оригіналів. Для цього інвертуємо отримані вирази (2.35) – (2.38) та систему (2.39), за допомогою табличних значень [6], в область оригіналів:

$$\tilde{\theta} = C_1 \otimes RM_{11} + C_2 \otimes RM_{12} + \tilde{f} \otimes RS_1 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} = C_1 \otimes RM_{21} + C_2 \otimes RM_{22} + \tilde{f} \otimes RS_2 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}\tilde{u} = & C_1 \otimes (RM_{31_1} + RM_{31_2}) + C_2 \otimes (RM_{32_1} + RM_{32_2}) + \\ & + C_3 \otimes RM_{33} + C_4 \otimes RM_{34} + \\ & + \tilde{f} \otimes \left(\begin{array}{l} RS_{3_1} + RS_{3_2} + RS_{3_3} + RS_{3_4} + RS_{3_5} + \\ + RS_{3_6} + RS_{3_7} + RS_{3_8} + RS_{3_9} \end{array} \right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} = & C_1 \otimes (RM_{41_1} + RM_{41_2}) + C_2 \otimes (RM_{42_1} + RM_{42_2}) - \\ & - C_3 (\tilde{t} - \tilde{z}) + C_4 (\tilde{t} - (1 - \tilde{z})) + \\ & + \tilde{f} \otimes \left(\begin{array}{l} RS_{4_1} + RS_{4_2} + RS_{4_3} + RS_{4_4} + RS_{4_5} + \\ + RS_{4_6} + RS_{4_7} + RS_{4_8} + RS_{4_9} \end{array} \right) - \eta \tilde{\theta}\end{aligned}\quad (2.43)$$

При записі виразів (2.40) – (2.43) використані наступні заміни:

$$\begin{aligned}RM_{11} &= \operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right), & RM_{21} &= -\sqrt{\frac{A_1}{\pi\tilde{t}}}e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4\tilde{t}}}, \\ RM_{31_1} &= \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -\operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) + e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{A_1\tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) \right\}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) + e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})}\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1\tilde{t}} - \frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) \right] \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \\ RM_{31_2} &= \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) - e^{A_1(\tilde{t}+\tilde{z})} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1\tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) \right\}, & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-(1-\tilde{z})}}\right) + \\ + e^{A_1(\tilde{t}+\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-(1-\tilde{z})}}\right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1\tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2}\sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) \right] \end{array} \right\}, & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases},\end{aligned}$$

$$RM_{41_1} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -A_1 e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \sqrt{\frac{A_1}{\pi(\tilde{t}-\tilde{z})}} - A_1 e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases},$$

$$RM_{41_2} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -A_1 e^{A_1(\tilde{t}+\tilde{z})} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq 1-\tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \left[-\sqrt{\frac{A_1}{\pi(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))}} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_1 e^{A_1(\tilde{t}+\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-(1-\tilde{z})}} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \right] \right\}, & \tilde{t} > 1-\tilde{z} \end{cases};$$

$$RM_{12} = \operatorname{erfc} \left(\frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right), \quad RM_{22} = \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1-\tilde{z})^2 A_1}{4\tilde{t}}},$$

$$RM_{32_1} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq 1-\tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ -1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \right. \\ \left. - e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} - \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \right\}, & \tilde{t} > 1-\tilde{z} \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
RM_{32_2} &= \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -\operatorname{erfc} \left(\frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + e^{A_1(\tilde{t}+(1-\tilde{z}))} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{erfc} \left(\frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-\tilde{z}}} \right) - \\ & -e^{A_1(\tilde{t}+(1-\tilde{z}))} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-\tilde{z}}} \right) - \right. \\ & \left. -\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \end{aligned} \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \\
RM_{42_1} &= \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -A_1 e^{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq 1-\tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{A_1}{\pi(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))}} + \\ & + A_1 e^{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} - \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-(1-\tilde{z}))} \right) \right] \end{aligned} \right\}, & \tilde{t} > 1-\tilde{z} \end{cases}, \\
RM_{42_2} &= \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left\{ -A_1 e^{A_1(\tilde{t}+\tilde{z})} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{A_1}{\pi(\tilde{t}-\tilde{z})}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t}-\tilde{z})}} + \\ & + A_1 e^{A_1(\tilde{t}+(1-\tilde{z}))} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}-\tilde{z}}} \right) - \right. \\ & \left. -\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \end{aligned} \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}; \\
RM_{33} &= \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ 1, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \quad RM_{43} = \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq 1-\tilde{z} \\ 1, & \tilde{t} > 1-\tilde{z} \end{cases};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RS_1 &= \frac{A_2}{2A_1} e^{-\tilde{z}\beta h + \frac{\tilde{t}(\beta h)^2}{A_1}} \left[-\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right]; \\
RS_2 &= \frac{A_2}{2A_1} \left\{ -\sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4\tilde{t}}} + \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1-\tilde{z})^2 A_1}{4\tilde{t}}} + \beta h e^{-\tilde{z}\beta h + \frac{\tilde{t}(\beta h)^2}{A_1}} \left[\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \right\}; \\
RS_{3_1} &= \frac{\eta A_2}{4} \frac{2\beta h}{(\beta h)^2 - A_1^2} e^{-\tilde{z}\beta h + \frac{\tilde{t}(\beta h)^2}{A_1}} \left[-\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], \\
RS_{3_2} &= \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} e^{\frac{(\tilde{t}-\tilde{z})(\beta h)^2}{A_1}} \left[\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{(\tilde{t}-\tilde{z})}{A_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t}-\tilde{z})}} \right) - \right. \\ \left. -\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{(\tilde{t}-\tilde{z})}{A_1}} \right) \right], & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \\
RS_{3_3} &= \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \left[-\operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} e^{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} \right) \right], & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \\
RS_{3_4} &= \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} e^{-\beta h + A_1(\tilde{t}+(1-\tilde{z}))} \left[-\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} e^{-\beta h + A_1(\tilde{t}+(1-\tilde{z}))} \left[-\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + \right. \\ \left. +\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t}-\tilde{z})} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t}-\tilde{z})}} \right) \right], & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases}, \\
RS_{3_5} &= \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{2}{\beta h - A_1} e^{\beta h(\tilde{t}-\tilde{z})}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ 0, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$RS_{3_6} = \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{-\beta h + \frac{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))(\beta h)^2}{A_1}} \left[\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t} - (1 - \tilde{z})}{A_1}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t} - (1 - \tilde{z})}{A_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t} - (1 - \tilde{z})}} \right) \right], & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases},$$

$$RS_{3_7} = \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{-\beta h + (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))A_1} \left[-\operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{1 - \tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{-\beta h + (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))A_1} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} - \frac{1 - \tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} (\tilde{t} - (1 - \tilde{z})) \right) \right], & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases},$$

$$RS_{3_8} = \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{(\tilde{t} + \tilde{z})A_1} \left[-\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{(\tilde{t} + \tilde{z})A_1} \left[-\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} (\tilde{t} - (1 - \tilde{z})) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t} - (1 - \tilde{z})}} \right) \right], & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases},$$

$$RS_{3_9} = \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{2}{\beta h + A_1} e^{-(\tilde{t} + \tilde{z})\beta h}, & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ 0, & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases};$$

$$RS_{4_1} = \frac{\eta A_2}{4} \frac{2\beta h}{(\beta h)^2 - A_1^2} \left\{ \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} \left[-e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4\tilde{t}}} + e^{-\frac{(1 - \tilde{z})^2 A_1}{4\tilde{t}}} \right] + \right. \\ \left. + (\beta h) e^{-\tilde{z}\beta h + \frac{\tilde{t}(\beta h)^2}{A_1}} \left[\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{\tilde{t}}{A_1}} + \frac{1 - \tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right] \right\},$$

$$RS_{4_2} = \begin{cases} 0, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left\{ \left(\frac{\sqrt{A_1}}{2(\tilde{t} - \tilde{z})} - \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi(\tilde{t} - \tilde{z})}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t} - \tilde{z})} - \beta h} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1 \pi(\tilde{t} - \tilde{z})}} + \right. \\ \left. + \frac{(\beta h)^2}{A_1} e^{-\frac{(\tilde{t} - \tilde{z})(\beta h)^2}{A_1}} \left[\operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{(\tilde{t} - \tilde{z})}{A_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t} - \tilde{z})}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{(\tilde{t} - \tilde{z})}{A_1}} \right) \right] \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z}, \end{cases}$$

$$RS_{4_3} = \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left\{ \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4 \tilde{t}}} + A_1 e^{A_1(\tilde{t} - \tilde{z})} \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right\}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left\{ \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4 \tilde{t}}} - \sqrt{\frac{A_1}{\pi(\tilde{t} - \tilde{z})}} - \right. \\ \left. - A_1 e^{A_1(\tilde{t} - \tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} - \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t} - \tilde{z})} \right) \right] \right\}, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
RS_{4_4} = & \left\{ \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left\{ -\sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1-\tilde{z})^2 A_1}{4\tilde{t}} - \beta h} + \right. \right. \\
& \left. \left. + A_1 e^{-\beta h + A_1(\tilde{t} + (1-\tilde{z}))} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) \right\}, \quad \tilde{t} \leq \tilde{z} \right. \\
& \left. \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h - A_1} \left\{ -\sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1-\tilde{z})^2 A_1}{4\tilde{t}} - \beta h} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\sqrt{A_1}}{2(\tilde{t} - \tilde{z})} - \sqrt{A_1} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi(\tilde{t} - \tilde{z})}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t} - \tilde{z})} - \beta h} + \right. \right. \\
& \left. \left. + A_1 e^{-\beta h + A_1(\tilde{t} + (1-\tilde{z}))} \left[\operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1-\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}}\right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{A_1(\tilde{t} - \tilde{z})} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t} - \tilde{z})}}\right) \right] \right\}, \quad \tilde{t} > \tilde{z} \right\}, \\
RS_{4_5} = & \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{-2\beta h}{\beta h - A_1} e^{\beta h(\tilde{t} - \tilde{z})}, & \tilde{t} \leq \tilde{z} \\ 0, & \tilde{t} > \tilde{z} \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RS_{4_6} = & \left\{ \begin{aligned} & 0, \quad \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ & \left[\frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1 \pi (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} + \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\sqrt{A_1}}{2(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))} + \frac{\beta h}{\sqrt{A_1}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\beta h)^2}{A_1} e^{-\frac{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))(\beta h)^2}{A_1}} \left[\begin{aligned} & \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta h \sqrt{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}}{A_1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erfc} \left(\beta h \sqrt{\frac{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}{A_1}} \right) \right] \right] \end{aligned} \right\}, \quad \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \\
RS_{4_7} = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1 - \tilde{z})^2 A_1}{4 \tilde{t}} - \beta h} - \\ & - A_1 e^{A_1 (\tilde{t} - (1 - \tilde{z})) - \beta h} \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{A_1 \tilde{t}} + \frac{1 - \tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ & \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{(1 - \tilde{z})^2 A_1}{4 \tilde{t}} - \beta h} + \sqrt{\frac{A_1}{\pi (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} + \\ & + A_1 e^{A_1 (\tilde{t} - (1 - \tilde{z})) - \beta h} \left[\begin{aligned} & \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 \tilde{t}} - \frac{1 - \tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \\ & - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1 (\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}, \quad \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RS_{4_8} = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} e^{(\tilde{t} + \tilde{z}) A_1} \left[-\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) \right], \quad \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ & \frac{\eta A_2}{4} \frac{1}{\beta h + A_1} \left\{ + \left(\frac{\sqrt{A_1}}{2(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))} - \sqrt{A_1} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} e^{-\frac{A_1}{4(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} - \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{A_1}{\pi \tilde{t}}} e^{-\frac{\tilde{z}^2 A_1}{4 \tilde{t}} - \beta h} + \right. \\ & \left. - A_1 e^{A_1(\tilde{t} + \tilde{z})} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1} \tilde{t} + \frac{\tilde{z}}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\tilde{t}}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{A_1(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{(\tilde{t} - (1 - \tilde{z}))}} \right) \right] \right\}, \quad \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{aligned} \right. , \\
RS_{4_9} = & \begin{cases} \frac{\eta A_2}{4} \frac{-2\beta h}{\beta h + A_1} e^{-(\tilde{t} + \tilde{z})\beta h}, & \tilde{t} \leq 1 - \tilde{z} \\ 0, & \tilde{t} > 1 - \tilde{z} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Система (2.39) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} C_1 \otimes GM_{11} + C_2 \otimes GM_{12} + \tilde{f} \otimes GS_1 = 0 \\ C_1 \otimes GM_{21} + C_2 \otimes GM_{22} + \tilde{f} \otimes GS_2 = 0 \\ C_1 \otimes (GM_{31_1} + GM_{31_2}) + C_2 \otimes (GM_{32_1} + GM_{32_2}) - \\ - C_3 + C_4(\tilde{t} - 1) + \\ + \tilde{f} \otimes \left(\begin{array}{l} GS_{3_1} + GS_{3_2} + GS_{3_3} + GS_{3_4} + GS_{3_5} + \\ + GS_{3_6} + GS_{3_7} + GS_{3_8} + GS_{3_9} \end{array} \right) - \eta \tilde{\theta} \Big|_{\tilde{z}=0} = 0 \\ C_1 \otimes (GM_{41_1} + GM_{41_2}) + C_2 \otimes (GM_{42_1} + GM_{42_2}) - \\ - C_3(\tilde{t} - 1) + C_4 + \\ + \tilde{f} \otimes \left(\begin{array}{l} GS_{4_1} + GS_{4_2} + GS_{4_3} + GS_{4_4} + GS_{4_5} + \\ + GS_{4_6} + GS_{4_7} + GS_{4_8} + GS_{4_9} \end{array} \right) - \eta \tilde{\theta} \Big|_{\tilde{z}=1} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

При записі система (2.39) було прийнято наступне позначення:

$$\begin{aligned}
 GM_{1i} &= RM_{2i} \Big|_{\tilde{z}=0}, & GM_{2i} &= RM_{2i} \Big|_{\tilde{z}=1} & (i=1,2); & GM_{3i_j} &= RM_{4i_j} \Big|_{\tilde{z}=0}, \\
 GM_{4i_j} &= RM_{4i_j} \Big|_{\tilde{z}=1} & (i=1,2 \quad j=1,2); & GS_1 &= RS_2 \Big|_{\tilde{z}=0}, & GS_2 &= RS_2 \Big|_{\tilde{z}=1}; \\
 GS_{3_i} &= RS_{4_i} \Big|_{\tilde{z}=0}, & GS_{4_i} &= RS_{4_i} \Big|_{\tilde{z}=1} & (i=1,2..9).
 \end{aligned}$$

Після знаходження невідомих $C_1 - C_4$, як функцій часу, та їх підстановки у (2.40) – (2.43) можна розрахувати температуру, тепловий потік, механічні зміщення та напругу на протязі будь-якого проміжку часу.

2.3. ЧИСЛЕННІ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.3.1. Розрахунковий алгоритм

При виконанні розрахунків була проведена дискретизація за часом. В усіх функціях неперервний час t був замінений на дискрети $k\Delta$, де k — номер кроку по часу, Δ — величина кроку.

За допомогою дискретизації операція згортки замінено на суму (за теоремою о середнім):

$$\tilde{\theta}(k\Delta) = \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} &C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{11}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ &+ C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{12}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ &+ \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot RS_1[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(k\Delta)}{\partial \tilde{z}} = \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} &C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{21}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ &+ C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{22}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ &+ \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot RS_2[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$$\tilde{u}(k\Delta) = \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\begin{aligned} & RM_{31_1}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RM_{31_2}[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right) + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\begin{aligned} & RM_{32_1}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RM_{32_2}[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right) + \\ & + C_3[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{33}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + C_4[(i-0.5)\Delta] \cdot RM_{34}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\begin{aligned} & RS_{3_1}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{3_2}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RS_{3_3}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{3_4}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RS_{3_5}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{3_6}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RS_{3_7}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{3_8}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + RS_{3_9}[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(k\Delta) = \Delta \sum_{i=1}^k & \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot \begin{pmatrix} RM_{41_1}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RM_{41_2}[(k-i+0.5)\Delta] - \\ - \eta RM_{11}[(k-i+0.5)\Delta] \end{pmatrix} + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot \begin{pmatrix} RM_{42_1}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RM_{42_2}[(k-i+0.5)\Delta] - \\ - \eta RM_{12}[(k-i+0.5)\Delta] \end{pmatrix} + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot \begin{pmatrix} RS_{4_1}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{4_2}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RS_{4_3}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{4_4}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RS_{4_5}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{4_6}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RS_{4_7}[(k-i+0.5)\Delta] + RS_{4_8}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ + RS_{4_9}[(k-i+0.5)\Delta] - \eta RS_1[(k-i+0.5)\Delta] \end{pmatrix} \\ & - C_3[k\Delta - \tilde{z}] + C_4[k\Delta - (1 - \tilde{z})] \end{aligned} \right\} \quad (2.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot GM_{11}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot GM_{12}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot GS_1[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right\} = 0 \right. \\
& \left. \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot GM_{21}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot GM_{22}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot GS_2[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right\} = 0 \right. \\
& \left. \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\frac{GM_{31_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GM_{31_2}[(k-i+0.5)\Delta]}{-\eta GM_{31}[(k-i+0.5)\Delta]} - \right) + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\frac{GM_{32_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GM_{32_2}[(k-i+0.5)\Delta]}{-\eta GM_{32}[(k-i+0.5)\Delta]} - \right) + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\begin{aligned} & GS_{3_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{3_2}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{3_3}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{3_4}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{3_5}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{3_6}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{3_7}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{3_8}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{3_9}[(k-i+0.5)\Delta] - \eta GS_{31}[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} - = 0 \\
& \quad -C_3[k\Delta] + C_4[k\Delta - 1] \\
& \left. \Delta \sum_{i=1}^k \left\{ \begin{aligned} & C_1[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\frac{GM_{41_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GM_{41_2}[(k-i+0.5)\Delta]}{-\eta GM_{41}[(k-i+0.5)\Delta]} - \right) + \\ & + C_2[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\frac{GM_{42_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GM_{42_2}[(k-i+0.5)\Delta]}{-\eta GM_{42}[(k-i+0.5)\Delta]} - \right) + \\ & + \tilde{f}[(i-0.5)\Delta] \cdot \left(\begin{aligned} & GS_{4_1}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{4_2}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{4_3}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{4_4}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{4_5}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{4_6}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{4_7}[(k-i+0.5)\Delta] + GS_{4_8}[(k-i+0.5)\Delta] + \\ & + GS_{4_9}[(k-i+0.5)\Delta] - \eta GS_{41}[(k-i+0.5)\Delta] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} - = 0 \\
& \quad -C_3[k\Delta - 1] + C_4[k\Delta]
\end{aligned} \tag{2.49}$$

При записі система (2.49) було прийнято наступне позначення:

$$\begin{aligned} GM_{1i} &= RM_{2i}|_{\tilde{z}=0}, & GM_{2i} &= RM_{2i}|_{\tilde{z}=1} & (i=1,2); & GM_{3i-j} &= RM_{4i-j}|_{\tilde{z}=0}, \\ GM_{4i-j} &= RM_{4i-j}|_{\tilde{z}=1} & (i=1,2 \text{ та } j=1,2); & GM_{3i} &= RM_{1i}|_{\tilde{z}=0}, & GM_{4i} &= RM_{1i}|_{\tilde{z}=1} \\ (i=1,2); & GS_1 &= RS_2|_{\tilde{z}=0}, & GS_2 &= RS_2|_{\tilde{z}=1}; & GS_{3-i} &= RS_{4-i}|_{\tilde{z}=0}, & GS_{4-i} &= RS_{4-i}|_{\tilde{z}=1} \\ (i=1,2..9); & GS_{31} &= RS_1|_{\tilde{z}=0}, & GS_{41} &= RS_1|_{\tilde{z}=1}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему крайових умов (2.49), були знайдені дискретні значення невідомих $C_1 - C_4$ (в моменти часу $(k - 0,5)\Delta$). Ці значення підставлялися до співвідношень (2.45) – (2.48) та отримувалися значення температура, теплового потоку, механічних переміщень та напруги в вказані моменти часу.

2.3.2. Чисельні результати та їх дослідження

Розрахункові результати були отримані для шару з кремнію (Si; $\alpha = 2,33 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\kappa = 156$ Вт/м, $\beta = 1,2 \cdot 10^6$ м $^{-1}$, $\chi = 8,8 \cdot 10^{-5}$ град/с, $\nu = 8,43 \cdot 10^3$ м/с, $E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0,27$) [8]. Геометричний параметр $h = 2 \cdot 10^{-4}$ м був фіксований, інтенсивність лазерного потоку приймалась $I_0 = 10^{25}$ Вт. Дослідженню підлягали п'ять видів амплітудної модуляції. Розрахунки проводилися в п'яти точка (п'ять рівнів глибини шару) $z = [0,01 \ 0,25 \ 0,5 \ 0,75 \ 0,99]$. Результати розрахунків показані на графіках. Всі графіки представлені у наступній послідовності: функція модуляції лазерного випромінювання; температура, тепловий потік, механічні переміщення та напруга при $z = 0,01$; температура, тепловий потік, механічні переміщення та напруга при $z = 0,25$; температура, тепловий потік, механічні переміщення та напруга при $z = 0,5$; температура, тепловий потік, механічні переміщення та напруга при $z = 0,75$; температура, тепловий потік, механічні переміщення та напруга при $z = 0,99$.

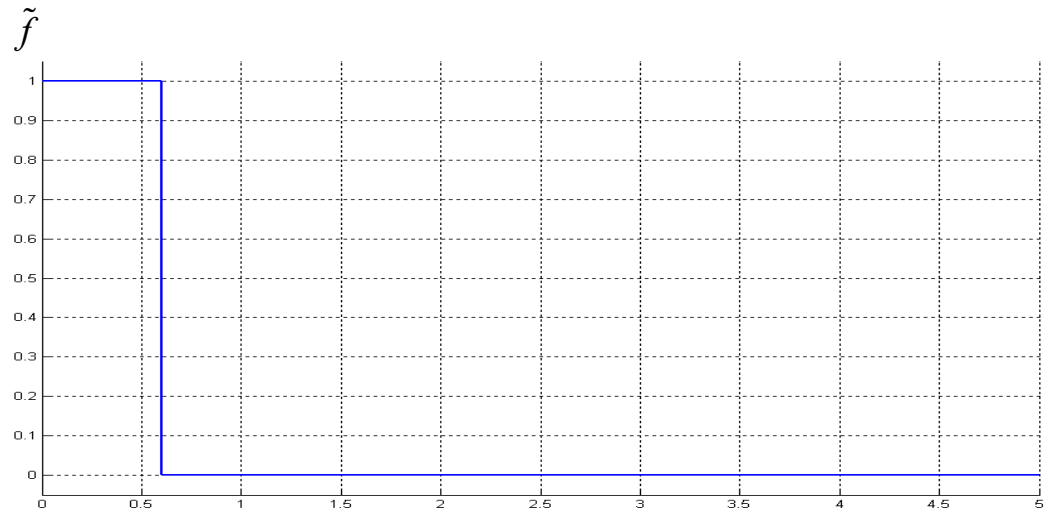


рис. 2.2(а)

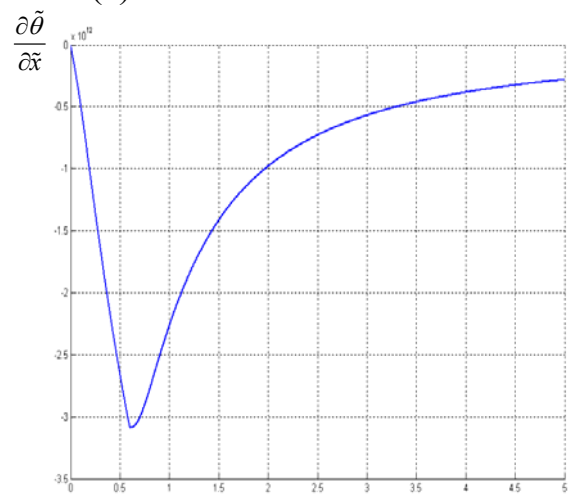
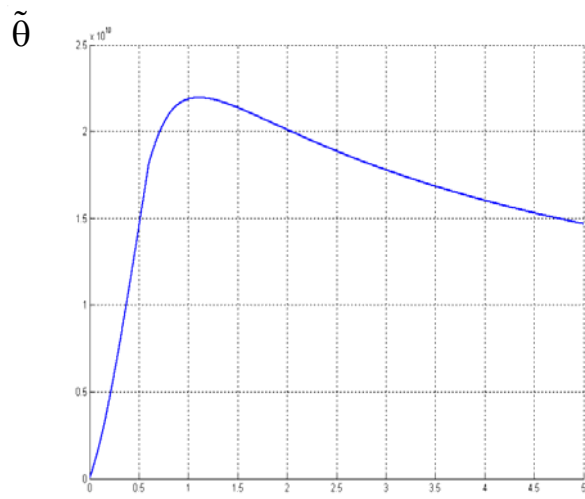


рис. 2.2(б)

рис. 2.2(в)

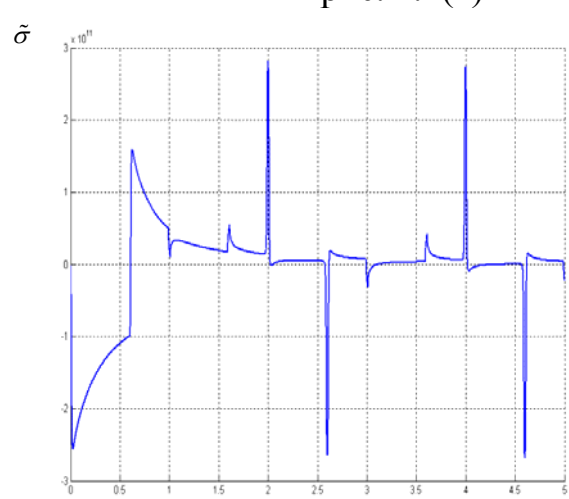
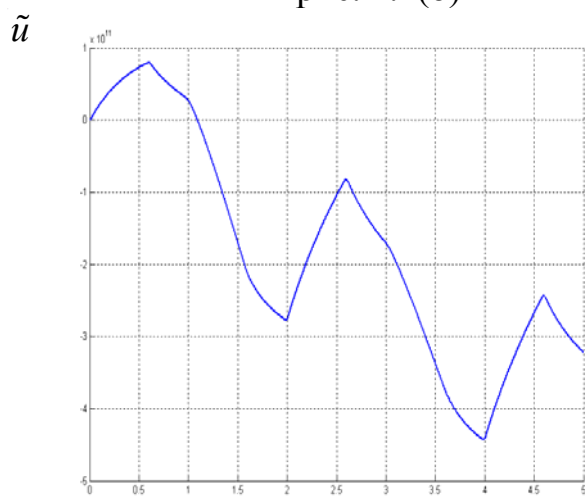


рис. 2.2(г)

рис. 2.2(д)

$\tilde{\theta}$

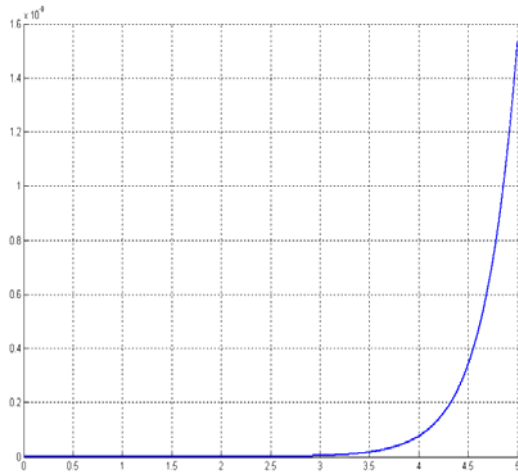


рис. 2.2(е)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

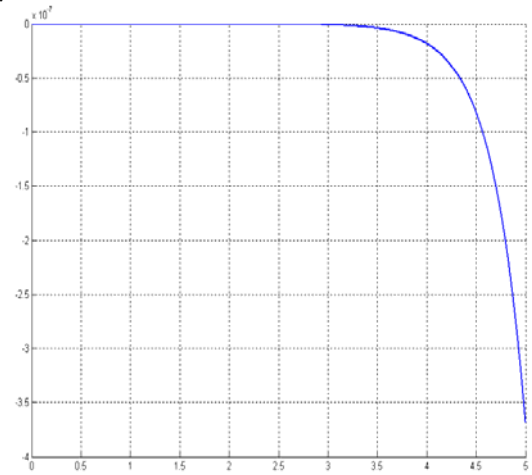


рис. 2.2(е)

$\tilde{u}$

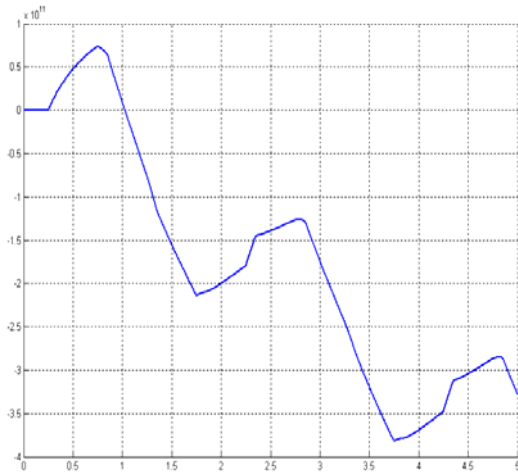


рис. 2.2(ж)

$\tilde{\sigma}$

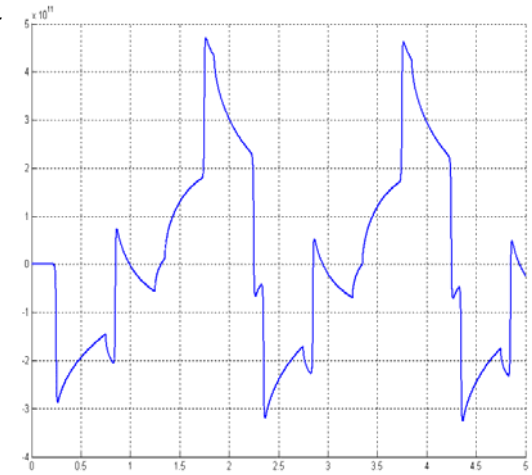


рис. 2.2(з)

$\tilde{\theta}$

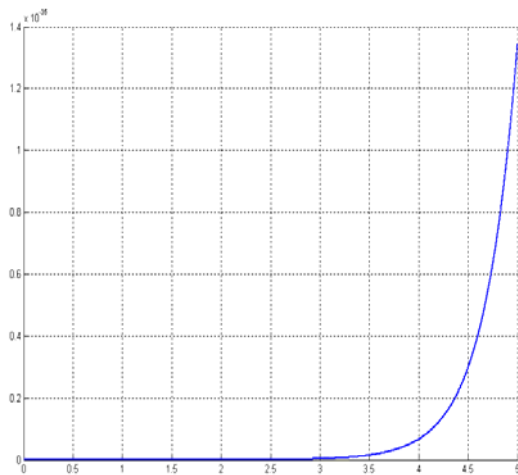


рис. 2.2(и)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

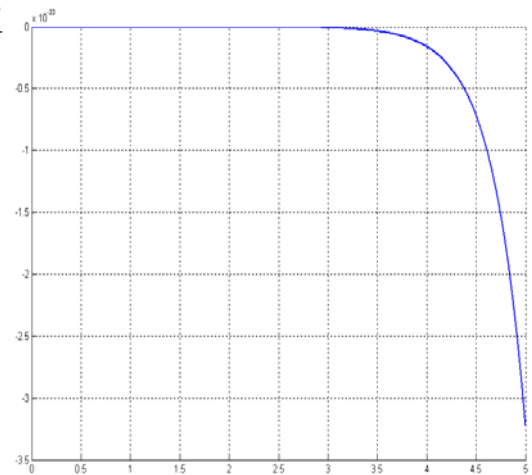


рис. 2.2(ї)

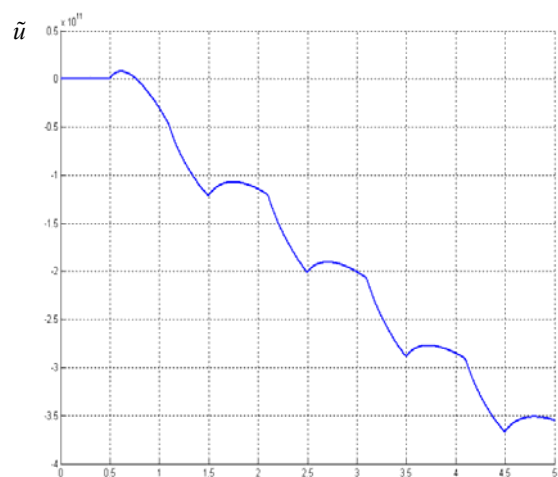


рис. 2.2(й)

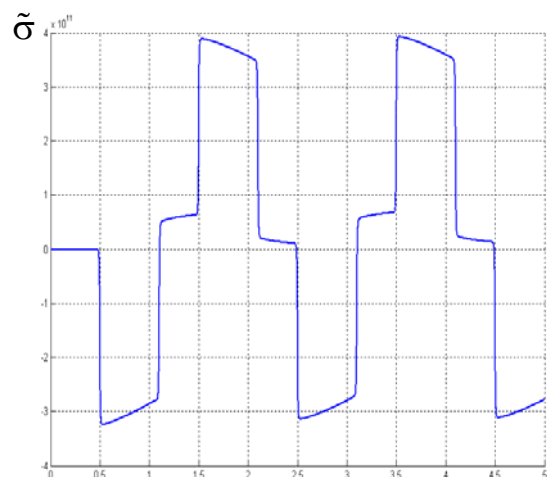


рис. 2.2(к)

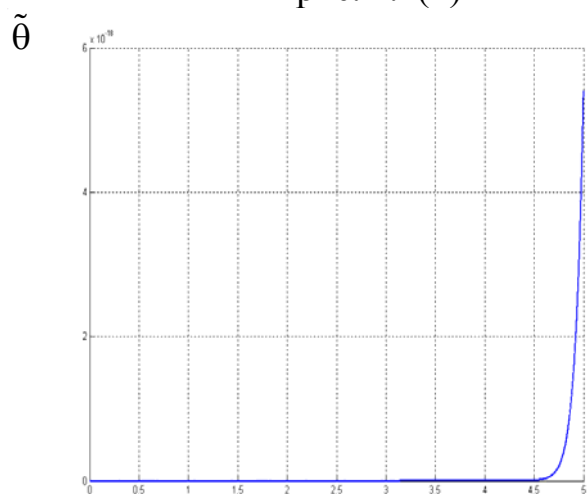


рис. 2.2(л)

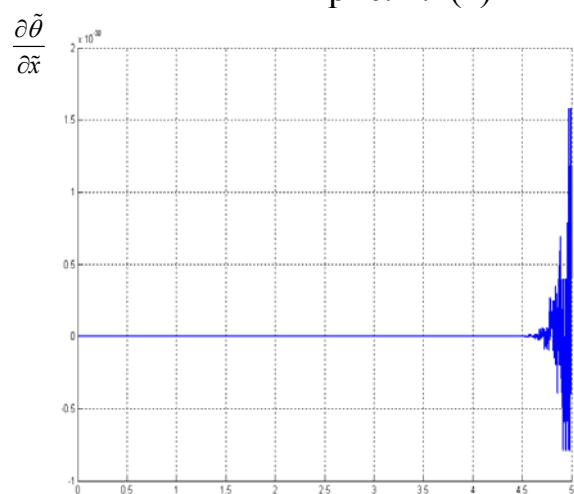


рис. 2.2(м)

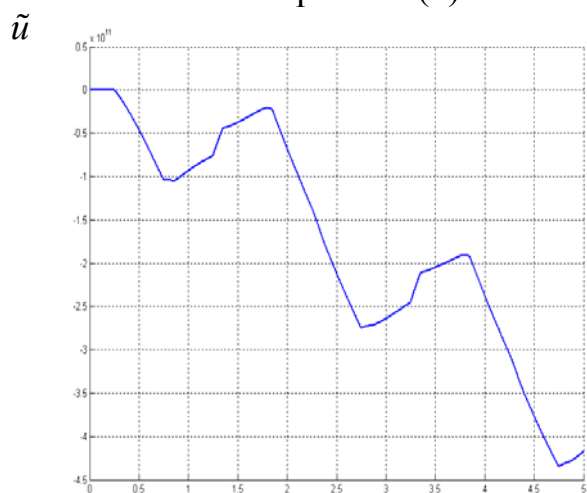


рис. 2.2(н)

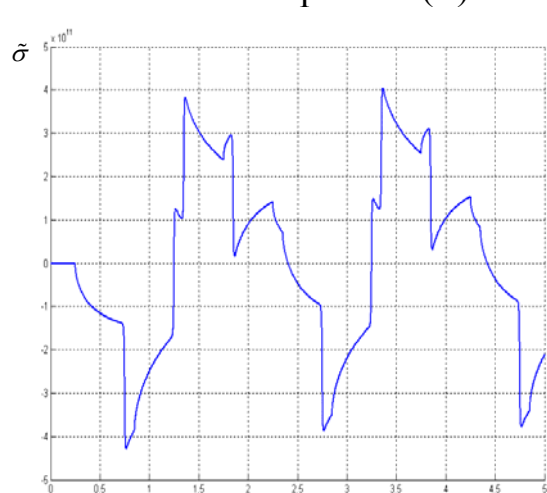
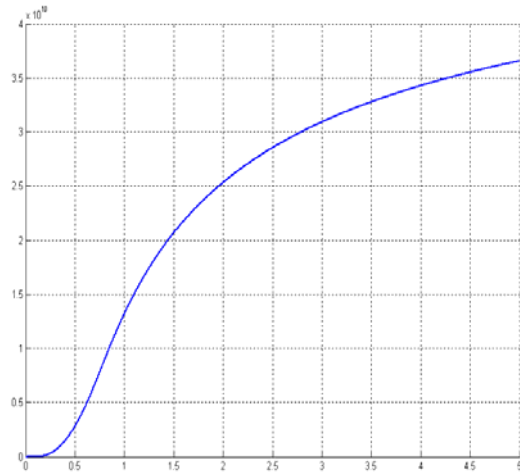


рис. 2.2(о)

$\tilde{\theta}$



$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

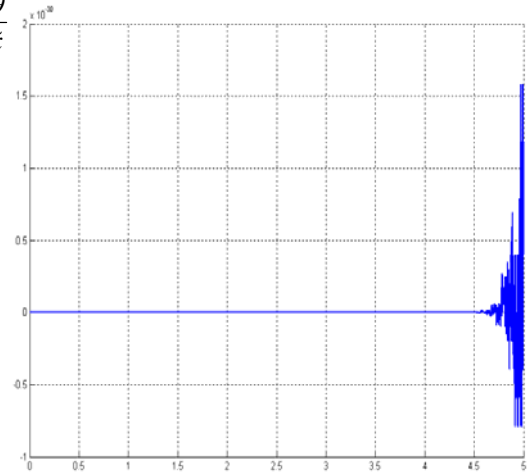
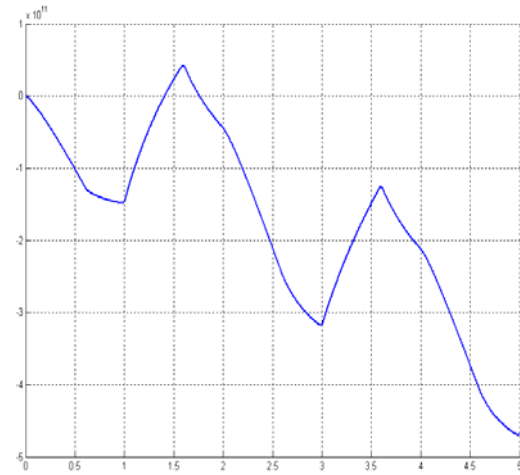


рис. 2.2(п)

рис. 2.2(р)

$\tilde{u}$



$\tilde{\sigma}$

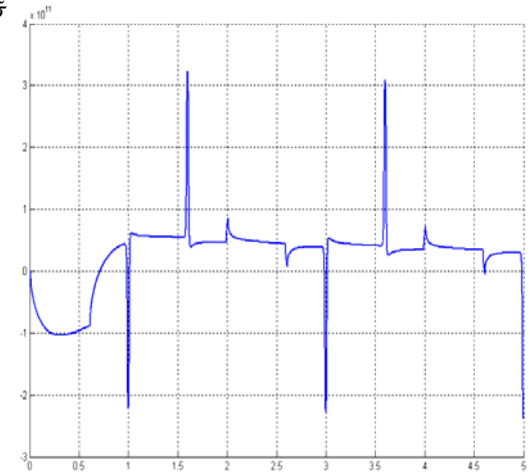


рис. 2.2(с)

рис. 2.2(т)

$\tilde{f}$

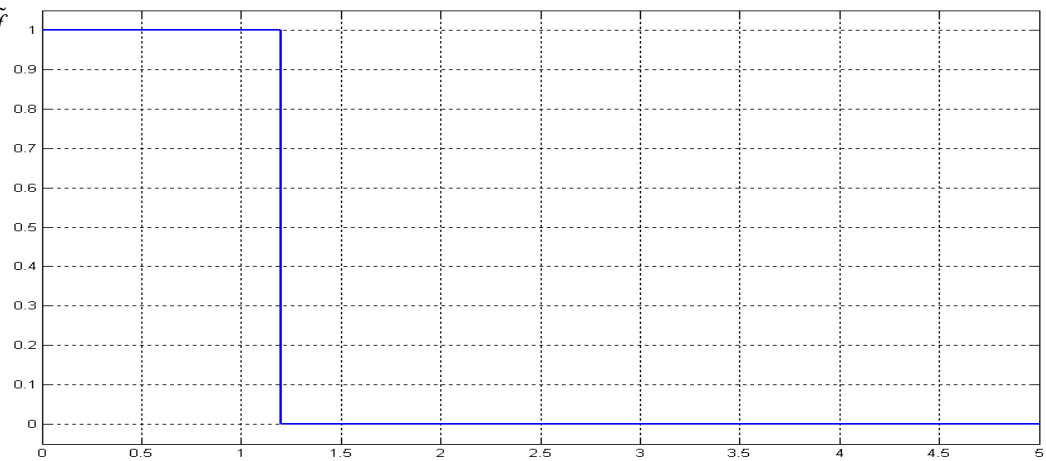


рис. 2.3(а)

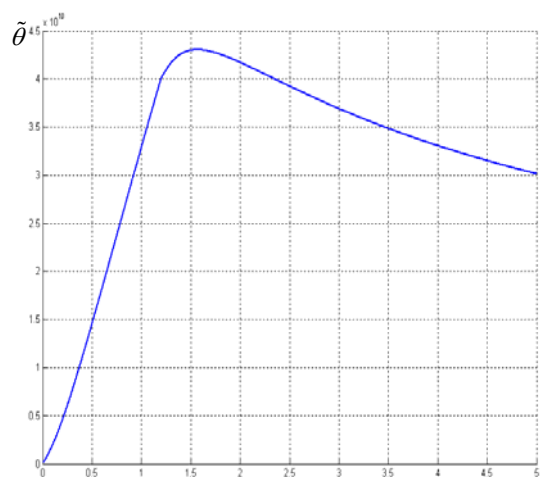


рис. 2.3(б)

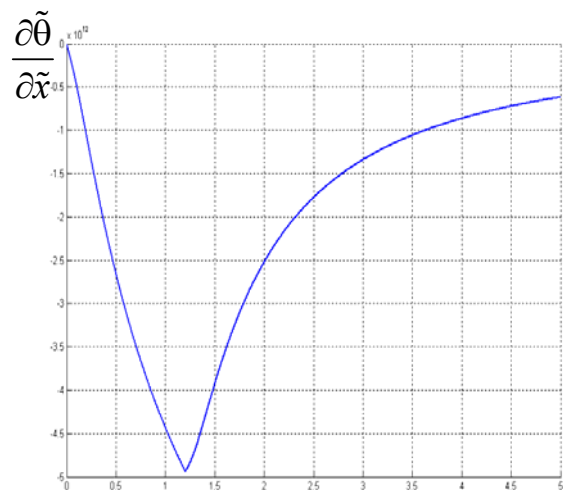


рис. 2.3(в)

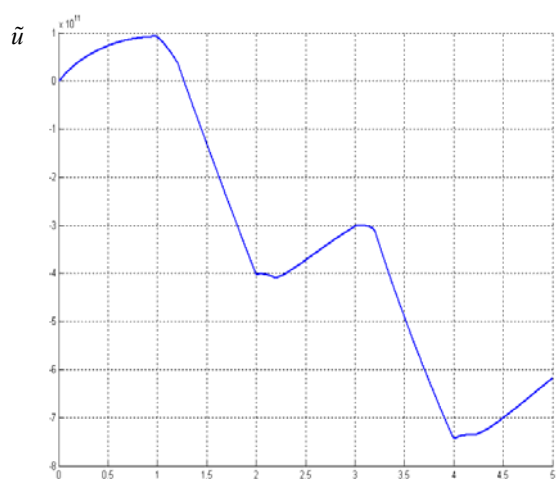


рис. 2.3(г)

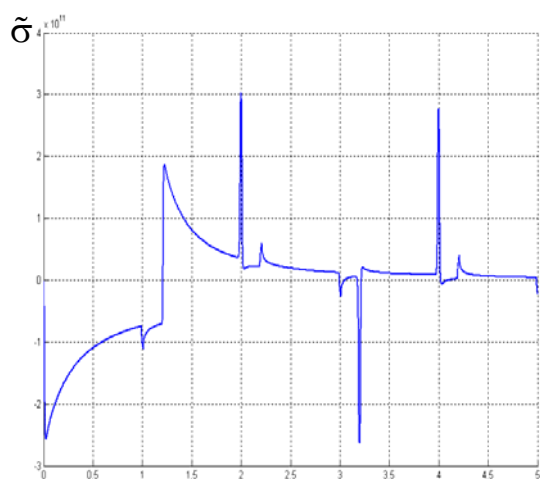


рис. 2.3(д)

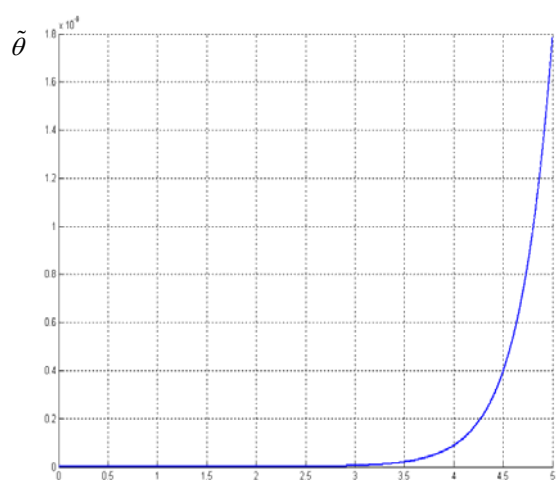


рис. 2.3(е)

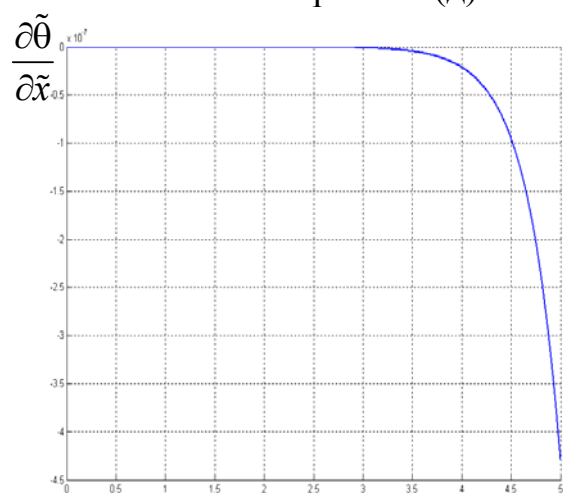


рис. 2.3(е)

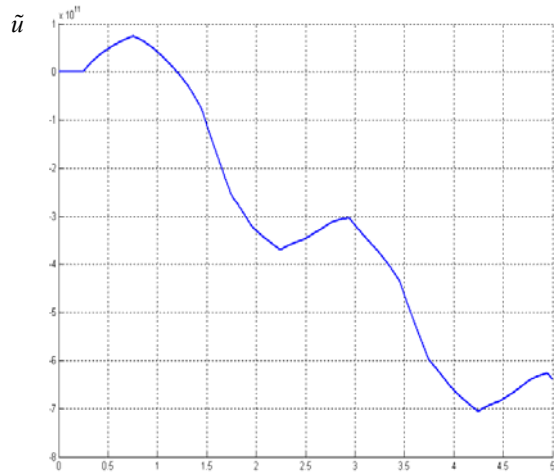


рис. 2.3(ж)

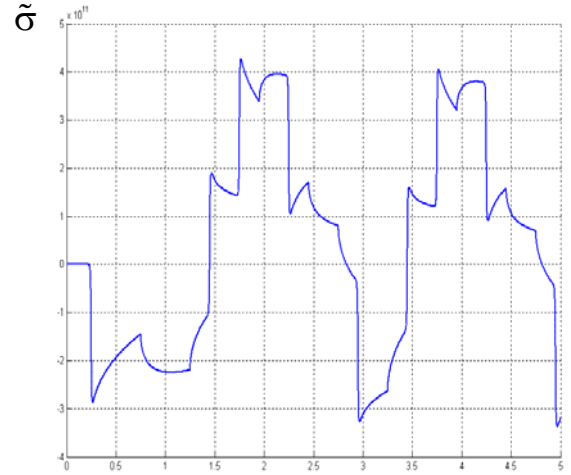


рис. 2.3(з)

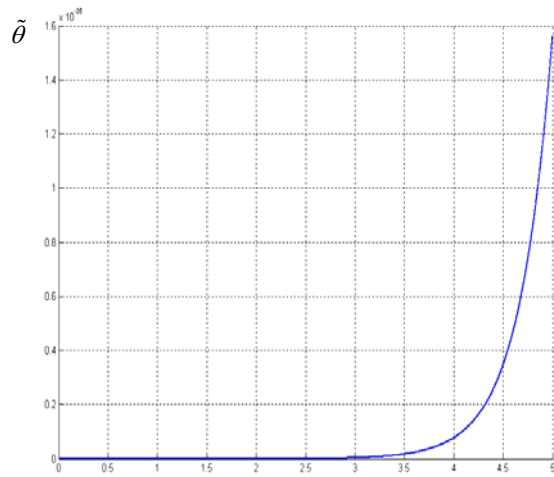


рис. 2.3(и)

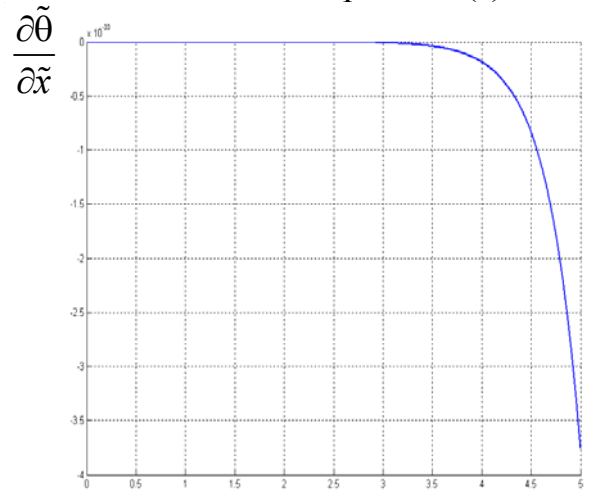


рис. 2.3(й)

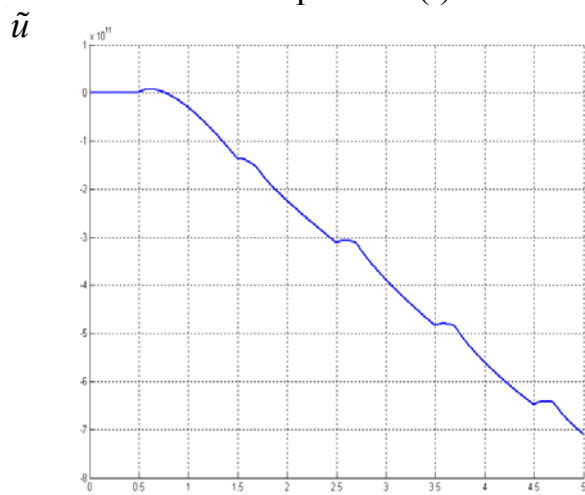


рис. 2.3(й)

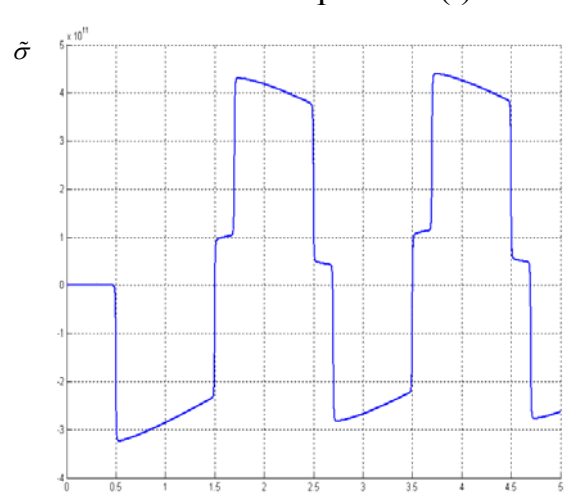


рис. 2.3(к)

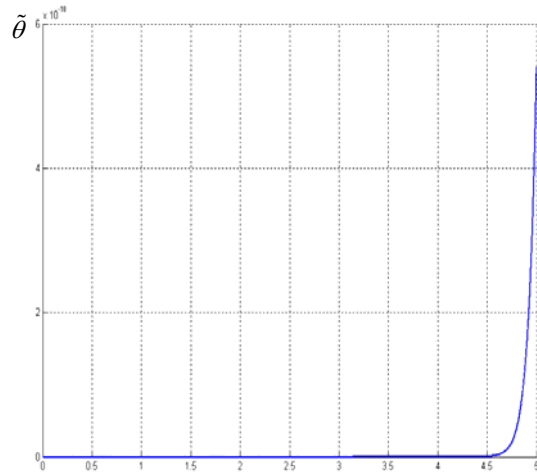


рис. 2.3(л)

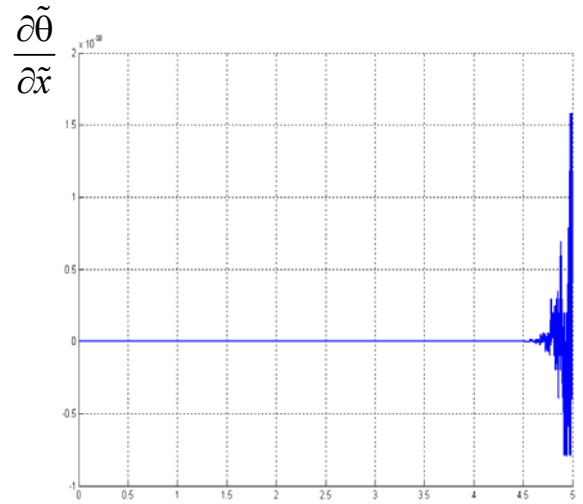


рис. 2.3(м)

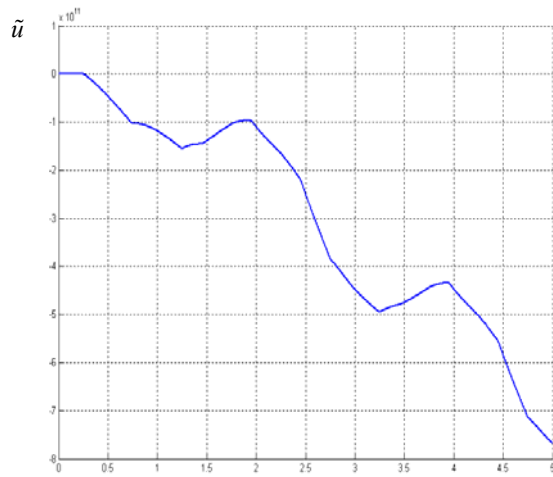


рис. 2.3(н)

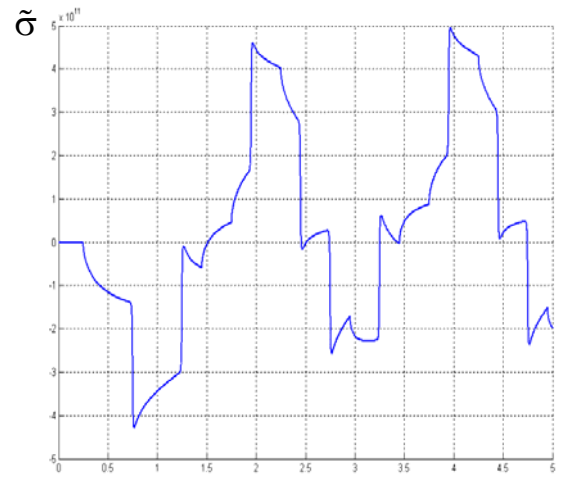


рис. 2.3(о)

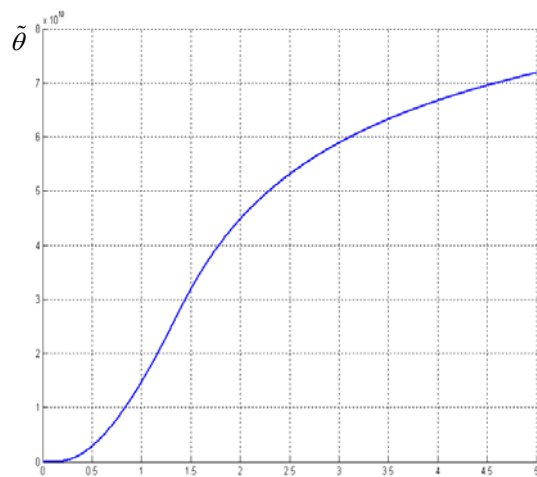


рис. 2.3(п)

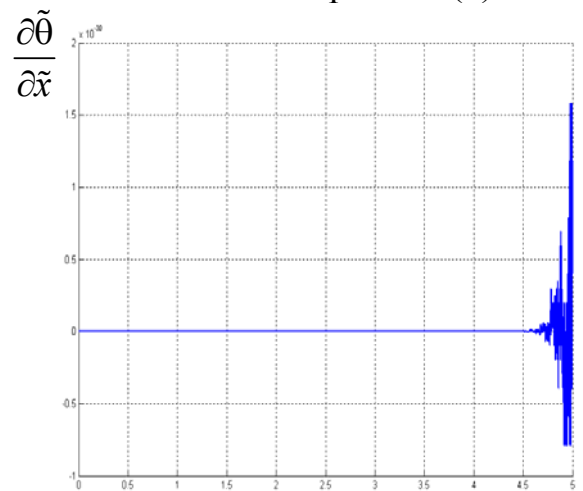


рис. 2.3(р)

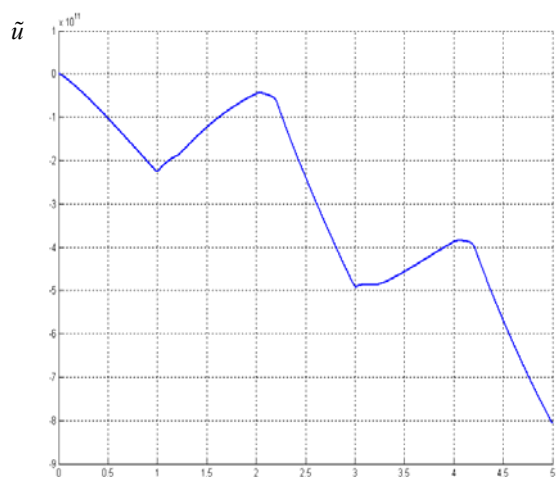


рис. 2.3(с)

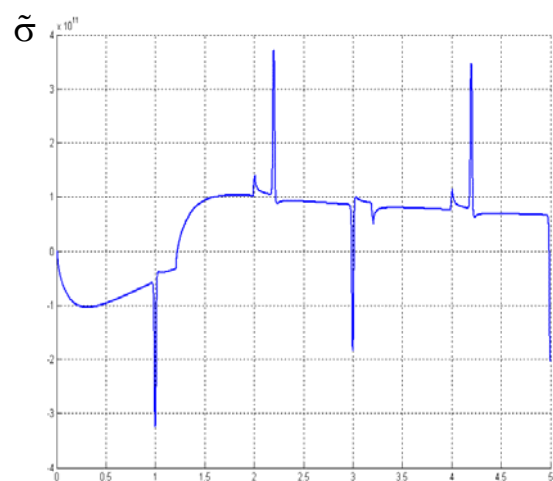


рис. 2.3(т)

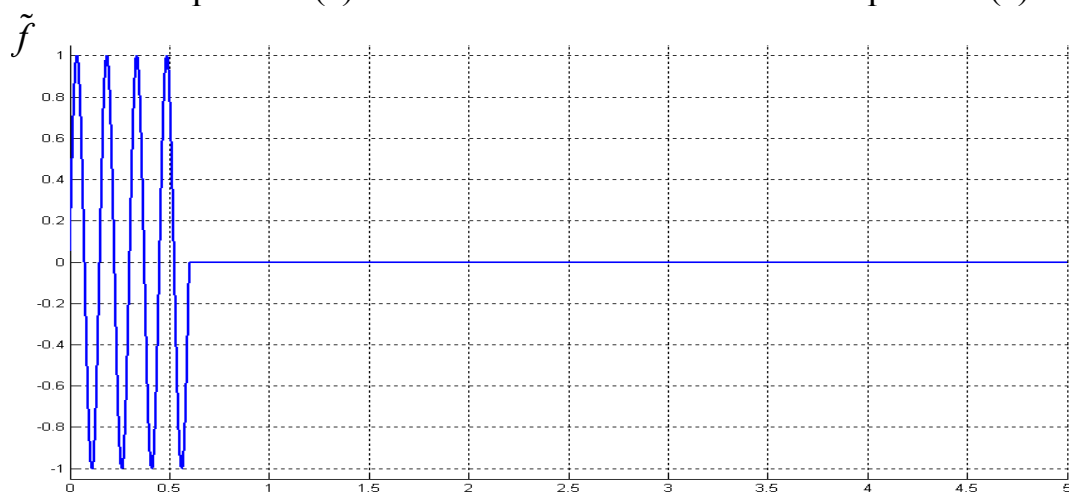


рис. 2.4(а)

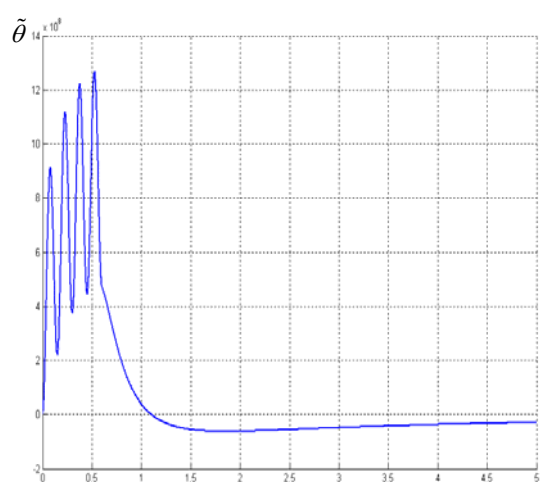


рис. 2.4(б)

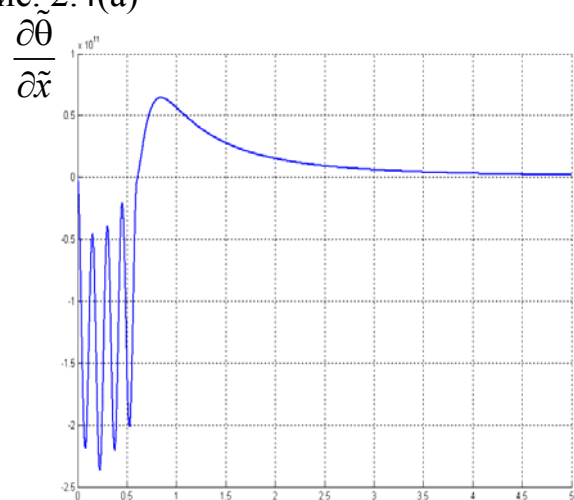


рис. 2.4(в)

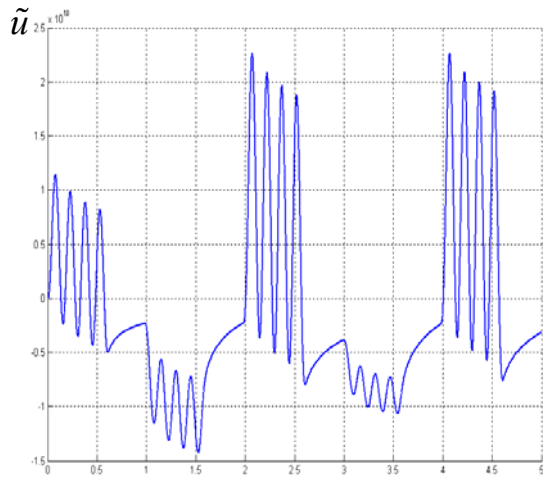


рис. 2.4(г)

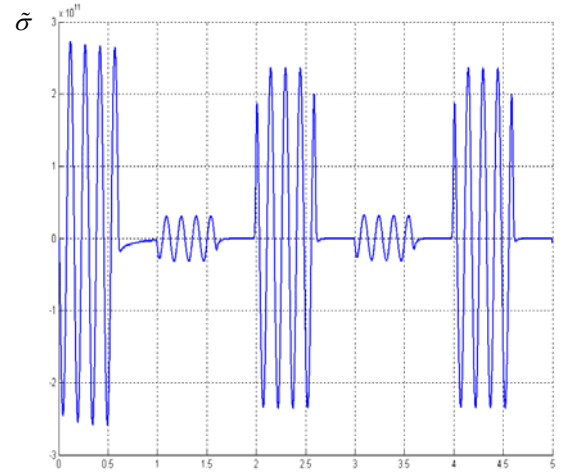


рис. 2.4(д)

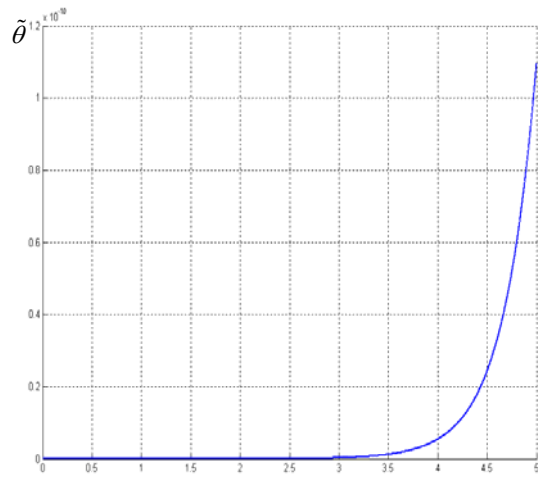


рис. 2.4(е)

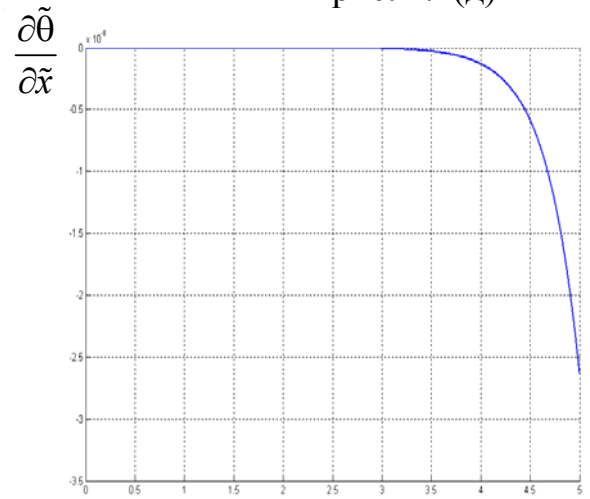


рис. 2.4(е)

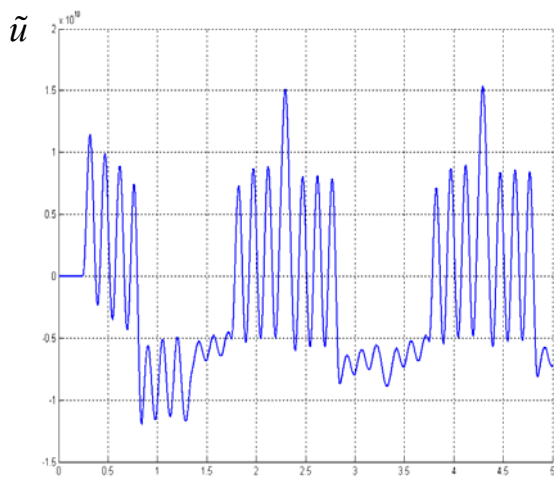


рис. 2.4(ж)

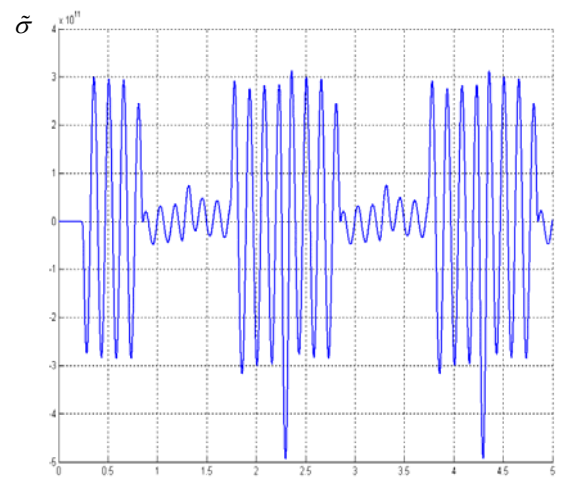


рис. 2.4(з)

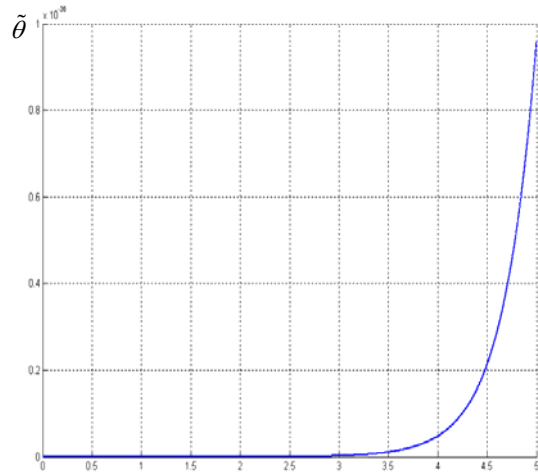


рис. 2.4(і)

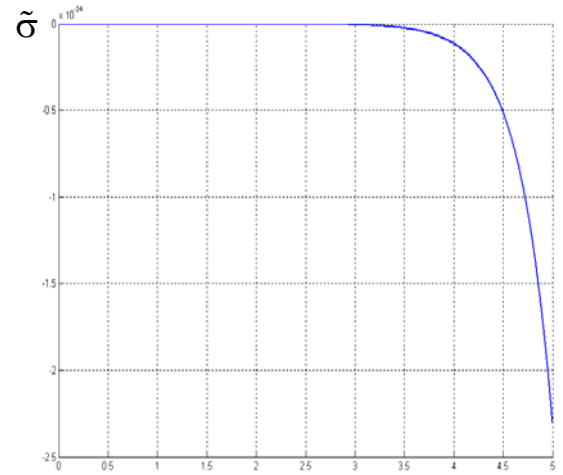


рис. 2.4(ї)

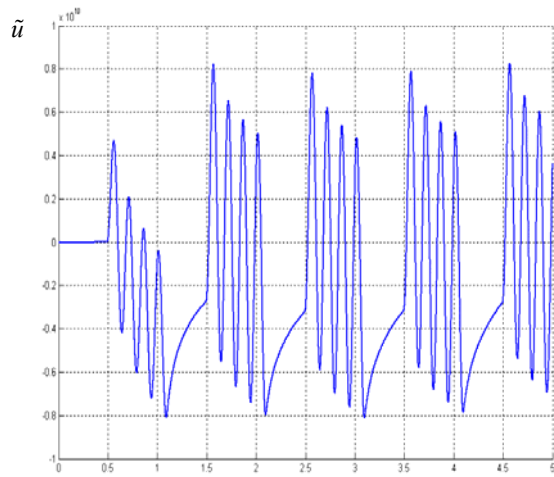


рис. 2.4(й)

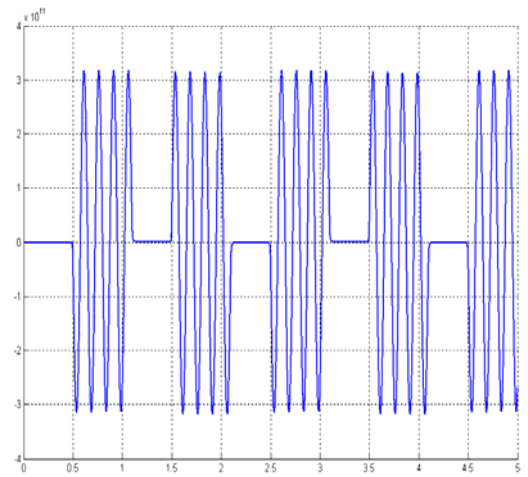


рис. 2.4(к)

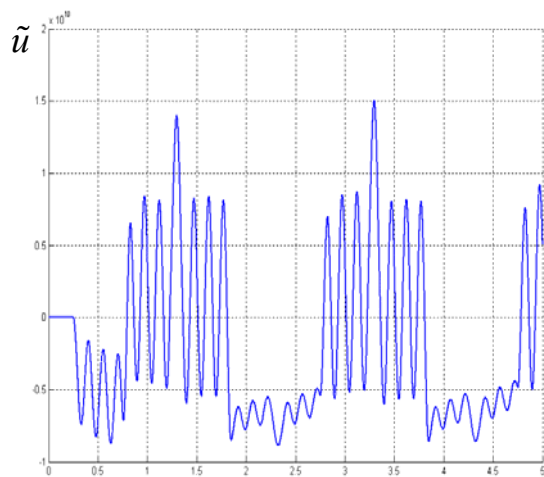


рис. 2.4(л)

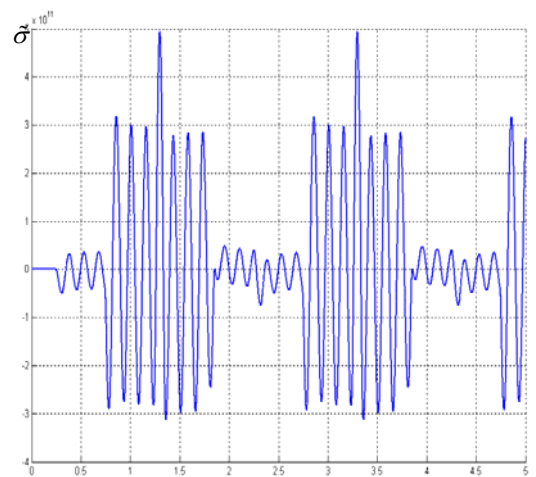


рис. 2.4(м)

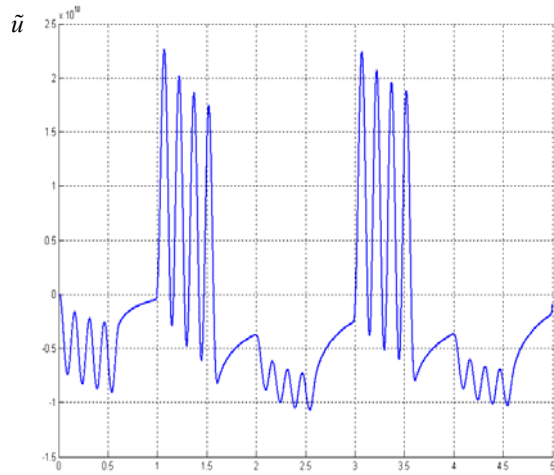


рис. 2.4(н)

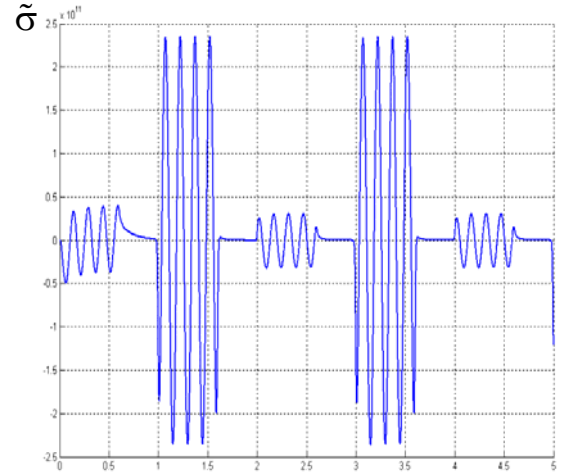


рис. 2.4(о)

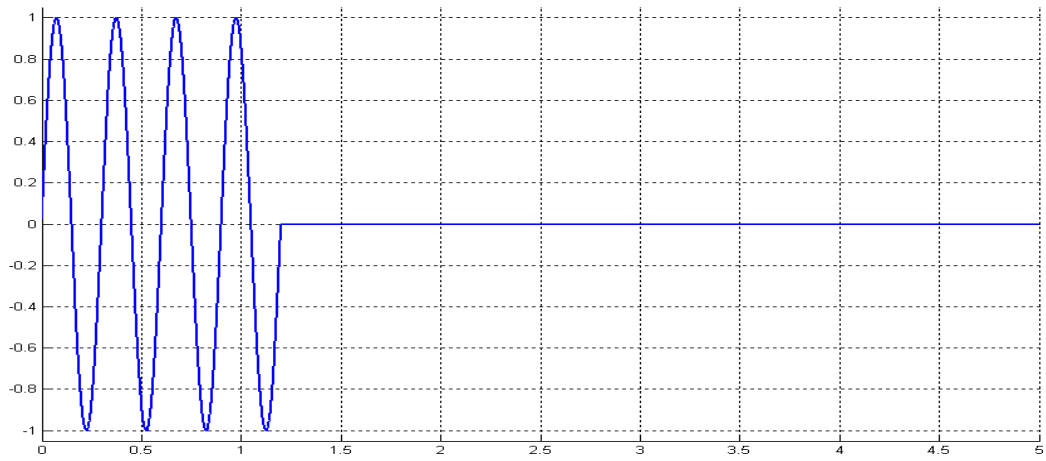


рис. 2.5(а)

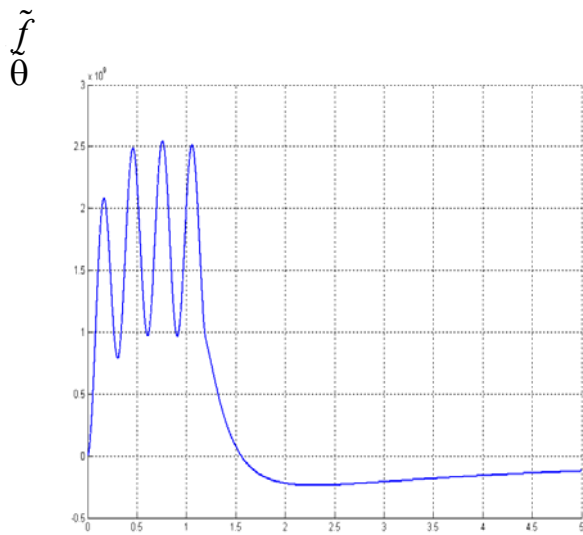


рис. 2.5(б)

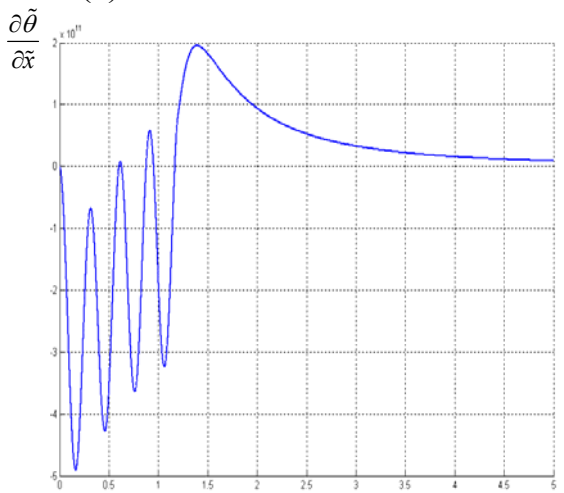


рис. 2.5(в)

$\tilde{u}$

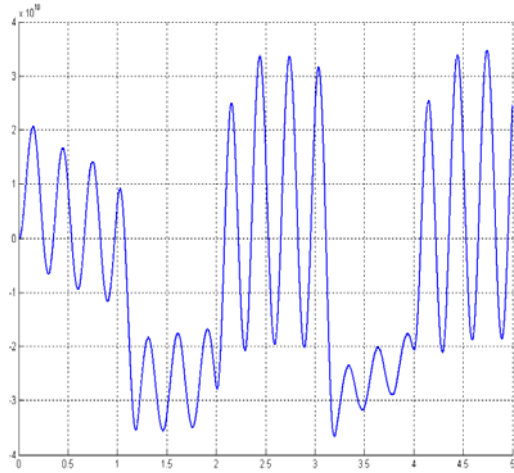


рис. 2.5(г)

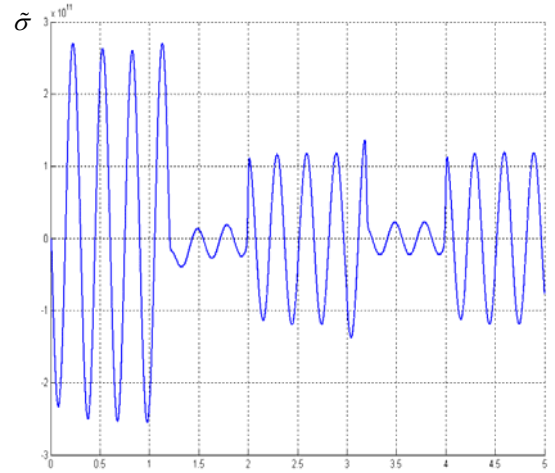


рис. 2.5(д)

$\tilde{\theta}$

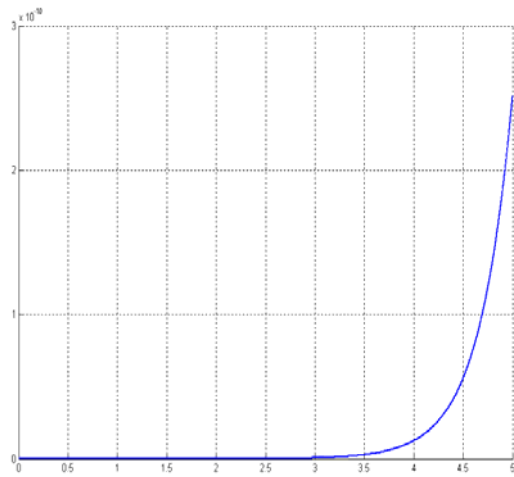


рис. 2.5(е)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

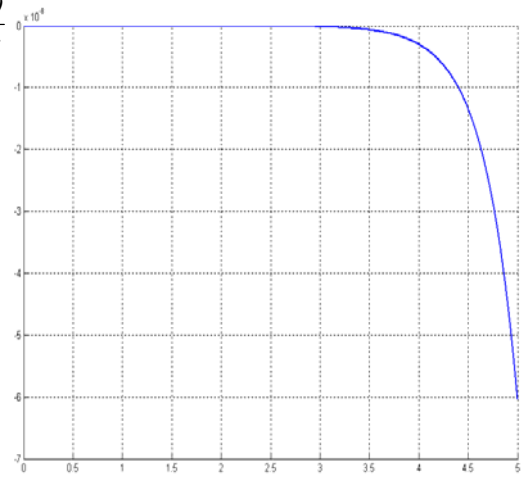


рис. 2.5(е)

$\tilde{u}$

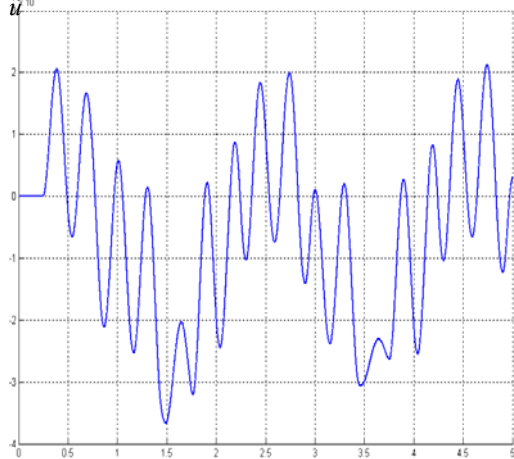


рис. 2.5(ж)

$\tilde{\sigma}$

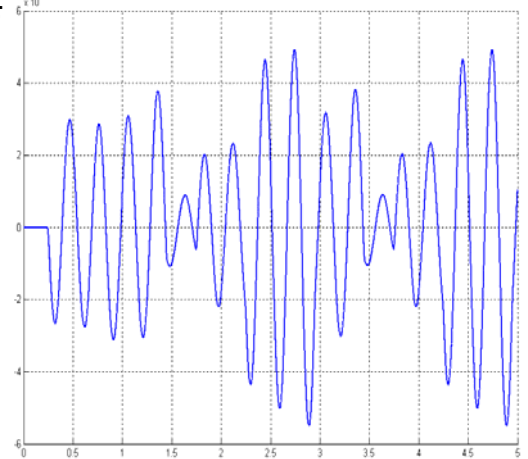


рис. 2.5(з)

$\tilde{\theta}$

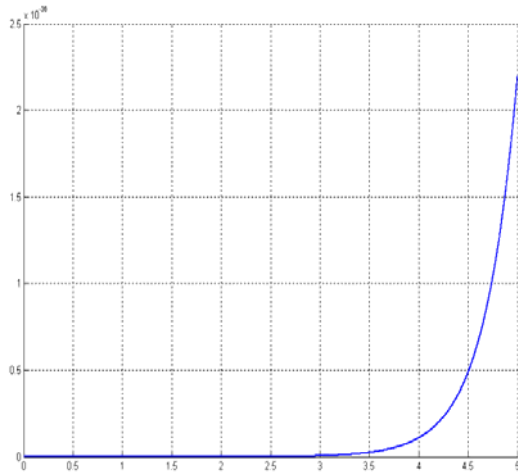


рис. 2.5(и)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

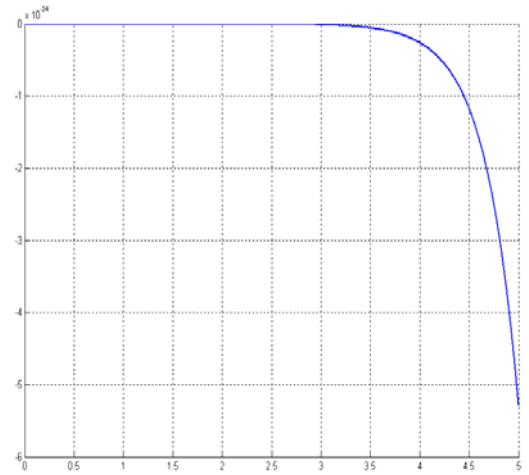


рис. 2.5(і)

$\tilde{u}$

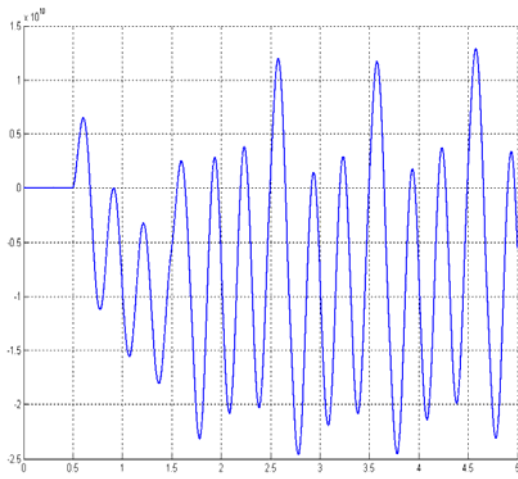


рис. 2.5(й)

$\tilde{\sigma}$

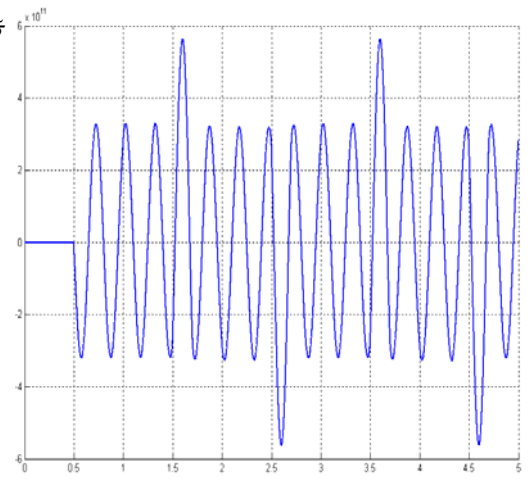


рис. 2.5(к)

$\tilde{u}$

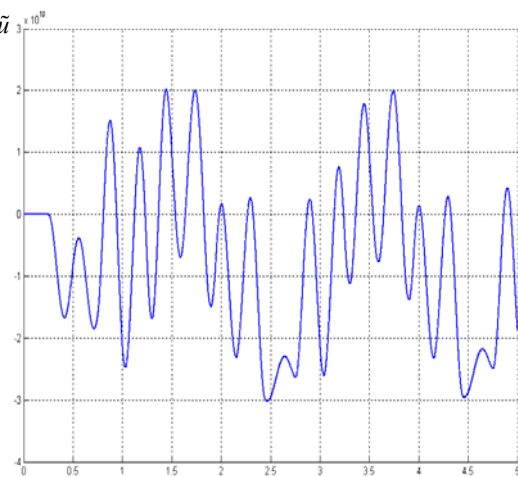


рис. 2.5(л)

$\tilde{\sigma}$

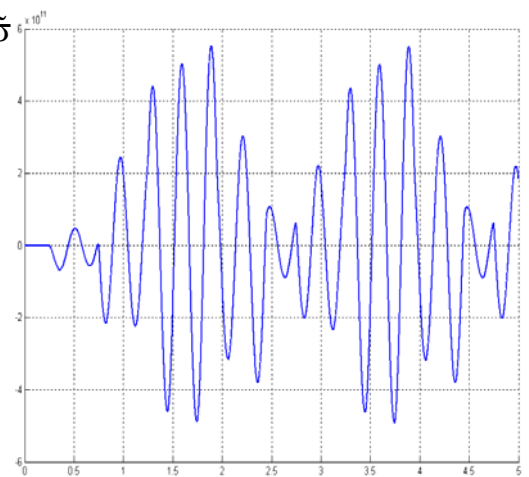


рис. 2.5(м)

$\tilde{u}$

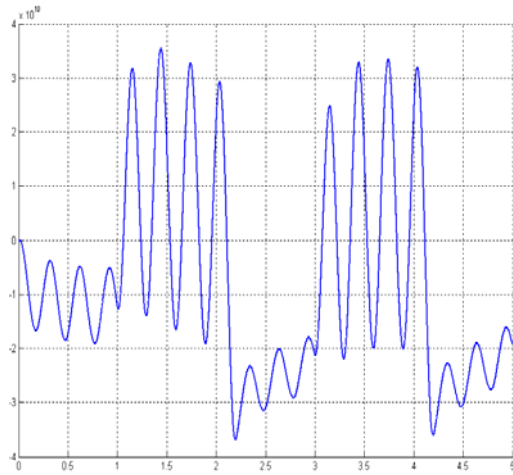


рис. 2.5(н)

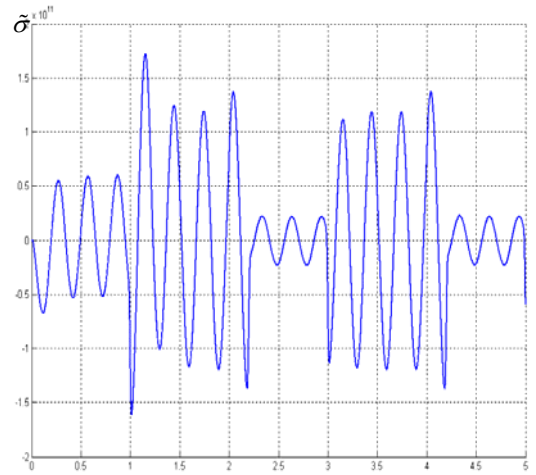


рис. 2.5(о)

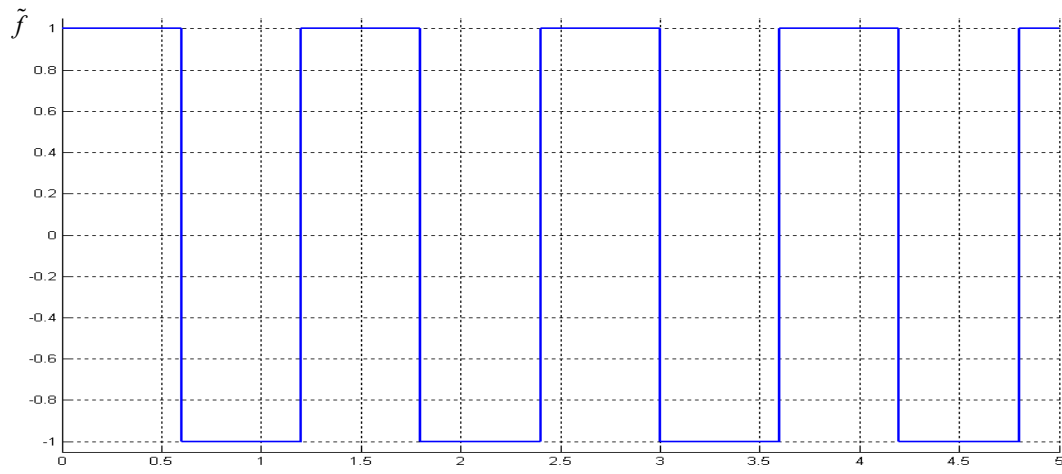


рис. 2.6(а)

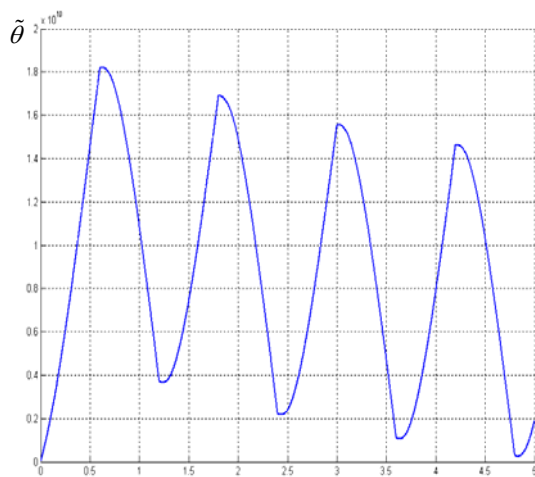


рис. 2.6(б)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}$

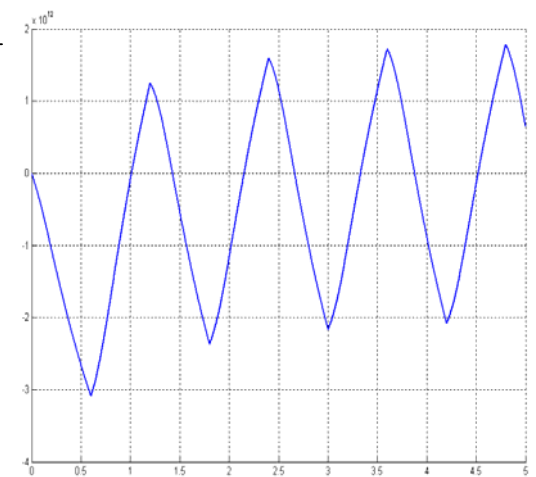


рис. 2.6(в)

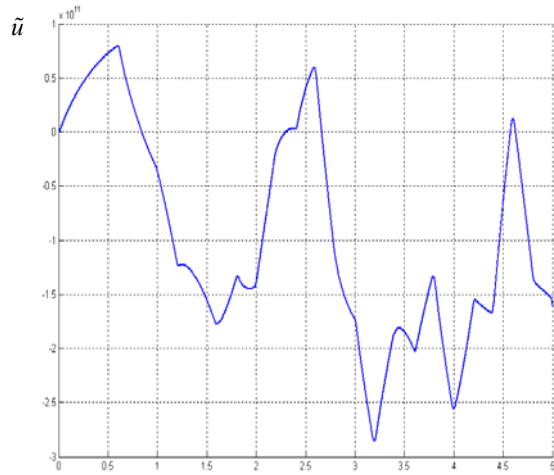


рис. 2.6(г)

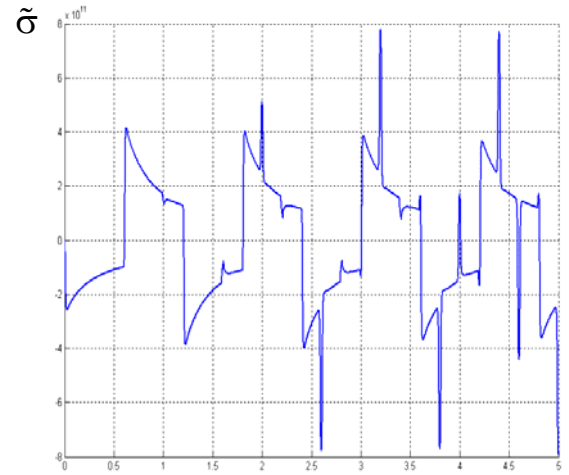


рис. 2.6(д)

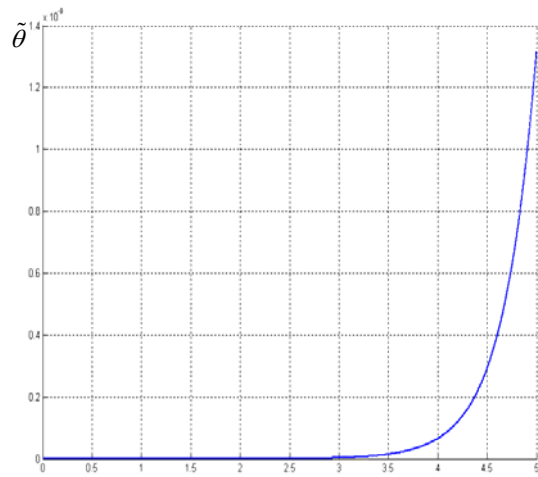


рис. 2.6(е)

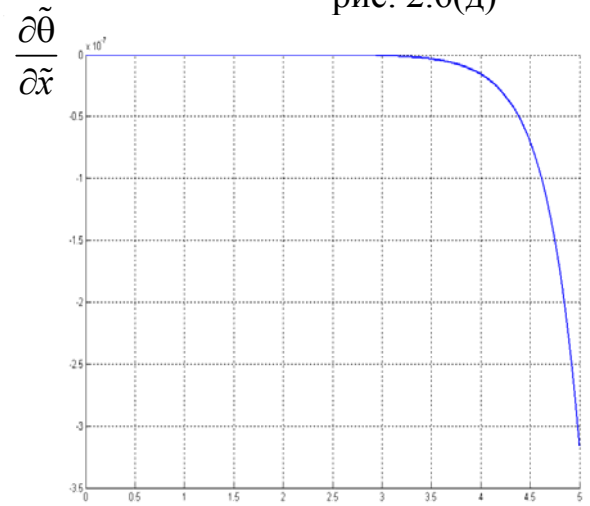


рис. 2.6(е)

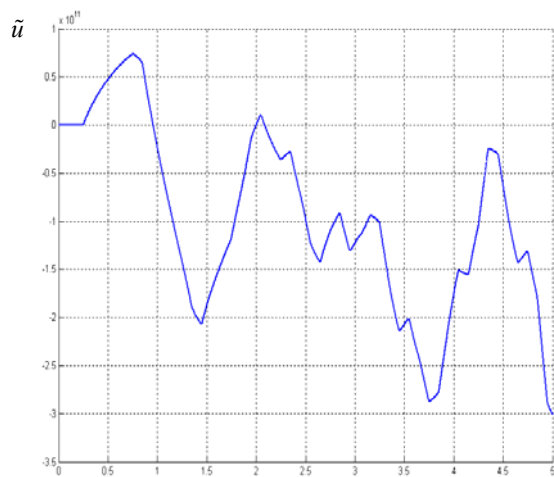


рис. 2.6(ж)

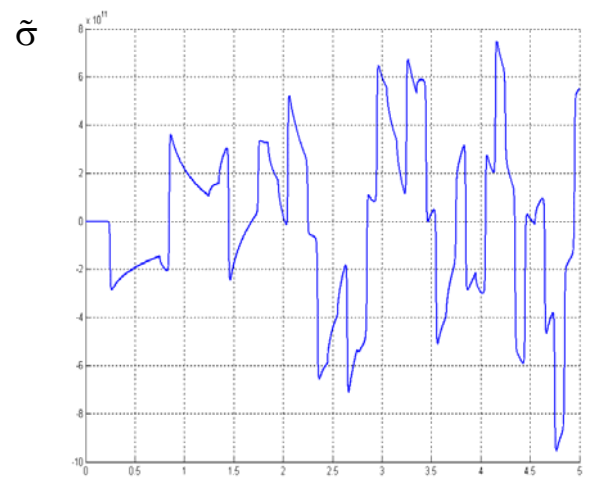


рис. 2.6(з)

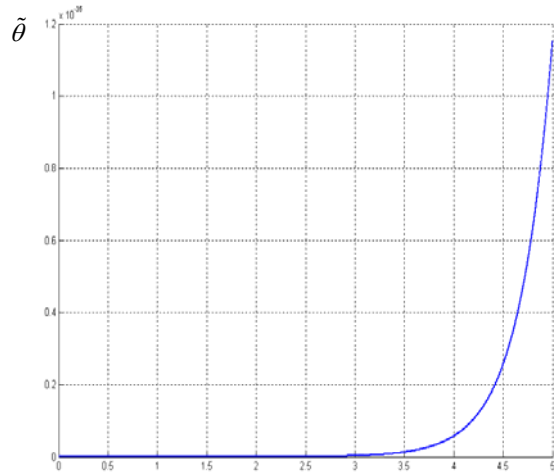


рис. 2.6(і)

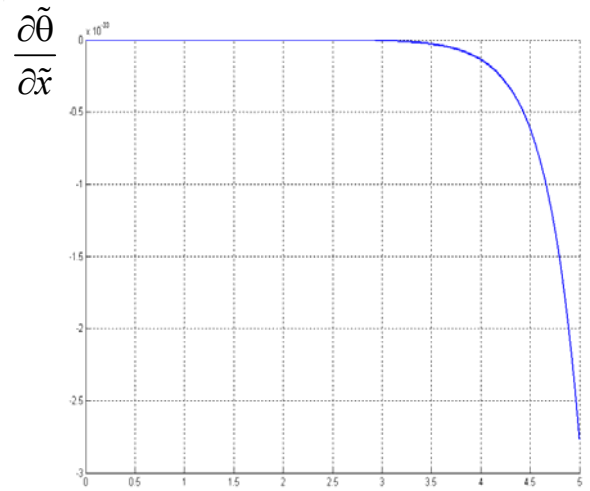


рис. 2.6(ї)

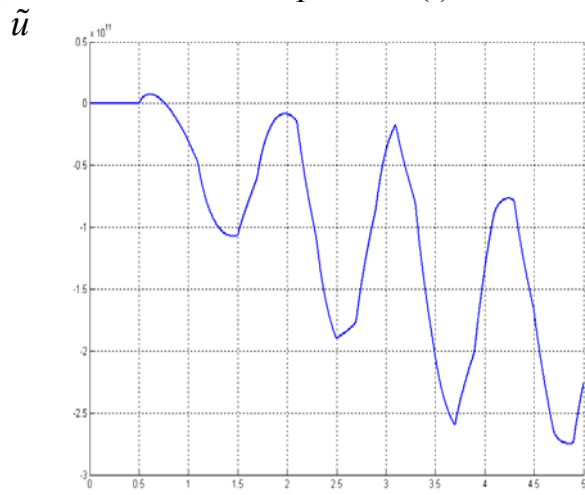


рис. 2.6(й)

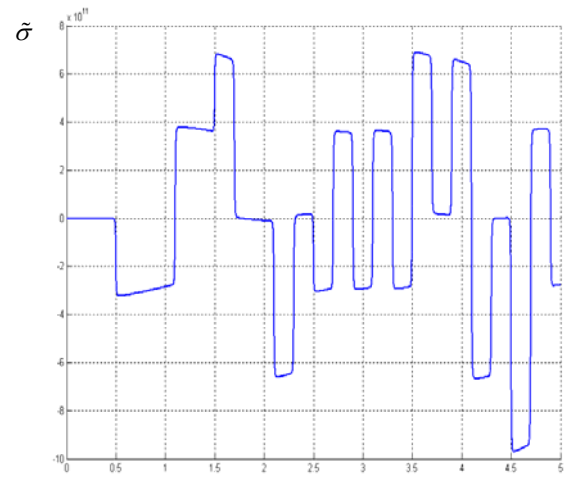


рис. 2.6(к)

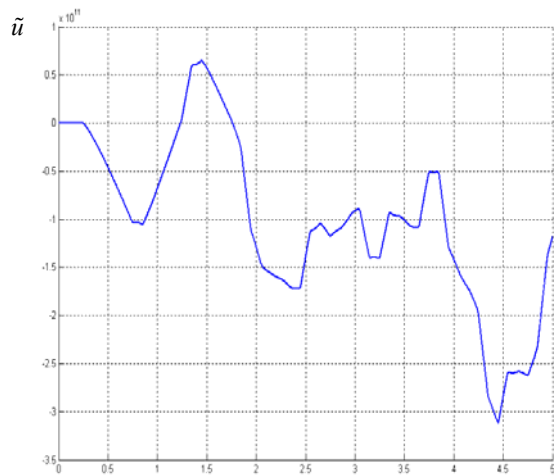


рис. 2.6(л)

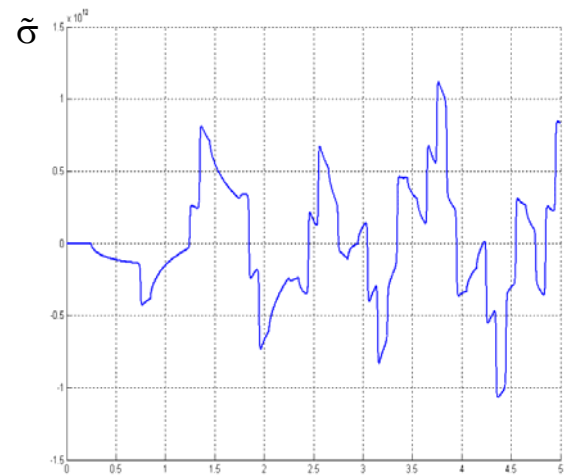


рис. 2.6(м)

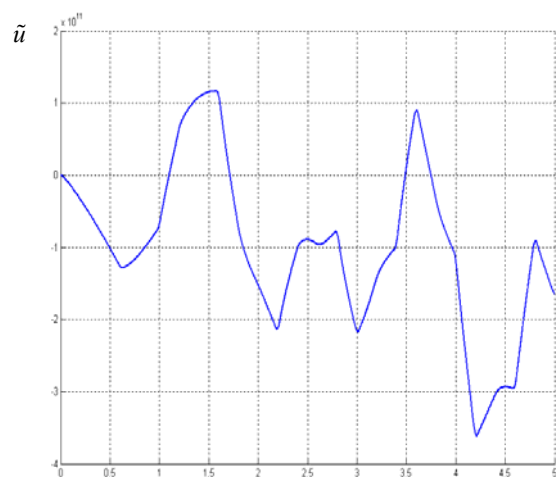


рис. 2.6(н)

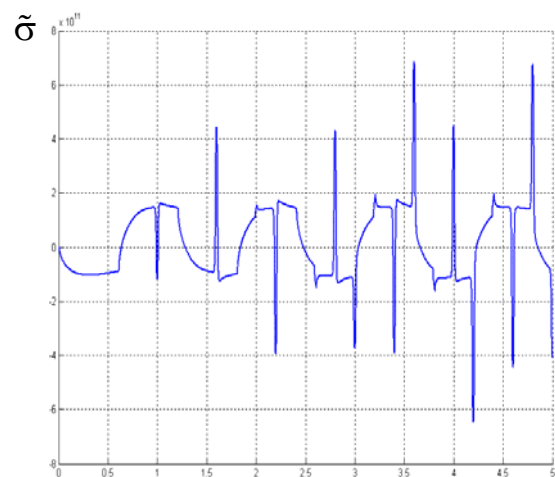


рис. 2.6(о)

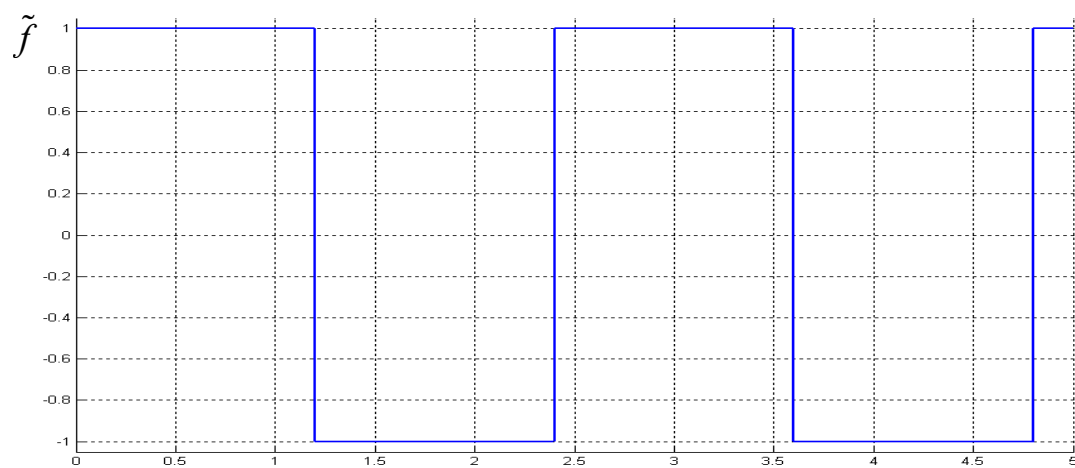


рис. 2.7(а)

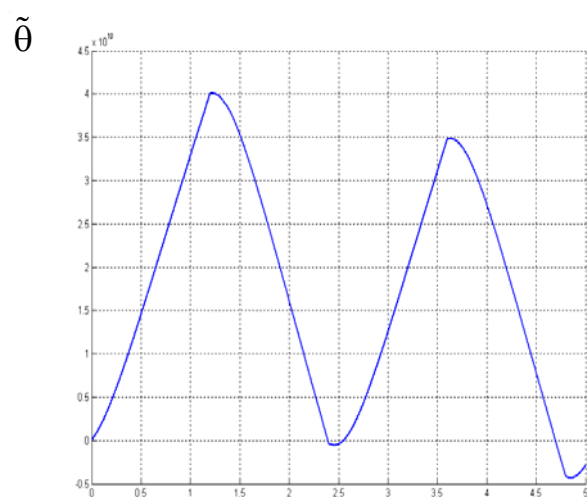


рис. 2.7(б)

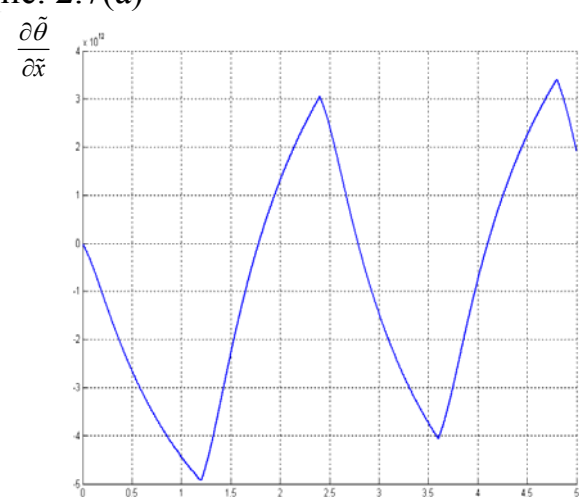


рис. 2.7(в)

$\tilde{u}$

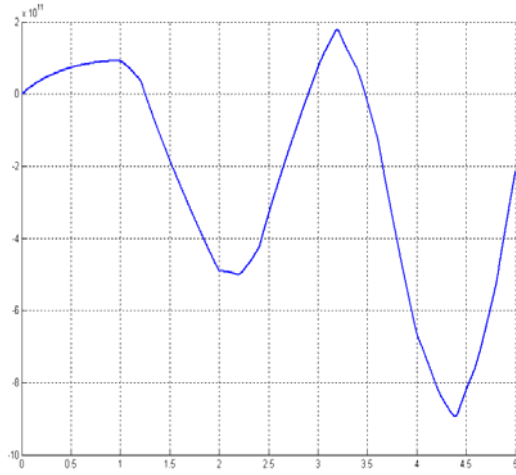


рис. 2.7(г)

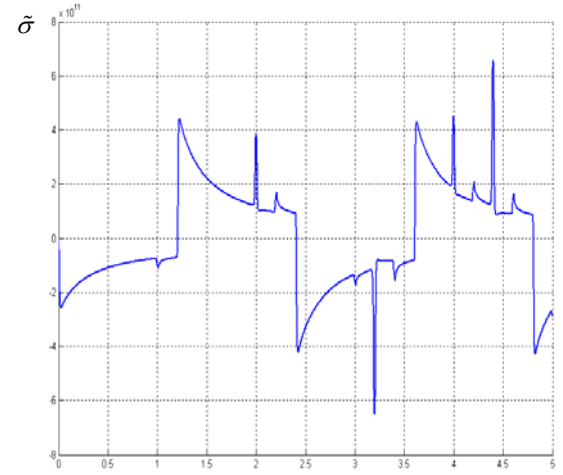


рис. 2.7(д)

$\tilde{\theta}$

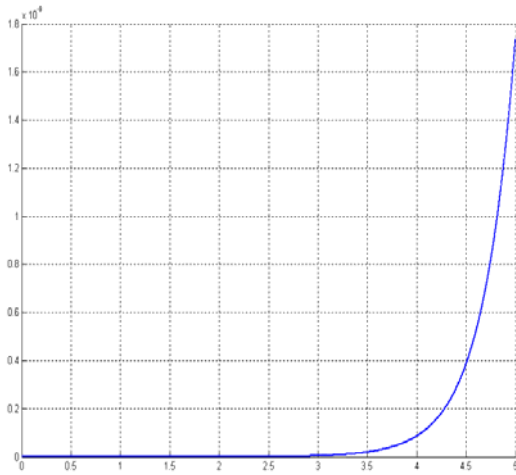


рис. 2.7(е)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$

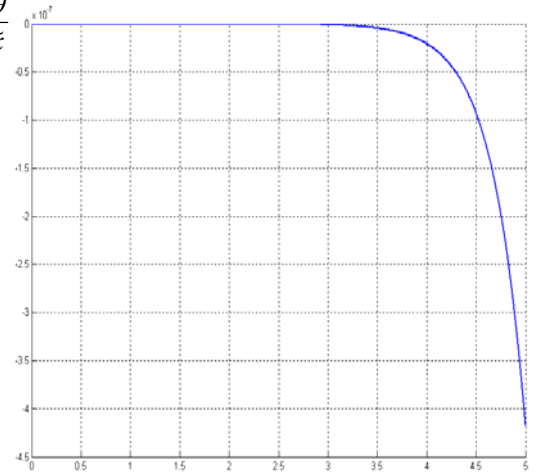


рис. 2.7(е)

$\tilde{u}$

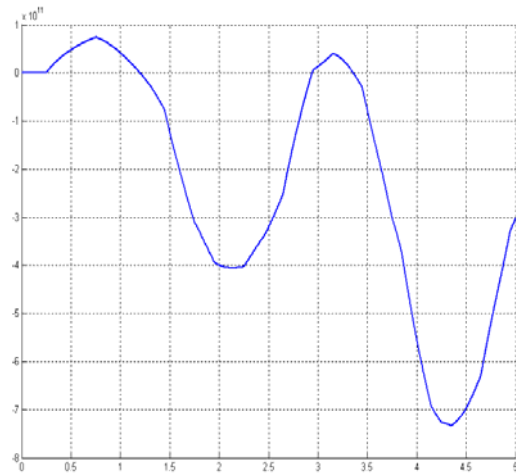


рис. 2.7(ж)

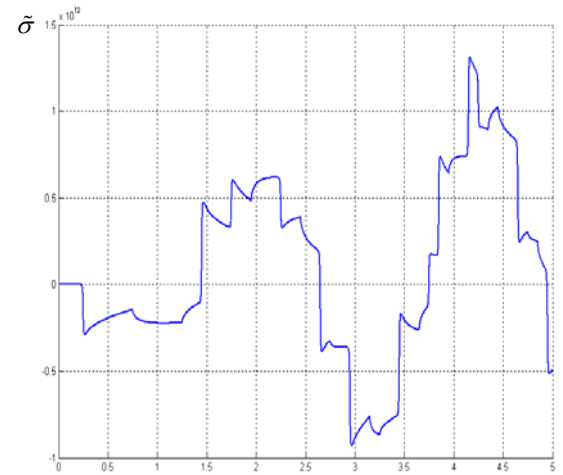


рис. 2.7(з)

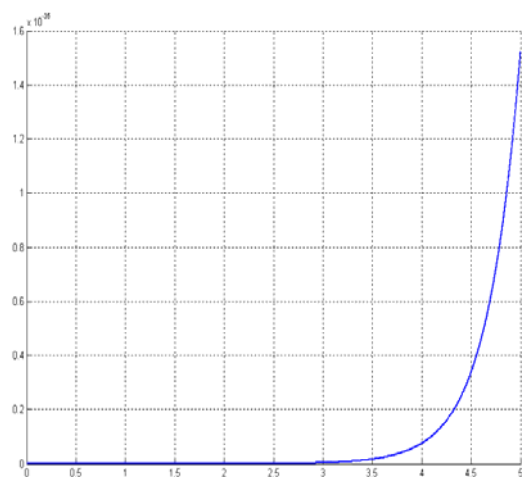
$\tilde{\theta}$ 

рис. 2.7(и)

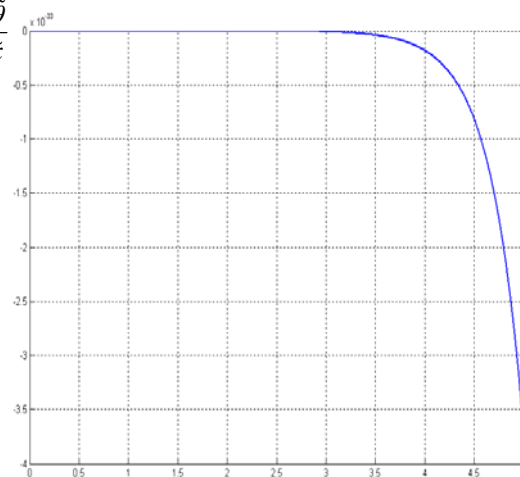
 $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$ 

рис. 2.7(і)

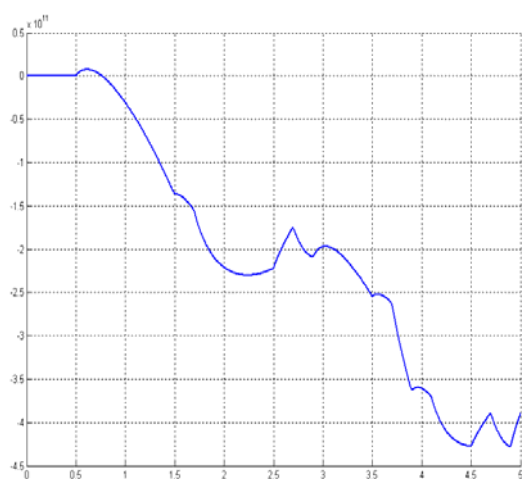
 $\tilde{u}$ 

рис. 2.7(й)

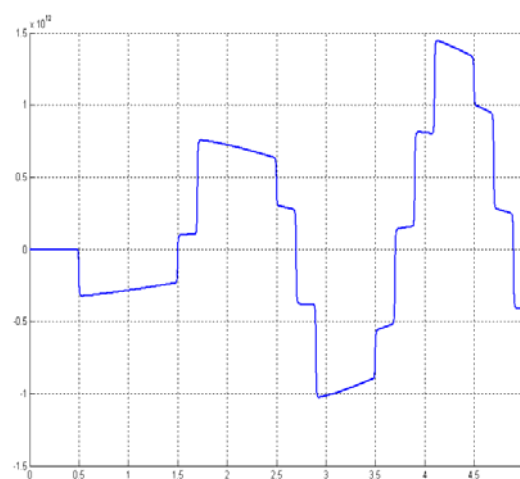
 $\tilde{\sigma}$ 

рис. 2.7(к)

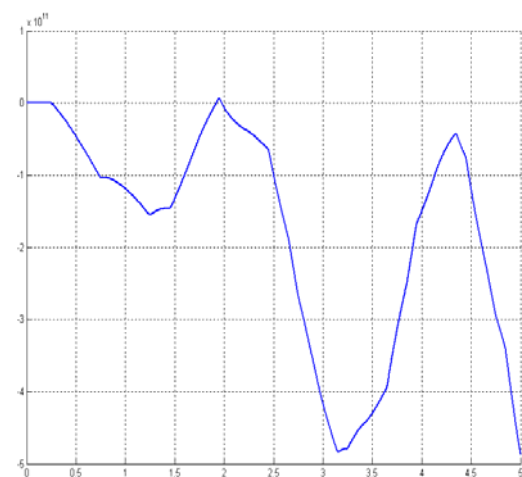
 $\tilde{u}$ 

рис. 2.7(л)

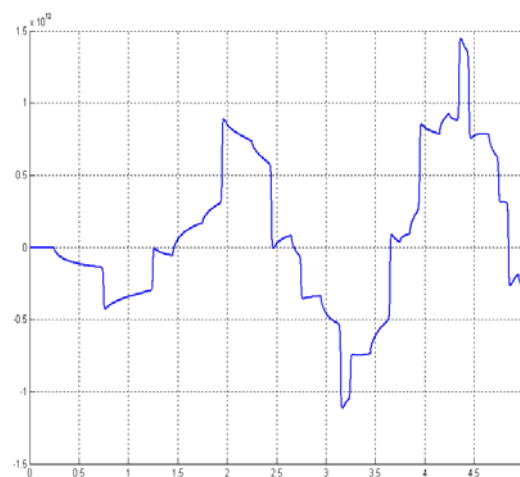
 $\tilde{\sigma}$ 

рис. 2.7(м)

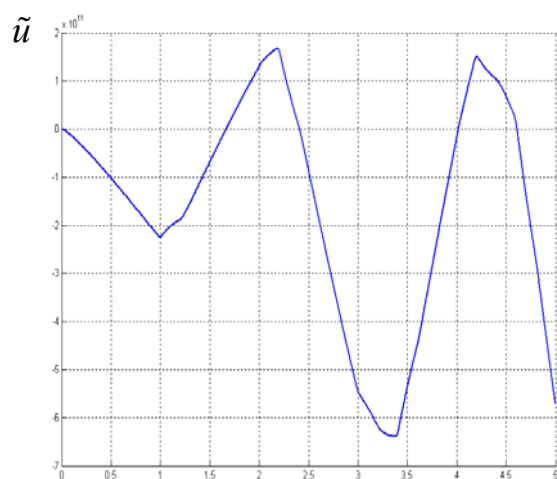


рис. 2.7(н)

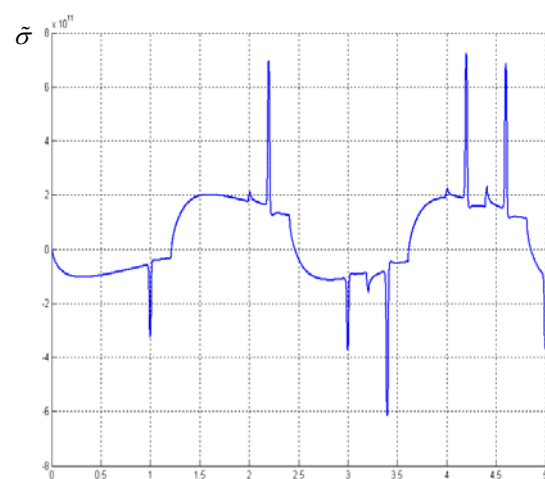


рис. 2.7(о)

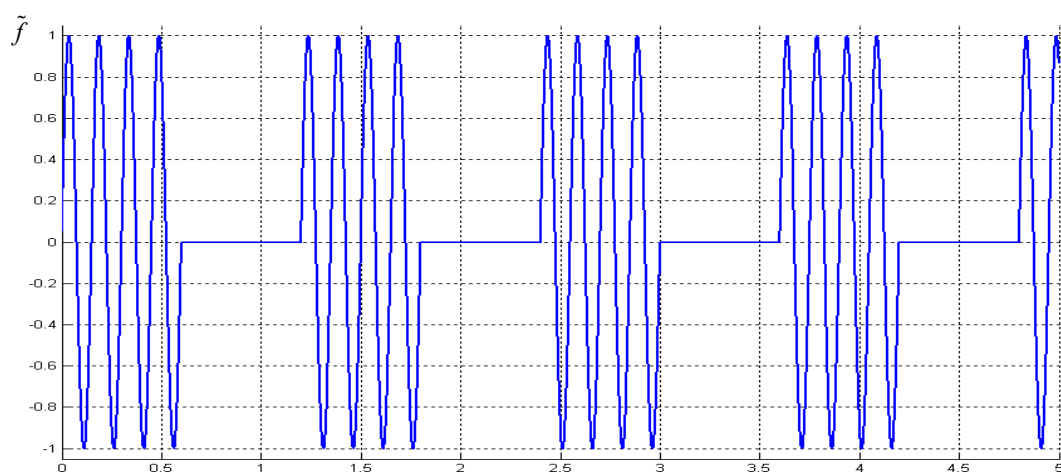


рис. 2.8(а)

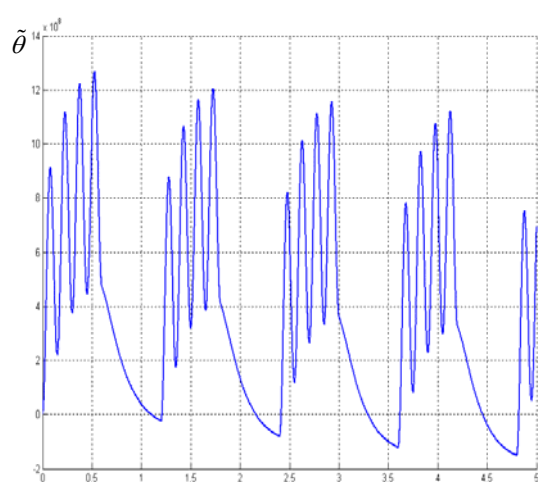


рис. 2.8(б)

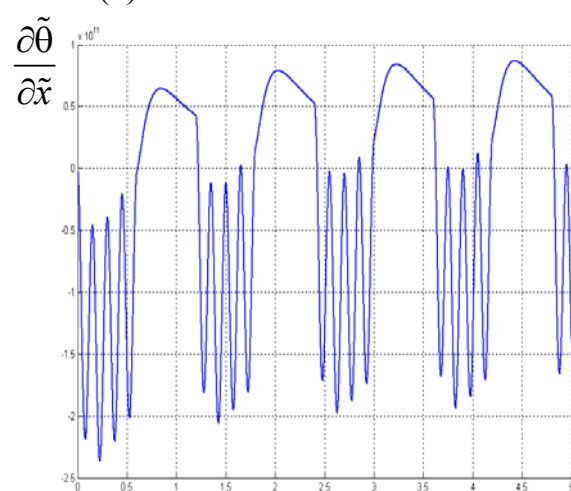


рис. 2.8(в)

$\tilde{u}$

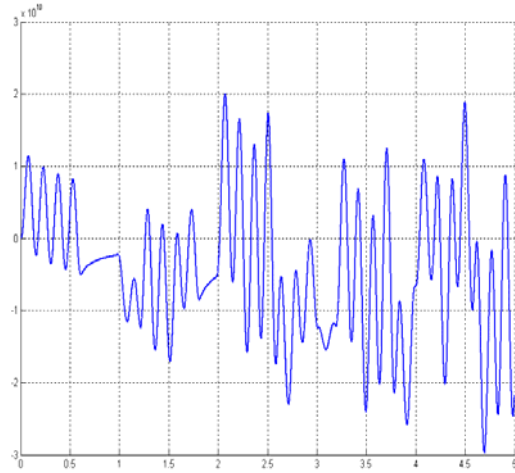


рис. 2.8(г)

$\tilde{\sigma}$

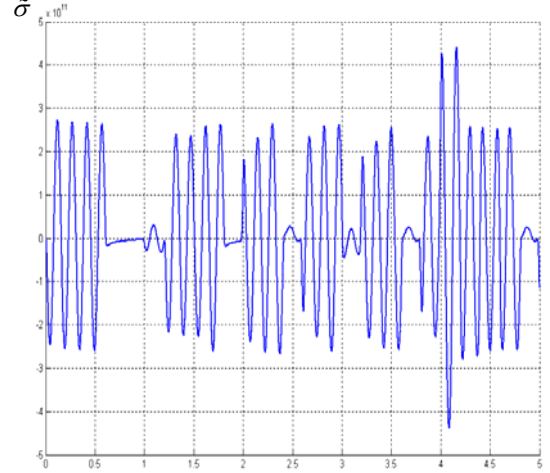


рис. 2.8(д)

$\tilde{\theta}$

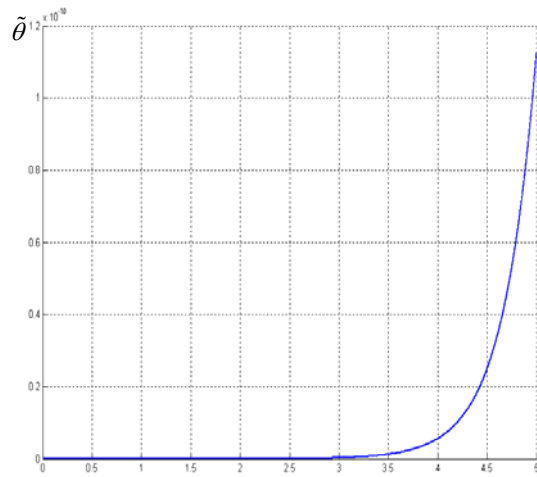


рис. 2.8(е)

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}$

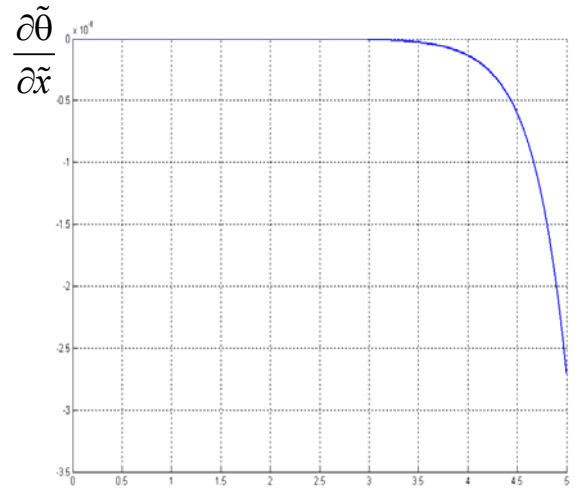


рис. 2.8(е)

$\tilde{u}$

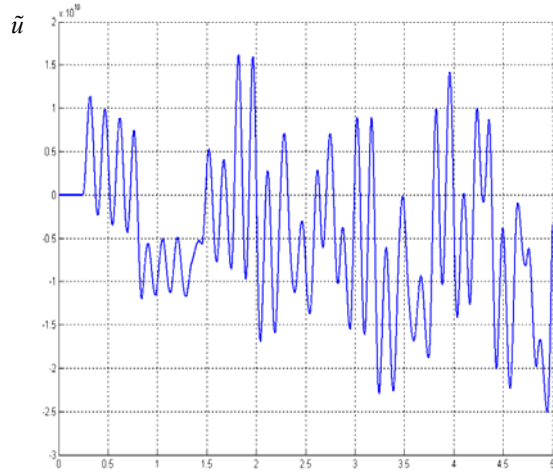


рис. 2.8(ж)

$\tilde{\sigma}$

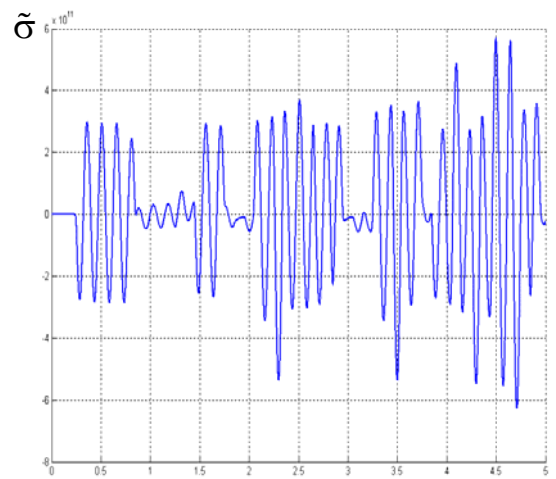


рис. 2.8(з)

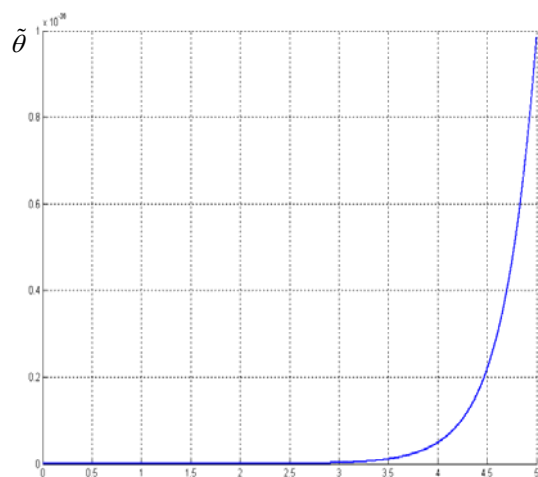


рис. 2.8(г)

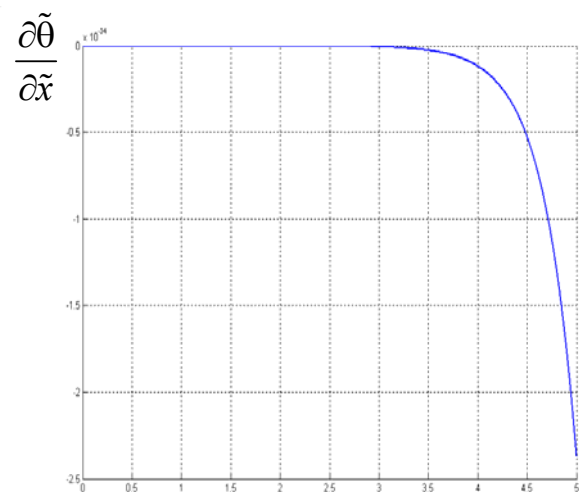


рис. 2.8(д)

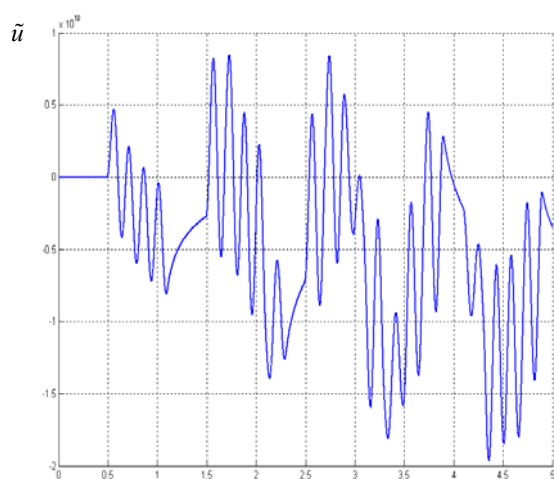


рис. 2.8(е)

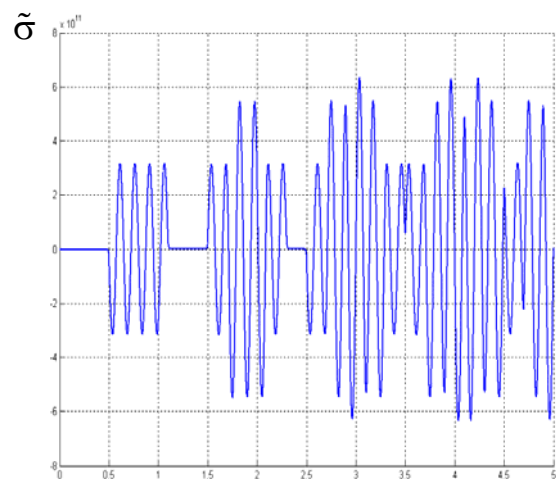


рис. 2.8(ж)

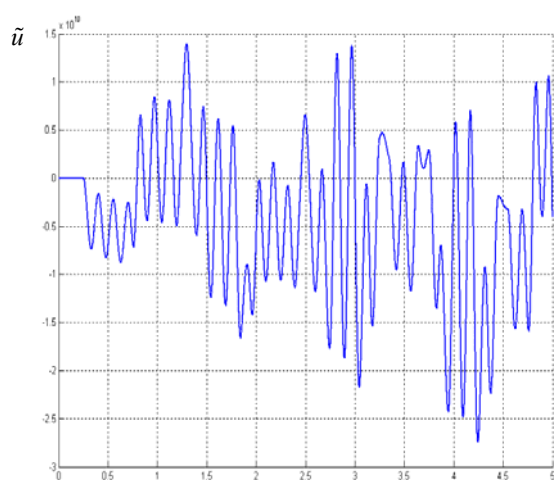


рис. 2.8(з)

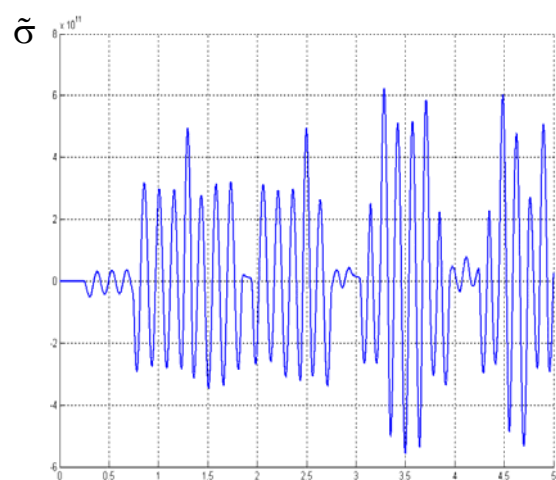


рис. 2.8(и)

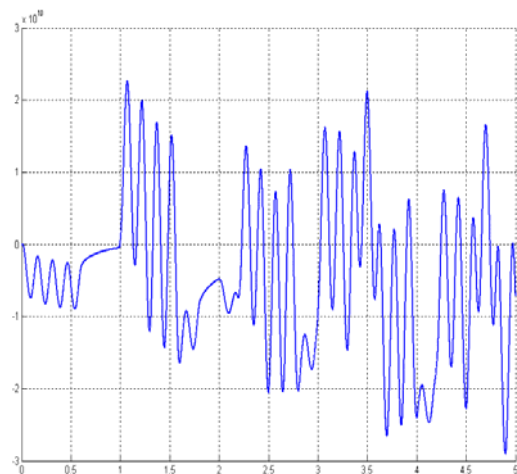
$\tilde{u}$ 

рис. 2.8(н)

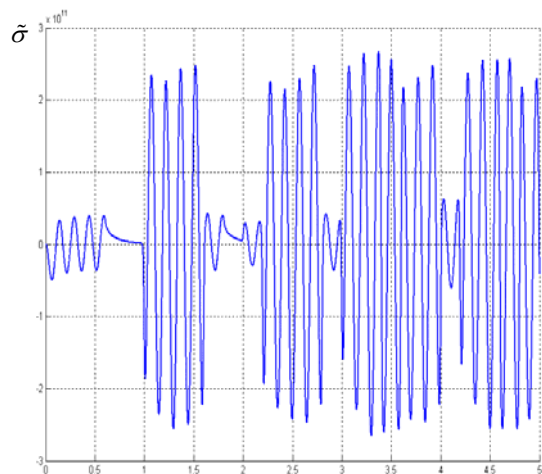
 $\tilde{\sigma}$ 

рис. 2.8(о)

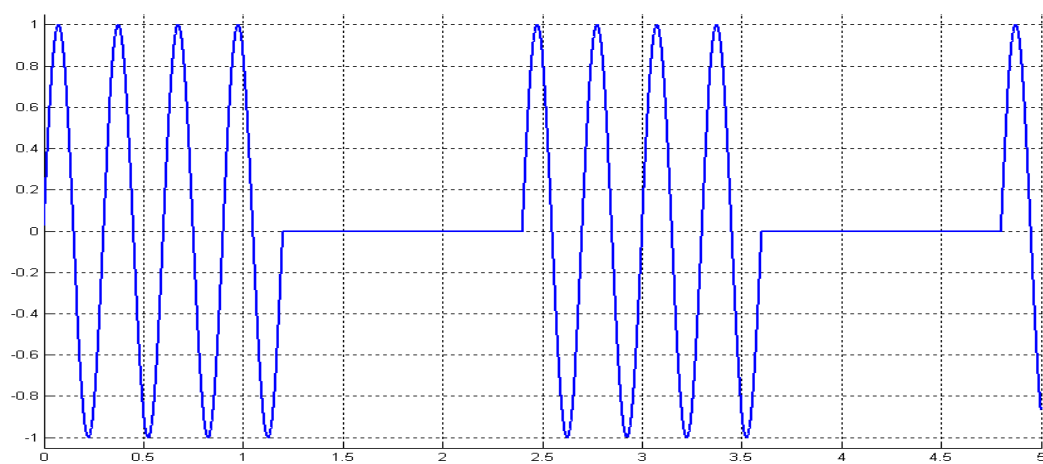
 $\tilde{f}$ 

рис. 2.9(а)

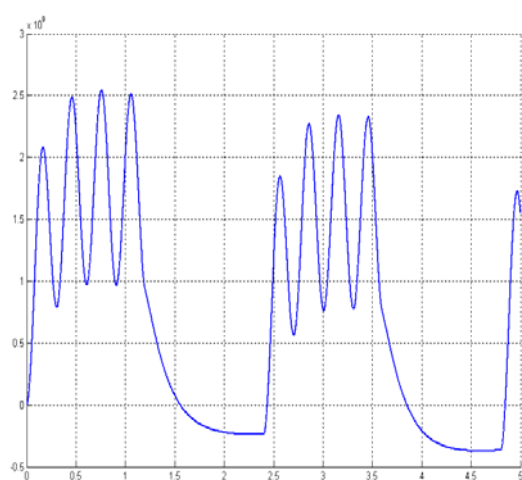
 $\tilde{\theta}$ 

рис. 2.9(б)

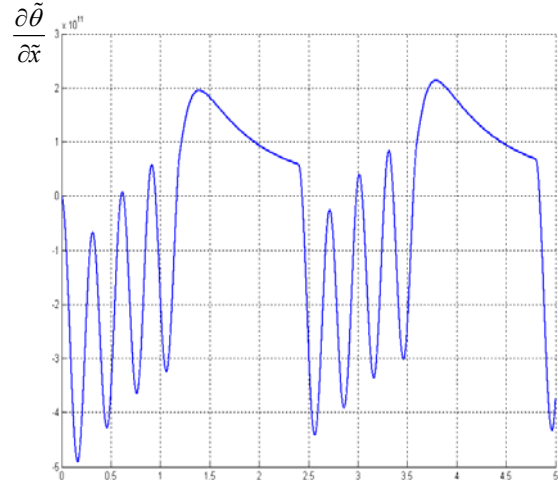
 $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}$ 

рис. 2.9(в)

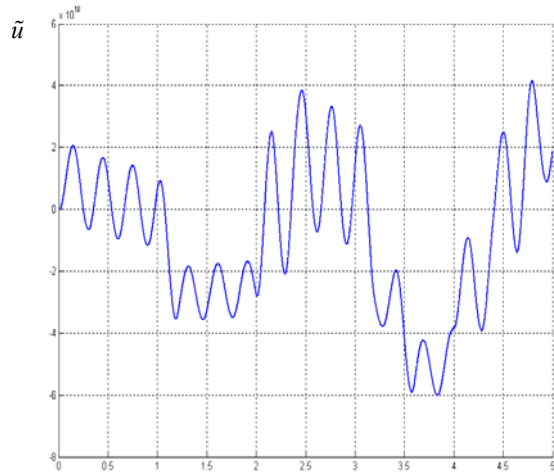


рис. 2.9(г)

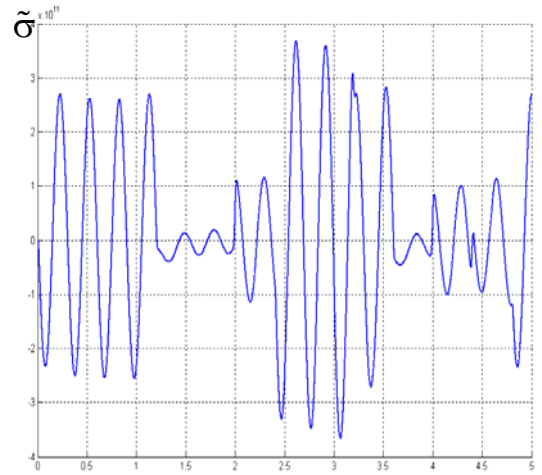


рис. 2.9(д)

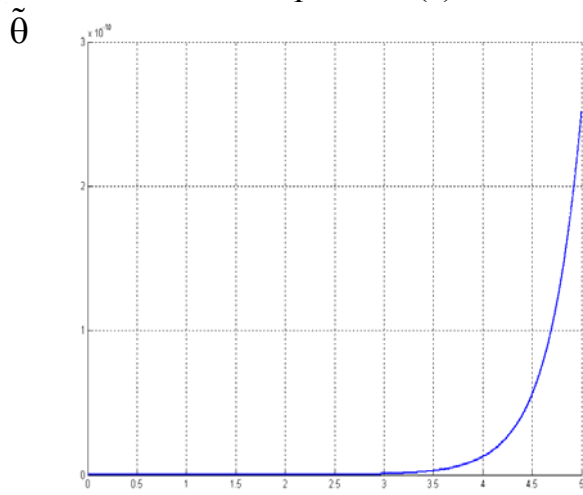


рис. 2.9(е)

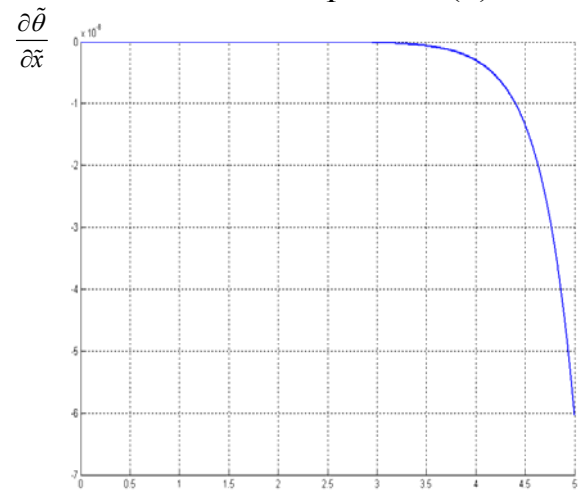


рис. 2.9(е)

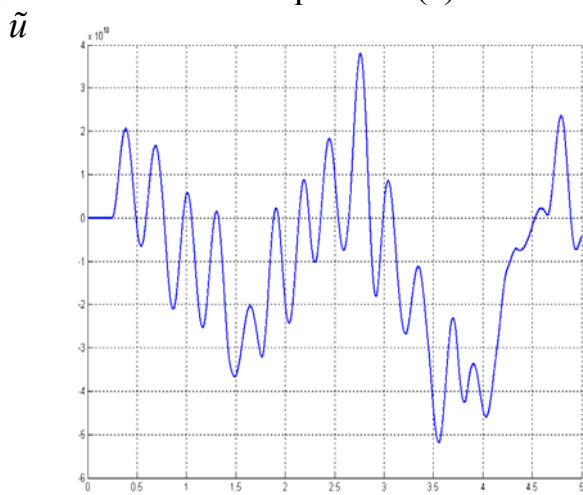


рис. 2.9(ж)

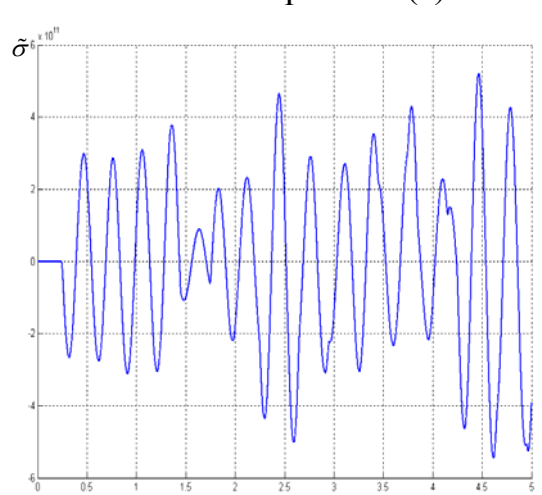


рис. 2.9(з)

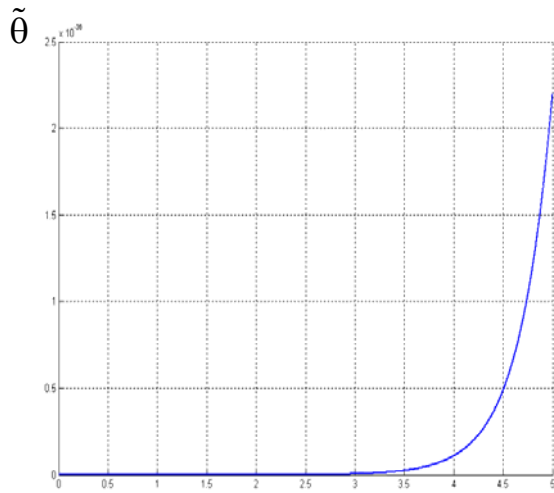


рис. 2.9(і)

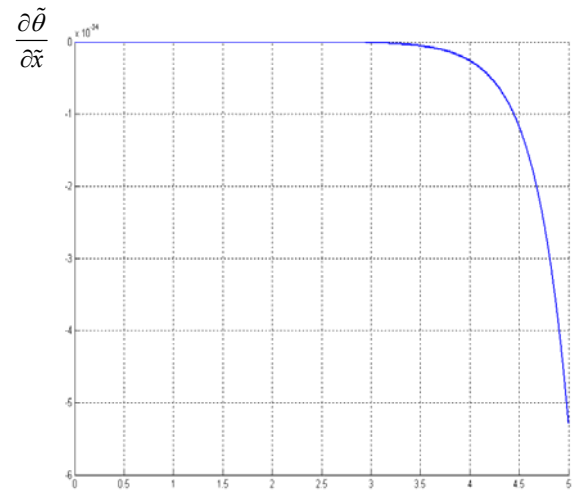


рис. 2.9(ї)

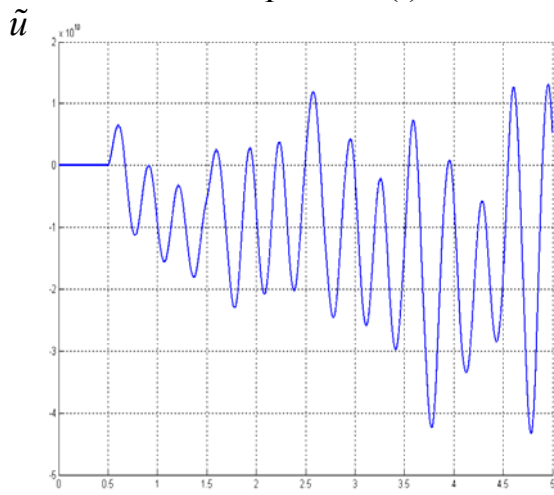


рис. 3.9(й)

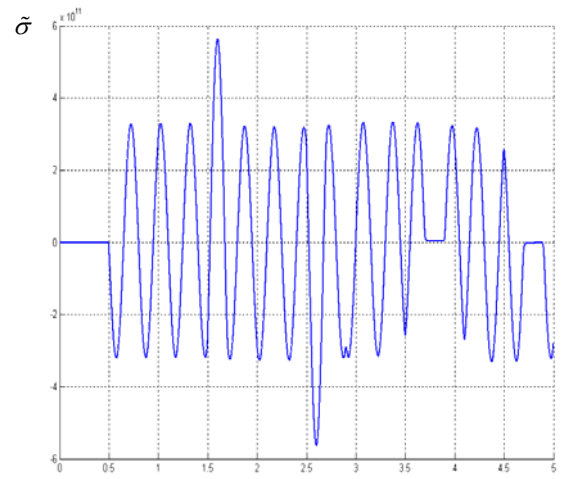


рис. 2.9(к)

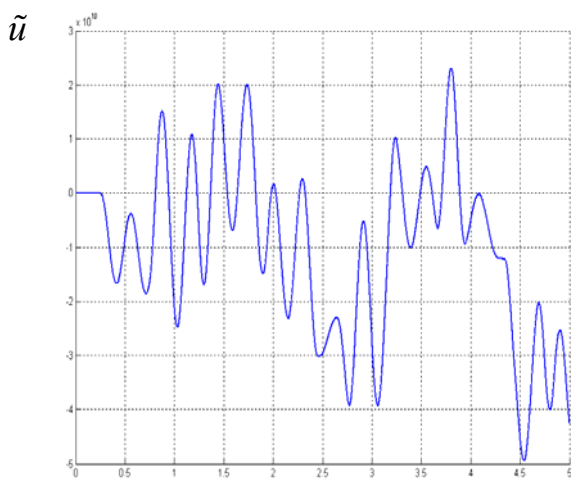


рис. 2.9(л)

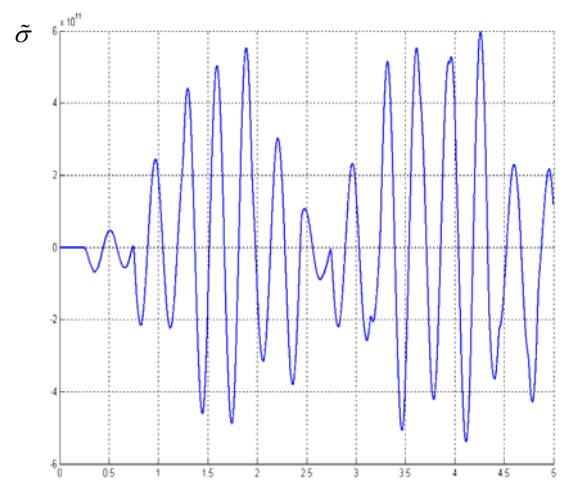


рис. 2.9(м)

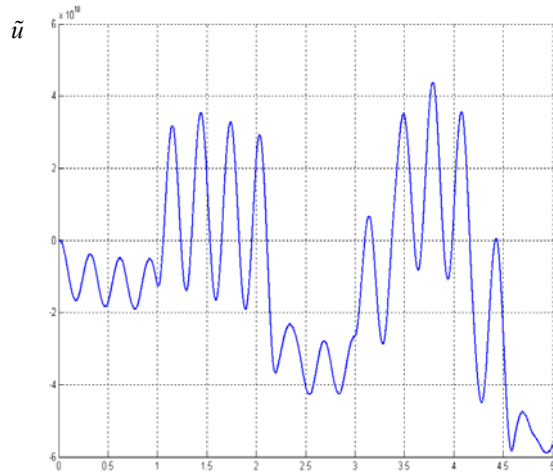


рис. 2.9(н)

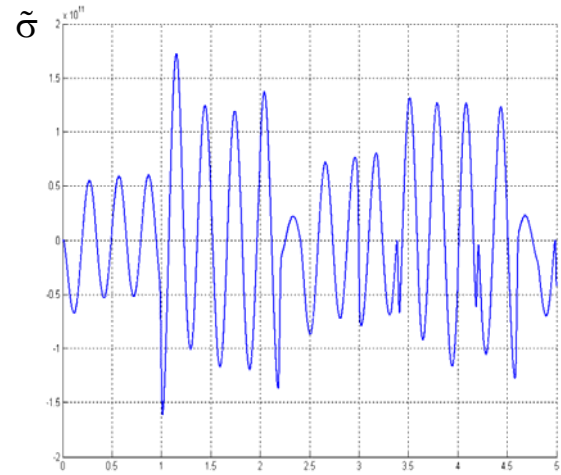


рис. 2.9(о)

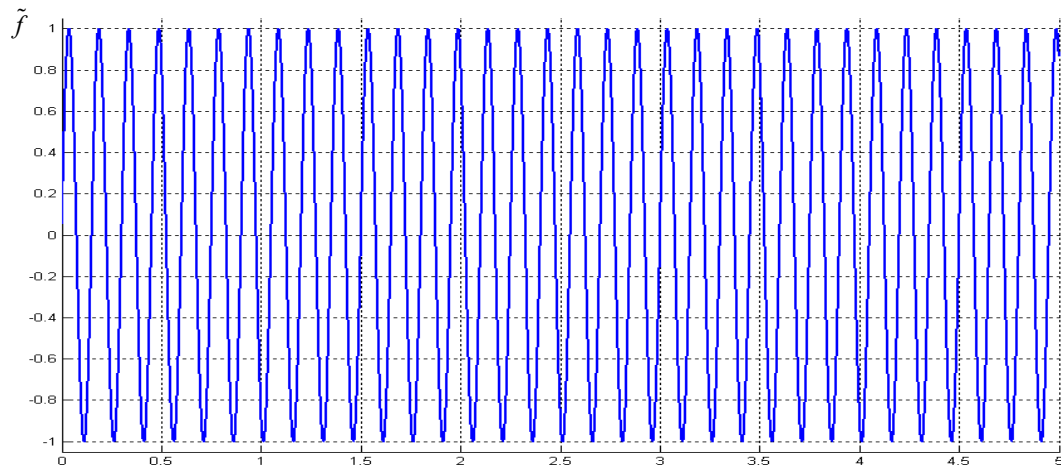


рис. 2.10(а)

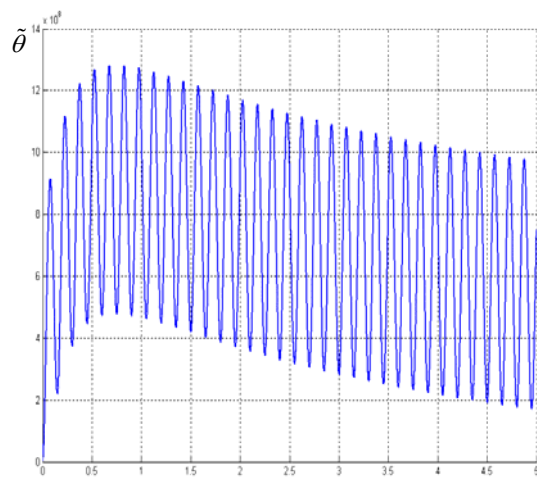


рис. 2.10(б)

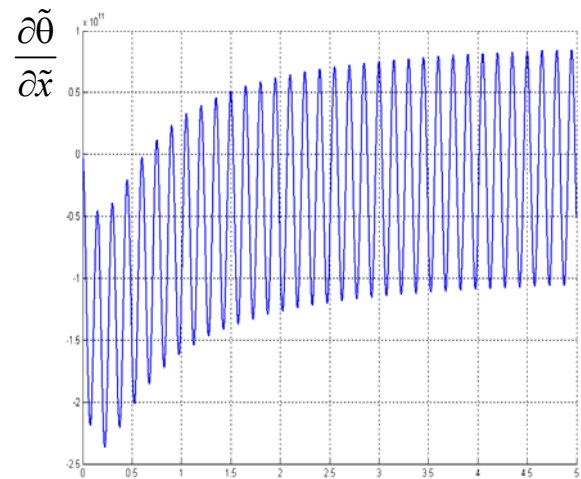


рис. 2.10(в)

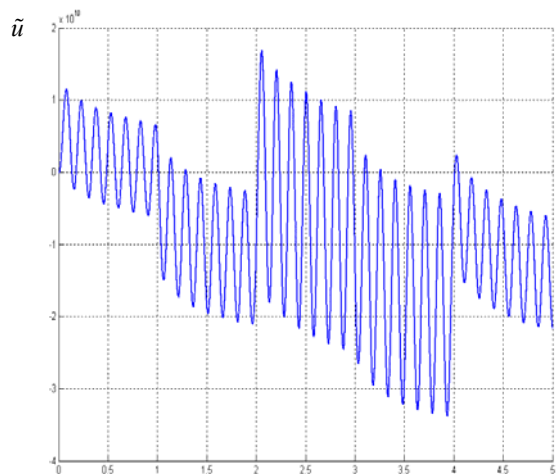


рис. 2.10(г)

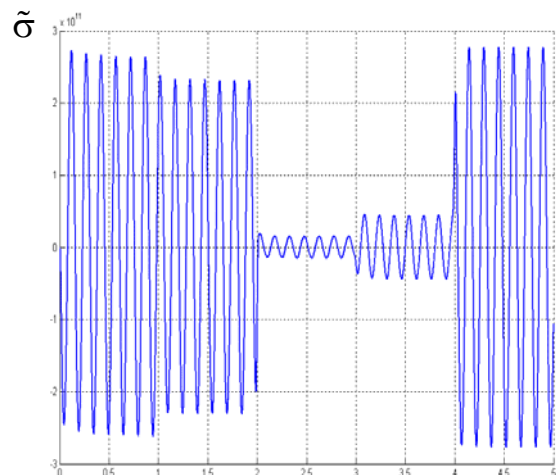


рис. 2.10(д)

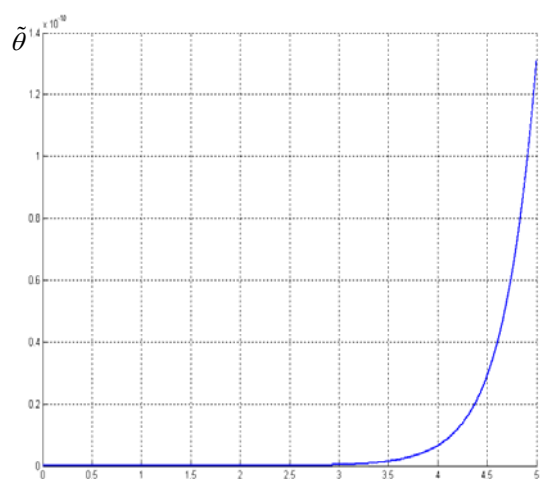


рис. 2.10(е)

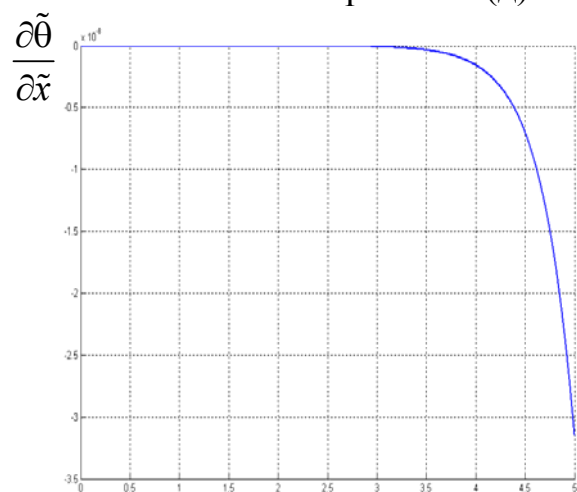


рис. 2.10(е)

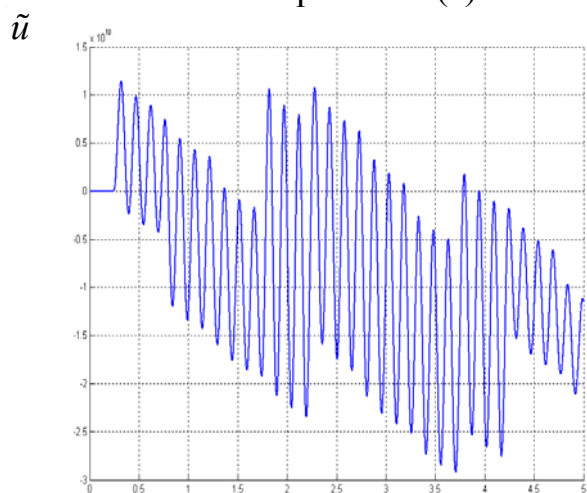


рис. 2.10(ж)

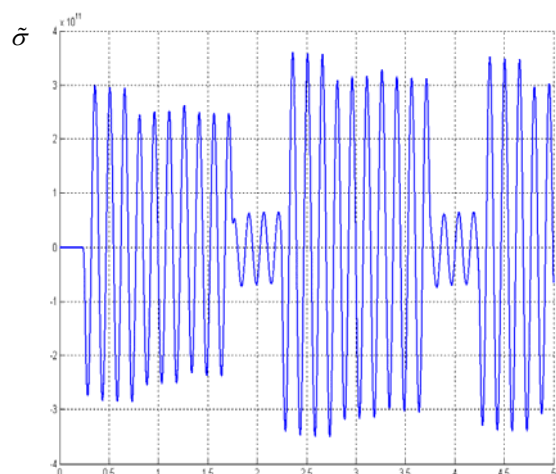


рис. 2.10(з)

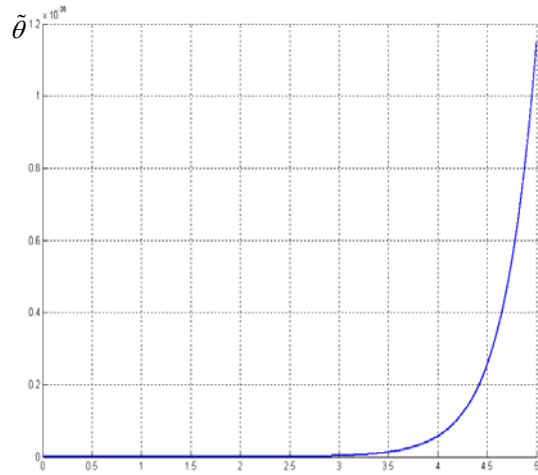


рис. 2.10(и)

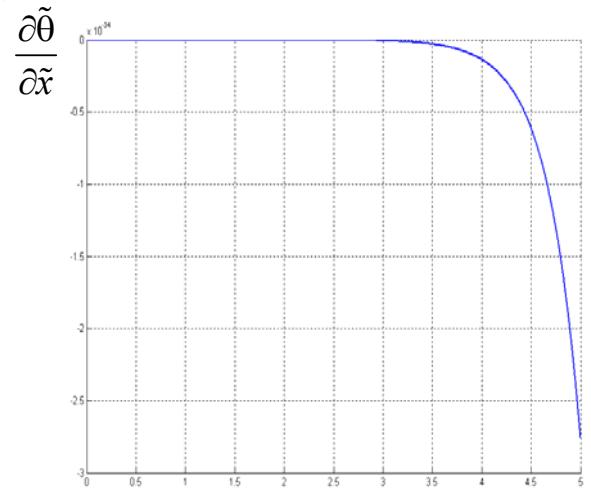


рис. 2.10(ї)

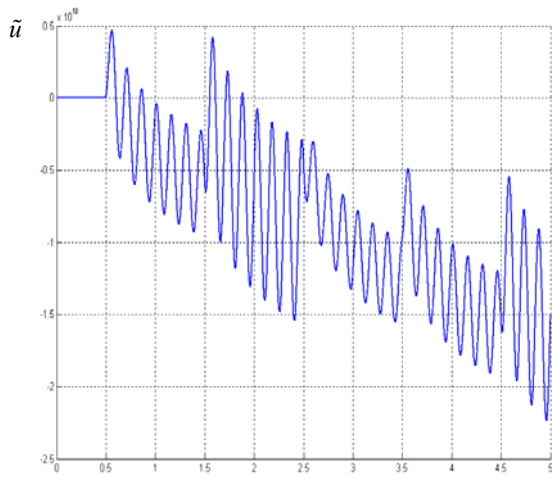


рис. 2.10(й)

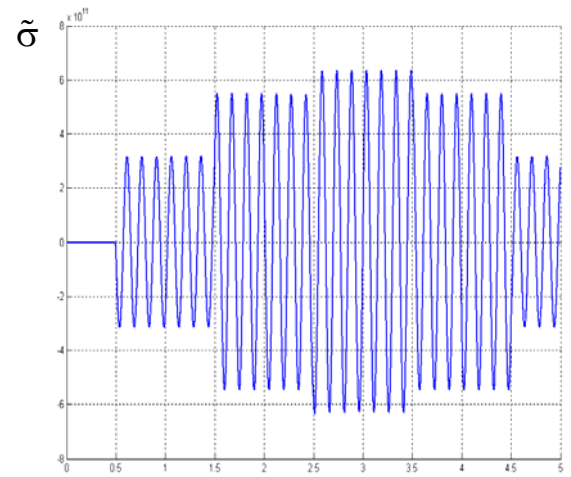


рис. 2.10(к)

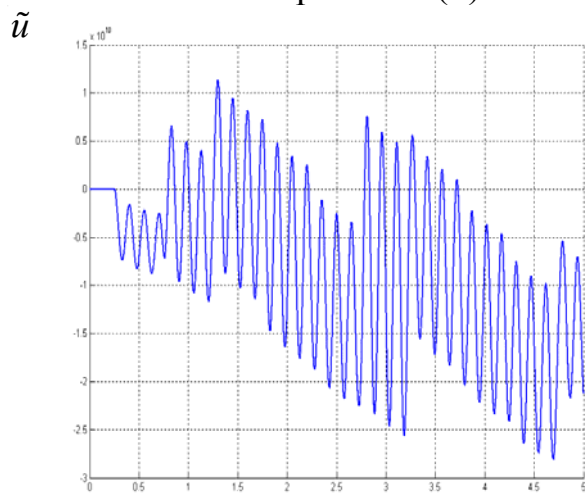


рис. 2.10(л)

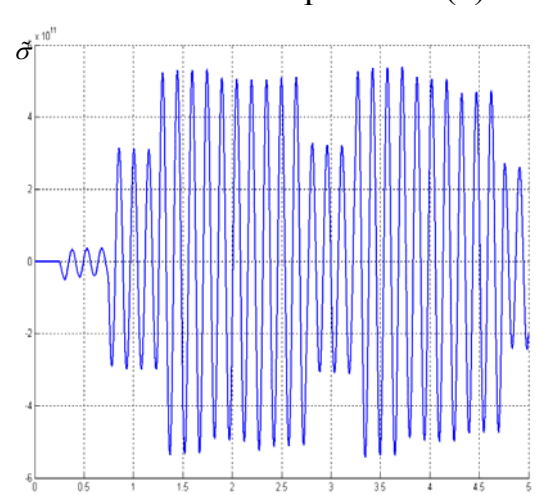


рис. 2.10(м)

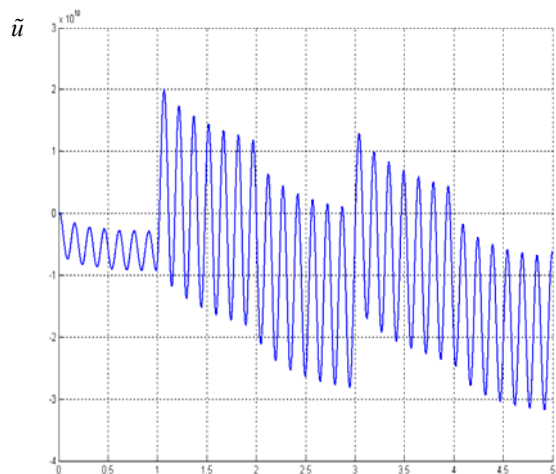


рис. 2.10(н)

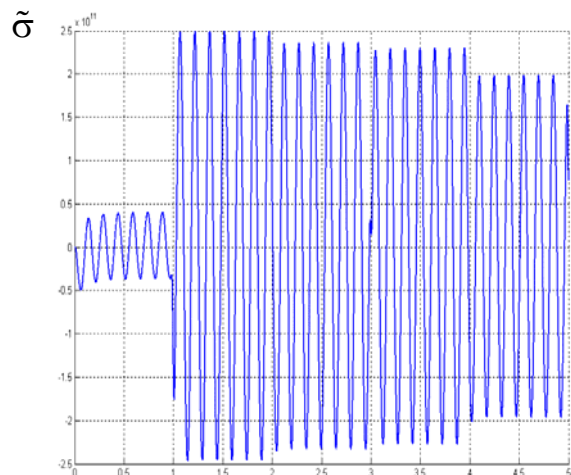


рис. 2.10(о)

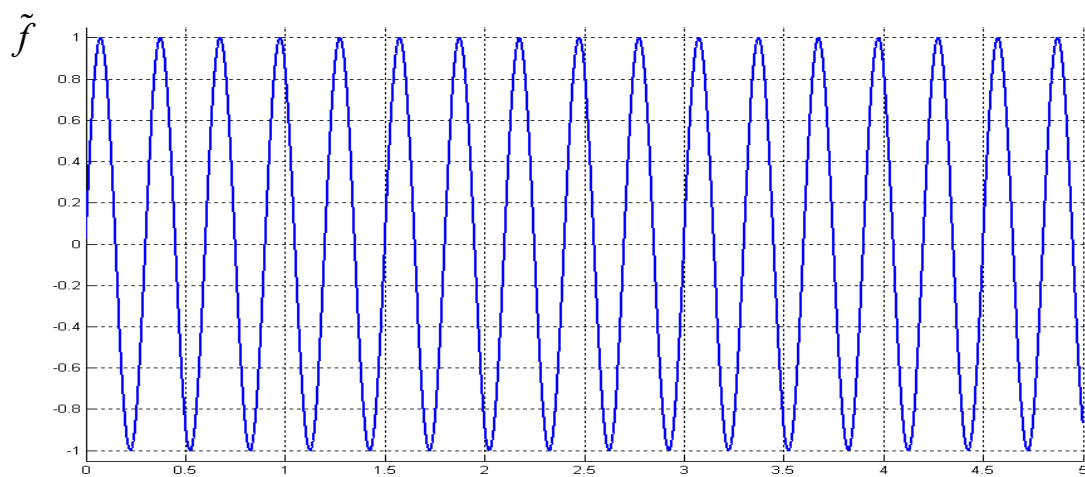


рис. 2.11(а)

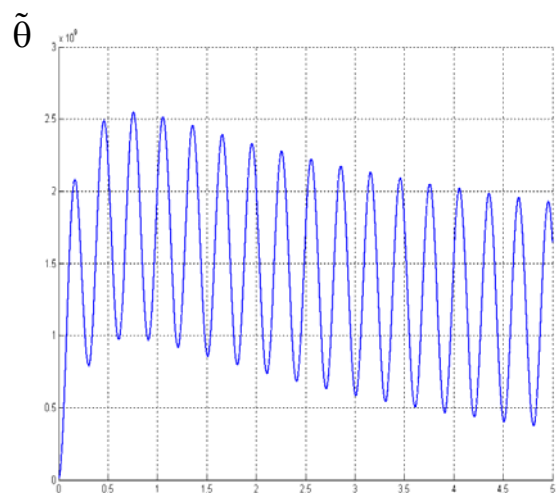


рис. 2.11(б)

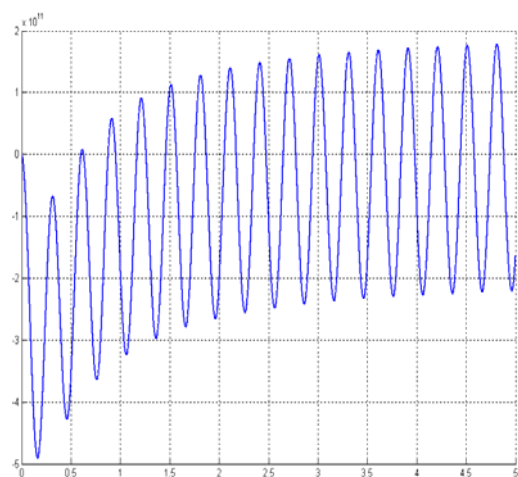


рис. 2.11(в)

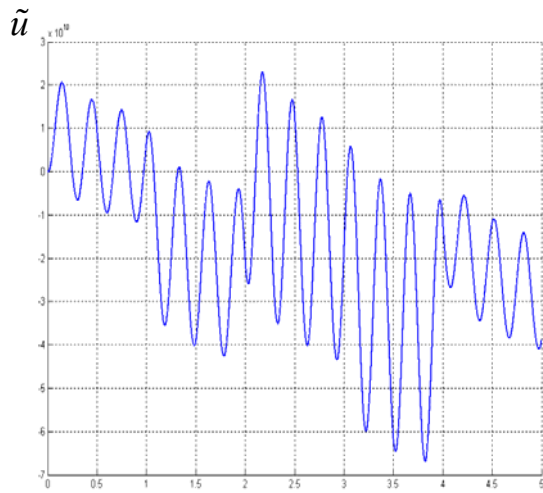


рис. 2.11(г)

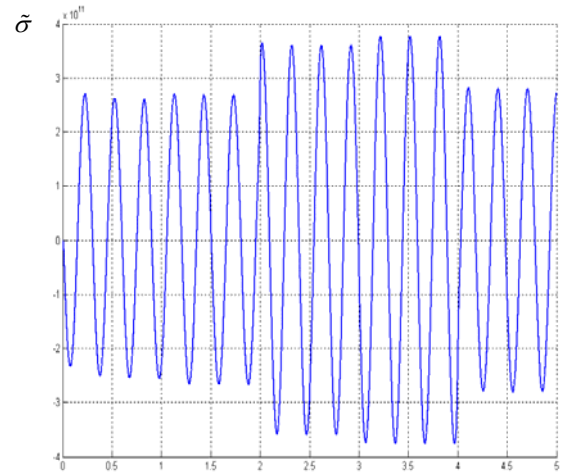


рис. 2.11(д)

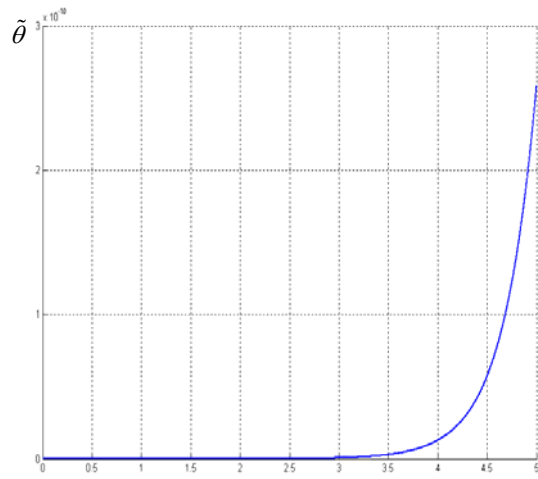


рис. 2.11(е)

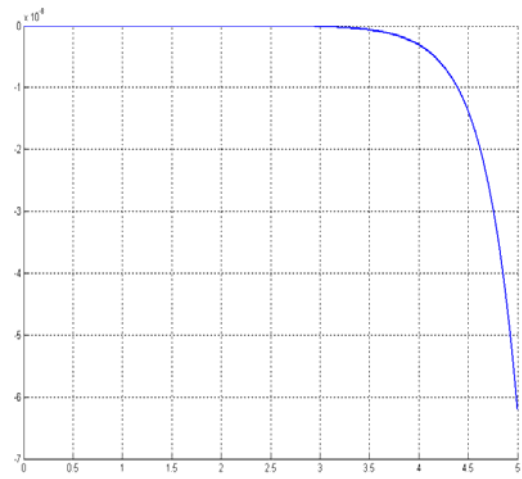


рис. 2.11(е)

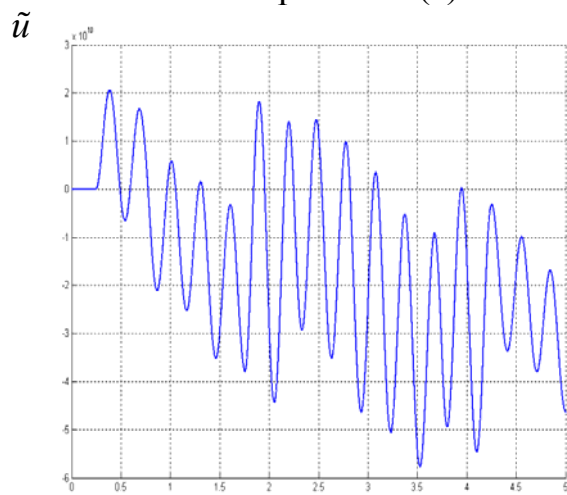


рис. 2.11(ж)

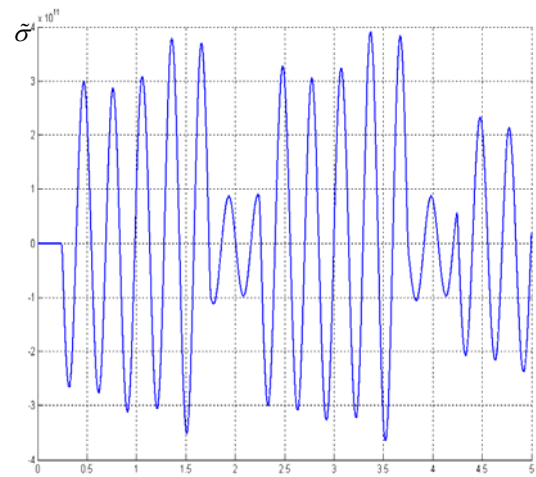


рис. 2.11(з)

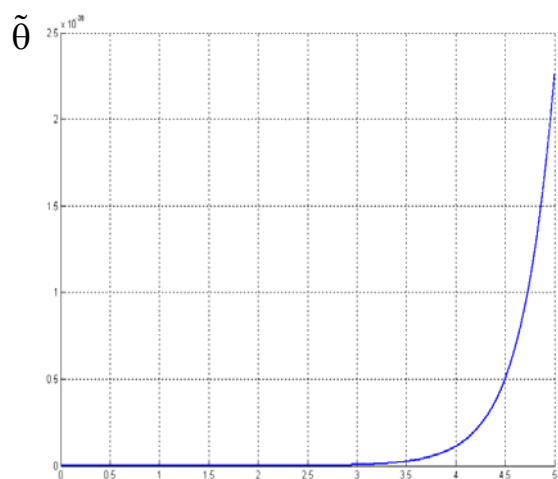


рис. 2.11(и)

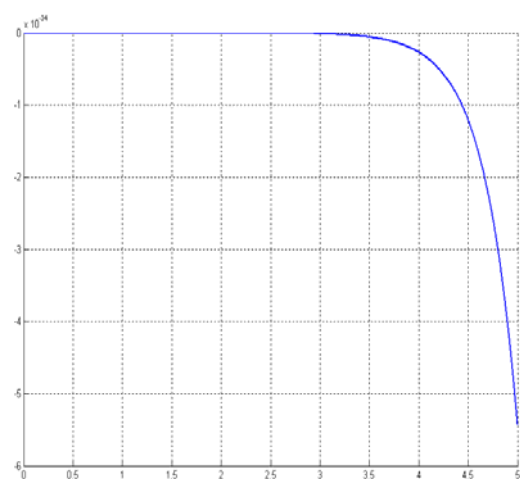


рис. 2.11(ї)

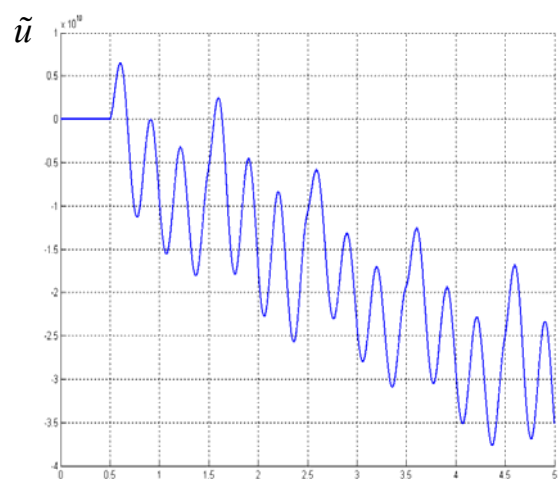


рис. 2.11(й)

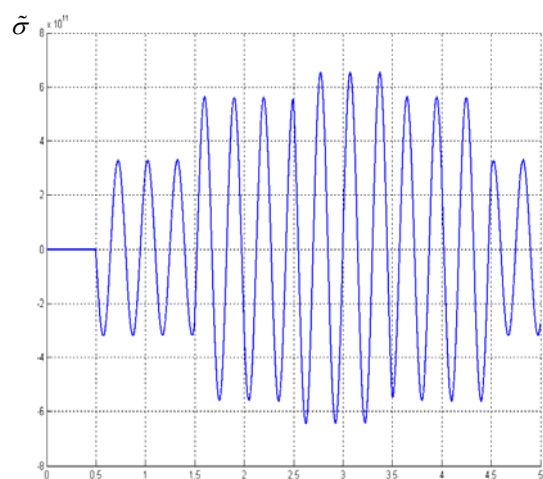


рис. 2.11(к)

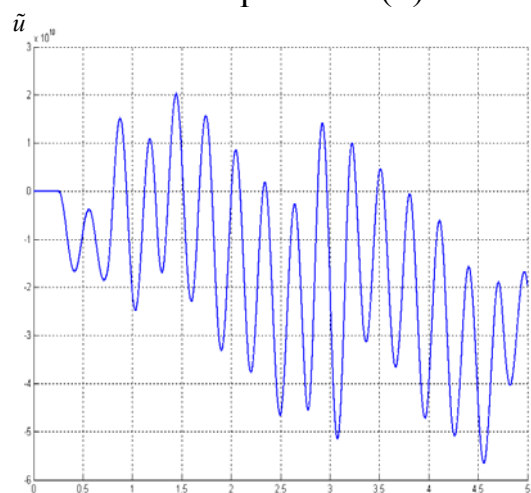


рис. 2.11(л)

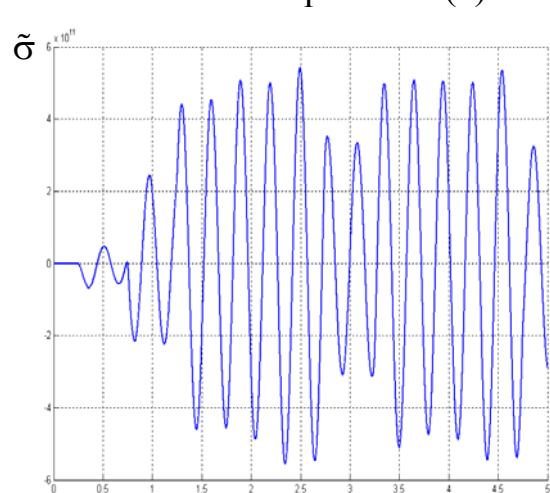


рис. 2.11(м)

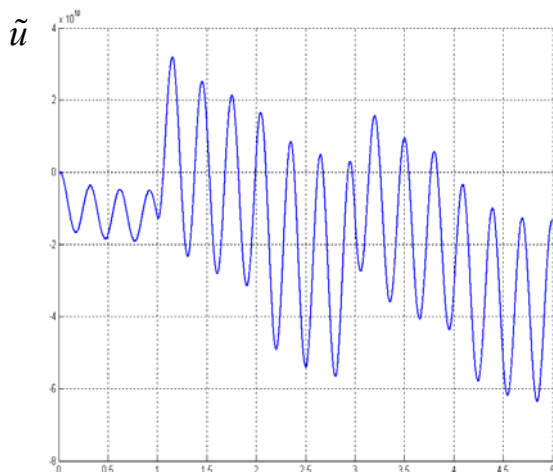


рис. 2.11(н)

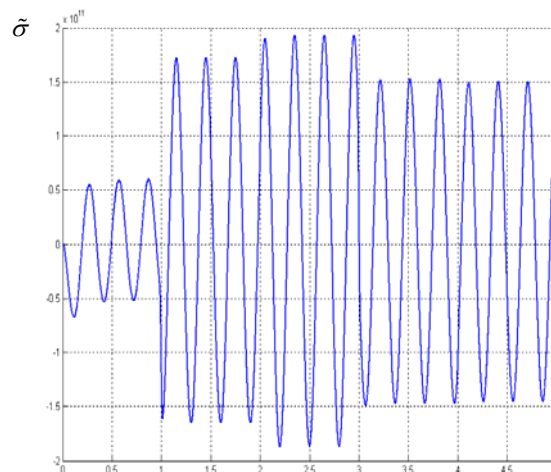


рис. 2.11(о)

Аналізуючи наведені вище графіки, робимо наступні висновки:

Одиничний відеоімпульс (рис. 2.2 та рис. 2.3)

Як бачимо з рис. 2.2(б), рис. 2.2(е), рис. 2.2(і), рис. 2.2(л), рис. 2.2(п) та рис. 2.3(б), рис. 2.3(е), рис. 2.3(і), рис. 2.3(л), рис. 2.3(п) температура та тепловий потік у шарі змінюються одразу на величину, яка пропорційна до $e^{-\beta h \tilde{z}}$ (вона обумовлює дуже великий градієнт затухання). Потім, на протязі всього часу, йде перерозподіл температури. Проте, цей процес дуже повільний (порівняно з розповсюдженням пружної хвилі), тому на графіках ми бачимо, що значна зміна температури та теплового потоку відбувається з затримкою. За час, який був розрахований, теплові характеристики на глибинах $z=0,75$ та $z=0,99$ майже не змінилися. Така ж сама картина буде спостерігатися і при наступних модуляціях, тому графіки для температури та теплового потоку, на цих глибинах, будемо опускати.

З механічних параметрів, на збудження більш «адекватно» реагує механічна напруга. На рис. 2.2(к) та рис. 2.3(к) форма залежності напруги від часу найбільш схожа на сигнал збудження, в інших точках — реакція має спотворений вигляд. Для переміщень, шар відіграє роль фільтра високих частот, згладжуючи їх форму відносно форми сигналу, за рахунок інерційних властивостей шару.

На усіх графіках для механічних параметрів, ми бачимо затримку у часі, що підтверджує вірність розрахунків, адже пружна хвиля поширюється у середовище не миттєво.

Також треба відмітити наступне — збільшення часу існування імпульсу не впливає на теплові характеристики шару, на протигагу механічним. Форма переміщень та механічної напруги, виявились дуже чутливими до цього параметру. На рис. 2.3(г), рис. 2.3(ж), рис. 2.3(й), рис. 2.3(н) та рис. 2.3(с) ми бачимо, що переміщення змінюються більш повільно. А на рис. 2.3(д), рис. 2.3(з), рис. 2.3(к), рис. 2.3(о) та рис. 2.3(т) — бачимо, що збільшення тривалості імпульсу призвела до „вирівнювання” форми механічної напруги.

Одиничний радіоімпульс (рис. 2.4 та рис. 2.5)

Як видно з наведених вище графіків, використання радіоімпульсів має деякі переваги. Форми механічних переміщень та напруги мають менш спотворений вигляд.

Використання більш довгого імпульсу (із зменшенням частоти), хоча й призведе до деякого спотворення відклику шару, проте його гармонійна форма, все ж, зберігається досить добре.

Щодо температурних параметрів, то можна побачити їх залежність від виду імпульсу (рис. 2.4(б) та рис. 2.5(б), рис. 2.4(в) та рис. 2.5(в)). А загальна тенденція зміни теплових характеристик по товщині шару, залишається не змінною.

Періодична послідовність відеоімпульсів (рис. 2.6 та рис. 2.7)

Використання періодичної послідовності відеоімпульсів призводить до спотворення форми механічних переміщень та напруги. на поверхні шару яка не опромінюється лазером (знаходиться в тіні), вони найбільш схожі на гармоніку з додаванням шуму.

Найбільш чутливою, для заданих умов, виявляється механічна напруга, а переміщення менш чутливі до періодичного характеру моделюючої функції та її часовим параметрам.

Щодо теплових параметрів, то для них залишаються справедливі попередні висновки.

Періодична послідовність радіоімпульсів (рис. 2.8 та рис. 2.9)

Аналізуючи наведені вище графіки, можна сказати, що основний відклик шару припадає на гармонійне заповнення. Періодичність радіоімпульсів призводить до більшого спотворення форми механічних переміщень та напруги, порівняно з одиничним радіоімпульсом (для заданих часових параметрів). Найбільшого спотворення, механічні характеристики дістають коли тривалість імпульсу найбільша, з тих, що розглядалися.

Після аналізу попередніх видів модуляції, представляє інтерес розглянути реакцію шару на функцію амплітудної модуляції, яка має вигляд чистої гармоніки.

Неперервна гармоніка (рис. 2.10 та рис. 2.11)

Як бачимо, реакція шару на гармонійний сигнал є найбільш адекватною, порівняно з відео імпульсом. Також можна побачити наявність перехідного періоду для теплових характеристик (рис. 2.10(б) та рис. 2.11(б), рис. 2.10(в) та рис. 2.11(в)), що не є очевидним.

ВИСНОВКИ ПО РОЗДІЛУ

Зробимо основні висновки та підсумуємо головні результати, отримані в ході виконання даної роботи:

- 1) Виконана математична постановка задачі нестационарного термооптичного збудження пружного шару (термооптичного перетворювача оптичної енергії в механічну).
- 2) Отримані вирази для розрахунку параметрів шару, а саме температури, теплового потоку, механічних переміщень та механічної напруги.
- 3) Розроблено алгоритм для чисельного розрахунку вказаних характеристик.
- 4) Аналіз чисельних результатів показує:
 - максимальна амплітуда параметрів пружного шару залежить від виду функції амплітудної модуляції;
 - найбільше значення вони мають при модуляції для відеоімпульсів;
 - найкраще шар відкликається на гармоніку, потім на радіоімпульс і найгірше на відеоімпульс;
 - на прикладі гармонійного збудження, можна побачити, що теплові параметри шару теж мають перехідний час;
 - після миттєвого прогріву шару (пропорційно $e^{-\beta h \bar{z}}$), йде повільний перерозподіл тепла по товщині шару, який не залежить від характеру моделюючої функції
- 1) Замість лазера, в якості генератора теплової енергії, може бути будь-яке джерело теплового випромінювання, адже процес генерації пружних хвиль у шарі, викликається лише його нерівномірним нагріванням.
- 2) Питання, які розглядалися в роботі, відносяться до порівняно нового розділу оптоакустики, де вивчаються нестационарні теплові поля в пружних середовищах та викликані ними коливання.
- 3) Виконана робота є логічним продовженням [(Богданов, 2002)], результати якої були опубліковані в [(Бабаев, и др., 2002)], а також докладені на

міжнародній конференції [(Савин, и др., июнь, 2002)] та XXII міжнародній науково-технічній конференції «Проблемы электроники» (Київ 2002).

- 4) Результати, отримані при даній роботі, частково були оформлені в вигляді статті та опубліковані в науковому журналі [(Бабаев, и др., 2003)]. Отримані наукові результати доповідалися на двох міжнародних конференціях [(Богданов, май, 2003), (Богданов, апрель, 2004)]. Повністю цей розділ було докладено на XXIV міжнародній науково-технічній конференції «Проблемы электроники» (Київ 2004).
- 5) Треба також відмітити, що це одна з декількох задач нестационарної оптоакустики, яку вдалося розв'язати аналітичне строго. Тому її можна розглядати як тестову для більш складних чисельних схем розв'язку, коли не має можливості зробити строго інверсію.

РОЗДІЛ 3. ЗБУДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПРУЖНОГО ШАРУ

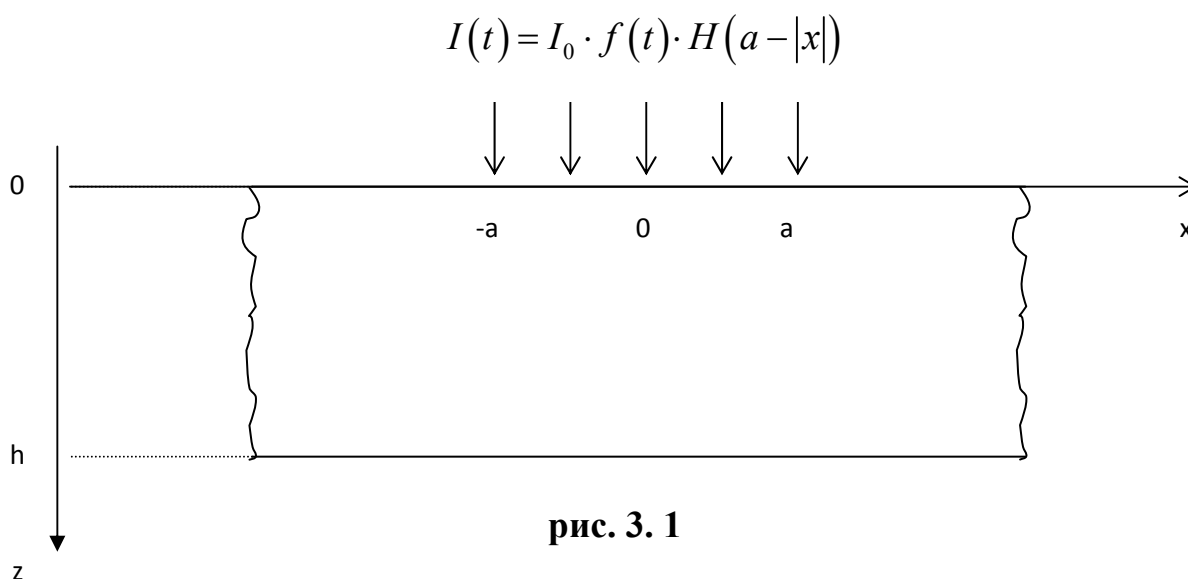
3.1. НЕСТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ

3.1.1. Математична постановка задачі

В даному розділі була вирішена одновимірна задача генерації акустичних хвиль, за допомогою лазерного випромінювання. В якості об'єкту дослідження виступає пружний шар. Розглянемо об'єкт дослідження більш докладно.

Лазерне випромінювання, поглинаючись в шарі, викликає його неоднорідне теплове розширення. Це теплове розширення речовини, в свою чергу, викликає збудження в середовищі акустичної хвилі. Падіння лазерного потоку вважалось нормальним до границі розподілу повітря – шар. Випромінювання було модульоване по інтенсивності. Функція амплітудної модуляції може мати будь який вигляд.

Для подальшого аналізу та розрахунків прийнята наступна модель — об'єкт має вигляд нескінченного в повздовжніх напрямках пружного шару, на який діє плоский потік лазерного випромінювання, обмежений по повздовжній координаті, з амплітудною модуляцією, яка описується функцією $f(t)$.



Лазерне випромінювання викликає прогрівання шару з заданим законом розподілу густини теплових джерел. При цьому виникає термооптична генерація звукових хвиль. Під впливом лазера в шарі починають розповсюджуватися поздовжні хвилі, в напрямку вісі Oz . Коли акустична хвиля добігає границі шару, частина її енергії відбивається — отже рішення запропонованої задачі, повинно враховувати пружні хвилі, які йдуть в напрямку вісі Oz та хвилі з протилежним напрямком розповсюдження.

Вважається що при описі процесів, які протікають в пружному шарі, виправдано використання рівнянь теорії незв'язаної термопружності. [9]

Підсумовуючи усе раніш сказане запишемо математичні рівняння, які описують процеси в шарі, а також крайові умови для кожної з границь та початкові умови для процесу. При зроблених допущеннях вихідна система включає в себе рівняння незв'язаної теплопровідності та рівняння руху пружного шару:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = -\frac{\beta e^{-\beta z}}{2\kappa} I_0 f(t) H(a - |x|); \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{zz}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_z(x, z, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x(x, z, t)}{\partial t^2} \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, z, t) = C^T \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} - \alpha B^* \theta(x, z, t) \\ \sigma_{zx}(x, z, t) = \mu \left(\frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial z} \right) \\ \sigma_{xx}(x, z, t) = C^T \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} - \alpha B^* \theta(x, z, t) \end{cases}. \quad (3.3)$$

В приведених диференційних рівняннях прийняті наступні позначення: $\theta(x, z, t)$ — різниця між температурою речовини в збудженому стані та температурою в стані спокою; χ , κ , β — коефіцієнти температуропровідності,

теплопровідності та оптичного поглинання, відповідно; $u(x, z, t)$ – виникаючи в шарі переміщення (індекси z та x позначає переміщення вздовж відповідних вісей); $\sigma(x, z, t)$ – виникаючи в шарі механічні напруження (індекси z та x позначає переміщення вздовж відповідних вісей); $v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – швидкість розповсюдження пружних поздовжніх хвиль (λ та μ – коефіцієнти Ламе, ρ – густина шару); α – коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу; $\eta = \frac{B^*}{C^T}$, $B^* = 3\lambda + 2\mu$, $C^T = \lambda + 2\mu$.

Крайові умови можуть мати різноманітні комбінації з наступних умов: на границі $z = 0$:

$$\theta(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad (3.4) \quad \kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (3.5)$$

$$u_z(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad (3.6) \quad \sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=0} = 0 \text{ та } \sigma_{zx}(x, z, t)|_{z=0}; \quad (3.7)$$

на границі $z = h$:

$$\theta(x, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (3.8) \quad \kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (3.9)$$

$$u_z(x, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (3.10) \quad \sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=h} = 0 \text{ та } \sigma_{zx}(x, z, t)|_{z=h}. \quad (3.11)$$

Треба також задати початкові умови для процесу який досліджується:

$$\theta(x, z, t)|_{t=0} = 0, \quad (3.12) \quad \kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.13)$$

$$u(x, z, t)|_{t=0} = 0, \quad (3.14) \quad \sigma(x, z, t)|_{t=0} = 0. \quad (3.15)$$

Для аналізу нестационарного процесу, були вибрані наступні крайові умови (3.5), (3.7), (3.9) та (3.11). Вище наведені рівняння повністю описують процеси, які протікають в шарі.

3.1.2. Розв'язок нестационарної задачі

Процес розв'язку задачі нестационарного термооптичного збудження пружного шару, було поділено на декілька етапів. Було введені потенціали переміщень:

$$u_z(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z}, \quad u_x(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z}.$$

3.1.2.1. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду Задля спрощення розрахунків та отримання більш уніфікованих розв'язків, було вирішено записати вирази, які описують нестационарний процес, крайові та початкові умови в безрозмірному вигляді. Це було зроблено за наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\beta, \quad \tilde{z} = z\beta, \quad \tilde{h} = h\beta, \quad \tilde{a} = a\beta, \quad \tilde{R} = R\beta, \quad \tilde{t} = t\nu\beta \\ \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \theta(x, z, t)\alpha, \quad \tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = u_x(x, z, t)\beta, \quad \tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = u_z(x, z, t)\beta \\ \tilde{\sigma}_{xx}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \sigma_{xx}(x, z, t) / C^T, \quad \tilde{\sigma}_{xz}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \sigma_{xz}(x, z, t) / C^T \\ \tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \sigma_{zz}(x, z, t) / C^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

Після перетворення отримаємо наступні диференціальні рівняння (символ $\sim$ надалі опущено, а також опустимо позначення (x, z, t) та (t)):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - A_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = A_2 e^{-z} fH(a - |x|) \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \eta \theta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \eta \theta \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

де $A_1 = \frac{\nu}{\chi\beta}$, $A_2 = -\frac{\alpha I_0}{2\kappa\beta}$. Позначимо швидкість зсувної хвилі як $\nu_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

3.1.2.2. Перетворення Лапласа за часом та Фур'є по координаті x , отримання загальних розв'язків Для того щоб розв'язати диференційні рівняння (3.17) та (3.18), до них було застосовано перетворення Лапласа за часом. З використанням початкових умов (3.12) – (3.15), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \theta^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^L}{\partial z^2} - A_1 p \theta^L = A_2 e^{-z} f^L H(a - |x|) \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial x^2} - p^2 \Phi^L - \eta \theta^L \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial x^2} - p^2 \Psi \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial x^2} - p^2 \Phi^L - \eta \theta^L \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial x^2} - p^2 \Psi \right] = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Щоб виконувались рівності системи (3.20), необхідно щоб було справедлива система:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial x^2} - p^2 \Phi^L - \eta \theta^L = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial x^2} - C_0^2 p^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

де $C_0^2 = \frac{C^T}{\mu}$.

Як бачимо, диференційні рівняння (3.19) та (3.21) залежать від двох просторових координат x та z . Для розв'язку цих рівнянь застосуємо косинус

(для Ψ — синус) розкладення у ряд Фур'є: $D(x, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z, p) \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$.

Таким чином функції будуть перетворені до наступного вигляду:

$$H(a - |x|) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right), \text{ де } b_0 = \frac{a}{R}, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{R}; \quad \Phi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^L \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$$

$$\text{та } \Psi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^L \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$$

В результаті отримаємо наступні диференційні рівняння:

$$\frac{\partial^2 \theta_n^L}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 + A_1 p \right] \theta_n^L = A_2 e^{-z} f^L b_n \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_n^L}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 + p^2 \right] \Phi_n^L = \eta \theta_n^L \\ \frac{\partial^2 \Psi_n^L}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 + C_0^2 p^2 \right] \Psi_n^L = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

А вираз для механічних напружень в шарі приймуть вигляд (з урахуванням (3.23)):

$$\begin{cases} \sigma_{zz}^L = \frac{\partial^2 \Phi_n^L}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{C^T} \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \Phi_n^L + \frac{2\mu}{C^T} \frac{n\pi}{R} \frac{\partial \Psi_n^L}{\partial z} - \eta \theta_n^L \\ \sigma_{zx}^L = -\frac{\mu}{C^T} \left[\frac{2n\pi}{R} \frac{\partial \Phi_n^L}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_n^L}{\partial z^2} + \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \Psi_n^L \right] \end{cases} \quad (3.24)$$

Часткові розв'язки рівнянь (3.22) та (3.23) було отримано за допомогою метода варіації постійних (тільки цей метод дав розв'язки у формі, яка дозволила проводити чисельні дослідження).

Загальні розв'язки для температурного поля та механічних потенціалів мають вигляд:

$$\theta_n^L = C_{1n}^L \cdot RM_{11n}^L + C_{2n}^L \cdot RM_{12n}^L + \frac{A_2 f^L b_n}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 RS_{1in}^L \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \theta_n^L}{\partial z} = C_{1n}^L \cdot RM_{21n}^L + C_{2n}^L \cdot RM_{22n}^L + \frac{A_2 f^L b_n}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 RS_{2in}^L \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
\text{де } RM_{11n}^L &= \frac{\exp\left(-z\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right)}{\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, & RM_{12n}^L &= \frac{\exp\left(-(h-z)\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right)}{\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, \\
RM_{21n}^L &= -\exp\left(-z\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right), & RM_{22n}^L &= \exp\left(-(h-z)\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right); \\
RS_{11n}^L &= \frac{\exp\left(-z\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, & RS_{12n}^L &= -\frac{\exp(-z)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, \\
RS_{13n}^L &= \frac{\exp(-z)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 + \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, & RS_{14n}^L &= \frac{\exp\left(-(h-z)\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} - h\right)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 + \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, \\
RS_{21n}^L &= -\frac{\exp\left(-z\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}\right)}{\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} - 1}, & RS_{22n}^L &= \frac{\exp(-z)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, \\
RS_{23n}^L &= -\frac{\exp(-z)}{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 + \sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, & & \\
RS_{24n}^L &= \frac{\exp\left(-(h-z)\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} - h\right)}{\sqrt{A_1p + \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2} + 1}.
\end{aligned}$$

$$\Phi_n^L = B_n^L \frac{e^{z\sqrt{p^2 + \left(\frac{n\pi}{x^*}\right)^2}}}{p^2} - \eta f^L \frac{A_2}{A_1} a_n \times$$

$$\times \left\{ \frac{e^{-z\sqrt{A_1 p + \left(\frac{n\pi}{x^*}\right)^2}}}{\sqrt{A_1 p + \left(\frac{n\pi}{x^*}\right)^2} \left[p + \frac{1}{A_1} \left(\frac{n\pi}{x^*}\right)^2 = \frac{1}{A_1} \right] [p^2 - A_1 p]} \right\} \quad (3.27)$$

$$\Psi_n^L = C_n^L \frac{e^{-z\sqrt{C_0^2 p^2 + \left(\frac{n\pi}{x^*}\right)^2}}}{p^2} \quad (3.28)$$

В сучасній літературі досить добре описано метод розв'язку задачі двовірного поширення пружних коливань. Тим часом питання двовірного поширення теплового поля не розглянуто. Тому зупинимось на аналізі теплових характеристик процесу ФТА перетворення.

В області оригіналів температурні характеристики приймуть вигляд (перетворення виконано з допомогою табличних значень [6]):

$$\theta_n = C_{1n} \otimes RM_{11n} + C_{2n} \otimes RM_{12n} + \frac{A_2 f b_n}{2} \otimes \sum_{i=1}^4 RS_{1in} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial z} = C_{1n} \otimes RM_{21n} + C_{2n} \otimes RM_{22n} + \frac{A_2 f b_n}{2} \otimes \sum_{i=1}^4 RS_{2in} \quad (3.30)$$

$$\text{де } RM_{11n} = \frac{\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1} - \frac{A_1 z^2}{4t}\right)}{\sqrt{A_1 \pi t}}, \quad RM_{12n} = \frac{\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1} - \frac{A_1 (h-z)^2}{4t}\right)}{\sqrt{A_1 \pi t}},$$

$$RM_{21n} = -\frac{1}{2} \left[\exp\left(-z \frac{n\pi}{R}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{A_1}{t}} - \frac{n\pi}{R} \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(z \frac{n\pi}{R}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{A_1}{t}} + \frac{n\pi}{R} \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) \right],$$

$$RM_{22n} = -\frac{1}{2} \left[\exp\left(-[h-z]\frac{n\pi}{R}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{h-z}{2}\sqrt{\frac{A_1}{t}} - \frac{n\pi}{R}\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left([h-z]\frac{n\pi}{R}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{h-z}{2}\sqrt{\frac{A_1}{t}} + \frac{n\pi}{R}\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) \right];$$

$$RS_{11n} = \frac{1}{A_1} \exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{A_1}{t}} - \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right),$$

$$RS_{12n} = -\exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right),$$

$$RS_{13n} = \exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right),$$

$$RS_{14n} = \frac{1}{A_1} \exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{h-z}{2}\sqrt{\frac{A_1}{t}} + \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right),$$

$$RS_{21n} = -\frac{\exp\left(\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right)}{\sqrt{A_1}} \left[\frac{\exp\left(-\frac{z^2 A_1}{4t}\right)}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\exp\left(-z + \frac{t}{A_1}\right)}{\sqrt{A_1}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{A_1}{t}} - \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) \right],$$

$$RS_{22n} = \exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right),$$

$$\begin{aligned}
RS_{23n} &= -\exp\left(-z + \frac{t}{A_1} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{A_1}}\right), \\
RS_{41n} &= \frac{\exp\left(\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \frac{t}{A_1} - h\right)}{\sqrt{A_1}} \times \\
&\times \left[\frac{\exp\left(-\frac{[h-z]^2 A_1}{4t}\right)}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\exp\left([h-z] + \frac{t}{A_1}\right)}{\sqrt{A_1}} \operatorname{erfc}\left(\frac{[h-z]}{2} \sqrt{\frac{A_1}{t}} + \sqrt{\frac{t}{A_1}}\right) \right].
\end{aligned}$$

Розв'язок з використанням рядів Фур'є є досить простим для чисельного дослідження, але має певні недоліки в порівнянні із інтегральним перетворенням. Таким чином дуже важливо вірно обирати кількість членів розкладення в ряд, аби результати чисельних обчислень наближалися до результатів отриманих за допомогою інтегрально перетворення.

3.1.2.3 Чисельні результати та їх дослідження Розрахункові результати були отримані для шару з кремнію (Si; $\alpha = 2,33 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\kappa = 156$ Вт/м, $\beta = 1,2 \cdot 10^6$ м $^{-1}$, $\chi = 8,8 \cdot 10^{-5}$ град/с, $v = 8,43 \cdot 10^3$ м/с, $E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0,27$) [8]. Інтенсивність лазерного потоку приймалась $I_0 = 10^2$ Вт, функція зміни амплітуди інтенсивності лазерного променя змінюється за законом $f(\tilde{t}) = H(\tilde{t}) - H(\tilde{t} - \tilde{t}_0)$. На наведеному нижче графіку результати чисельного моделювання для інтегрального перетворення Фур'є (суцільна крива) та розкладення в ряди Фур'є (пунктирна крива) для умови $\tilde{x} = 0$, $\tilde{z} = 1$.

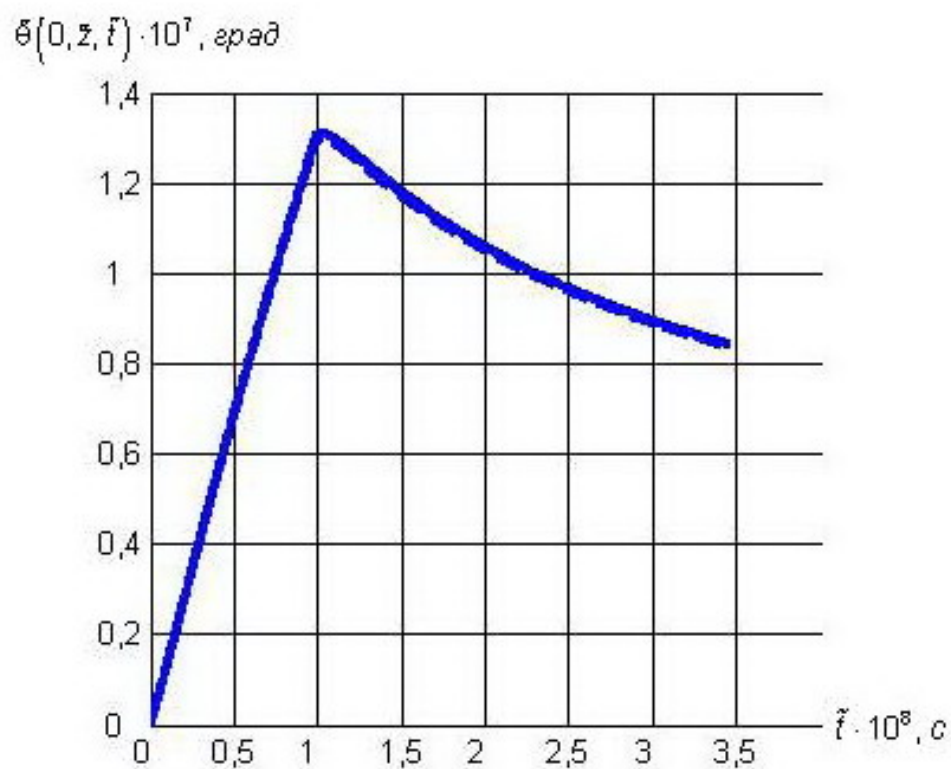


рис. 3.2

Значення L_1 обиралися з умови, щоб в заданому інтервалі часу $\tilde{t} \in (0; T]$ рівень температури в точках $\tilde{x} = \pm L_1$ не перевищував $10^{-6} \cdot \tilde{\theta}(0, \tilde{z}, \tilde{t})$. При цьому відмінність величин $\tilde{\theta}$ розрахованих за допомогою інтегрального перетворення Фур'є та розкладення в ряд Фур'є, в області $\tilde{x} \in [-L_1; L_1]$, складає менше 0,01%.

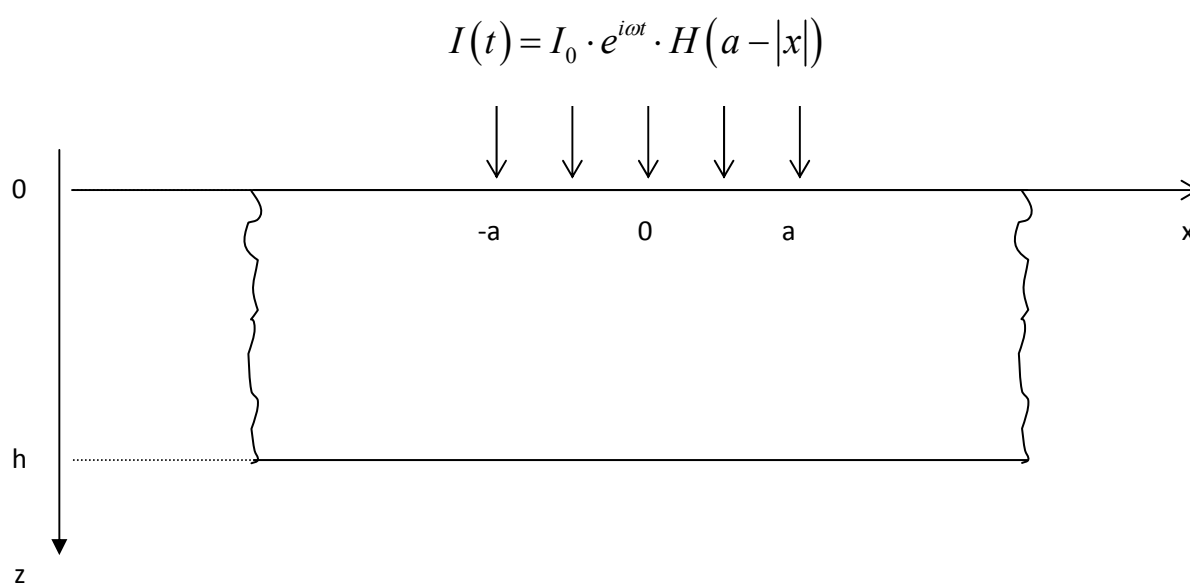
3.2. СТАЦІОНАРНЕ ЗБУДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПРУЖНОГО ШАРУ

3.2.1. Математична постановка задачі

В даному розділі була вирішена двовимірна задача генерації акустичних хвиль, за допомогою лазерного випромінювання. В якості об'єкту досліджу виступає пружний шар. Розглянемо об'єкт досліджу більш докладно.

Лазерне випромінювання, поглинаючись в шарі, викликає його неоднорідне теплове розширення. Це теплове розширення речовини, в свою чергу, викликає збудження в середовищі акустичної хвилі. Падіння лазерного потоку вважалось нормальним до границі розподілу повітря – шар. Випромінювання було модульоване по інтенсивності. Функція амплітудної модуляції може мати будь який вигляд.

Для подальшого аналізу та розрахунків прийнята наступна модель — об'єкт має вигляд нескінченного в повздожніх напрямках пружного шару, на який діє плоский потік лазерного випромінювання, обмежений по повздожній координаті, з амплітудною модуляцією, яка описується функцією $f(t) = e^{i\omega t}$.



мал. 3.3

Лазерне випромінювання викликає прогрівання шару з заданим законом розподілу густини теплових джерел. При цьому виникає термооптична генерація звукових хвиль. Під впливом лазера в шарі розповсюджуватися поздовжні хвилі, в напрямку вісі Oz . Коли акустична хвиля добігає границі шару, частина її енергії відбивається — отже рішення запропонованої задачі, повинно враховувати пружні хвилі, які йдуть в напрямку вісі Oz та хвилі з протилежним напрямком розповсюдження.

Вважається що при описі процесів, які протікають в пружному шарі, виправдано використання рівнянь теорії незв'язаної термопружності. 9]

Підсумовуючи усе раніш сказане запишемо математичні рівняння, які описують процеси в шарі, а також крайові умови для кожної з границь процесу. При зроблених допущеннях вихідна система включає в себе рівняння незв'язаної теплопровідності та рівняння руху пружного шару:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = -\frac{\beta e^{-\beta z + i\omega t}}{2\kappa} I_0 H(a - |x|) \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{zz}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_z(x, z, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x(x, z, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, z, t) = C^T \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} - \alpha B^* \theta(x, z, t) \\ \sigma_{zx}(x, z, t) = \mu \left(\frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial z} \right) \\ \sigma_{xx}(x, z, t) = C^T \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} - \alpha B^* \theta(x, z, t) \end{cases} \quad (3.33)$$

В приведених диференціальних рівняннях прийняті наступні позначення: $\theta(x, z, t)$ — різниця між температурою речовини в збудженому стані та температурою в стані спокою; χ , κ , β — коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та оптичного поглинання, відповідно; $u(x, z, t)$ — виникаючи в

шарі переміщення (індекси z та x позначає переміщення вздовж відповідних вісей); $\sigma(x, z, t)$ – виникаючи в шарі механічні напруження (індекси z та x позначає переміщення вздовж відповідних вісей); $v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – швидкість розповсюдження пружних поздовжніх хвиль (λ та μ – коефіцієнти Ламе, ρ – густина шару); α – коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу; $\eta = \frac{B^*}{C^T}$, $B^* = 3\lambda + 2\mu$, $C^T = \lambda + 2\mu$.

Крайові умови можуть мати різноманітні комбінації з наступних умов: на границі $z = 0$:

$$\theta(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad (3.34)$$

$$\kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (3.35)$$

$$u_z(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad (3.36)$$

$$\sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=0} = 0 \text{ та } \sigma_{zx}(x, z, t)|_{z=0}; \quad (3.37)$$

на границі $z = h$:

$$\theta(x, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (3.38)$$

$$\kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (3.39)$$

$$u_z(x, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=h} = 0 \text{ та } \sigma_{zx}(x, z, t)|_{z=h}. \quad (3.41)$$

Для аналізу стаціонарного процесу, були вибрані наступні крайові умови (3.35), (3.37), (3.39) та (3.41). Вище наведені рівняння повністю описують процеси, які протікають в шарі.

3.2.2. Розв'язок стаціонарної задачі

Процес розв'язку задачі стаціонарного термооптичного збудження пружного шару, було поділено на декілька етапів. Було введені потенціали переміщень:

$$u_z(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial x}, \quad u_x(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z}.$$

3.2.2.1. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду Задля спрощення розрахунків та отримання більш уніфікованих розв'язків, було вирішено записати вирази, які описують нестационарний процес, крайові та початкові умови в безрозмірному вигляді. Це було зроблено за наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\beta, \quad \tilde{z} = z\beta, \quad \tilde{h} = h\beta, \quad \tilde{a} = a\beta, \quad \tilde{R} = R\beta, \quad \tilde{t} = t\beta, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{v\beta} \\ \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \theta(x, z, t)\alpha, \quad \tilde{u}_x(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = u_x(x, z, t)\beta, \quad \tilde{u}_z(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = u_z(x, z, t)\beta \\ \tilde{\sigma}_{xx}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \sigma_{xx}(x, z, t) / C^T, \quad \tilde{\sigma}_{xz}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \sigma_{xz}(x, z, t) / C^T \\ \tilde{\sigma}_{zz}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \sigma_{zz}(x, z, t) / C^T\end{aligned}\quad (3.42)$$

Після перетворення отримаємо наступні диференціальні рівняння (символ $\sim$ надалі опущено, а також опустимо позначення (x, z, t) та (t)):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - A_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = A_2 e^{-z+i\omega t} H(a - |x|) \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \eta \theta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \eta \theta \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

де $A_1 = \frac{v}{\chi\beta}$, $A_2 = -\frac{\alpha I_0}{2\kappa\beta}$. Позначимо швидкість зсувної хвилі як $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Передбачаючи, що характеристики динамічного процесу змінюються в часі по гармонійному закону, а також враховуючи те, що лазерне випромінювання генерує в середовищі пружні хвилі з частотою рівною частоті амплітудної модуляції випромінювання, будемо шукати рішення в вигляді:

$$\begin{aligned}\theta(x, z, t) &= \Theta(x, z) \cdot e^{i\omega t}; \\ \Phi(x, z, t) &= \hat{\Phi}(x, z) \cdot e^{i\omega t}, \quad \Psi(x, z, t) = \hat{\Psi}(x, z) \cdot e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.45)$$

Тоді отримаємо (позначку над механічними потенціалами опустимо):

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - A_1 i \omega \Theta = A_2 e^{-z} H(a - |x|) \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \Phi - \eta \Theta \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega^2 \Psi \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \Phi - \eta \Theta \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{C^T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega^2 \Psi \right] = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Щоб виконувались рівності системи (3.47), необхідно щоб було справедлива система:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \Phi - \eta \Theta = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + C_0^2 \omega^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\text{де } C_0^2 = \frac{C^T}{\mu}.$$

3.2.2.2. Перетворення Фур'є по координаті x , отримання загальних розв'язків Як бачимо, диференційні рівняння (3.46) та (3.48) залежать від двох просторових координат x та z . Для розв'язку цих рівнянь застосуємо косинус

(для Ψ — синус) розкладення у ряд Фур'є: $D(x, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z, p) \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$.

Таким чином функції будуть перетворені до наступного вигляду:

$$H(a - |x|) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right), \quad \text{де } b_0 = \frac{a}{R}, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{R}; \quad \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right),$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \quad \text{та} \quad \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$$

В результаті отримаємо наступні диференційні рівняння:

$$\frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right] \Theta_n = A_2 e^{-z} b_n \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - \omega^2 \right] \Phi_n = \eta \Theta_n \\ \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - C_0^2 \omega^2 \right] \Psi_n = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

А вираз для механічних напружень в шарі приймуть вигляд (з урахуванням (3.50)):

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{C^T} \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \Phi_n + \frac{2\mu}{C^T} \frac{n\pi}{R} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} - \eta \Theta_n \\ \sigma_{zx} = -\frac{\mu}{C^T} \left[\frac{2n\pi}{R} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} + \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \Psi_n \right] \\ \sigma_{xx} = \frac{\lambda}{C^T} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \Phi_n - \frac{2\mu}{C^T} \frac{n\pi}{R} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} - \eta \Theta_n \end{cases} \quad (3.51)$$

Часткові розв'язки рівнянь (3.49) та (3.50) було отримано за допомогою метода варіації постійних (тільки цей метод дав розв'язки у формі, яка дозволила проводити чисельні дослідження).

Загальні розв'язки для температурного поля мають вигляд:

$$\Theta_n = B_n^1 \frac{e^{-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + B_n^2 \frac{e^{-(h\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{A_2 b_n e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \Theta_n}{\partial z} = -B_n^1 e^{-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + B_n^2 e^{-(h\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} - \frac{A_2 b_n e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \quad (3.53)$$

З урахуванням (3.35) та (3.39) отримаємо, що постійні інтегрування

дорівнюють:

$$B_n^1 = \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \frac{e^{-h \left(1 + \beta \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1} \right)} - 1}{1 - e^{-2h\beta \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}}} \quad \text{та}$$

$$B_n^2 = \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \frac{e^{-h} - e^{-h\beta \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}}}{1 - e^{-2h\beta \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}}}.$$

Загальні розв'язки для механічних потенціалів мають вигляд:

$$\Phi_n = \frac{\eta}{(\omega^2 - i\omega A_1)} \left(\frac{B_n^1 e^{-z \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{B_n^2 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}} \right) +$$

$$+ B_n^3 \frac{e^{-z \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}} + B_n^4 \frac{e^{-(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}} - \quad (3.54)$$

$$- \eta \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \frac{e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - \omega^2 \right]}$$

$$\Psi_n = B_n^5 \frac{e^{-z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}} + B_n^6 \frac{e^{-(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2}} \quad (3.55)$$

В результаті отримаємо наступні вирази для механічних переміщень та напружень:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& u_{zn} = \frac{\eta}{\left(\omega^2 - i\omega A_1\right)} \left(-B_n^1 e^{-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + B_n^2 e^{-(h\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \right) - \\
& - B_n^3 e^{-z\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^4 e^{-(h\beta - z)\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + \\
& + \eta \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right]} \frac{e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \omega^2\right]} + \\
& + \left(\frac{n\pi}{R}\right) B_n^5 \frac{e^{-z\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + \left(\frac{n\pi}{R}\right) B_n^6 \frac{e^{-(h\beta - z)\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}, \\
& u_{xn} = -\left(\frac{n\pi}{R}\right) \frac{\eta}{\left(\omega^2 - i\omega A_1\right)} \left(\frac{B_n^1 e^{-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{B_n^2 e^{-(h\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \right) - \\
& - \left(\frac{n\pi}{R}\right) B_n^3 \frac{e^{-z\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} - \left(\frac{n\pi}{R}\right) B_n^4 \frac{e^{-(h\beta - z)\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + \\
& + \left(\frac{n\pi}{R}\right) \eta \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right]} \frac{e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \omega^2\right]} + \\
& + B_n^5 e^{-z\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} - B_n^6 e^{-(h\beta - z)\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}};
\end{aligned} \right.
\end{aligned}
\tag{3.56}$$

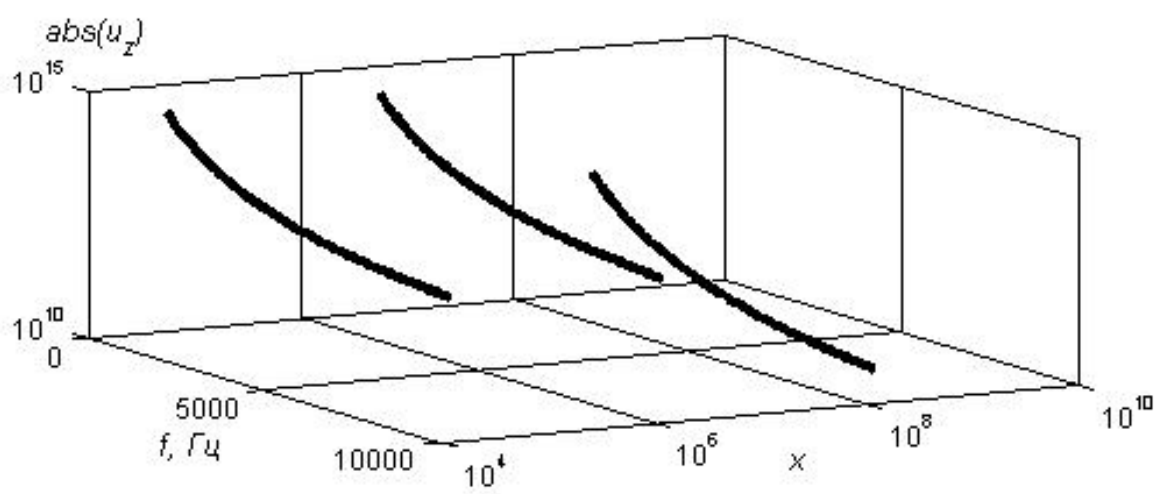
$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = & \eta \frac{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda}{C^T}\right) - \omega^2}{\left(\omega^2 - i\omega A_1\right) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \left(B_n^1 e^{-z \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + B_n^2 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \right) + \\
& + \frac{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{C^T}\right)}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} \left(B_n^3 e^{-z \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^4 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} \right) + \\
& + \frac{2\mu}{C^T} \frac{n\pi}{R} \left(-B_n^5 e^{-z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^6 e^{-(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} \right) - \\
& - \frac{\eta A_2 b_n e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right]} \left(\frac{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{C^T}\right) + 2}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \omega^2\right]} \right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zx} = & -\frac{\mu}{C^T} \frac{2n\pi}{R} \frac{\eta}{\left(\omega^2 - i\omega A_1\right)} \left(-B_n^1 e^{-z \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + B_n^2 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \right) - \\
& - \frac{\mu}{C^T} \frac{2n\pi}{R} \left(-B_n^3 e^{-z \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^4 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} \right) - \\
& - \frac{\mu}{C^T} B_n^5 \frac{C_0^2 \omega^2 e^{-z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} - \frac{\mu}{C^T} B_n^6 \frac{C_0^2 \omega^2 e^{-(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} - \\
& - \eta \frac{\mu}{C^T} \frac{2n\pi}{R} \frac{A_2 b_n}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right]} \frac{e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \omega^2\right]}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

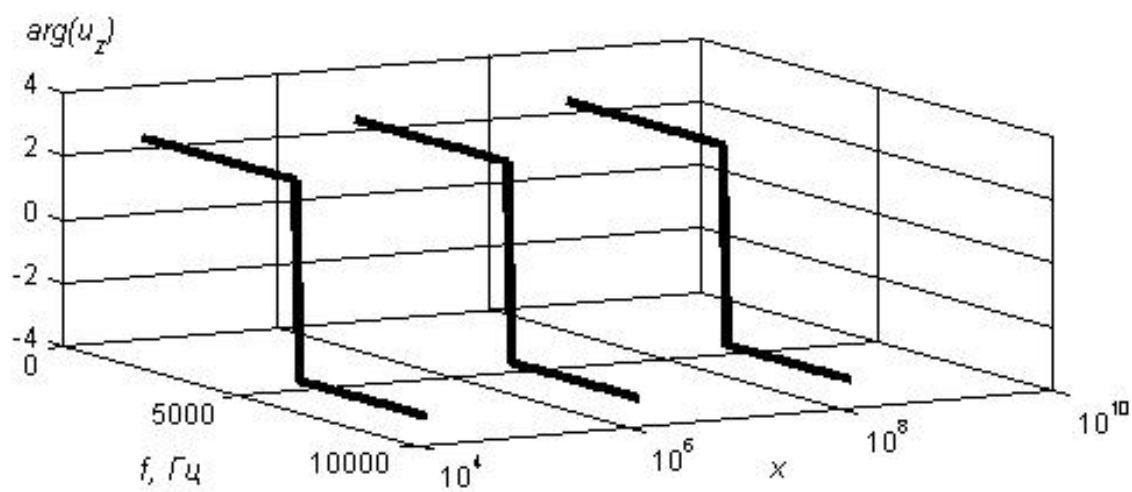
$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & \eta \frac{\left[\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - i\omega_4 \right] \left(\frac{\lambda}{C^T} - 1 \right) - \omega^2 \left(B_n^1 e^{-z \sqrt{\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - i\omega_4}} + B_n^2 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - i\omega_4}} \right)}{\left(\omega^2 - i\omega_4 \right) \sqrt{\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - i\omega_4}} + \\
& + \frac{\frac{\lambda}{C^T} \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{C^T} + 1 \right)}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2}} \left(B_n^3 e^{-z \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2}} + B_n^4 e^{-(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2}} \right) - \\
& - \frac{2\mu}{C^T} \frac{m\pi}{R} \left(-B_n^5 e^{-z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2}} + B_n^6 e^{-(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2}} \right) - \\
& - \frac{\eta_2 b_n e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - i\omega_4 \right]} \left(\frac{\omega^2 - 2 \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{C^T} + 1 \right)}{1 - \left[\left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 - \omega^2 \right]} \right) \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Підставляючи (3.57) – (3.59) до крайових умов (3.37) та (3.41), отримаємо невідомі інтегрування B_n^3, B_n^4, B_n^5 та B_n^6 . Ці значення підставлялися до співвідношень (3.54) – (3.55) та отримувалися значення температури, теплового потоку, механічних переміщень та напруги по всій товщині шару.

3.2.2.3. Чисельні результати та їх дослідження Розрахункові результати були отримані для шару з кремнію (Si; $\alpha = 2,33 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\kappa = 156$ Вт/м, $\beta = 1,2 \cdot 10^6$ м⁻¹, $\chi = 8,8 \cdot 10^{-5}$ град/с, $v = 8,43 \cdot 10^3$ м/с, $E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0,27$) [8]. Геометричний параметр $h = 2 \cdot 10^{-4}$ м був фіксований, інтенсивність лазерного потоку приймалась $I_0 = 10^2$ Вт.



a)



б)

рис. 3.4 АЧХ (а) та ФЧХ (б) поздовжніх зміщень поверхні $z = 0$

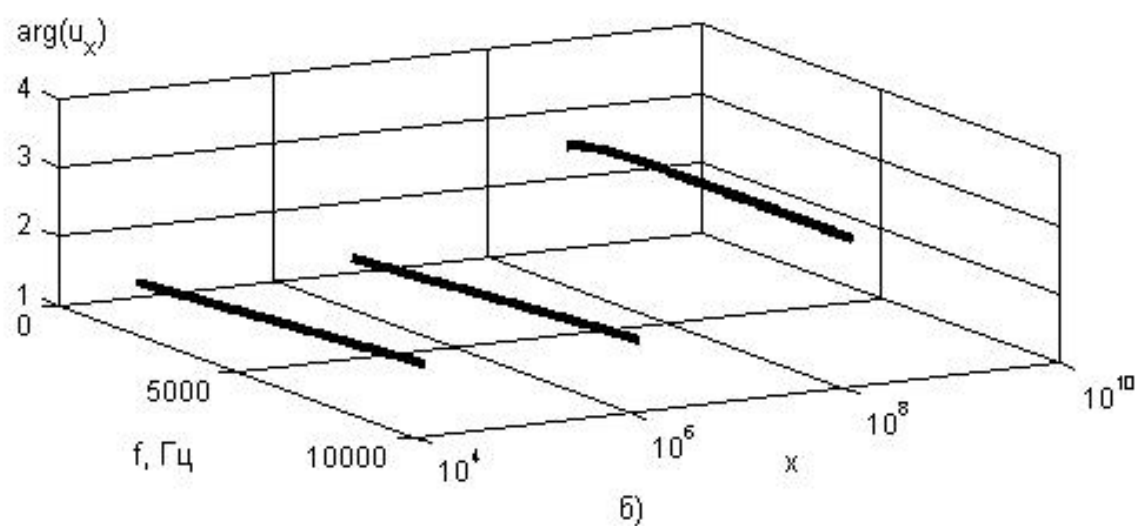
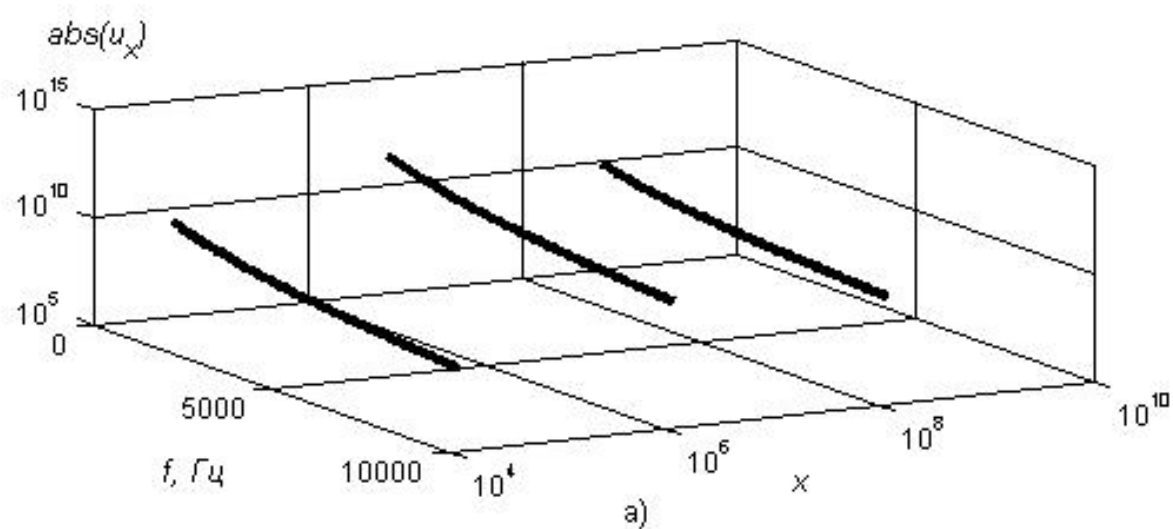


рис. 3.5 АЧХ (а) та ФЧХ (б) поперечних зміщень поверхні $z = 0$

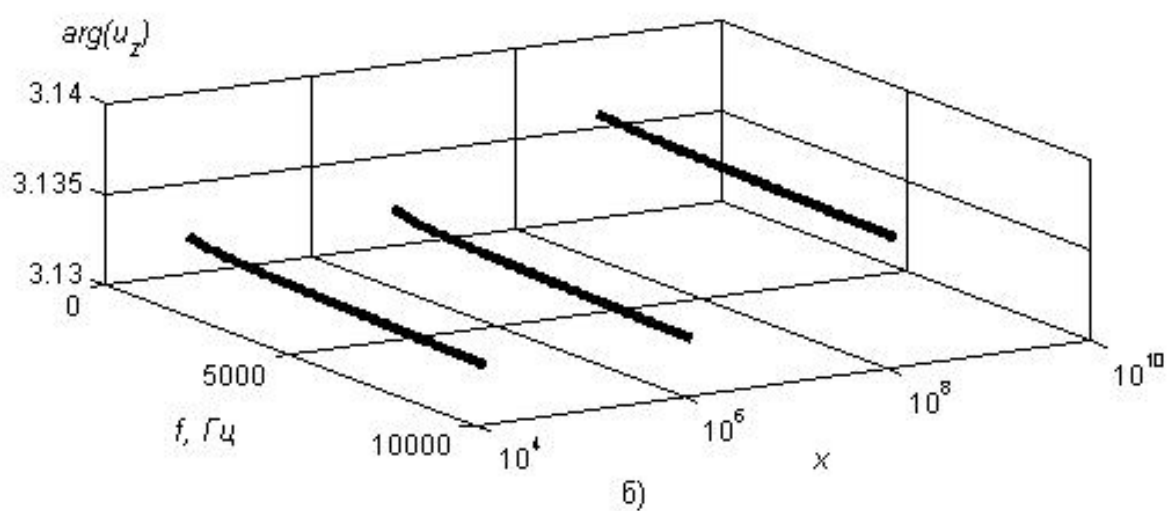
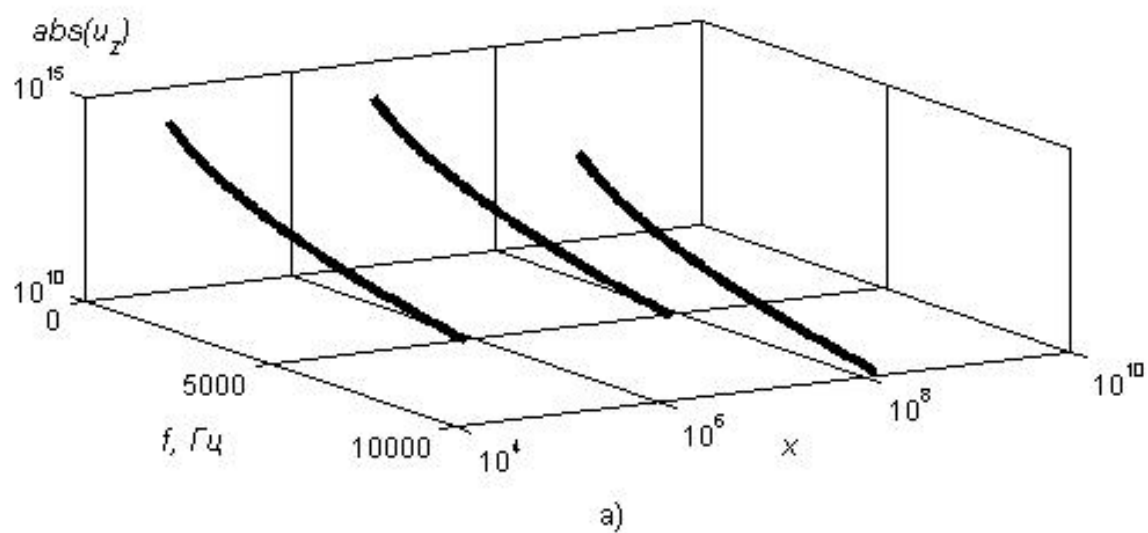


рис. 3.6 АЧХ (а) та ФЧХ (б) поздовжніх зміщень поверхні $z = h$

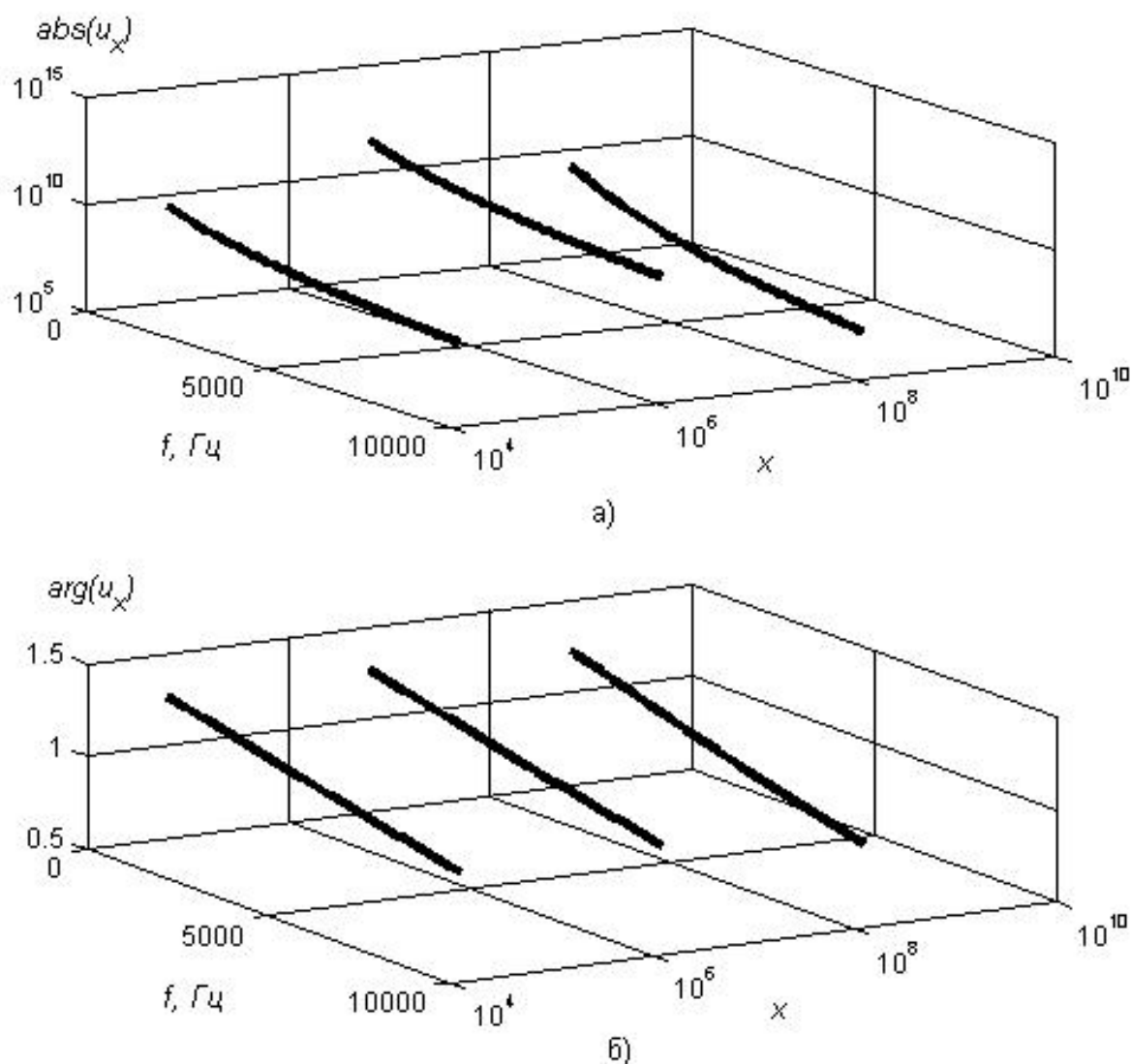


Рис. 3.7 АЧХ (а) та ФЧХ (б) поперечних зміщень поверхні $z = h$

Як видно з наведених графіків, при віддалення приймача від вісі оптичного навантаження зменшується амплітуда поздовжніх хвиль і зростає амплітуда поперечних хвиль. Це призведе до спотворення сигналу що реєструється, по відношенню до його теоретичної моделі, яка використовується при одновимірному аналізі ФТА перетворення.

ВИСНОВКИ ПО РОЗДІЛУ

В результаті проведеного дослідження була зроблена математична постановка задач двовимірного ФТА збудження пружних хвиль у шарі для випадку нестационарної та стаціонарної за часом амплітудної модуляції лазерного випромінювання.

Отримані результати для нестационарного процесу збудження дозволили зробити висновок про можливість використання розкладення в ряд Фур'є по просторовій координаті для розв'язання задач ФТА перетворення із заданої завчасно точністю. Також використання рядів Фур'є замість інтегрального розкладення Фур'є спрощує процедуру чисельного дослідження.

В результаті аналізу стаціонарного процесу збудження було доведено, що сигнал, який реєструється датчиком механічних зміщень, залежить від місця розташування цього датчика відносно вісі оптичного навантаження. Таким чином, при використанні ФТА перетворення в задачах дефектоскопії необхідно розташовувати приймальний датчик максимально близько (ідеально – по вісі) до місця прикладення оптичного навантаження.

РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОАКУСТИЧНОГО ЗБУДЖЕННЯ ЧОТИРИШАРОВОГО ПАКЕТУ

4.1. Математична постановка задачі

В даній роботі була вирішена одновимірна задача генерації акустичних хвиль за допомогою лазерного випромінювання. В якості об'єкту дослідження виступає тришаровий пакет, до якого прикріплено контролюючий елемент в вигляді ще одного шару — п'єзокерамічна пластина. Контролююча пластина призначена для реєстрації динамічних характеристик тришарового пакету при збудженні в ньому акустичних хвиль за допомогою лазерного випромінювання. Розглянемо об'єкт дослідження більш докладно.

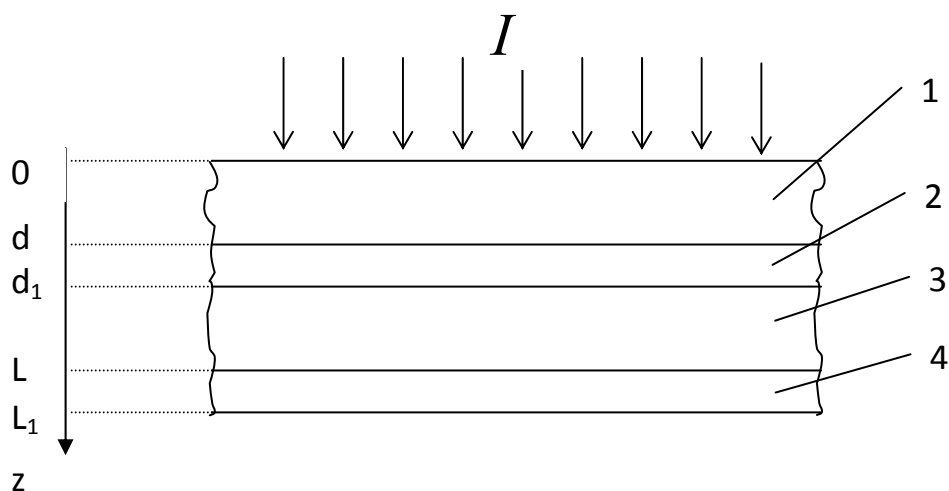


рис. 4.1

Лазерне випромінювання, поглинаючись в пакеті, викликає неоднорідне теплове розширення шарів. Це теплове розширення речовини, в свою чергу, викликає збудження в середовищі акустичних хвиль. Падіння лазерного потоку вважалось нормальним до границі розподілу повітря – пакет. Випромінювання було модульоване по інтенсивності

$$I = I_0(1 + m \cdot \cos \omega t), \quad \omega = 2\pi f,$$

де m – коефіцієнт амплітудної модуляції (дорівнює 1), f – частота амплітудної модуляції.

Для подальшого аналізу та розрахунків прийнята наступна модель — пакет має вигляд нескінченного в поздовжніх напрямках чотиришаровий пакет, який складається з трьох пружних та одного електропружного (п'єзокерамічного) елементів (вони позначені на рис. 4. цифрами 1, 2, 3 та 4, відповідно), на який діє плоский потік лазерного випромінювання з частотою амплітудної модуляції f . Коефіцієнт модуляції прирівнюється одиниці.

Лазерне випромінювання викликає прогрівання пакету з заданим законом розподілу густини теплових джерел. При цьому виникає термооптична генерація звукових хвиль з частотою рівною частоті амплітудної модуляції лазерного потоку. Під впливом лазера в пакеті починають розповсюджуватися поздовжні хвилі, в напрямку вісі Oz . Коли хвиля добігає границі між сусідніми шарами, частина її енергії проходить в наступний шар, а частина відбивається — отже рішення запропонованої задачі, повинно враховувати пружні хвилі, які йдуть в напрямку вісі Oz та хвилі з протилежним напрямком розповсюдження.

В випадку генерації акустичних хвиль в тришаровому пакеті, 1 та 3 шари контактують з повітрям, а в випадку чотиришарового — 3 шар контактує з приймачем. В першому та другому випадках передбачається що немає відтоку тепла з поверхонь зазначених шарів, а теплообмін протікає лише між шарами пакету, причому при переході тепла з одного шару в інший немає стрибків температури. Також було прийнято, що процес, який збуджується, змінюється в

часі по гармонійному закону, а при його описі виправдано використання, стосовно шарів 1 – 3, рівнянь теорії незв'язаної термопружності, а стосовно шару 4 — зв'язаної електропружності.

Аналіз достовірності отриманої від приймача інформації буде проводитися порівнянням теоретичних даних про динамічний стан тришарового пакету, а саме амплітуду коливань поверхні пакету на границі $z = L$, та теоретичними даними про амплітуду електричної напруги, яка виникає на контактах приймача (різниця потенціалів між електродам п'єзоперетворювача на поверхні $z = L$ та електродом на поверхні $z = L_1$).

Підсумовуючи усе раніш сказане запишемо математичні рівняння, які описують процеси в пакеті, а також крайові умови для кожної з границь. При зроблених допущеннях вихідна система включає в себе рівняння незв'язаної теплопровідності та рівняння руху кожного з пружних шарів ($j=1-3$ в межах всього розділу)

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial t} = -\frac{\beta_j G_j}{2\kappa_j} I_0 \exp(i\omega t - \beta_j z) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \frac{1}{v_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \eta_j \alpha_j \frac{\partial \theta_j}{\partial z} \quad (4.2)$$

а також рівняння руху та вимушеної електростатики п'єзокерамічного шару, який має поляризацію вздовж вісі Oz

$$C_{33}^E \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \rho_4 \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \cdot \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2}. \quad (4.4)$$

В приведених диференціальних рівняннях прийняті наступні позначення: θ_j – різниця між температурою речовини в збудженому стані та температурою в стані спокою; χ_j , κ_j , β_j – коефіцієнти температуропровідності,

теплопровідності та оптичного поглинання, відповідно; $G_1 = 1$, $G_2 = \exp(-[\beta_1 - \beta_2]d)$, $G_3 = \exp(-[\beta_1 - \beta_2]d - [\beta_2 - \beta_3]d_1)$ – коефіцієнти для вирівнювання температурного поля (щоб на границях не було стрибків температури); $\omega = 2\pi f$; u – виникаючи в шарі переміщення; $v_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}$ – швидкість розповсюдження пружних поздовжніх хвиль (λ_j та μ_j – коефіцієнти Ламе, ρ_j – густина шару); α_j – коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу; $\eta_j = \frac{B_j^*}{C_j^T}$, $B_j^* = 3\lambda_j + 2\mu_j$, $C_j^T = \lambda_j + 2\mu_j$, Ψ – потенціал електричного поля в п'єзоперетворювачі, C_{33}^E , e_{33} та ε_{33}^S – його пружна постійна, п'єзомодуль та діелектрична проникливість.

Рівняння механічної напруги в шарі пакету має вигляд

$$\sigma_j = C_j^T \frac{\partial u_j}{\partial z} - \alpha_j B_j^* \theta_j \quad (4.5)$$

$$\sigma_4 = C_{33}^E \frac{\partial u_4}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (4.6)$$

Крайові умови запишуться в наступному вигляді:

на границі $z = 0$

$$\kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = 0, \quad \sigma_1 = 0 \quad (4.7)$$

на границі $z = d$

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z}, \quad u_1 = u_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad (4.8)$$

на границі $z = d_1$

$$\theta_2 = \theta_3, \quad \kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \kappa_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z}, \quad u_2 = u_3, \quad \sigma_2 = \sigma_3 \quad (4.9)$$

на границі $z = L$

для тришарового пакету

$$\kappa_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0, \quad \sigma_3 = 0 \quad (4.10)$$

для чотиришарового пакету

$$\kappa_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0, \quad u_3 = u_4, \quad \sigma_3 = \sigma_4 \quad (4.11)$$

на границі $z = L_1$ (лише для чотиришарового пакету)

при жорсткому кріпленні зовнішньої поверхні перетворювача

$$u_4 = 0, \quad (4.12)$$

при вільному кріпленні зовнішньої поверхні перетворювача

$$\sigma_4 = 0. \quad (4.13)$$

Треба також задати умови для п'єзокераміки, які будуть характеризувати її електричний стан. Умова, що токопровідні покриття перетворювача розімкнуті, а поверхня $z = L_1$ заземлена, запишеться у вигляді

$$\left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|_{z=L, z=L_1} = 0, \quad \Psi|_{z=L_1} = 0. \quad (4.14)$$

Перше рівняння умови (4.14), з використанням рівнянь (1.18), (1.19) та (1.20), було використано при виведенні рівняння (4.4). Рівняння (4.6) це перетворене рівняння механічної напруги (1.19) з використанням другої умови (1.18) для одновимірної задачі. Підстановка (4.6) в рівняння (1.17) дала нам рівняння руху перетворювача (4.3).

Вище наведені рівняння повністю описують процеси які протікають в пакеті.

4.2. Вибір розв'язку, приведення задачі до розв'язуючих співвідношень.

Використовуючи рівняння вимушеної електростатики (4.4), замість (4.3) отримаємо рівняння руху п'єзоперетворювача та співвідношення для механічної напруги в перетворювачі

$$\left(C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} = \rho_4 \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} \quad (4.15)$$

$$\sigma_4 = \left(C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial u_4}{\partial z} \quad (4.16)$$

а інтегруючи (4.4) та використовуючи другу умову з (4.14) отримаємо наступну залежність, електричного потенціалу на виході перетворювача та переміщенням його поверхонь:

$$V = \Delta\Psi = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \left(u_4|_{z=L_1} - u_4|_{z=L} \right). \quad (4.17)$$

Передбачаючи, що характеристики динамічного процесу змінюються в часі по гармонійному закону, а також враховуючи те, що лазерне випромінювання генерує в середовищі пружні хвилі з частотою рівною частоті амплітудної модуляції випромінювання, будемо шукати рішення в вигляді

$$\theta(z, t) = \Theta(z) \cdot e^{i\omega t}, \quad u(z, t) = U(z) \cdot e^{i\omega t}. \quad (4.18)$$

Після підстановки (4.18) в рівняння (4.1), (4.2), (4.5), (4.15) та (4.16), а також в крайові умови (4.7) – (4.13), ми отримаємо наступні рівняння

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{\chi_j} \Theta_j = -\frac{\beta_j G_j}{2\kappa_j} I_0 \exp(-\beta_j z); \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v_j^2} U_j = \eta_j \alpha_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z}; \quad (4.20)$$

$$\sigma_j^\omega = C_j^T \frac{\partial U_j}{\partial z} - \alpha_j B_j^* \Theta_j; \quad (4.21)$$

$$\left(C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2} + \omega^2 \rho_4 U_4 = 0; \quad (4.22)$$

$$\sigma_4^\omega = \left(C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial U_4}{\partial z}, \quad (4.23)$$

крайові умови (4.7) – (4.13), з урахуванням (4.18) та (4.21), запишуться в наступному вигляді:

на границі $z = 0$

$$\kappa_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = 0, \quad \sigma_1^\omega = 0, \quad (4.24)$$

на границі $z = d$

$$\Theta_1 = \Theta_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}, \quad U_1 = U_2, \quad \sigma_1^\omega = \sigma_2^\omega, \quad (4.25)$$

на границі $z = d_1$

$$\Theta_2 = \Theta_3, \quad \kappa_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} = \kappa_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial z}, \quad U_2 = U_3, \quad \sigma_2^\omega = \sigma_3^\omega, \quad (4.26)$$

на границі $z = L$

для тришарового пакету

$$\kappa_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial z} = 0, \quad \sigma_3^\omega = 0, \quad (4.27)$$

для чотиришарового пакету

$$\kappa_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial z} = 0, \quad U_3 = U_4, \quad \sigma_3^\omega = \sigma_4^\omega, \quad (4.28)$$

на границі $z = L_1$ (лише для чотиришарового пакету)

при жорсткому кріпленні зовнішньої поверхні перетворювача

$$U_4 = 0, \quad (4.29)$$

при вільному кріпленні зовнішньої поверхні перетворювача

$$\sigma_4^\omega = 0. \quad (4.30)$$

Розв'язуючи диференціальні рівняння (4.19) отримаємо наступні розв'язки для температурного поля в тришаровому пакеті

$$\Theta_j = \left(C_{4j-3} \cdot \exp[-p_{1j}z] + C_{4j-2} \cdot \exp[p_{1j}z] \right) + S_{1j} \cdot \exp[-\beta_j z], \quad (4.31)$$

де $C_1 - C_{14}$ постійні інтегрування, $p_{1j} = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi_j}}(1+i)$, $S_{1j} = \frac{\beta_j G_j I_0}{2\kappa_j(p_{1j}^2 - \beta_j^2)}$.

Підставляючи (4.31) в рівняння (4.20) знаходимо розв'язок для переміщень пружного тришарового пакету

$$U_j = \left(-C_{4j-3} \cdot \exp[-p_{1j}z] + C_{4j-2} \cdot \exp[p_{1j}z] \right) \cdot M_{1j} + \\ + \left(C_{4j-1} \cdot \exp[-p_{2j}z] + C_{4j} \cdot \exp[p_{2j}z] \right) - \\ - S_{2j} \cdot \exp[-\beta_j z] \quad (4.32)$$

де $M_{1j} = \frac{\alpha_j \eta_j \cdot p_{1j}}{p_{1j}^2 - p_{2j}^2}$, $p_{2j} = \frac{i\omega}{v_j}$, $S_{2j} = \frac{\alpha_j \beta_j \eta_j \cdot S_{1j}}{\beta_j^2 - p_{2j}^2}$. Використовуючи отримані

результати (2.31) та (2.32) знайдемо формули які описують теплові потоки та, підставляючи (2.31) та (2.32) в (2.21), механічні напруги в шарах тришарового пружного пакету

$$\kappa_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} = \left(-C_{4j-3} \cdot \exp[-p_{1j}z] + C_{4j-2} \cdot \exp[p_{1j}z] \right) \cdot M_{2j} - \\ - S_{3j} \cdot \exp[-\beta_j z] \quad (4.33)$$

$$\sigma_j^{\omega} = \left(C_{4j-3} \cdot \exp[-p_{1j}z] + C_{4j-2} \cdot \exp[p_{1j}z] \right) \cdot M_{3j} - \\ - \left(C_{4j-1} \cdot \exp[-p_{2j}z] - C_{4j} \cdot \exp[p_{2j}z] \right) \cdot M_{4j} + \\ + S_{4j} \cdot \exp[-\beta_j z] \quad (4.34)$$

де $M_{2j} = \kappa_j \cdot p_{1j}$, $S_{3j} = \beta_j \kappa_j \cdot S_{1j}$, $M_{3j} = -\alpha_j B_j^* \frac{p_{2j}^2}{p_{2j}^2 - p_{1j}^2}$, $M_{4j} = C_j^T \cdot p_{2j}$,

$$S_{4j} = \frac{\alpha_j B_j^* p_{2j}^2}{p_{2j}^2 - \beta_j^2} \cdot S_{1j}.$$

Щодо четвертого шару (п'єзокераміка), то розв'язок рівняння (4.22) буде мати вигляд

$$U_4 = C_{13} \cdot \exp(-p_k z) + C_{14} \cdot \exp(p_k z), \quad (4.35)$$

де $p_k = i\omega \sqrt{\frac{\rho_4}{C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}}}$. Механічну напругу, яка виникає в перетворювачі, ми

знайдемо підстановкою (4.35) в (4.23)

$$\sigma_4^{\omega} = (-C_{13} \cdot \exp[-p_k z] + C_{14} \cdot \exp[p_k z]) \cdot M_k, \quad (4.36)$$

$$\text{де } M_k = \left(C_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right) \cdot p_k.$$

Для того, щоб знайти постійні інтегрування $C_1 - C_{14}$ необхідно підставити отримані співвідношення (4.31) – (4.36) в крайові умови (4.24) – (4.30). Після підстановки буде отримані наступні системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{12} A_{m n}^{[1]} \cdot C_n = B_m^{[1]}, \quad m = \overline{1, 12}; \quad (4.37)$$

$$\sum_{n=1}^{14} A_{m n}^{[2]} \cdot C_n = B_m^{[2]}, \quad m = \overline{1, 14}; \quad (4.38)$$

$$\sum_{n=1}^{14} A_{m n}^{[3]} \cdot C_n = B_m^{[3]}, \quad m = \overline{1, 14}. \quad (4.39)$$

Система (4.37) відповідає випадку тришарового пакету (немає п'єзоприймача), система (4.38) відповідає випадку чотиришарового пакету з жорстким закріпленням п'єзоперетворювача, а система (4.39) — вільному закріпленню п'єзоперетворювача.

В кожній з наведених систем було прийнято наступне позначення

$$A_{m n} = a_{m n} e^{g_{m n}},$$

причому, як видно з крайових умов, для $m = \overline{1, 11}$ та $n = \overline{1, 12}$: $A_{m n}^{[1]} = A_{m n}^{[2]} = A_{m n}^{[3]}$,

$B_m^{[1]} = B_m^{[2]} = B_m^{[3]}$; для $m = \overline{12, 13}$ та $n = \overline{1, 14}$: $A_{m n}^{[2]} = A_{m n}^{[3]}$, $B_m^{[2]} = B_m^{[3]}$. Приведемо

значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
& a_{31}^{[1-3]} = a_{32}^{[1-3]} = -a_{35}^{[1-3]} = -a_{36}^{[1-3]} = a_{53}^{[1-3]} = a_{54}^{[1-3]} = -a_{57}^{[1-3]} = -a_{58}^{[1-3]} = \\
& = a_{75}^{[1-3]} = a_{76}^{[1-3]} = -a_{79}^{[1-3]} = -a_{710}^{[1-3]} = a_{97}^{[1-3]} = a_{98}^{[1-3]} = -a_{911}^{[1-3]} = -a_{912}^{[1-3]} =, \\
& = a_{1211}^{[2-3]} = a_{1212}^{[2-3]} = -a_{1213}^{[2-3]} = -a_{1214}^{[2-3]} = a_{1413}^{[2]} = a_{1414}^{[2]} = 1 \\
& -a_{51}^{[1-3]} = a_{52}^{[1-3]} = M_{11}, -a_{11}^{[1-3]} = a_{12}^{[1-3]} = -a_{41}^{[1-3]} = a_{42}^{[1-3]} = M_{21}, \\
& a_{21}^{[1-3]} = a_{22}^{[1-3]} = a_{61}^{[1-3]} = a_{62}^{[1-3]} = M_{31}, -a_{23}^{[1-3]} = a_{24}^{[1-3]} = -a_{63}^{[1-3]} = a_{64}^{[1-3]} = M_{41}, \\
& a_{55}^{[1-3]} = -a_{56}^{[1-3]} = -a_{95}^{[1-3]} = a_{96}^{[1-3]} = M_{12}, a_{45}^{[1-3]} = -a_{46}^{[1-3]} = -a_{85}^{[1-3]} = a_{86}^{[1-3]} = M_{22}, \\
& -a_{65}^{[1-3]} = -a_{66}^{[1-3]} = a_{105}^{[1-3]} = a_{106}^{[1-3]} = M_{32}, a_{67}^{[1-3]} = -a_{68}^{[1-3]} = -a_{107}^{[1-3]} = a_{108}^{[1-3]} = M_{42}, \\
& a_{99}^{[1-3]} = -a_{910}^{[1-3]} = -a_{129}^{[2-3]} = a_{1210}^{[2-3]} = M_{13}, a_{89}^{[1-3]} = -a_{810}^{[1-3]} = -a_{119}^{[1-3]} = a_{1110}^{[1-3]} = M_{23}, \\
& -a_{109}^{[1-3]} = -a_{1010}^{[1-3]} = a_{129}^{[1]} = a_{1210}^{[1]} = a_{139}^{[2-3]} = a_{1310}^{[2-3]} = M_{33}, \\
& a_{109}^{[1-3]} = -a_{1010}^{[1-3]} = -a_{129}^{[1]} = a_{1210}^{[1]} = -a_{139}^{[2-3]} = a_{1310}^{[2-3]} = M_{43}, \\
& a_{1313}^{[2-3]} = -a_{1314}^{[2-3]} = -a_{1413}^{[3]} = a_{1414}^{[3]} = M_k,
\end{aligned}$$

всі інші коефіцієнти $\mathbf{a}_{mn}$ дорівнюють нулеві;

$$\begin{aligned}
& g_{11}^{[1-3]} = g_{12}^{[1-3]} = g_{21}^{[1-3]} = g_{22}^{[1-3]} = g_{23}^{[1-3]} = g_{24}^{[1-3]} = 0, \\
& -g_{31}^{[1-3]} = g_{32}^{[1-3]} = -g_{41}^{[1-3]} = g_{42}^{[1-3]} = -g_{51}^{[1-3]} = g_{52}^{[1-3]} = -g_{61}^{[1-3]} = g_{62}^{[1-3]} = p_{11}d, \\
& -g_{53}^{[1-3]} = g_{54}^{[1-3]} = -g_{63}^{[1-3]} = g_{64}^{[1-3]} = p_{21}d, \\
& -g_{35}^{[1-3]} = g_{36}^{[1-3]} = -g_{45}^{[1-3]} = g_{46}^{[1-3]} = -g_{55}^{[1-3]} = g_{56}^{[1-3]} = -g_{65}^{[1-3]} = g_{66}^{[1-3]} = p_{12}d, \\
& -g_{57}^{[1-3]} = g_{58}^{[1-3]} = -g_{67}^{[1-3]} = g_{68}^{[1-3]} = p_{22}d, \\
& -g_{75}^{[1-3]} = g_{76}^{[1-3]} = -g_{85}^{[1-3]} = g_{86}^{[1-3]} = -g_{95}^{[1-3]} = g_{96}^{[1-3]} = -g_{105}^{[1-3]} = g_{106}^{[1-3]} = p_{12}d_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_{97}^{[1-3]} = g_{98}^{[1-3]} = -g_{107}^{[1-3]} = g_{108}^{[1-3]} = p_{22}d_1, \\
& -g_{79}^{[1-3]} = g_{710}^{[1-3]} = -g_{89}^{[1-3]} = g_{810}^{[1-3]} = -g_{99}^{[1-3]} = g_{910}^{[1-3]} = -g_{109}^{[1-3]} = g_{1010}^{[1-3]} = p_{13}d_1, \\
& -g_{911}^{[1-3]} = g_{912}^{[1-3]} = -g_{1011}^{[1-3]} = g_{1012}^{[1-3]} = p_{23}d_1, \\
& -g_{119}^{[1-3]} = g_{1110}^{[1-3]} = -g_{129}^{[1-3]} = g_{1210}^{[1-3]} = -g_{139}^{[2-3]} = g_{1310}^{[2-3]} = p_{13}L, \\
& -g_{1211}^{[1-3]} = g_{1212}^{[1-3]} = -g_{1311}^{[2-3]} = g_{1312}^{[2-3]} = p_{23}L, \\
& -g_{1213}^{[2-3]} = g_{1214}^{[2-3]} = -g_{1313}^{[2-3]} = g_{1314}^{[2-3]} = p_kL, \quad -g_{1413}^{[2-3]} = g_{1414}^{[2-3]} = p_kL_1; \\
& B_1^{[1-3]} = S_{31}, \quad B_2^{[1-3]} = S_{41}, \quad B_3^{[1-3]} = -S_{11}e^{-\beta_1d} + S_{12}e^{-\beta_2d}, \\
& B_4^{[1-3]} = S_{31}e^{-\beta_1d} - S_{32}e^{-\beta_2d}, \quad B_5^{[1-3]} = S_{21}e^{-\beta_1d} - S_{22}e^{-\beta_2d}, \\
& B_6^{[1-3]} = S_{41}e^{-\beta_1d} - S_{42}e^{-\beta_2d}, \quad B_7^{[1-3]} = -S_{12}e^{-\beta_2d_1} + S_{13}e^{-\beta_3d_1}, \\
& B_8^{[1-3]} = S_{32}e^{-\beta_2d_1} - S_{33}e^{-\beta_3d_1}, \quad B_9^{[1-3]} = S_{22}e^{-\beta_2d_1} - S_{23}e^{-\beta_3d_1}, \\
& B_{10}^{[1-3]} = S_{42}e^{-\beta_2d_1} - S_{43}e^{-\beta_3d_1}, \quad B_{11}^{[1-3]} = S_{33}e^{-\beta_3L}, \quad B_{12}^{[1]} = S_{43}e^{-\beta_3L}, \\
& B_{12}^{[2-3]} = S_{23}e^{-\beta_3L}, \quad B_{13}^{[2-3]} = S_{43}e^{-\beta_3L}, \quad B_{14}^{[2-3]} = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язуючи системи (4.37) – (4.39), відносно невідомих $C_1 - C_{14}$, можна знайти поля температур та теплових потоків, переміщень та механічних напруг по всі товщині пакету. Крім того, що є найбільш важливим для даної задачі, є можливість розрахувати електричну напругу на виході п'єзоперетворювача та порівняти її значення з розрахунковими значеннями для переміщень поверхні $z = L$ в тришаровому пакеті.

4.3. Розрахунки та їх аналіз

Розрахункові результати були отримані для чотиришарового пакету (один з шарів п'єзокерамічний) з наступними характеристиками шарів: 1 та 3 — кремній (Si; $\alpha = 2,33 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\kappa = 156$ Вт/м, $\beta = 1,2 \cdot 10^6$ м⁻¹, $\chi = 8,8 \cdot 10^{-5}$ град/с, $\nu = 8,43 \cdot 10^3$ м/с, $E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0,27$), 2 — галій арсенід (GaAs; $\alpha = 7,44 \cdot 10^{-6}$ м/град, $\kappa = 81$ Вт/м, $\beta = 10^6$ м⁻¹, $\chi = 6,4 \cdot 10^{-5}$ град/с, $\nu = 5,15 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 0,3$, $E = 0,9 \cdot 10^{11}$ Па) [8], 4 — п'єзокераміка марки ЦТС-19 ($\rho = 7330$ кг/м³, $C_{33}^E = 1,06 \cdot 10^{11}$ Па, $e = 15,1$ Кл/м², $\epsilon_{33}^S = 8,27 \cdot 10^{-9}$ Ф/м) [18]. Геометричний параметр $L = 0,4 \cdot 10^{-3}$ м був фіксований, інтенсивність лазерного потоку приймалась $I_0 = 10^{25}$ Вт.

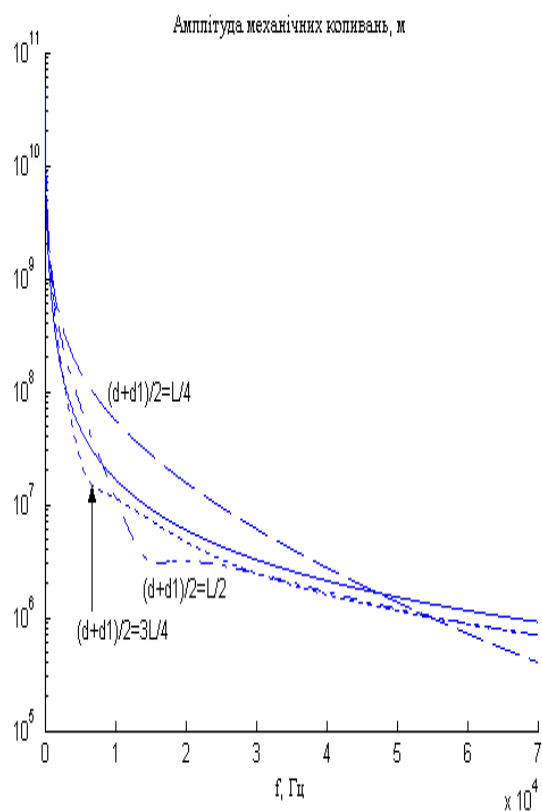


рис. 4.2

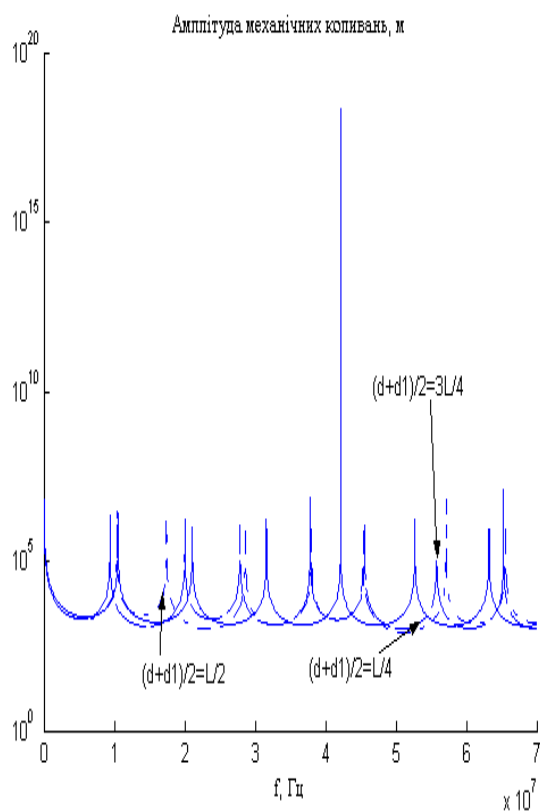


рис. 4.3

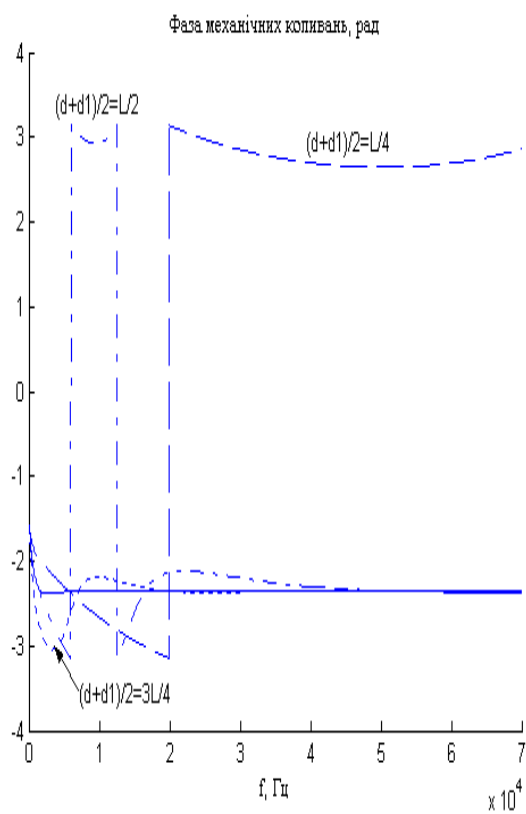


рис. 4.4

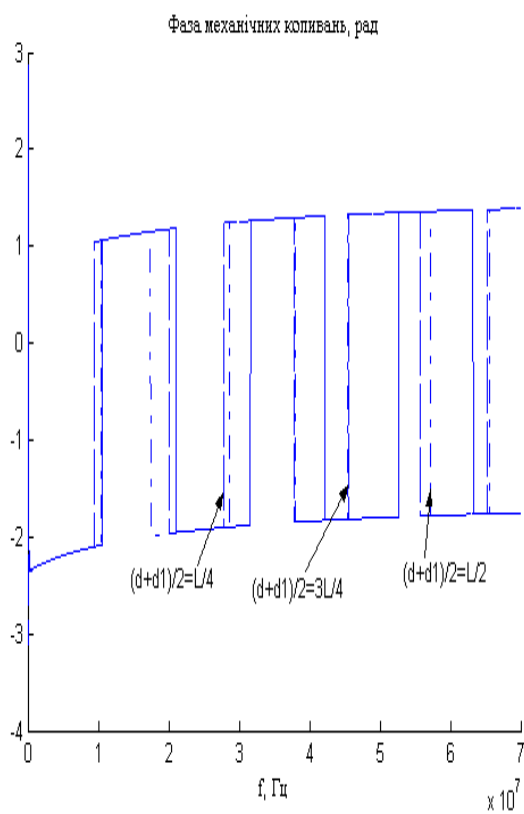


рис. 4.5

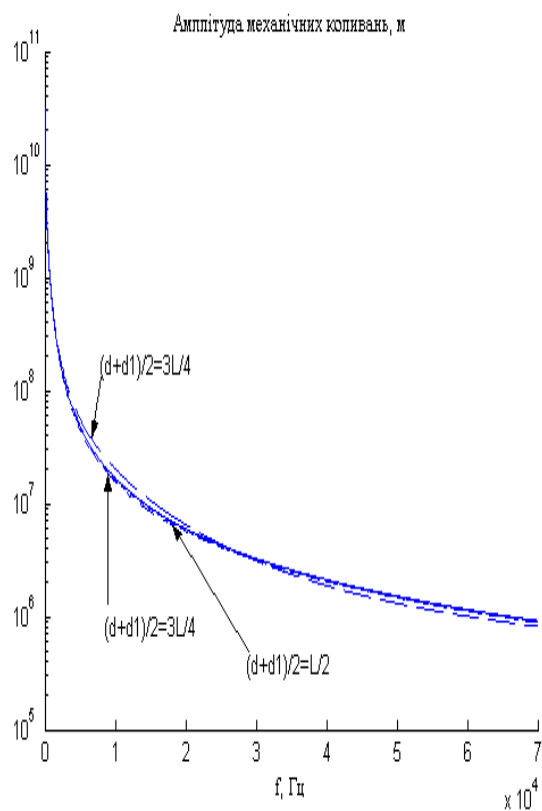


рис. 4.6

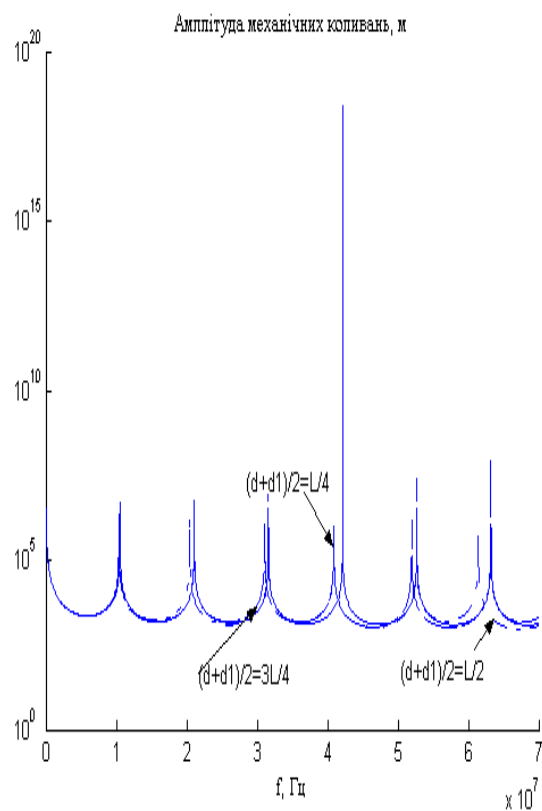


рис. 4.7

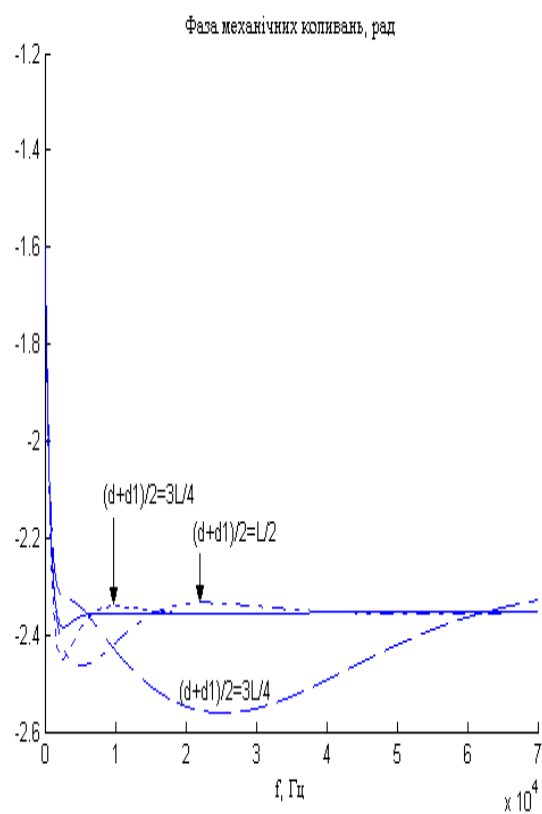


рис. 4.8

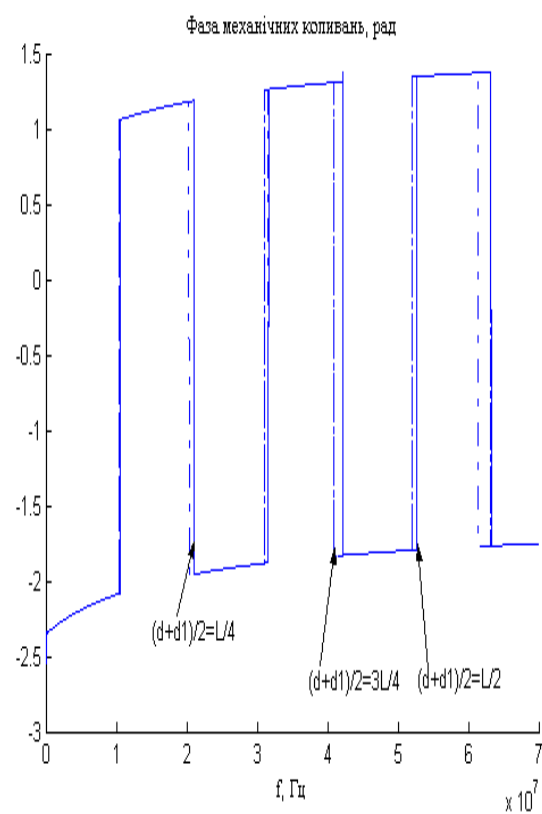


рис. 4.9

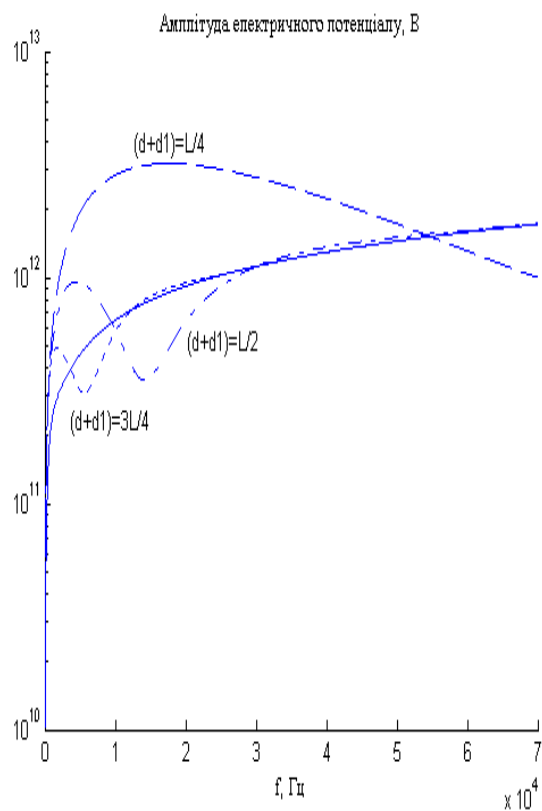


рис. 4.10

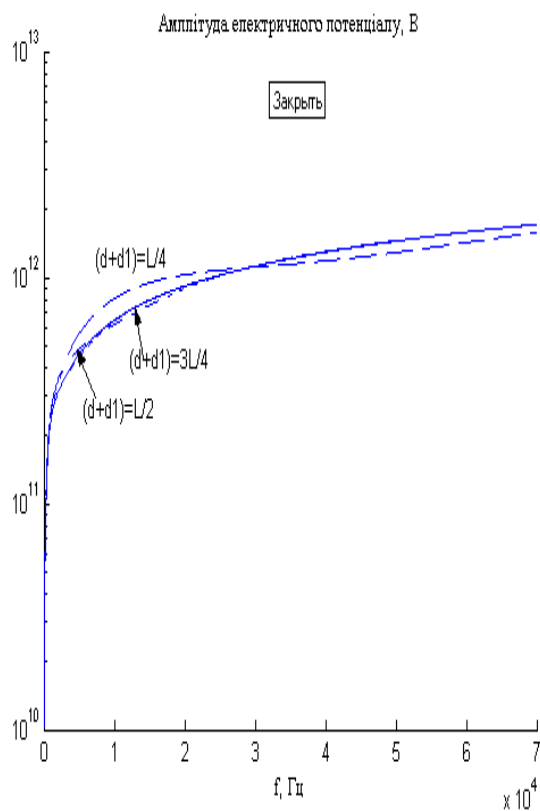


рис. 4.11

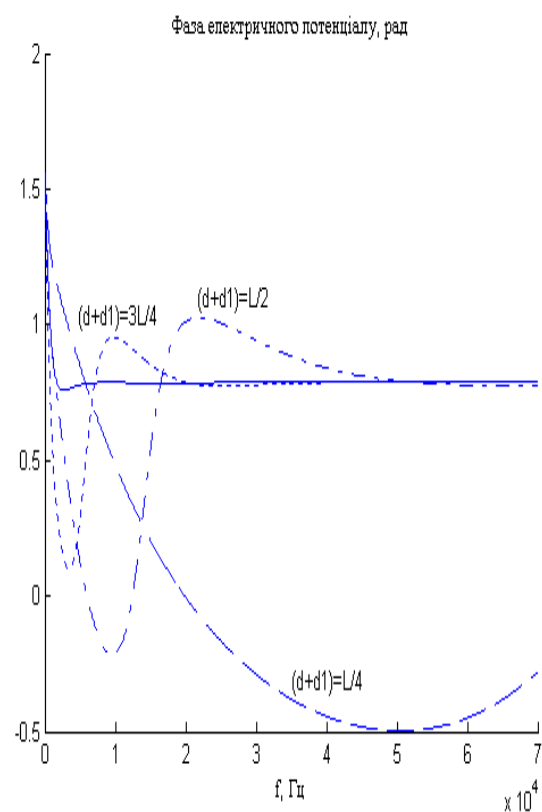


рис. 4.12

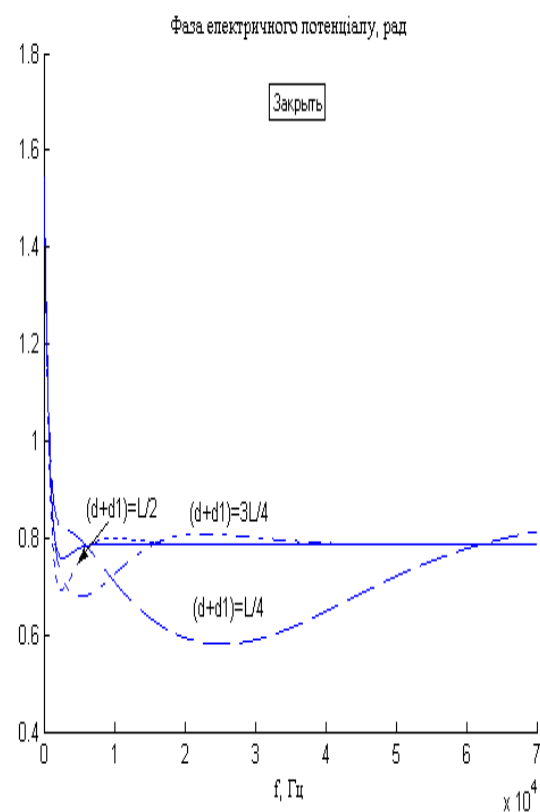


рис. 4.13

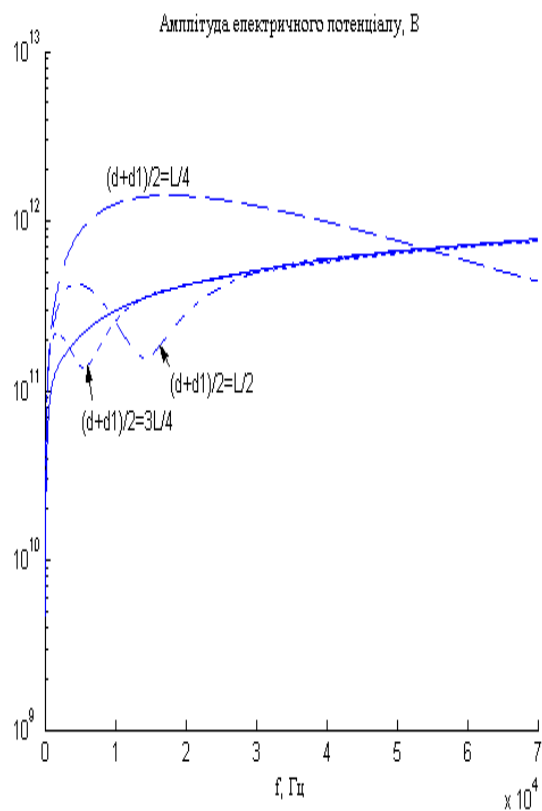


рис. 4.14

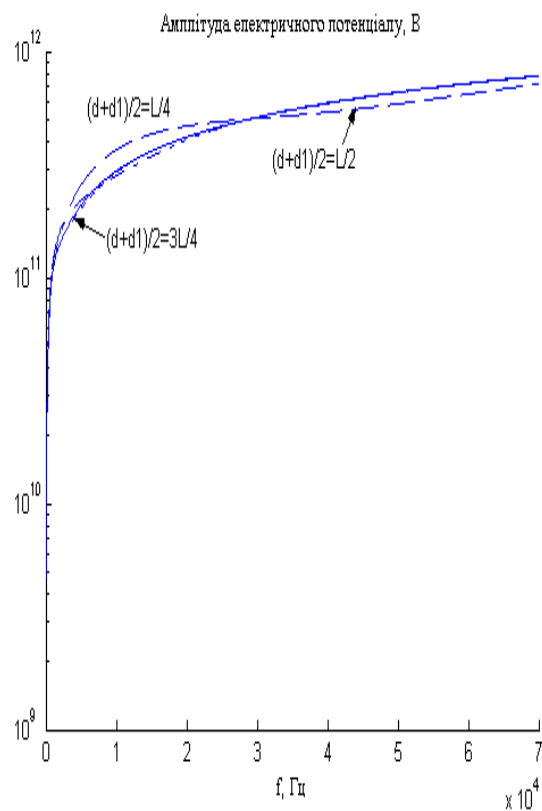


рис. 4.15

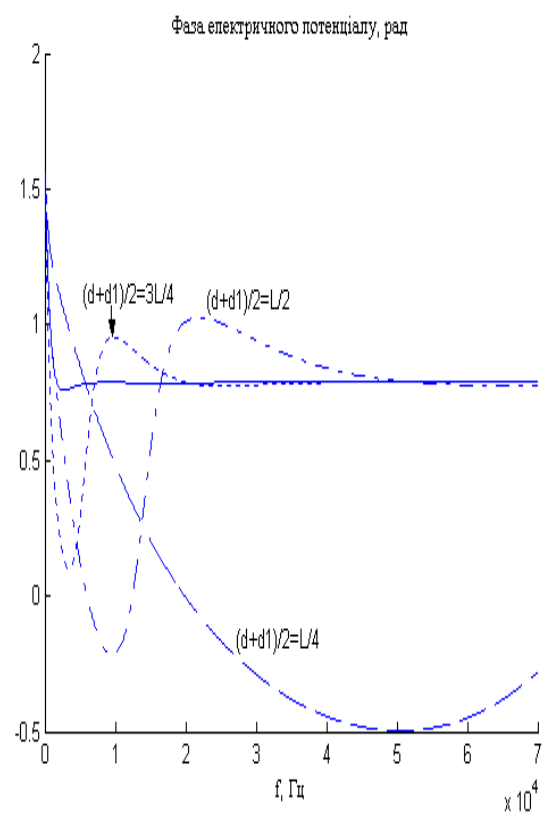


рис. 4.16

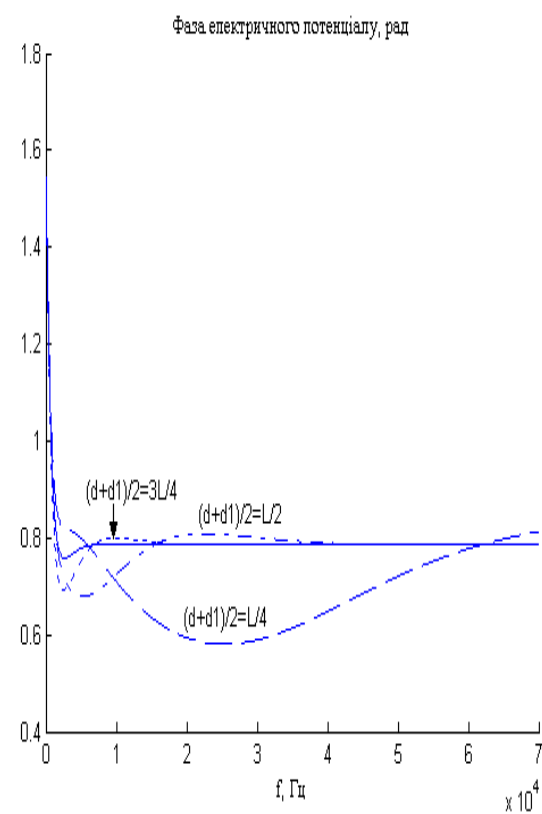


рис. 4.17

На рис. 4.2–4.3 та на рис. 4.6–4.7 представлені амплітудно-частотні характеристики (АЧХ), які отримані для дефектів (шар за номером 2 на рис. 4.1) розміром $d_1 - d = L/5$ та $d_1 - d = L/50$, відповідно, а на рис. 4.4–4.5 та рис. 4.8–4.9 — фазочастотні характеристики (ФЧХ) для цих же дефектів. Неперервна лінія відповідає випадку бездефектного зразка товщиною L , а написи над іншими лініями вказують розташування центра дефекту в тришаровому пакеті. Графіки на рис. 4.2–4.9 наведені для порівняння з отриманими в цій роботі значеннями АЧХ та ФЧХ електричного потенціалу чотиришарового пакету, для тих самих варіантів дефектів.

На рис. 4.10–4.11 представлені АЧХ, а на рис. 4.12–4.13 — ФЧХ, для вищезгаданих дефектів за умови, що товщина кераміки складає 1 мм та кераміка жорстко закріплена. На рис. 4.14–4.15 представлені АЧХ, а на рис. 4.16–4.17 — ФЧХ, за умови, що товщина кераміки складає 1 мм та кераміка вільно закріплена. Були також розраховані ЧХ для керамік товщиною 0,1 мм та 0,01 мм, але на діапазоні частот від 30 Гц до 70 кГц ці ЧХ відрізняються лише рівням амплітуди електричного сигналу, який знімається з п'єзоперетворювача, тому їх не наведено.

З наведених ЧХ бачимо, що з ростом глибини залягання дефекту рівень амплітуди електричного сигналу падає. З ростом глибини залягання дефекту зменшується частота, на який сигнал пакету з дефектом наближається до сигналу від бездефектного пакету. Що до порівняння варіантів закріплення кераміки, для даного діапазону частот, можна сказати, що використання п'єзоперетворювача з вільним закріпленням призводить до зменшення амплітуди електричного сигналу, який знімається з перетворювача, причому зменшення амплітуди, як видно з наведених графіків, складає приблизно 2,5 – 3%.

Усе вище сказане відноситься до діапазону частот від 30 Гц до 70 кГц. Розглянемо діапазон від 70 кГц до 70 МГц. Графіки будемо розташовувати за наступними умовами: товщина кераміки зменшується від 1 мм до 0,01 мм;

спочатку наводимо ЧХ для дефекту $d_1 - d = L/5$, а потім для $d_1 - d = L/50$; поряд розташовані ЧХ для жорстко та вільно закріпленої кераміки.

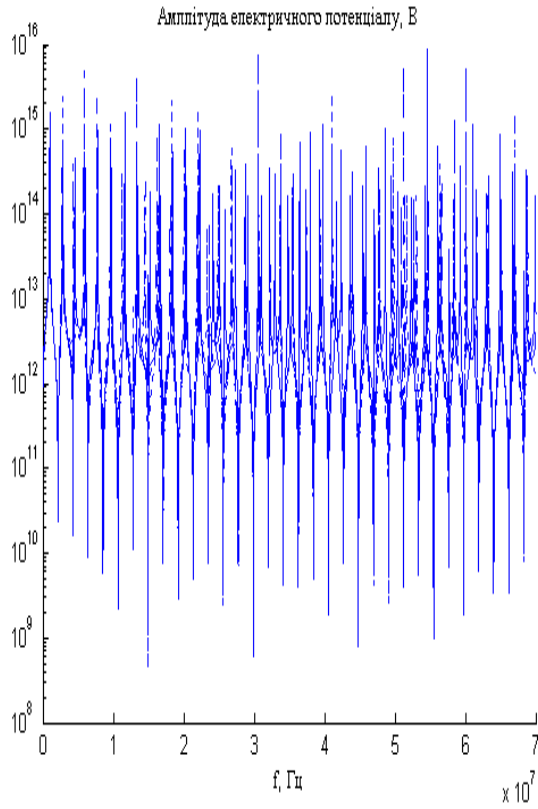


рис. 4.18

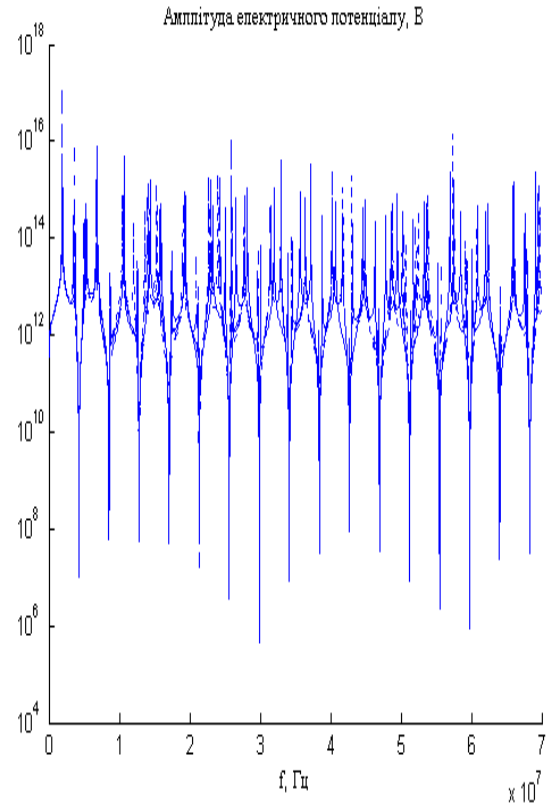


рис. 4.19

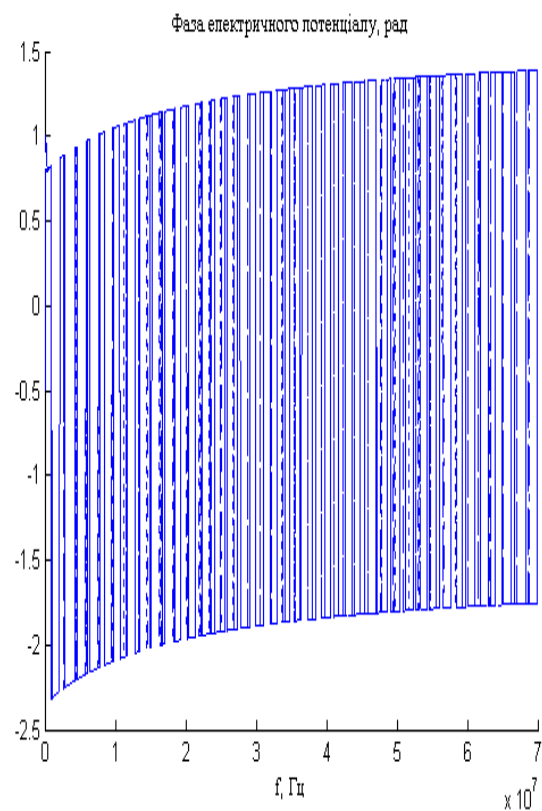


рис. 4.20

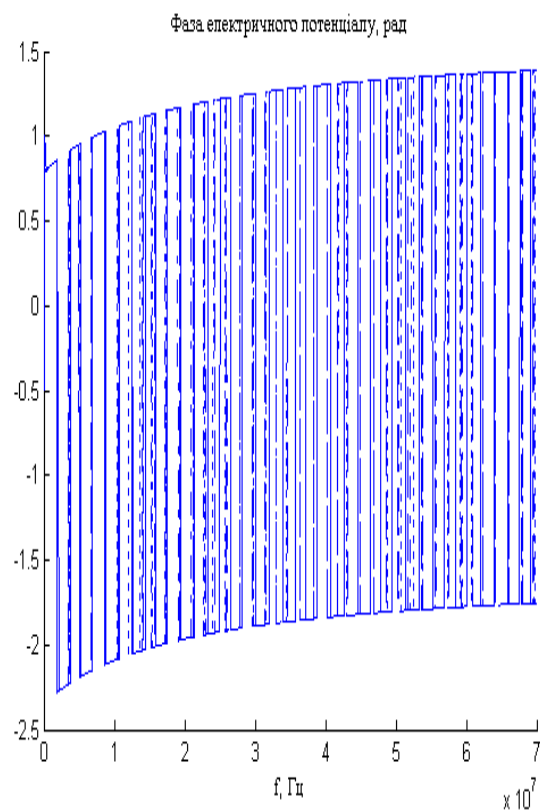


рис. 4.21

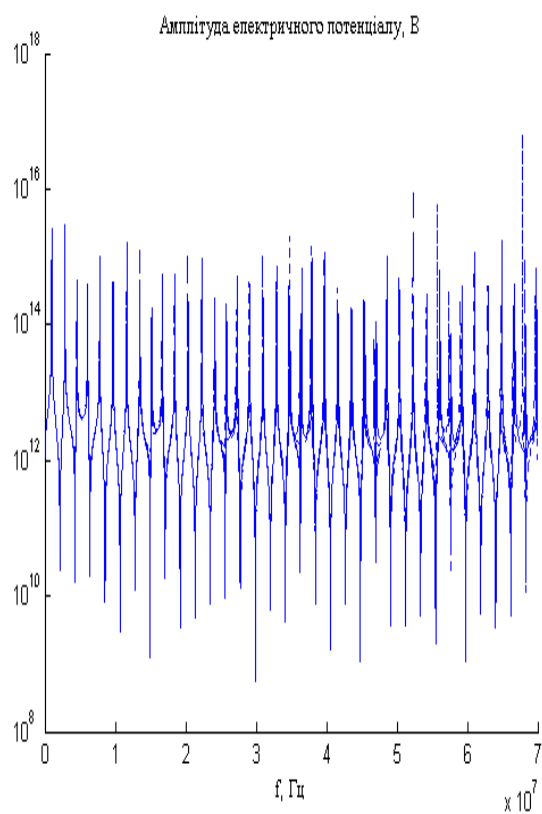


рис. 4.22

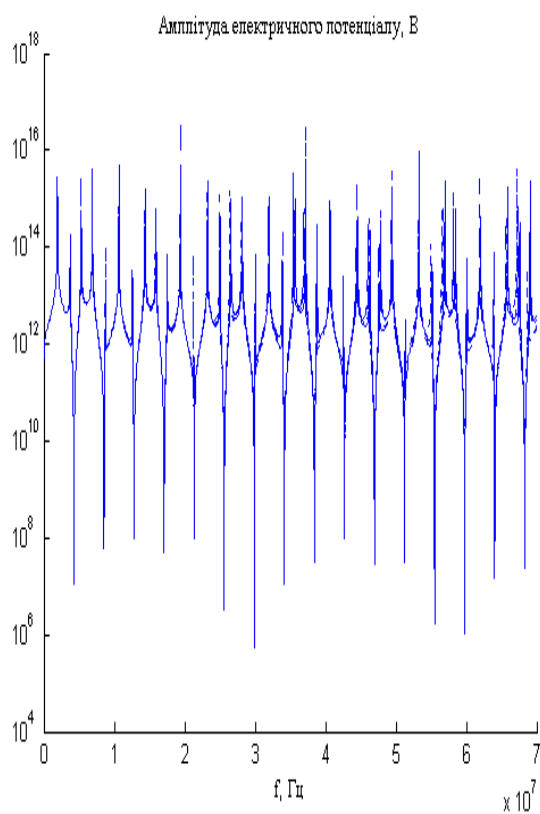


рис. 4.23

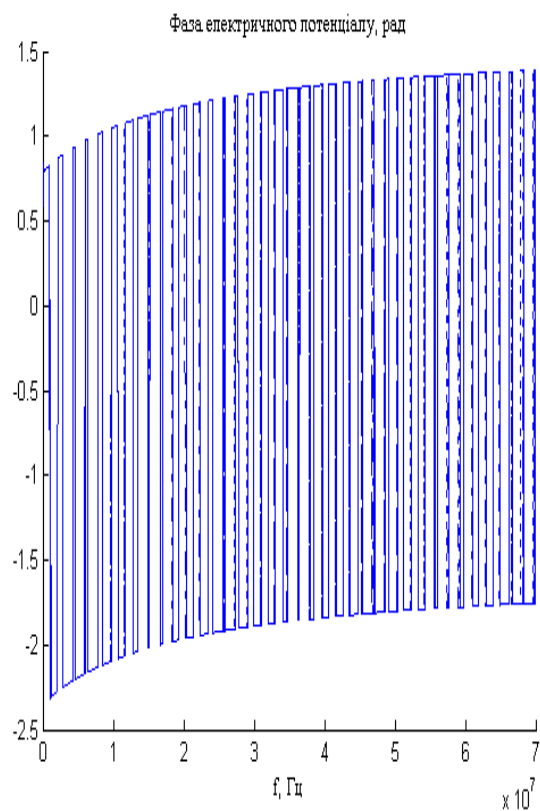


рис. 4.24

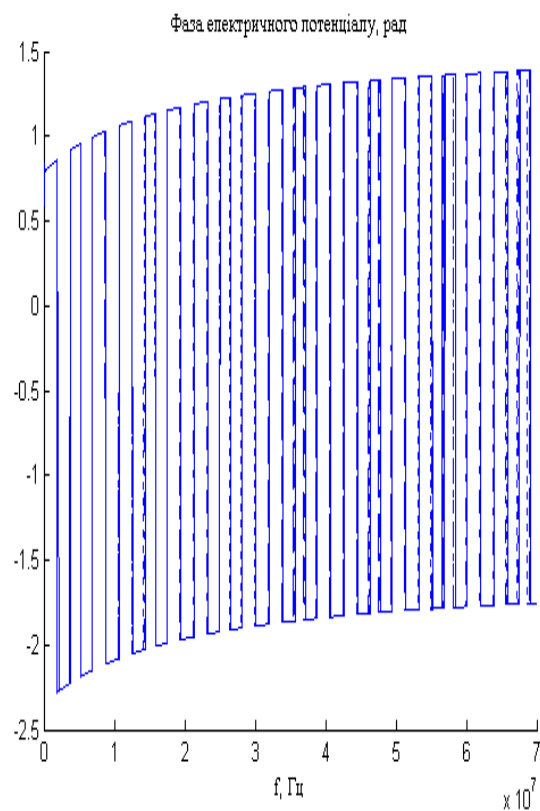


рис. 4.25

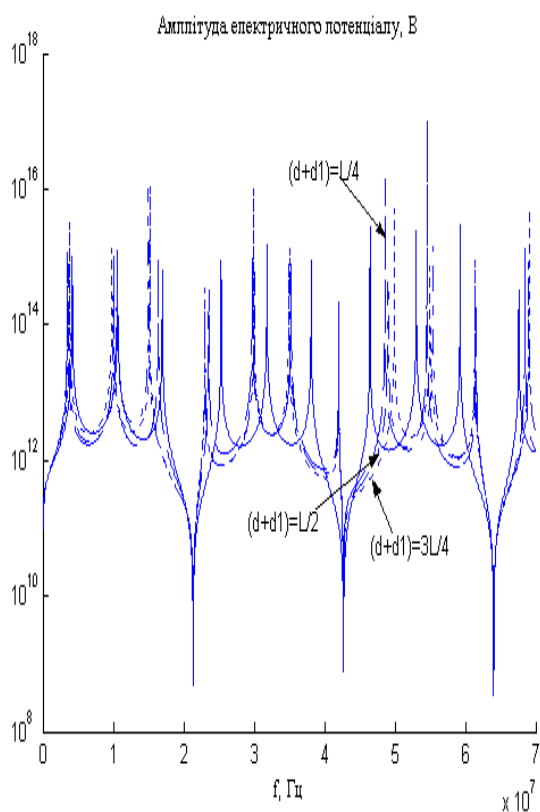


рис. 4.26

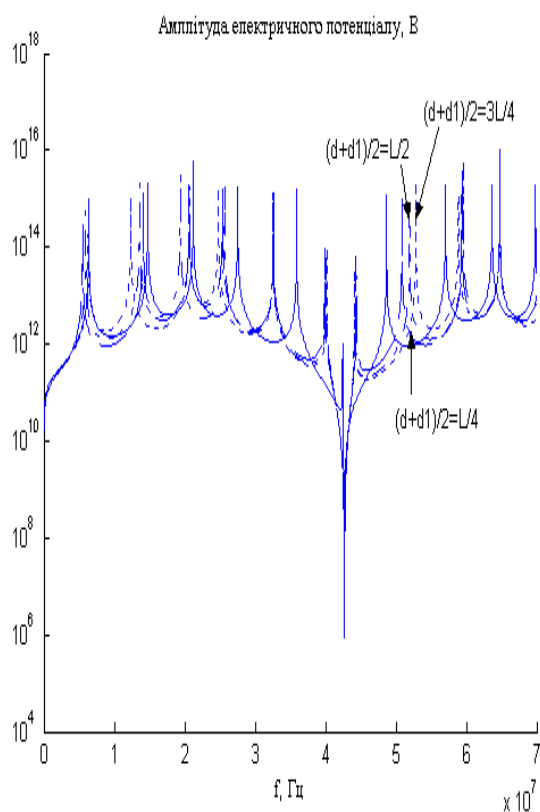


рис. 4.27

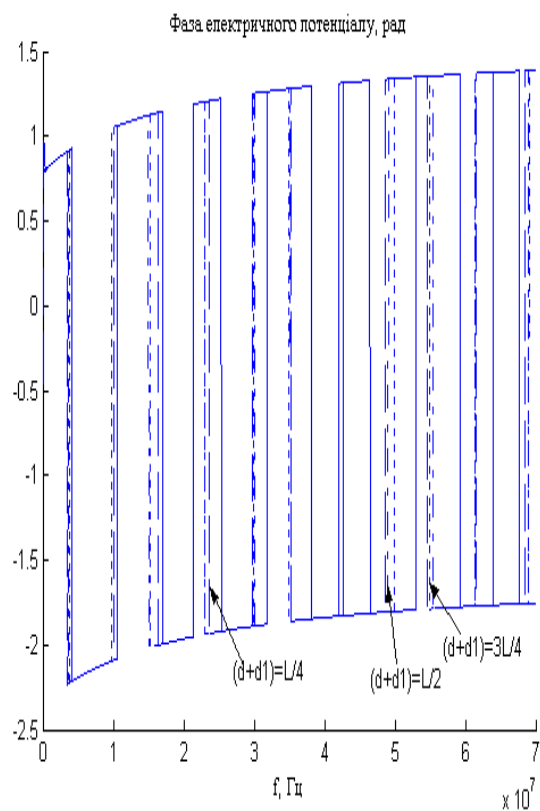


рис. 4.28

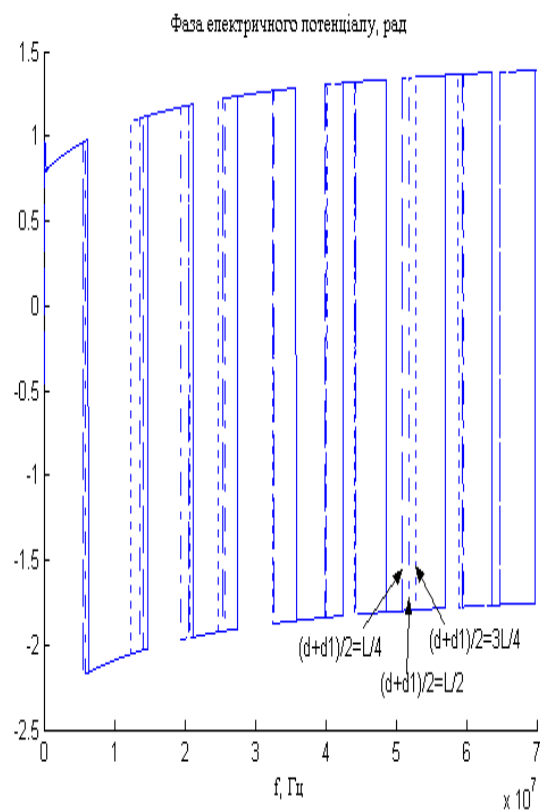


рис. 4.29

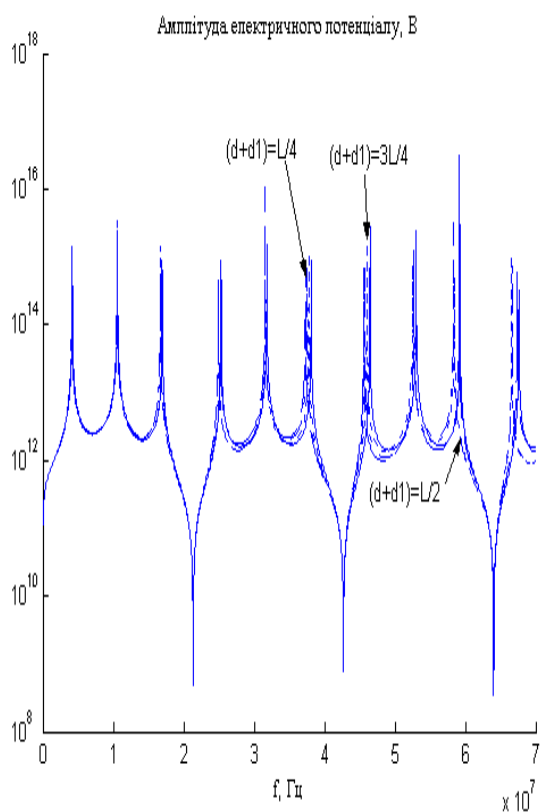


рис. 4.30

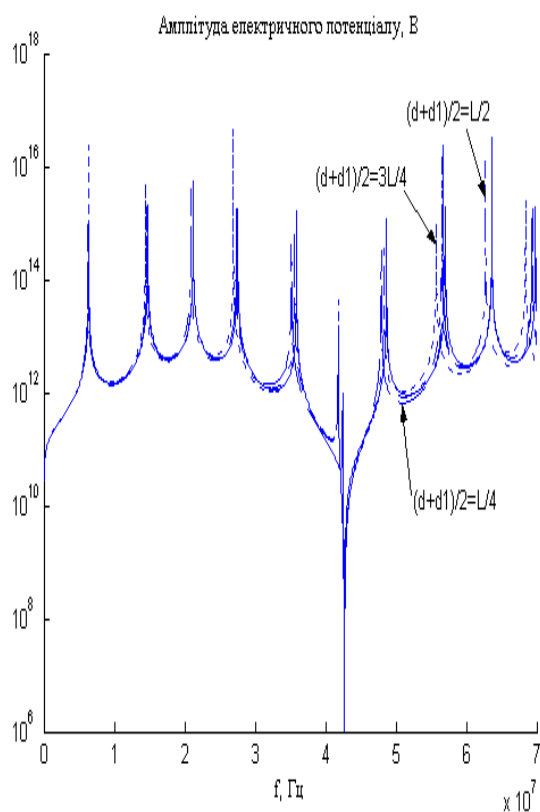


рис. 4.31

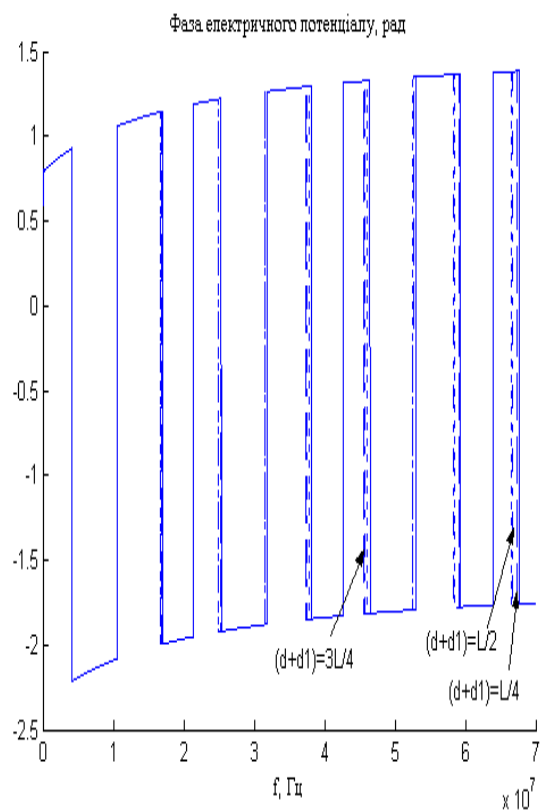


рис. 4.32

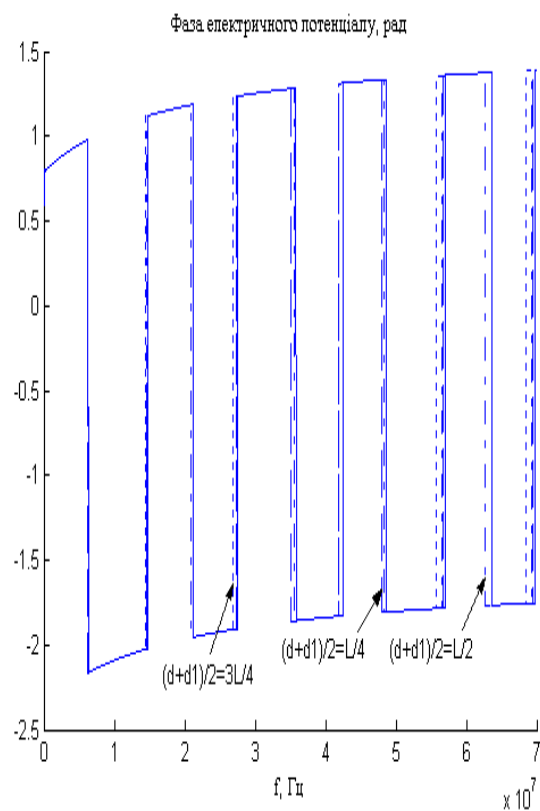


рис. 4.33

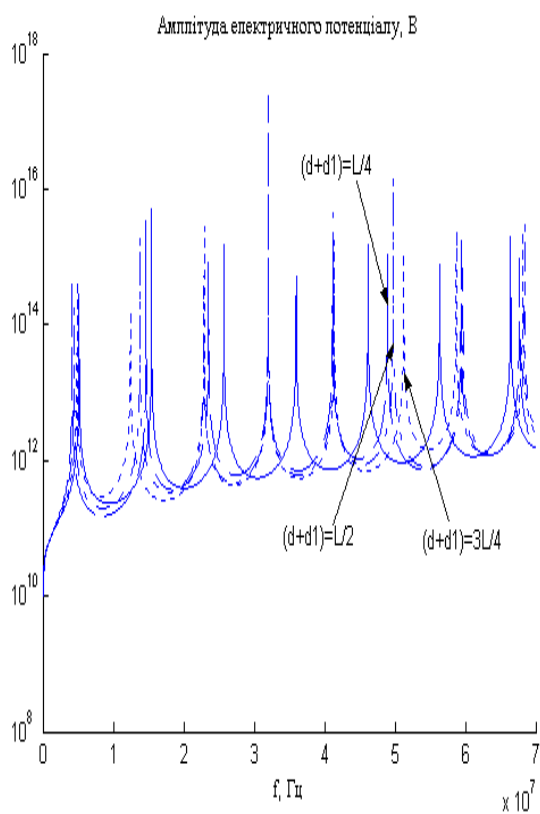


рис. 4.34

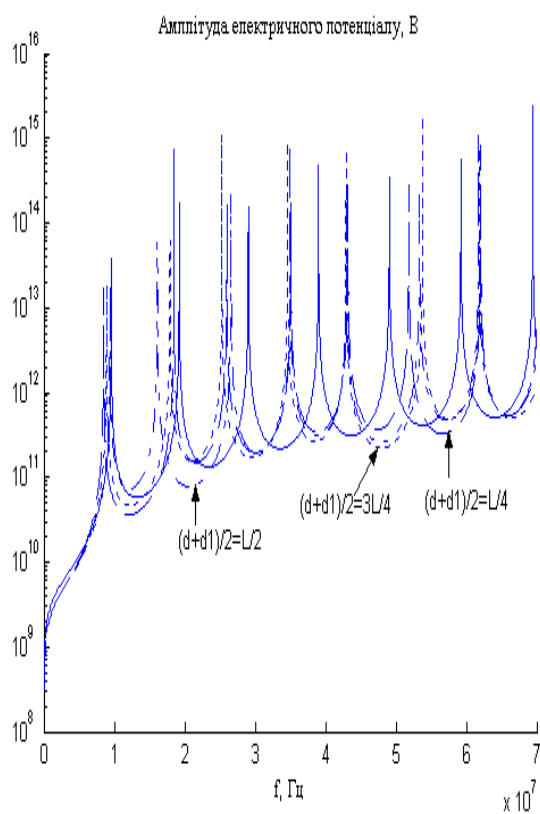


рис. 4.35

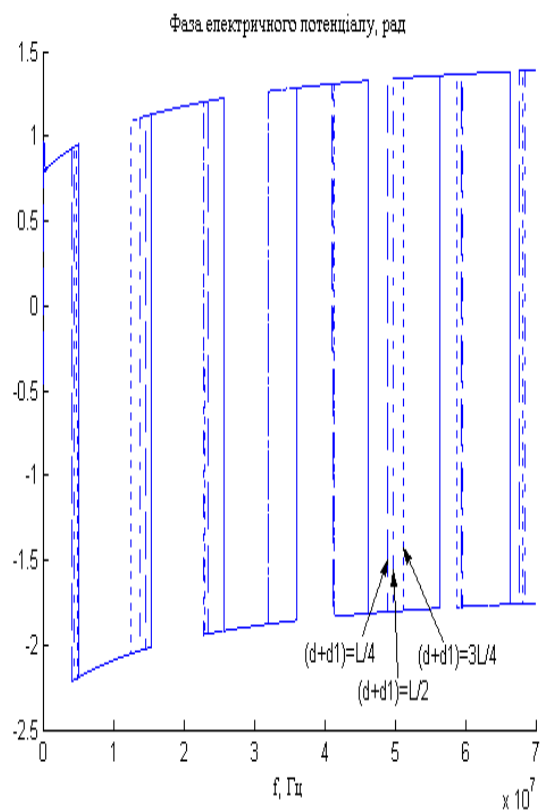


рис. 4.36

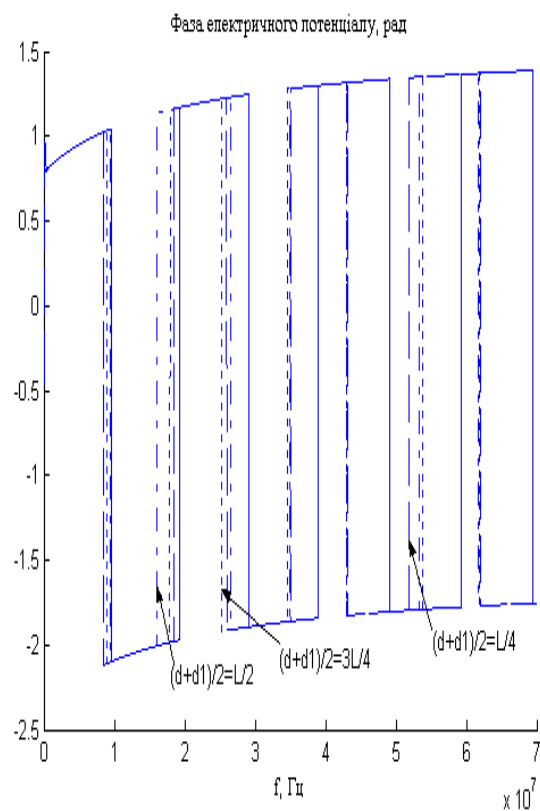


рис. 4.37

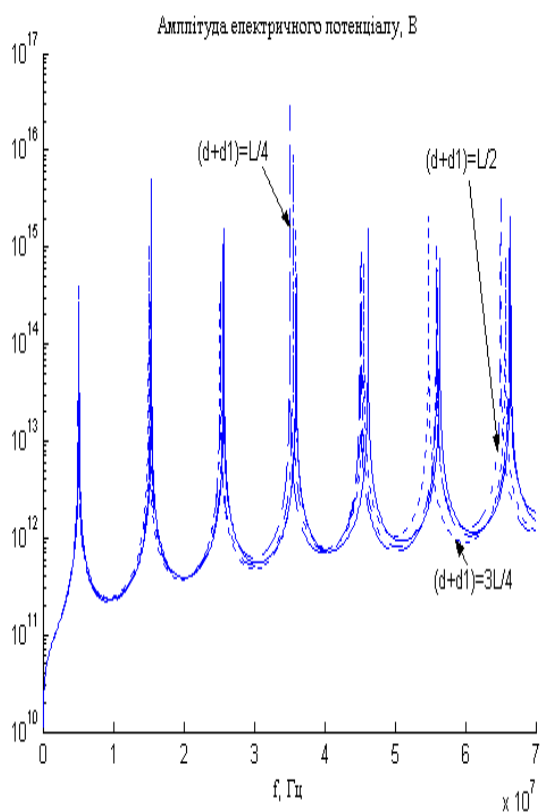


рис. 4.38

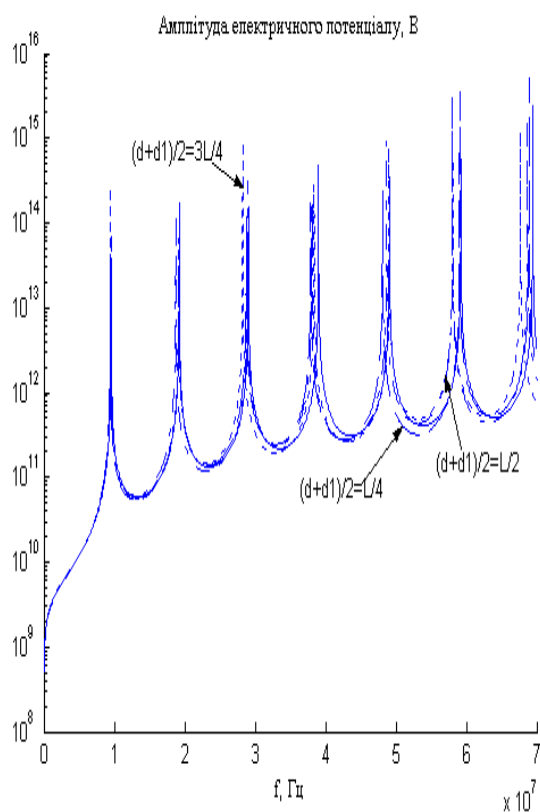


рис. 4.39

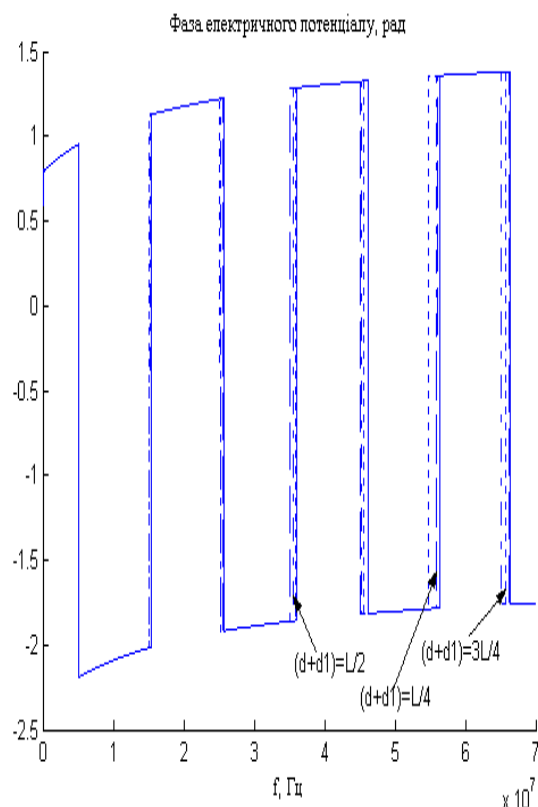


рис. 4.40

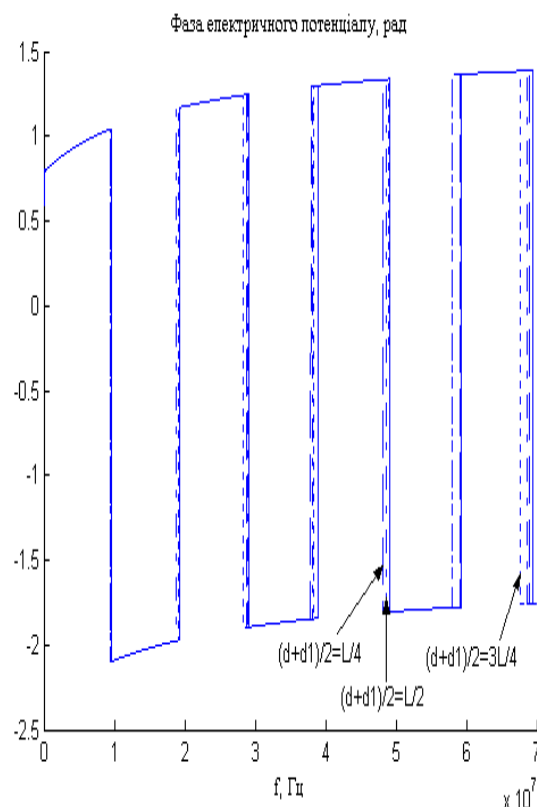


рис. 4.41

Аналізуючи наведені графіки можна сказати:

— якщо дефект порівняно великий ($d_1 - d = L/5$)

а) використання п'єзокераміки з розмірами більшими ніж розміри пакету не виправдано, адже електричний сигнал має дуже малу чутливість до наявності дефекту в пакеті. Зі зменшенням розмірів перетворювача, ЧХ електричного сигналу, який знімається з п'єзоперетворювача, наближається до ЧХ вільної поверхні $z = L$ тришарового пакету (без реєструючого шару). Проте, якщо товщина кераміки сумірна з товщиною тришарового пакету, на ЧХ можна спостерігати частоти на яких рівень вихідного сигналу значно падає, тобто, використовуючи кераміку при згаданих частотах модуляції амплітуди лазерного випромінювання, ми не тільки губимо інформацію про стан пакету (є дефект чи нема), а значно зменшуємо електричний сигнал, що може призвести до повної нечутливості методу електричний сигнал, в цьому випадку, може бути не зареєстрований приймачем. Якщо ж товщина кераміки на порядок

менша за товщину тришарового пакету, тоді ЧХ, яка знімається з п'єзоперетворювача, майже повністю відповідає ЧХ тришарового пакету за відсутністю реєструючого шару. Зменшивши товщину кераміки, ми підвищили частоти та різницю між частотами на яких спостерігається спадання електричного сигналу, але на деяких частотах цей ефект продовжує спостерігатися.

— якщо дефект порівняно малий ($d_1 - d = L/50$)

б) використання п'єзокераміки з розмірами більшими ніж розміри пакету, в цьому випадку, також не виправдано, адже електричний сигнал має ще меншу чутливість до наявності дефекту в пакеті, ніж у попередньому випадку. Зі зменшенням розмірів перетворювача, ЧХ електричного сигналу наближається до ЧХ вільної поверхні $z = L$ тришарового пакету (без реєструючого шару), хоча це наближення протікає повільніше ніж для великого дефекту. Якщо товщина кераміки сумірна з товщиною тришарового пакету, на ЧХ знову спостерігаються частоти, на яких рівень вихідного сигналу значно падає, тобто, використовуючи кераміку при згаданих частотах модуляції амплітуди лазерного випромінювання, ми не тільки губимо інформацію про стан пакету (є дефект чи нема), а значно зменшуємо електричний сигнал, що може призвести до повної нечутливості методу — електричний сигнал, в цьому випадку, може бути не зареєстрований приймачем. Якщо ж товщина кераміки на порядок менша за товщину тришарового пакету, тоді ЧХ майже повністю відповідає ЧХ тришарового пакету за відсутністю реєструючого шару. Зменшивши товщину кераміки, ми підвищили частоти та різницю між частотами на яких спостерігається спадання електричного сигналу, проте вони не зникли зовсім.

ВИСНОВКИ ПО РОЗДІЛУ

В даному розділі розглянута задача збудження акустичних хвиль в багатошаровому (три пружних та один електропружний шар) пакеті за допомогою лазерного випромінювання. Четвертий шар, в запропонованій задачі, використовувався для зняття динамічних характеристик тришарового пакету. При проведенні чисельних досліджень, основна увага приділялась розрахунку, порівнянню та аналізу АЧХ та ФЧХ переміщень вільної поверхні тришарового пакету з АЧХ та ФЧХ електричної напруги п'єзоприймача, який встановлений для реєстрації цих переміщень. Замість лазера, в якості генератору теплової енергії, може бути будь-яке джерело теплового випромінювання, адже процес генерації пружних хвиль у зразку, викликаний періодичним нагріванням матеріалу пакету, що в свою чергу викликає розширення речовини та розповсюдження в середовищі пружних хвиль з частотою модуляції інтенсивності випромінювання.

Проведений аналіз дозволив зробити наступні висновки:

Використання п'єзоперетворювача з товщиною більшою за товщину пакету не виправдано, перетворювач майже не «відчуває» наявності дефекту в пакеті. Це може бути пояснено тим, що товста кераміка, майже, не реагує на механічні коливання пакету, оскільки її пружні властивості більші за пружні властивості пакету. П'єзокераміка, в основному, реагує лише на коливання на власних частотах;

Якщо товщина перетворювача сумірна з товщиною пакету, а розміри дефекту малі ($L/50$), чутливість перетворювача також не висока, але якщо дефект має розміри сумісні з товщиною пакету ($L/5$) — на ЧХ перетворювача можна побачити відхилення від ЧХ бездефектного пакету. Окрім цього, в якості негативного фактору, ми спостерігаємо частоти на яких електричний сигнал значно падає, тобто п'єзокераміка не чутлива до коливань на згаданих частотах.

Ще один недолік цього випадку — отримана від перетворювача ЧХ мало нагадує ЧХ власне тришарового пакету. Це можна пояснити тим, що кераміка, яка має товщину сумірну з товщиною пакету, впливає на коливання усього пакету як цілого, хоча цей вплив не настільки сильний, як в попередньому випадку, проте, все ж таки, він вносить деякі корективи у динамічний стан пакету;

Третій випадок відповідає умові, що товщина п'єзокераміки на порядок менша за товщину пакету. На отриманих графіках ми спостерігаємо добру чутливість перетворювача до наявності в пакеті дефекту. Це говорить про те, що використовуючи кераміку в якості реєструючого шару, ми отримаємо майже достовірну інформацію про стан пакету при його опромінюванні. Але і в цьому випадку ми не позбулися частот «провалу» електричного сигналу, хоча й добилися того, що ці частота більш віддалені одна від другої.

Все вище сказане, в основному, стосується високих частот модуляції інтенсивності випромінювання (70 кГц – 70 МГц). Коли частота модуляції знаходиться в діапазоні частот від 30 Гц до 70 кГц — ЧХ перетворювача майже не відповідає ЧХ динамічного стану тришарового пакету, проте має дуже добру чутливість до наявності в пакеті дефектного шару та його положення в ньому. Ця властивість добре помітна на графіках 2.15–2.18 в діапазоні частот від 1 кГц до 50 кГц. Щодо варіанту кріплення кераміки (жорстко чи вільно), то можна сказати, що в цьому діапазоні частот більш вигідний варіант з жорстким кріпленням приймача — різниця в ФЧХ відсутня, проте рівень електричної напруги, яка знімається з перетворювача, дещо більший.

Підсумовуючи все вище сказане можна сказати:

Якщо є потреба в отриманні даних про динамічний стан пакету, то більш вигідно використовувати кераміку з товщиною на порядок меншу за товщину пакету та на частотах модуляції від 1 МГц до 70 МГц. Ця рекомендація викликана тим, що

саме на цих частотах ЧХ перетворювача та ЧХ тришарового пакету найбільш схожі;

Якщо є потреба в виявленні дефекту малих розмірів, то треба також працювати з малими товщина кераміки та на високих частотах модуляції випромінювання;

Якщо потрібно провести тестування на наявність дефекту та відомо, що його розміри досить великі, більш вигідніше працювати на малих частотах модуляції, причому товщина п'єзокераміки, в даному випадку впливає лише на амплітуду знімаємого електричного сигналу та мало залежить від товщини та глибини залягання дефектного прошарку.

Результати, отримані при виконанні роботи, були оформлені в вигляді статті і опубліковані в науковому журналі [39]. В цілому робота доповідалась на двох міжнародних конференціях: «Человек и Космос», у Дніпропетровську [31], та «Проблемы электроники», у Києві.

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

В дисертаційній роботі вперше була поставлена нова наукова задача про дослідження перетворення оптичної енергії в енергію механічних коливань (ФТА перетворення) та практичне застосування цього перетворення.

- В роботі були створенні математичні моделі, які описують перетворення оптичної енергії в енергію пружних коливань та розроблені методи аналізу перехідних процесів в одновимірній та двовимірній постановці задачі;
- Виявлена залежність поширення поздовжних та зсувних хвиль в шарі та напівпросторі, у випадку обмеженого по поздовжній координаті лазерного навантаження;
- Показана залежність пружних коливань від властивостей внутрішнього шару, таких як його товщина, густина, оптична прозорість, теплопровідність та ін.;
- Показано, що використання безконтактного приймача пружних коливань більш ефективне, а ніж використання контактного приймача;
- Розроблено метод розрахунку глибини та товщини внутрішнього шару на основі результатів двох ФТА перетворень із різними частотами функції амплітудної модуляції.

Аналіз проводився з допомогою аналітичного апарату шляхом послідовного розгляду процесу перетворення від загального випадку (нестационарна двовимірна задача) до часткового випадку (стаціонарна одновимірна задача), який може бути використаний для розв'язку практичних задач дефектоскопії.

- В результаті виконання роботи вперше отримані аналітично строгі рівняння для розрахунку механічних (переміщення та напруження) та теплових (зміна температури та тепловий потік) параметрів об'єкта в одновимірній і двовимірній постановках задач. В роботі вперше зроблено принциповий висновок про можливість використання розкладення в ряд Фур'є для

теплової частини задачі. Це дозволило використовувати існуючий математичний апарат для розв'язку двовимірної термопружної задачі.

- Виявлено, що від наявності у зразку внутрішнього шару з іншого матеріалу змінюється амплітуда пружних коливань, які збуджуються за допомогою ФТА перетворення. Показано, що в залежності від товщини внутрішнього шару та матеріалу змінюється частота амплітудної модуляції ФТА збудження, на якій спостерігається максимальна амплітуда пружних коливань.
- В результаті проведених чисельних досліджень, було встановлено, що амплітуда пружних коливань залежить від виду функції амплітудної модуляції оптичного навантаження. Найбільша амплітуда спостерігається у випадку амплітудної модуляції у вигляді гармоніки. Крім того, в цьому випадку форма пружних переміщень повторює форму функції амплітудної модуляції. У випадку амплітудної модуляції у вигляді відео-імпульсу спостерігається малий рівень пружних переміщень, проте дуже велике збудження в початковий момент часу спостереження.
- В порівнянні із «задачею Даніловської», коли механічне напруження викликалося шляхом поверхневого нагрівання зразка, ФТА перетворення вирізняється більш високим ККД перетворення енергії збудження (оптичного випромінювання) у енергію пружних коливань. Збільшення ККД, у випадку ФТА перетворення, складає майже 2 рази в порівнянні із «задачею Даніловської».
- Аналізуючи результати розв'язку двовимірної задачі ФТА перетворення, була виявлено, що зсувні хвилі не можуть бути використані для визначення глибини розташування та товщини внутрішнього шару, оскільки майже не залежать від цих параметрів. На противагу їм поздовжні пружні хвилі залежать від вказаних геометричних параметрів і тому є єдиними інформативними коливаннями. Таким чином для ФТА дефектоскопії рекомендується використовувати лише приймач поздовжніх хвиль у зразку.

- Оскільки об'єктом дослідження є тонкошарові зразки, то використання контактних приймачів пружних коливань пов'язано із спотворенням амплітуди та фази поздовжньої хвилі у зразку. Тому рекомендується використовувати безконтактний приймач, наприклад, лазерний інтерферометр. Крім того, у випадку безконтактного приймача, є можливість реєструвати амплітуду пружних коливань на поверхні зразка яка опромінюється і тому отримувати сигнал із більшої амплітудою, ніж рівень сигналу що отримується з «тіньової» поверхні.

Також слід зазначити деякі додаткові результати, які були отримані в результаті дослідження:

- Для достовірного зняття інформації з поверхні пружного шару необхідно раціонально розташовувати приймач пружних коливань відносно вісі оптичного збудження, а саме — необхідно розташовувати приймач на вісі оптичного збудження. В цьому випадку поздовжні хвилі мають найбільшу амплітуду і вплив зсувних хвиль мінімальний (можна не враховувати при розрахунках).
- Існує певний проміжок часу за який в шарі протікають перехідні процеси. Тобто проведення вимірювань можливе лише після певного проміжку часу після вмикання оптичного джерела. Цей проміжок часу залежить не лише від геометричних розмірів шару (товщини), а й від його теплових параметрів – а саме від коефіцієнтів оптичного поглинання та теплопровідності.
- На підставі дослідження поведінки пружного пакету при наявності приймача у вигляді п'єзокерамічного перетворювача та у випадку безконтактного приймача, була показана залежність пружних характеристик від типу приймача та зроблено аналіз залежності сигналу що реєструється від розмірів п'єзокерамічного приймача.
- При математичному аналізі стаціонарної одновимірної задачі для шару з алюмінію, результати були порівняні з лабораторними дослідженнями, які

проводилися в університеті ім. Шевченка спільно з Інститутом фізики НАНУ. Порівняння було обговорено на науковому семінарі відділу приймачів випромінювання Інституту фізики НАНУ та показало добру відповідність математичної моделі розвинутої в даній роботі та спільних практичних результатів – похибка не перевищила 10%, що підтверджено наступними графіками:

– Результат лабораторного дослідження

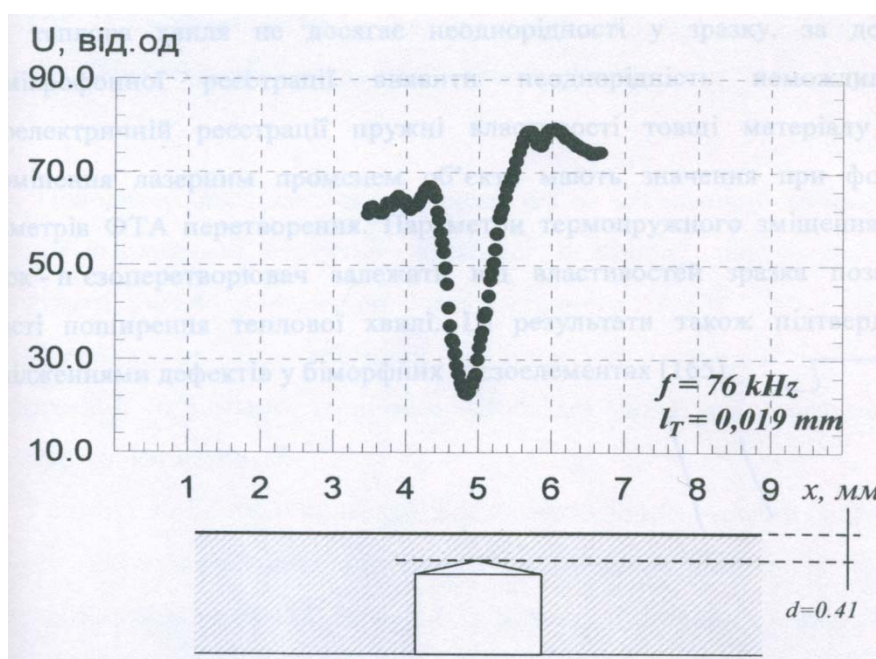
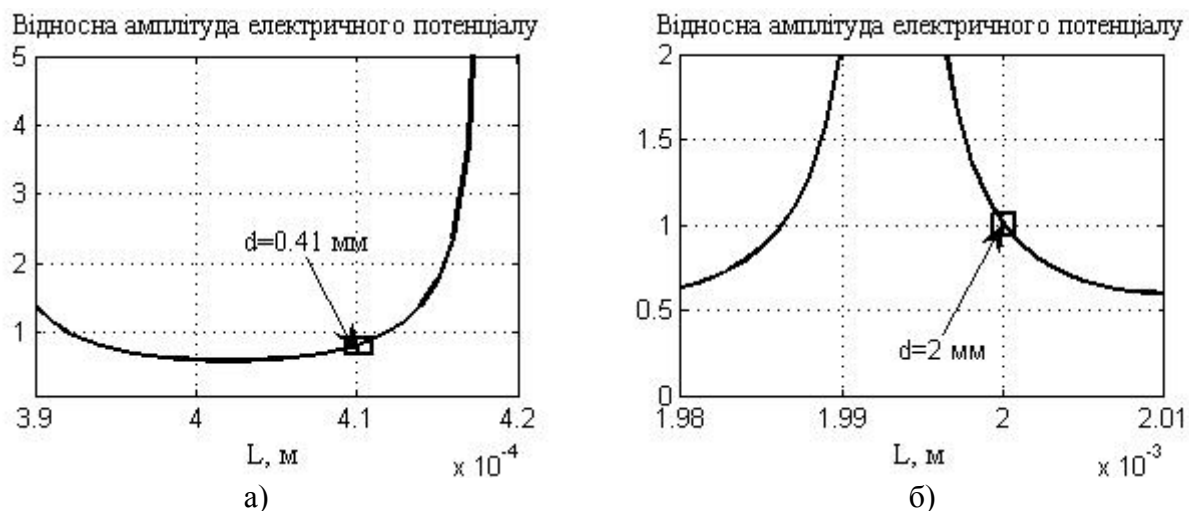


Рис. Результати лабораторних досліджень зразка з Al

У наведеному рисунку: напруга U на п'єзоперетворювачі при ФТА перетворені у зразку Al з дефектом наведена в залежності від координати збудження; глибина залягання дефекту ($d = 0,41 \text{ мкм}$) значно більша за довжину теплової дифузії у зразку та показана в нижній частині рисунка на зображенні зразка.

– Результат модельного дослідження



На наведених результатах розрахунку АЧХ відносної амплітуди електричного потенціалу відокремлені дві зони: зона навколо координати дефект в зразку а) та зона навколо координати без дефекту б). По вісі абсцис відкладена глибина шару, а по вісі ординат — відносний електричний потенціал. На графіках стрілками (та виділені прямокутниками) точки які відповідають мінімальній товщині зразка у досліді, та повній товщині зразка. Як бачимо отримані результати відповідають результатам практичного дослідження з урахуванням деякої різниці параметрів A_1 , які були взяті для математичного моделювання, від параметрів реального зразка.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Rosencwaig A.** Photoacoustics and Photoacoustic Spectroscopy / Rosencwaig A.. - New-York : John Wiley and Sons, 1980. - Vol. V.57. - 310 p..
2. **Арсенин В.Я.** Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции / Арсенин В.Я. - Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. - 369 с..
3. **Вавилов В. С.** Дефекты в кремнии и на его поверхности / Вавилов В. С., Киселев В. Ф., Мукашев Б. Н. - Москва : Наука, 1990. - 212 с..
4. **Гринченко В.Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. ред. Гузь А.Н.. - Киев : Наукова думка, 1989. - АН УССР : Т. 5. Электроупругость : 5. - 280 с..
5. **Гусев В. Э.** Лазерная оптоакустика / Гусев В. Э., Карабутов А. А. - Москва : Наука. Гл.ред. физ.-мат.лит., 1991. - 304 с..
6. **Диткин В.А.** Справочник по операционному исчислению / Диткин В.А., Прудников А.П. - Москва : Высшая школа, 1985. - 467 с..
7. **Желудев И.С.** Физика кристаллических диэлектриков / Желудев И.С. - Москва : Наука, 1968. - 464 с..
8. **Кикоин И.К.** Таблицы физических величин. Справочник / Кикоин И.К. - Москва : Атомиздат, 1976. - 1008 с..
9. **Коваленко А.Д.** Термоупругость / Коваленко А.Д. - Киев : ИО "Вища школа", 1975. - 216 с..
10. **Красильников В.А.** Введение в физическую акустику: Учебное пособие / Красильников В.А., Крылов В.В. ред. Красильников В. А.. - Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 400 с..

11. **Ландау Л.Д.** Теоретическая физика / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - Москва : ФизМатЛит, 1962. - 3-е : Т. VIII. Электродинамика сплошных сред : Х. - 621 с..
12. **Лямшев Л.М.** Лазерное термооптическое возбуждение звука / Лямшев Л.М. ред. Ильичев В.И.. - Москва : Наука, 1989. - АН СССР, Акустический институт им.Н.Н.Андреева. - 237 с..
13. **Маллер Р.** Элементы интегральных схем / Маллер Р., Кейминс Т. - Москва : Мир, 1989. - 630 с..
14. **Матаре Г.** Электроника дефектов в полупроводниках / Матаре Г. - Москва : Мир, 1974. - 463 с..
15. **Новацкий В.** Теория упругости / Новацкий В.. - Москва : Мир, 1975. - 872 с..
16. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости / Новацкий В. - Москва : РИСО АН СССР, 1962. - 364 с..
17. **Положий Г.Н.** Уравнение математической физики / Положий Г.Н. - Москва : "Высшая школа", 1964. - 560 с..
18. **Пугачев С.И.** Пьезокерамические преобразователи. Справочник / Пугачев С.И.. - Ленинград : Судостроение, 1984. - 256 с..
19. **Сергеев В. С.** Напряжения и деформации в элементах микросхем / [Сергеев В.С.; Кузнецов О.А.; Захаров Н.П.; Летягин В.А.]. - Москва : "Радио и связь", 1987. - 89 с..
20. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов / Тамм И.Е. - Москва : ФизМатЛит, 2003. - 11-е испр. и доп.. - 616 с..
21. **Шульга Н.А.** Колебания пьезоэлектрических тел / Шульга Н.А., Болкисев А.М. ред. Маслов Б.П.. - Киев : Наукова думка, 1990. - АН СССР. - 228 с..
22. 9th International Conference on Photoacoustic Photothermal Phenomena // Progress in natural science. - Shu-yi Zhang, Nanjing, China , 1996. - Vols. supp.to V.6, Ed.. - 769 p..

23. Photoacoustic And Photothermal Phenomena // Abstract 11th International Conference. - Kyoto, Japan, June 25-29, 2000. - 549 p..
24. **Бабаев А.Э.** Воздействие нестационарных тепловых источников на упругое полупространство / Бабаев А.Э., Богданов А.В. // Тез.докл. - Киев : Консонанс, Акустический симпозиум, сентябрь, 2005. - стр. 20-26.
25. **Бабаев А.Э.** Переходные процессы в упругом полупространстве и слое, вызванные тепловыми источниками / Бабаев А.Э., Богданов А.В. // Тез.докл. - Киев : Международная конференция "Dynamical system modeling and stability investigation", май, 2005. - стр. 243.
26. **Бабаев А.Э.** Переходные процессы в упругом слое, облучаемом лазером / Бабаев А.Э., Богданов А.В. // Тез.докл. - Киев : Вторая научно-практическая конференция "Проблемы и перспективы развития транспортных систем: техника, технология, экономика и управление", 2004. - стр. 242-243.
27. **Богданов А.В.** Влияние нестационарных тепловых источников на упругие колебания в слое и полупространстве / Богданов А.В. // Тез.докл. - Киев : Международная конференция "Dynamical system modeling and stability investigation", май, 2007. - стр. 272.
28. **Богданов А.В.** Моделирование нестационарных процессов термооптической генерации колебаний в упругом слое / Богданов А.В. // Тез.докл. - Киев : Международная конференция "Dynamical system modeling and stability investigation", май, 2003. - стр. 280.
29. **Богданов А.В.** Нестационарные колебания упругого слоя, вызванные оптическим излучением / Богданов А.В. // Тез.докл. - Днепропетровск : VI Международная молодежная научно-практическая конференция "Человек и космос", апрель, 2004. - стр. 22.
30. **Богданов А.В.** Упругие колебания в слое и полупространстве, вызванные тепловыми источниками / Богданов А.В. // Тез.докл. - Одесса : IX

Международная научно-практическая конференция "Современные информационные и электронные технологии", 2008. - Т. 2. - с. 130.

31. **Савин В.Г.** Колебания четырехслойного пакета вызванные лазерным потоком / Савин В.Г., Богданов А.В. // Тез.докл.. - Днепропетровск : IV Международная молодежная научно-практическая конференция "Человек и Космос", июнь, 2002. - стр. 474.
32. **Савин В.Г.** Колебания четырехслойного пакета, вызванные лазерным потоком / Савин В.Г., Богданов А.В. // Тез.докл.. - Киев : Вторая научно-практическая конференция "Проблемы и перспективы развития транспортных систем: техника, технология, экономика и управление", 2004. - стр. 212-213.
33. **Верцанова О.В.** Фотоакустична мікроскопія з оптимізованою п'єзоелектричною реєстрацією сигналів : автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. / Верцанова О.В. - Київ : НТУУ "КПІ", 2000 р.. - 18 с..
34. **Кривоконь І.О.** Моделювання процесів фотоакустичної діагностики : автореферат на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.. Кривоконь І.О. - Київ : НТУ ім.Т.Г.Шевченко, 1995 р.. - 16 с..
35. Пат. 51439, Україна, МПК G01B 9/02 «Спосіб визначення глибини та товщини внутрішнього шару тришарового пакета» / Богданов О.В.; заявник та патентовласник Богданов О.В., -- u201002465; заявлено 05.03.2010; опубл. 12.07.2010, Бюл. № 13/2010
36. **Mandeleis A.** Semiconductors and Electronic Materials / Mandeleis A. and Hess P. // "Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology. - Washington USA : SPIE Press, 2000. - V. IV in Series. - p. 350.
37. **Алексеев В.Н.** Возбуждение звука в воде при ее поверхностном испарении под действием лазера / Алексеев В.Н. // Акустический журнал. - 1990 г.. - 2. - стр. 197-203.

38. **Аносов А.А.** Особенности теплового акустического излучения как источника акустических сигналов / Аносов А.А. и Пасечник В.И. // Акустический журнал. - 2002 г.. - 1. - стр. 16-21.
39. **Бабаев А.Э.** Термооптическое возбуждение четырехслойного пакета, содержащего электроупругий элемент / Бабаев А.Э.; Савин В.Г.; Богданов А.В.; Сотников А.В. // Электроника и связь. - Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2002 г.. - 15. - стр. 20-24.
40. **Бабаев А.Э.** Возбуждение упругого полупространства нестационарными тепловыми источниками / Бабаев А.Э., Богданов А.В. // Теоретическая и прикладная механика / ред. Космодамианский А.С.. - Донецк : Донецкий национальный университет, 2005 г.. - 40. - стр. 140-145.
41. **Бабаев А.Э.** Нестационарное термооптическое воздействие на упругий слой / Бабаев А.Э.; Савин В.Г.; Богданов А.В. // Электроника и связь. - Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2003 г.. - 20. - стр. 33-37.
42. **Богданов А.В.** Нестационарные тепловые процессы в полупространстве, при действии равномерно распределенных тепловых источников на интервале вдоль продольной координаты / Богданов А.В. // Электроника и связь / ред. А.И. Красильников. - Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2007 г.. - 5 (40). - с. 84-87.
43. **Богданов А.В.** Нестационарные упругие колебания полупространства, вызванные термооптическим возбуждением / Богданов А.В. // Электроника и связь / ред. А.И. Красильников. - Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2007 г.. - 6(41). - с. 78-82.
44. **Богданов А.В.** Стационарные колебания границ упругого слоя, при действии равномерно распределенных тепловых источников на интервале вдоль продольной координаты / Богданов А.В. // Электроника и связь - Киев: НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2010 г.. – 4(57). - с. 166-169.
45. **Буйло С.И.** Возбуждение акустической эмиссии лазерным излучением для исследования структурных изменений в композитах и полимерах /

- Буйло С.И., Белозеров В.В., Зинченко С.П., Иванов И.Г. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Сентябрь 2008 г.. - 9. - стр. 38-45.
46. **Бусье Г.** Дистанционное фотоакустическое исследование керамики в процессе ее обжига / Бусье Г., Лямшев М.Л., Штанулло Й. // Акустический журнал. - 1996 г.. - 1. - стр. 35-39.
47. **Вавилов В.П.** Тепловая (инфракрасная) томография: терминология, основные процедуры и применение для неразрушающего контроля композиционных материалов / [Вавилов В.П., Нестерук Д.А., Ширяев В.В. и др.] // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Март 2010 г.. - 3. - стр. 3-16.
48. **Вавилов В.П.** Сравнительный анализ теплового контроля коррозии в высоко- и низкотеплопроводных металлах / Вавилов В.П. и Маринетти С. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Декабрь 2008 г.. - 12. - стр. 48-54.
49. **Вавилов В.П.** Сравнительный анализ оптической и ультразвуковой стимуляции дефектов в композиционных материалах / Вавилов В.П. и Нестерук Д.А. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Февраль 2010 г.. - 2. - стр. 90-93.
50. **Голубев Е.В.** Влияние свойств ферромагнитного металла на спектр волн Рэлея, возбуждаемых импульсным лазерным излучением / Голубев Е.В., Гуревич С.Ю., Петров Ю.В. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Март 2010 г.. - 3. - стр. 35-44.
51. **Гуревич С.Ю.** Анализ ультразвуковых волн, возбужденных в металлической пластине лазерными импульсами наномекундной

длительности / [Гуревич С.Ю., Петров Ю.В., Шушарин А.В., Голубев Е.В.] // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Апрель 2009 г.. - 4. - стр. 35-40.

52. **Гуревич С.Ю.** Экспериментальное исследование лазерной генерации нормальных акустических волн в ферромагнитных металлах при температуре Кюри / [Гуревич С.Ю., Петров Ю.В., Шульгинов А.А., Голубев Е.В.] // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Февраль 2007 г.. - 2. - стр. 9-15.
53. **Даниловская В. И.** Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие в следствие внезапного нагрева его границы / Даниловская В. И. // Прикладная математика и механика. - Москва :, 1950 г.. - 3 : Т. XIV.
54. **Егерев С.В.** Оптоакустическая диагностика микронеоднородных жидких сред / Егерев С.В., Пашин А.Е. // Акустический журнал. - 1993 г.. - 1. - стр. 86-91.
55. **Карнаухов В. Г.** Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев жестко опертой толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели / [Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Завгородний А. В.] // Акустический вестник. - Киев , 2010 г.. - 2 : Т. 13. - стр. 28-33.
56. **Карнаухов В. Г.** Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев цилиндрической панели из физически нелинейного вязкоупругого материала при жестком защемлении торцов / [Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Завгородний А. В.] // Теоретическая и прикладная механика. - 2010 г.. - 1 : Т. 47. - стр. 77-85.
57. **Карнаухов В. Г.** Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими

- актуаторами / Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. - 2008 р.. - 8. - стр. 48-68.
58. **Киселев В.Д.** Формирование предвестника акустического импульса возбужденного в режиме термоупругой генерации на поверхности моря / Киселев В.Д., Максимов А.О. // Акустический журнал. - 1993 г.. - 1. - стр. 176-178.
59. **Козлов В. И.** Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойной толстостенной шарнирно опертой вязкоупругой цилиндрической панели с независимыми от температуры свойствами / [Козлов В. И., Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Завгородний А. В.] // Акустический вестник. - Киев :, 2010 г.. - 1 : Т. 13. - стр. 22-29.
60. **Козлов В.И.** Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень / Козлов В.И., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В. // Математичні методи та фізико-механічні поля. - 2009 р.. - 3 : Т. 52. - сс. 116-126.
61. **Комиссаров В. М.** Оптическое возбуждение звуковых волн. (Обзор) / Комиссаров В. М., Бункин Ф. В. // Акустический журнал. - 1973 г.. - 3 : Т. XIX. - стр. 305-320.
62. **Лавренюк В.И.** Напряженно-деформированное состояние многослойной полупроводниковой структуры / Лавренюк В.И., Макара В.А. // Проблемы прочности. - 1983 г.. - 10. - стр. 116-120.
63. **Лобанов Л. М.** Исследование АЭ характеристик материалов при высоких температурах. Сообщ. 2 / [Лобанов Л. М., Недосека А. Я., Недосека С. А., и др.] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. - 2009 г.. - 4. - стр. 5-13.
64. **Лямшев Л. М.** Оптическая генерация звука в жидкости. тепловой механизм. (Обзор) / Лямшев Л. М., Седов Л. В. // Акустический журнал. - 1981 г.. - 1 : Т. XXVII. - стр. 5-29.

65. **Недосека А.Я** Особенности функционирования технологических трубопроводов при высоких температурах / [Недосека А.Я., Недосека С.А., Бойчук О. И. и др.] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. - 2009 г.. - 2. - стр. 5-10.
66. **Петров Ю.В.** Экспериментальное определение параметров волн Лэмба при их лазерной генерации / Петров Ю.В., Гуревич С.Ю., Голубев Е.В. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Март 2010 г.. - 3. - стр. 45-49.
67. **Фомичев С. К.** Автономная система мониторинга механических напряжений магистральных трубопроводов с использованием возможностей GSM-связи / [Фомичев С.К., Минаков С.Н., Яременко М.А. и др.] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. - 2008 г.. - 1. - стр. 9-12.
68. **Цыганок Б.А.** Частный случай решения задачи фотоакустического эффекта с пьезокерамической регистрацией для жесткого крепления пьезодатчика к основанию фотоакустической ячейки / Цыганок Б.А., Верцанова Е.В. // Электроника и связь. - Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 1999 г.. - 7. - стр. 81-84.
69. **Шульгинов А.А.** Термоупругое возбуждение ультразвука лазерным импульсом в полупространстве со слоем жидкости / Шульгинов А.А. // Акустический журнал. - 1991 г.. - 4. - стр. 808-814.
70. **Шушарин А.В.** Экспериментальное исследование волн Лэмба при лазерной генерации / Шушарин А.В. // Дефектоскопия / ред. член-корр. РАН Щербинин Е.В.. - Екатеринбург : "Наука", Уральское отделение РАН, Октябрь 2009 г.. - 10. - стр. 3-15.

ДОДАТКИ



(11) **51439**(19) **UA**(51) МПК (2009)
G01B 9/02(21) Номер заявки: **u 2010 02465**(72) Винахідник:
**Богданов Олексій
Вікторович, UA**(22) Дата подання заявки: **05.03.2010**(24) Дата, з якої є чинними
права на корисну модель: **12.07.2010**(73) Власник:
**Богданов Олексій
Вікторович,
вул. Закревського, 73/1, кв.12,
м. Київ, 02232, UA**(46) Дата публікації відомостей
про видачу патенту та
номер бюлетеня: **12.07.2010,
Бюл. № 13**

(54) Назва корисної моделі:

СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ГЛИБИНИ ТА ТОВЩИНИ ВНУТРІШНЬОГО ШАРУ ТРИШАРОВОГО ПАКЕТА

(57) Формула корисної моделі:

1. Спосіб визначення глибини та товщини внутрішнього шару тришарового пакета, який полягає у наступному: опромінюють пружний пакет лазерним випромінюванням з гармонійною амплітудною модуляцією та, за допомогою безконтактного приймача, вимірюють амплітуду та фазу пружних коливань поверхні, який **відрізняється** тим, що вимірювання здійснюють в два етапи – на двох різних частотах амплітудної модуляції; отримані результати вимірювань піддають подальшій чисельній обробці, що полягає у визначенні нулів матриці крайових умов, що дає однозначне значення глибини залягання та товщини внутрішнього шару.

2. Спосіб визначення глибини та товщини внутрішнього шару тришарового пакета, який **відрізняється** тим, що за безконтактний приймач використовують лазерний інтерферометр.

Додаток Б Одновимірна нестационарна задача

```

clear Alpha Betta Hi Kappa v Yung Puason h x I0 Lambda Mu Bz Ct Etta A delta N deltaP T T_2 RM1 RM2 RM3 RM4 RS GM1
GM2 GM3 GM4 GS F S C Temperature TPotok Peremecheniya MehNapryageniya tuslov nuslov nuslov1;
global BChastota;
Alpha=2.33*10^-6; Betta=1.2*10^6; Hi=8.8*10^-5; Kappa=156; v=8.43*10^3; Yung=10^11; Puason=0.27;
MyK=2; x=0;
h=MyK*10^-4;
Chastota=0.5*(1/MyK)*10^9; BChastota=1;%4*Chastota*h/(2*v);
%
I0=10^25;
%
%
Lambda=Yung*Puason/((1+Puason)*(1-2*Puason)); Mu=Yung/(2+2*Puason); Bz=3*Lambda+2*Mu; Ct=Lambda+2*Mu;
Etta=Bz/Ct;
A=[(v*h/Hi) (Alpha*Betta*(h^2)*I0/(2*Kappa))];
%
delta=0.0125; N=10^3;
xdelta=0.01; Nx=(1/xdelta)+1;
%
Temperature=zeros(Nx,N); TPotok=zeros(Nx,N);
Peremecheniya=zeros(Nx,N); MehNapryageniya=zeros(Nx,N);
%
tuslov=2;
nuslov=4;
nuslov1=4;
%
%
wh=waitbar(0,'Please wait ...');
for kx=1:Nx
    if kx==1
        T=zeros(1,N); T_2=zeros(1,N);
    end
    %
    deltaP=[floor(1/delta) floor(x/delta) floor((1-x)/delta)];
    %
    RM1=zeros(4,N); RM2=zeros(4,N); RM3=zeros(4,N); RM4=zeros(4,N); RS=zeros(4,N); S=zeros(4,N);
    GM1=zeros(4,N); GM2=zeros(4,N); GM3=zeros(4,N); GM4=zeros(4,N); GS=zeros(4,N); F=zeros(4,N);
    %
    C=zeros(4,N);
    Svertka=zeros(4,4,N);
    %
    for k=1:N
        waitbar((k+(kx-1)*N)/(N*Nx),wh);
        if kx==1
            T(k)=FT(tuslov,k*delta);
            T_2(k)=FT(tuslov,(k-0.5)*delta);
        end
        %
        %Block of calculation of Temperature
        %
        GS(1,k)=FGS1(A(1),A(2),Betta,h,(k-0.5)*delta,nuslov);
        GS(2,k)=FGS2(A(1),A(2),Betta,h,(k-0.5)*delta,nuslov);
        %
        GM1(1,k)=FGM11(A(1),(k-0.5)*delta,nuslov);
        GM2(1,k)=FGM12(A(1),(k-0.5)*delta,nuslov);
        GM1(2,k)=FGM21(A(1),(k-0.5)*delta,nuslov);
        GM2(2,k)=FGM22(A(1),(k-0.5)*delta,nuslov);
        %
        if k==1
            F(1,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(1,k:-1:1));
            F(2,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(2,k:-1:1));
        else

```

```

F(1,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(1,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k-1)*GM1(1,k:-1:2)' +C(2,1:1:k-1)*GM2(1,k:-1:2)'));
F(2,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(2,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k-1)*GM1(2,k:-1:2)' +C(2,1:1:k-1)*GM2(2,k:-1:2)'));
end
%
C(1,k)=det([F(1,k) delta*GM2(1,1);F(2,k) delta*GM2(2,1)])/det([delta*GM1(1,1) delta*GM2(1,1);delta*GM1(2,1)
delta*GM2(2,1)]);
C(2,k)=det([delta*GM1(1,1) F(1,k);delta*GM1(2,1) F(2,k)])/det([delta*GM1(1,1) delta*GM2(1,1);delta*GM1(2,1)
delta*GM2(2,1)]);
%
RS(1,k)=FRS1(A(1),A(2),Betta,h,x,(k-0.5)*delta); S(1,k)=delta*(T_2(1:1:k)*RS(1,k:-1:1)');
RS(2,k)=FRS2(A(1),A(2),Betta,h,x,(k-0.5)*delta); S(2,k)=delta*(T_2(1:1:k)*RS(2,k:-1:1)');
%
RM1(1,k)=FRM11(A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM2(1,k)=FRM12(A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM1(2,k)=FRM21(A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM2(2,k)=FRM22(A(1),x,(k-0.5)*delta);
%
Svertka(1,1,k)=delta*(C(1,1:1:k)*RM1(1,k:-1:1)');
Svertka(1,2,k)=delta*(C(2,1:1:k)*RM2(1,k:-1:1)');
Svertka(2,1,k)=delta*(C(1,1:1:k)*RM1(2,k:-1:1)');
Svertka(2,2,k)=delta*(C(2,1:1:k)*RM2(2,k:-1:1)');
%
Temperature(kx,k)=Svertka(1,1,k)+Svertka(1,2,k)+S(1,k);
TPotok(kx,k)=Svertka(2,1,k)+Svertka(2,2,k)+S(2,k);
%
%Block of calculation of Perremechniya
%
GS(3,k)=FGS3(Betta,Etta,A(1),A(2),h,(k-0.5)*delta,nuslov1);
GS(4,k)=FGS4(Betta,Etta,A(1),A(2),h,(k-0.5)*delta,nuslov1);
%
GM1(3,k)=FGM31(Etta,A(1),(k-0.5)*delta,nuslov1);
GM2(3,k)=FGM32(Etta,A(1),(k-0.5)*delta,nuslov1);
GM1(4,k)=FGM41(Etta,A(1),(k-0.5)*delta,nuslov1);
GM2(4,k)=FGM42(Etta,A(1),(k-0.5)*delta,nuslov1);
if nuslov1==1
    GM3(3,k)=FGM33;
    GM4(3,k)=FGM34((k-0.5)*delta);
    GM3(4,k)=FGM43((k-0.5)*delta);
    GM4(4,k)=FGM44;
    %
    if k==1
        F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
        F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
    else
        F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)')-(C(3,1:1:k-
1)*GM3(3,k:-1:2)' +C(4,1:1:k-1)*GM4(3,k:-1:2)'));
        F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)')-(C(3,1:1:k-
1)*GM3(4,k:-1:2)' +C(4,1:1:k-1)*GM4(4,k:-1:2)'));
    end
    C(3,k)=det([F(3,k) delta*GM4(3,1);F(4,k) delta*GM4(4,1)])/det([delta*GM3(3,1) delta*GM4(3,1);delta*GM3(4,1)
delta*GM4(4,1)]);
    C(4,k)=det([delta*GM3(3,1) F(3,k);delta*GM3(4,1) F(4,k)])/det([delta*GM3(3,1) delta*GM4(3,1);delta*GM3(4,1)
delta*GM4(4,1)]);
elseif nuslov1==2
    GM3(3,k)=FGM33;
    GM4(3,k)=FGM34((k-0.5)*delta);
    %
    if k==1
        F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
        F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
    else
        F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)' +C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)')-(C(3,1:1:k-
1)*GM3(3,k:-1:2)' +C(4,1:1:k-1)*GM4(3,k:-1:2)'));
        if k<=deltaP(1)

```

```

F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
else
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)))-(-C(3,k-
deltaP(1)))+Etta*Temperature(kx,k);
end
end
C(3,k)=det([F(3,k) delta*GM4(3,1);F(4,k) 1])/det([delta*GM3(3,1) delta*GM4(3,1);0 1]);
C(4,k)=det([delta*GM3(3,1) F(3,k);0 F(4,k)])/det([delta*GM3(3,1) delta*GM4(3,1);0 1]);
elseif nuslov1==3
GM3(4,k)=FGM43((k-0.5)*delta);
GM4(4,k)=FGM44;
%
if k==1
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
else
if k<=deltaP(1)
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
else
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)))-(-C(4,k-
deltaP(1)));
end
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)))-(-C(3,1:1:k-
1)*GM3(4,k:-1:2)+C(4,1:1:k-1)*GM4(4,k:-1:2)'));
end
C(3,k)=det([F(3,k) 0;F(4,k) delta*GM4(4,1)])/det([-1 0;delta*GM3(4,1) delta*GM4(4,1)]);
C(4,k)=det([-1 F(3,k);delta*GM3(4,1) F(4,k)])/det([-1 0;delta*GM3(4,1) delta*GM4(4,1)]);
elseif nuslov1==4
if k==1
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
else
if k<=deltaP(1)
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)'));
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)'));
else
F(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(3,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(3,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(3,k:-1:1)))-(-C(4,k-
deltaP(1)));
F(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*GS(4,k:-1:1)'-(C(1,1:1:k)*GM1(4,k:-1:1)+C(2,1:1:k)*GM2(4,k:-1:1)))-(-C(3,k-
deltaP(1)));
end
end
end
C(3,k)=det([F(3,k) 0;F(4,k) 1])/det([-1 0;0 1]);
C(4,k)=det([-1 F(3,k);0 F(4,k)])/det([-1 0;0 1]);
%
RS(3,k)=FRS3(Betta,Etta,A(1),A(2),h,x,(k-0.5)*delta); S(3,k)=delta*(T_2(1:1:k)*RS(3,k:-1:1)');
RS(4,k)=FRS4(Betta,Etta,A(1),A(2),h,x,(k-0.5)*delta); S(4,k)=delta*(T_2(1:1:k)*RS(4,k:-1:1)')-Etta*Temperature(k);
%
RM1(3,k)=FRM31(Etta,A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM2(3,k)=FRM32(Etta,A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM3(3,k)=FRM33(x,(k-0.5)*delta);
RM4(3,k)=FRM34(x,(k-0.5)*delta);
RM1(4,k)=FRM41(Etta,A(1),x,(k-0.5)*delta);
RM2(4,k)=FRM42(Etta,A(1),x,(k-0.5)*delta);
%
Svertka(3,1,k)=delta*(C(1,1:1:k)*RM1(3,k:-1:1)');
Svertka(3,2,k)=delta*(C(2,1:1:k)*RM2(3,k:-1:1)');
Svertka(3,3,k)=delta*(C(3,1:1:k)*RM3(3,k:-1:1)');
Svertka(3,4,k)=delta*(C(4,1:1:k)*RM4(3,k:-1:1)');
Svertka(4,1,k)=delta*(C(1,1:1:k)*RM1(4,k:-1:1)');
Svertka(4,2,k)=delta*(C(2,1:1:k)*RM2(4,k:-1:1)');
if k<=deltaP(2)
Svertka(4,3,k)=0;

```

```

else
    Svertka(4,3,k)=-C(3,k-deltaP(2));
end
if k<=deltaP(3)
    Svertka(4,4,k)=0;
else
    Svertka(4,4,k)=C(4,k-deltaP(3));
end
%
Peremecheniya(kx,k)=sum(Svertka(3,:,k))+S(3,k);
MehNapryageniya(kx,k)=sum(Svertka(4,:,k))+S(4,k);
end
x=round(100*(x+xdelta))/100;
end
close(wh);

```

```

function y=FT(number,t)
global BChastota;
tauI=2*(10^(-8))*((8.43*10^3)/(2*10^-6));
TI=2*tauI;
BChastota=4/tauI;
if number==1
    y=1;
elseif number==2
    if t<=tauI
        y=(1/tauI)*t;
    else
        y=1;
    end
elseif number==3
    if t<=tauI
        y=1;
    else
        y=0;
    end
elseif number==4
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*(1/(2*tauI))*t);
    else
        y=0;
    end
elseif number==5
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else
        y=0;
    end
elseif number==6
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else
        y=-1;
    end
elseif number==7
    y=sin(2*pi*BChastota*t);
elseif number==8
    if t<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*t))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==9
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*t);
    else
        y=0;
    end
end

```

```

else
    y=0;
end
elseif number==10
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI)))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==11
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI));
    else
        y=0;
    end
end
end

function y=FGM11(A1,t,nuslov)
x=0;
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    y=erfc((x/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    y=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t));
end

function y=FGM12(A1,t,nuslov)
x=0;
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    y=erfc(((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    y=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t));
end

function y=FGM21(A1,t,nuslov)
x=1;
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    y=erfc((x/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
    y=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t));
end

function y=FGM22(A1,t,nuslov)
x=1;
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    y=erfc(((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
    y=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t));
end

function y=FGM31(Etta,A1,t,nuslov)
x=0;
GM31=zeros(4,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    if t<=x
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM31(1)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t)))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM31(1)=exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM31(1)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else

```

```

        GM31(1)=-(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GM31(2)=1+erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
end
GM31(3)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t>1-x
    GM31(4)=-erfc(0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))+exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
end
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    if t<=x
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM31(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM31(1)=-A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM31(1)=A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM31(1)=A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GM31(2)=sqrt(A1/(pi*(t-x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
    end
    GM31(3)=-A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t>1-x
        GM31(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    end
end
y=(Etta/2)*sum(GM31);

function y=FGM32(Etta,A1,t,nuslov)
x=0;
GM32=zeros(4,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    if t<=1-x
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM32(1)=-(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM32(1)=-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM32(1)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM32(1)=(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        end
        GM32(2)=-1-erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
    end
    GM32(3)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t>x
        GM32(4)=erfc(0.5*sqrt(A1/(t-x)))-exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    end
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    if t<=1-x
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM32(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM32(1)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM32(1)=A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else

```



```

        GM32(1)=A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GM32(2)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
end
GM32(3)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
if t>x
    GM32(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))*exp(-A1/(4*(t-x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
end
end
y=(Etta/2)*sum(GM32);

function y=FGM33
y=1;

function y=FGM34(t)
if t<=1
    y=0;
else
    y=1;
end

function y=FGM41(Etta,A1,t,nuslov)
x=1;
GM41=zeros(4,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    if t<=x
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            RM31(1)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM41(1)=exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM41(1)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM41(1)=-(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
        end
        GM41(2)=1+erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
    end
    GM41(3)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t>1-x
        GM41(4)=-erfc(0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))+exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    end
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
    if t<=x
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM41(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM41(1)=-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM41(1)=A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM41(1)=A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
        end
        GM41(2)=sqrt(A1/(pi*(t-x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
    end
    GM41(3)=-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t>1-x
        GM41(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    end
end

```



```

end
y=(Etta/2)*sum(GM41);

function y=FGM42(Etta,A1,t,nuslov)
x=1;
GM42=zeros(4,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    if t<=1-x
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM42(1)=-(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM42(1)=-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM42(1)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM42(1)=(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        end
        GM42(2)=-1-erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
    end
    GM42(3)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t>x
        GM42(4)=erfc(0.5*sqrt(A1/(t-x)))-exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    end
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
    if t<=1-x
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM42(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GM42(1)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
    else
        if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GM42(1)=A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GM42(1)=A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        end
        GM42(2)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
    end
    GM42(3)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t>x
        GM42(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))*exp(-A1/(4*(t-x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    end
end
y=(Etta/2)*sum(GM42);

function y=FGM43(t)
if t<=1
    y=0;
else
    y=1;
end

function y=FRM44
y=1;

function y=FGS1(A1,A2,Betta,h,t,nuslov)
x=0;
GS1=zeros(2,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS1(1)=-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
end

```

```

else
    GS1(1)=-(2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-
    (Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
end
GS1(2)=exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS1(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-
        (x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS1(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*(2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-
        ((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS1(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
end
y=-(A2/(2*A1))*sum(GS1);

function y=FGS2(A1,A2,Betta,h,t,nuslov)
x=1;
GS2=zeros(2,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS2(1)=-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS2(1)=-(2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-
        (Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS2(2)=exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS2(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-
        (x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS2(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*(2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-
        ((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS2(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
end
y=-(A2/(2*A1))*sum(GS2);

function y=FGS3(Betta,Eta,A1,A2,h,t,nuslov)
x=0;
GS3=zeros(16,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(1)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(1)=-(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-
        (Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS3(2)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    GS3(7)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=x
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS3(5)=-exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS3(5)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS3(9)=2*exp((Betta*h)*(t-x));
    else
        GS3(3)=-exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS3(4)=erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
    end
end

```

```

if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    GS3(5)=exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    GS3(5)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
end
GS3(6)=-erfcx(sqrt((t-x)*A1));
GS3(8)=exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
GS3(9)=0;
end
GS3(14)=-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t<=1-x
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(12)=-2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(12)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS3(16)=exp(-(Betta*h)*(t+x));
else
    if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
        GS3(10)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    else
        GS3(10)=(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    end
    GS3(11)=-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(12)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(12)=(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS3(13)=-exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
    GS3(15)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    GS3(16)=0;
end
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1))>=0
        GS3(1)=-sqrt(A1/(pi*t))+(Betta*h)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1));
    else
        GS3(1)=-sqrt(A1/(pi*t))+(Betta*h)*(2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1)-erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)));
    end
    GS3(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+(1/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=0
        GS3(9)=-((Betta*h)^2)*exp((Betta*h)*t);
    else
        GS3(3)=-((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*t))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h)-A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+0.5*sqrt(A1/t));
        GS3(4)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*t))-(((Betta*h)^2)/A1)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1));
        GS3(9)=0;
    end
    GS3(14)=sqrt(A1/(pi*t))-A1*erfcx(sqrt(t*A1));
    if t<=1
        if (sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))-A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1))-exp(-(Betta*h)-A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))-A1*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(1/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS3(16)=-((Betta*h)*exp(-(Betta*h)*t));
    else
        if ((Betta*h)*sqrt((t-1)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1)))>=0

```

```

    GS3(10)=-((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-A1/(4*(t-1)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-A1/(4*(t-1)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1)));
    else
        GS3(10)=-((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-A1/(4*(t-1)))+(((Betta*h)^2)/A1)*(2*exp(-(Betta*h)+(t-1)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1))));
    end
    GS3(11)=-((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-(Betta*h))-(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))+A1*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))+A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1))-exp(-(Betta*h)-(A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(1/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS3(13)=sqrt(A1/(pi*(t-1)))*exp(-(Betta*h))-A1*exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1)*A1));
    GS3(15)=-(-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-A1/(4*(t-1)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1)))*erfcx(sqrt((t-1)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1)));
    GS3(16)=0;
end
end
y=-(Etta*A2/4)*((2*(Betta*h)/(((Betta*h)^2)-(A1^2)))*sum(GS3(1:2))+1/(((Betta*h)-A1))*(sum(GS3(3:9)))+(1/((Betta*h)+A1))*(sum(GS3(10:15))+2*GS3(16))));

function y=FGS3(Betta,Etta,A1,A2,h,t,nuslov)
x=0;
GS3=zeros(16,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==2)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(1)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(1)=-(-2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS3(2)=exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    GS3(7)=-exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=x
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS3(5)=-(-2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS3(5)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS3(9)=2*exp((Betta*h)*(t-x));
    else
        GS3(3)=-exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS3(4)=erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS3(5)=exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS3(5)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS3(6)=-erfcx(sqrt((t-x)*A1));
        GS3(8)=exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS3(9)=0;
    end
    GS3(14)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=1-x
        if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS3(12)=-(-2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS3(12)=-exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS3(16)=exp(-(Betta*h)*(t+x));
    end
end

```

```

else
  if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
    GS3(10)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
  else
    GS3(10)=(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
  end
  GS3(11)=-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
  if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
    GS3(12)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
  else
    GS3(12)=(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
  end
  GS3(13)=-exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
  GS3(15)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
  GS3(16)=0;
end
elseif (nuslov==3)|(nuslov==4)
  if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    GS3(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))+(Betta*h)*exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
  else
    GS3(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))+(Betta*h)*(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
  end
  GS3(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
  GS3(7)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
  if t<=x
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS3(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))+A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
    else
      GS3(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))+A1*exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS3(9)=- (Betta*h)*2*exp((Betta*h)*(t-x));
  else
    GS3(3)=(sqrt(A1)/(2*(t-x))-(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    GS3(4)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))-(((Betta*h)^2)/A1)*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS3(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))-A1*exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
      GS3(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS3(6)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))+A1*erfcx(sqrt((t-x)*A1));
    GS3(8)=- (sqrt(A1)/(2*(t-x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))-A1*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    GS3(9)=0;
  end
  GS3(14)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1/(4*t))-A1*exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
  if t<=1-x
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))-A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    else
      GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))-A1*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS3(16)=- (Betta*h)*exp(-(Betta*h)*(t+x));
  else

```

```

    if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
        GS3(10)=-((sqrt(A1)/(2*(t-1+x)))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+( ((Betta*h)^2)/A1)*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    else
        GS3(10)=-((sqrt(A1)/(2*(t-1+x)))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+( ((Betta*h)^2)/A1)*(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x))*((Betta*h)^2)/A1-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    end
    GS3(11)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS3(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS3(13)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-A1*exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
    GS3(15)=(sqrt(A1)/(2*(t-1+x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    GS3(16)=0;
end
end
y=-(Etta*A2/4)*((2*(Betta*h)/(((Betta*h)^2)-(A1^2)))*sum(GS3(1:2))+1/(((Betta*h)-A1))*(sum(GS3(3:9))+1/((Betta*h)+A1))*(sum(GS3(10:15))+2*GS3(16))));

function y=FGS4(Betta,Etta,A1,A2,h,t,nuslov)
x=1;
GS4=zeros(16,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS4(1)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS4(1)=-((2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS4(2)=exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    GS4(7)=-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=x
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(5)=-((2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GS4(5)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(9)=2*exp((Betta*h)*(t-x));
    else
        GS4(3)=-exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS4(4)=erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(5)=exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS4(5)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(6)=-erfcx(sqrt((t-x)*A1));
        GS4(8)=exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS4(9)=0;
    end
    GS4(14)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=1-x
        if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(12)=-((2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
        else
            GS4(12)=-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
    end
end

```

```

end
GS4(16)=exp(-(Beta*h)*(t+x));
else
if ((Beta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
GS4(10)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Beta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
else
GS4(10)=(2*exp(-(Beta*h)+(t-1+x)*((Beta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Beta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
end
GS4(11)=exp(-(Beta*h))*erfcx((Beta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
GS4(12)=exp(-(Beta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
else
GS4(12)=(2*exp(-(Beta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Beta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
end
GS4(13)=exp(-(Beta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
GS4(15)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
GS4(16)=0;
end
elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
if ((Beta*h)*sqrt(t/A1)-(1/2)*sqrt(A1/t))>=0
GS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))+(Beta*h)*exp(-(A1)/(4*t))*erfcx((Beta*h)*sqrt(t/A1)-(1/2)*sqrt(A1/t));
else
GS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))+(Beta*h)*(2*exp(-(Beta*h)+t*((Beta*h)^2)/A1)-exp(-(A1)/(4*t))*erfcx(-(Beta*h)*sqrt(t/A1)+(1/2)*sqrt(A1/t)));
end
GS4(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Beta*h))-(Beta*h)*exp(-(Beta*h))*erfcx((Beta*h)*sqrt(t/A1));
GS4(7)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Beta*h))+A1*exp(-(Beta*h))*erfcx(sqrt(t*A1));
if t<=1
if (sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t))>=0
GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))+A1*(2*exp(A1*(t-1))-exp(-(A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t)));
else
GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))+A1*exp(-(A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(1/2)*sqrt(A1/t));
end
GS4(9)=-((Beta*h)^2*exp((Beta*h)*(t-1)));
else
GS4(3)=(-(Beta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-(Beta*h)-A1/(4*(t-1)))+(((Beta*h)^2)/A1)*exp(-(Beta*h)-A1/(4*(t-1)))*erfcx((Beta*h)*sqrt((t-1)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1)));
GS4(4)=((Beta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))-(((Beta*h)^2)/A1)*erfcx((Beta*h)*sqrt((t-1)/A1));
if (sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t))>=0
GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))-A1*exp(-(A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(1/2)*sqrt(A1/t));
else
GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(A1)/(4*t))-A1*(2*exp(A1*(t-1))-exp(-(A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(1/2)*sqrt(A1/t)));
end
GS4(6)=-sqrt(A1/(pi*(t-1)))+A1*erfcx(sqrt((t-1)*A1));
GS4(8)=-(-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1)))*exp(-(Beta*h)-A1/(4*(t-1)))-A1*exp(-(Beta*h)-A1/(4*(t-1)))*erfcx(sqrt((t-1)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1)));
GS4(9)=0;
end
if t<=0
GS4(16)=-((Beta*h)*exp(-(Beta*h)*(t+1)));
else
if ((Beta*h)*sqrt(t/A1)-0.5*sqrt(A1/t))>=0
GS4(10)=-((Beta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*t))*exp(-A1/(4*t))+(((Beta*h)^2)/A1)*exp(-A1/(4*t))*erfcx((Beta*h)*sqrt(t/A1)-0.5*sqrt(A1/t));
else
GS4(10)=-((Beta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*t))*exp(-A1/(4*t))+(((Beta*h)^2)/A1)*(2*exp(-(Beta*h)+t*((Beta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*t))*erfcx(-(Beta*h)*sqrt(t/A1)+0.5*sqrt(A1/t)));
end
GS4(11)=((Beta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*t))*exp(-(Beta*h))-(((Beta*h)^2)/A1)*exp(-(Beta*h))*erfcx((Beta*h)*sqrt(t/A1));

```



```

    GS4(16)=0;
end
end
y=-((Etta*A2/4)*((2*(Betta*h)/(((Betta*h)^2)-(A1^2)))*sum(GS4(1:2))+1/(((Betta*h)-
A1))*(sum(GS4(3:9)))+1/(((Betta*h)+A1))*(sum(GS4(10:15))+2*GS4(16))));

function y=FGS4(Betta,Etta,A1,A2,h,t,nuslov)
x=1;
GS4=zeros(16,1);
if (nuslov==1)|(nuslov==3)
    if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        GS4(1)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        GS4(1)=-(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-
(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS4(2)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    GS4(7)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=x
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(5)=-2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS4(5)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(9)=2*exp((Betta*h)*(t-x));
    else
        GS4(3)=-exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS4(4)=erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
        if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(5)=exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS4(5)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(6)=-erfcx(sqrt((t-x)*A1));
        GS4(8)=exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
        GS4(9)=0;
    end
    GS4(14)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    if t<=1-x
        if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(12)=-2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-
x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS4(12)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(16)=exp(-(Betta*h)*(t+x));
    else
        if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
            GS4(10)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
        else
            GS4(10)=(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-
1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
        end
        GS4(11)=-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
        if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
            GS4(12)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
        else
            GS4(12)=(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-
x)/2)*sqrt(A1/t));
        end
        GS4(13)=-exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
        GS4(15)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
        GS4(16)=0;
    end
end

```



```

elseif (nuslov==2)|(nuslov==4)
  if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    GS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)+(Betta*h)*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
  else
    GS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)+(Betta*h)*(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
  end
  GS4(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
  GS4(7)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)+A1*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
  if t<=x
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)+A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
    else
      GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)+A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS4(9)=- (Betta*h)^2*exp((Betta*h)*(t-x));
  else
    GS4(3)=(sqrt(A1)/(2*(t-x))-(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    GS4(4)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))-(((Betta*h)^2)/A1)*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)-A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
      GS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS4(6)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))+A1*erfcx(sqrt((t-x)*A1));
    GS4(8)=- (sqrt(A1)/(2*(t-x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))-A1*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    GS4(9)=0;
  end
  GS4(14)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)-A1*exp(-(x^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
  if t<=1-x
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    else
      GS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-A1*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    GS4(16)=- (Betta*h)*exp(-(Betta*h)*(t+x));
  else
    if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
      GS4(10)=- (sqrt(A1)/(2*(t-1+x))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    else
      GS4(10)=- (sqrt(A1)/(2*(t-1+x))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    end
    GS4(11)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
      GS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)+A1*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
      GS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)+A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h))-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    GS4(13)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-A1*exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
  end

```

```

    GS4(15)=(sqrt(A1)/(2*(t-1+x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    GS4(16)=0;
end
end
y=-(Etta*A2/4)*((2*(Betta*h)/(((Betta*h)^2)-(A1^2)))*sum(GS4(1:2))+1/(((Betta*h)-A1))*(sum(GS4(3:9)))+(1/((Betta*h)+A1))*(sum(GS4(10:15))+2*GS4(16)));

function y=FProvC(A1,A2,Betta,h,t)
ProvC=zeros(2,1);
ProvC(1)=exp(-A1/(4*t))*erfcx(0.5*sqrt(A1/t)+(Betta*h)*sqrt(t/A1));
if (0.5*sqrt(A1/t)-(Betta*h)*sqrt(t/A1))<0
    ProvC(2)=2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h))-exp(-A1/(4*t))*erfcx(-0.5*sqrt(A1/t)+(Betta*h)*sqrt(t/A1));
else
    ProvC(2)=exp(-A1/(4*t))*erfcx(0.5*sqrt(A1/t)-(Betta*h)*sqrt(t/A1));
end
y(1,1)=(A2/(2*A1))*(sum(ProvC)*exp(-Betta*h)/2-exp(((Betta*h)^2)/A1));
y(2,1)=(A2/(2*A1))*(sum(ProvC)/2-exp(((Betta*h)^2)/A1-Betta*h));

function y=FRM11(A1,x,t)
y=erfc((x/2)*sqrt(A1/t));

function y=FRM12(A1,x,t)
y=erfc(((1-x)/2)*sqrt(A1/t));

function y=FRM21(A1,x,t)
y=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t));

function y=FRM22(A1,x,t)
y=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t));

function y=FRM31(Etta,A1,x,t)
RM31=zeros(4,1);
if t<=x
    if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM31(1)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RM31(1)=exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
else
    if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM31(1)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RM31(1)=-(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    RM31(2)=1+erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
end
RM31(3)=-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t>1-x
    RM31(4)=-erfc(0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))+exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
end
y=(Etta/2)*sum(RM31);

function y=FRM31_m(Etta,A1,x,t)
RM31=zeros(6,1);
if t<=x
    if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM31(3)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RM31(3)=exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
else
end
end

```

```

RM31(1)=1;
if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RM31(3)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    RM31(3)=-(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
end
RM31(4)=erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
end

if t>1-x
    RM31(2)=-erfc(0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    RM31(5)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
end
RM31(6)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
y=(Etta/2)*sum(RM31);

function y=FRM31_Stat(Etta,A1,x,t)
y=-Etta*(2*sqrt(t/(pi*A1))*exp(-(x^2)*A1)/(4*t))-x*erfc((x/2)*sqrt(A1/t));

function y=FRM32(Etta,A1,x,t)
RM32=zeros(4,1);
if t<=1-x
    if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM32(1)=-((2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RM32(1)=-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
else
    if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM32(1)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RM32(1)=(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    RM32(2)=-1-erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
end
RM32(3)=exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
if t>x
    RM32(4)=erfc(0.5*sqrt(A1/(t-x)))-exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
end
y=(Etta/2)*sum(RM32);

function y=FRM32_Stat(Etta,A1,x,t)
y=Etta*(2*sqrt(t/(pi*A1))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))-(1-x)*erfc(((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));

function y=FRM33(x,t)
if t<=x
    y=0;
else
    y=1;
end

function y=FRM34(x,t)
if t<=1-x
    y=0;
else
    y=1;
end

function y=FRM41(Etta,A1,x,t)
RM41=zeros(4,1);
if t<=x
    if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0

```

```

    RM41(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t)));
else
    RM41(1)=-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
end
else
    if (sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM41(1)=A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RM41(1)=A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    RM41(2)=sqrt(A1/(pi*(t-x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-x)));
end
RM41(3)=-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t>1-x
    RM41(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x))+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
end
y=(Etta/2)*sum(RM41);

function y=FRM42(Etta,A1,x,t)
RM42=zeros(4,1);
if t<=1-x
    if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM42(1)=-A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RM42(1)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
else
    if (sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RM42(1)=A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RM42(1)=A1*(2*exp(A1*(t-1+x))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    RM42(2)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))-A1*erfcx(sqrt(A1*(t-1+x)));
end
RM42(3)=-A1*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(A1*t)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
if t>x
    RM42(4)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))*exp(-A1/(4*(t-x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt(A1*(t-x))+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
end
y=(Etta/2)*sum(RM42);

function y=FRS1(A1,A2,Betta,h,x,t)
RS1=zeros(2,1);
if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS1(1)=-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    RS1(1)=-((2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-(x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
end
RS1(2)=exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
y=(A2/(2*A1))*sum(RS1);

function y=FRS2(A1,A2,Betta,h,x,t)
RS2=zeros(2,1);
if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS2(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    RS2(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*((2*exp(t*((Betta*h)^2)/A1-(Betta*h)*x)-exp(-((x^2)*A1/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
end
RS2(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-((1-x)^2)*A1/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
y=(A2/(2*A1))*sum(RS2);

```

```

function y=FRS3(Betta,Etta,A1,A2,h,x,t)
RS3=zeros(16,1);
if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS3(1)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    RS3(1)=-(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-
    (Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
end
RS3(2)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
RS3(7)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
if t<=x
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS3(5)=-2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RS3(5)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS3(9)=2*exp((Betta*h)*(t-x));
else
    RS3(3)=-exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    RS3(4)=erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS3(5)=exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RS3(5)=(2*exp(A1*(t-x))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS3(6)=-erfcx(sqrt((t-x)*A1));
    RS3(8)=exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    RS3(9)=0;
end
RS3(14)=-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t<=1-x
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS3(12)=-2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RS3(12)=-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS3(16)=exp(-(Betta*h)*(t+x));
else
    if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
        RS3(10)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    else
        RS3(10)=(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    end
    RS3(11)=-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS3(12)=exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RS3(12)=(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS3(13)=-exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
    RS3(15)=exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
    RS3(16)=0;
end
y=(Etta*A2/4)*(((Betta*h)/((Betta*h)^2-(A1^2)))*sum(RS3(1:2))+(1/((Betta*h)-
A1))*(sum(RS3(3:9)))+(1/((Betta*h)+A1))*(sum(RS3(10:15))+2*RS3(16))));

```

```

function y=FRS3_Stat(Betta,Etta,A1,A2,h,x,t)
RS3=zeros(4,1);
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS3(1)=erfc((x/2)*sqrt(A1/t))-exp(-(x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));

```

```

RS3(2)=2*exp(-(Betta*h)*x+(((Betta*h)^2)*t)/A1)-exp(-(Betta*h)*x*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)));
else
    RS3(1)=erfc((x/2)*sqrt(A1/t))+exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    RS3(2)=-exp(-(Betta*h)*x)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1));
end
RS3(3)=erfc(((1-x)/2)*sqrt(A1/t))-exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t))*exp(-
(Betta*h));
RS3(4)=exp(-(Betta*h)*x)*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1));
y=(Etta*A2/(2*A1*(Betta*h)))*sum(RS3(1:4));

function y=FRS4(Betta,Etta,A1,A2,h,x,t)
RS4=zeros(16,1);
if ((Betta*h)*sqrt(t/A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)-
(x/2)*sqrt(A1/t));
else
    RS4(1)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+(Betta*h)*(2*exp(-(Betta*h)*x+t*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-
((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
end
RS4(2)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(((1-x)^2)*A1)/(4*t)-(Betta*h))-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)-(((1-
x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
RS4(7)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*exp(-(Betta*h)-(((1-
x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
if t<=x
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-
(x/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))+A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS4(9)=-(Betta*h)*2*exp((Betta*h)*(t-x));
else
    RS4(3)=(sqrt(A1)/(2*(t-x))-(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-
x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x)));
    RS4(4)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))-(((Betta*h)^2)/A1)*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A1));
    if (sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-(x/2)*sqrt(A1/t));
    else
        RS4(5)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))-A1*(2*exp(A1*(t-x))-exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-
sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t)));
    end
    RS4(6)=-sqrt(A1/(pi*(t-x)))+A1*erfcx(sqrt((t-x)*A1));
    RS4(8)=-((sqrt(A1)/(2*(t-x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-x)))*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-x)))-A1*exp(-(Betta*h)-A1/(4*(t-
x)))*erfcx(sqrt((t-x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-x))));
    RS4(9)=0;
end
RS4(14)=sqrt(A1/(pi*t))*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))-A1*exp(-((x^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)+(x/2)*sqrt(A1/t));
if t<=1-x
    if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
        RS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))-A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-
(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
    else
        RS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))-A1*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-
sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
    end
    RS4(16)=-(Betta*h)*exp(-(Betta*h)*(t+x));
else
    if ((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x)))>=0
        RS4(10)=-((sqrt(A1)/(2*(t-1+x))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-
1+x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1)-0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    else
        RS4(10)=-((sqrt(A1)/(2*(t-1+x))+(Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-
1+x)))+(((Betta*h)^2)/A1)*(2*exp(-(Betta*h)+(t-1+x)*((Betta*h)^2)/A1)-exp(-A1/(4*(t-1+x)))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt((t-
1+x)/A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x))));
    end
end

```

```

end
RS4(11)=((Betta*h)/sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-(((Betta*h)^2)/A1)*exp(-
(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1+x)/A1));
if (sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t))>=0
    RS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*exp(-(Betta*h))-(((1-
x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(sqrt(t*A1)-((1-x)/2)*sqrt(A1/t));
else
    RS4(12)=-sqrt(A1/(pi*t))*exp(-(Betta*h)-(((1-x)^2)*A1)/(4*t))+A1*(2*exp(-(Betta*h)+A1*(t-1+x))-exp(-(Betta*h)-
(((1-x)^2)*A1)/(4*t))*erfcx(-sqrt(t*A1)+((1-x)/2)*sqrt(A1/t)));
end
RS4(13)=sqrt(A1/(pi*(t-1+x)))*exp(-(Betta*h))-A1*exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1));
RS4(15)=(sqrt(A1)/(2*(t-1+x))-sqrt(A1))*sqrt(1/(pi*(t-1+x)))*exp(-A1/(4*(t-1+x)))+A1*exp(-A1/(4*(t-
1+x)))*erfcx(sqrt((t-1+x)*A1)+0.5*sqrt(A1/(t-1+x)));
RS4(16)=0;
end
y=(Etta*A2/4)*((2*(Betta*h)/(((Betta*h)^2)-(A1^2)))*sum(RS4(1:2)))+(1/((Betta*h)-
A1))*(sum(RS4(3:9)))+(1/((Betta*h)+A1))*(sum(RS4(10:15))+2*RS4(16)));

function y=FW1(A,Betta,Etta,h,t)
F=zeros(1,3);
%F1
if t<=0.5
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/t)-sqrt(A(1)*t)));
elseif t<=1
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))-2*exp(-A(1)*(1-t)-(Betta*h))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-
0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t)));
else
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t))-
exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt(A(1)*(t-1)))+exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(sqrt(A(1)*(t-1))+0.5*sqrt(A(1)/(t-1))));
end
%F2
if t<=1
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t)));
elseif t<=1+0.5*(A(1)/(Betta*h))
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(((Betta*h)/sqrt(A(1)))^2)*((A(1)/(Betta*h))+1-t))-
exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1)))-exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/(t-1))-(Betta*h)*sqrt((t-
1)/A(1))));
else
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t))-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1)))+exp(-
(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/(t-1))+(Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1))));
end
%F3
if t<=1
    F(3)=0.5*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*exp(-(Betta*h)*t);
else
    F(3)=0;
end
y=sum(F);

function y=FW2(A,Etta,t)
if t<=1
    y=0.5*Etta*(1-erfcx(sqrt(A(1)*t)));
else
    y=0.5*Etta*(1-erfcx(sqrt(A(1)*t))-erfc(0.5*sqrt(A(1)/(t-1)))+exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/(t-
1))+sqrt(A(1)*(t-1))));
end

function y=FW3(A,Etta,t)
if t<=0.5
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/t)-sqrt(A(1)*t)));

```

```

elseif t<=1
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-A(1)*(1-t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t)));
else
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t))+1+erfcx(sqrt(A(1)*(t-1))));
end

```


Додаток В Двовимірна нестационарна задача

```

clear Alpha Betta Hi Kappa v Yung Puason h x I0 Lambda Mu Bz Ct Etta A a delta N T T_2 Temperature Temper_Tochn
TPotok TepPotok_Tochn tuslov;
global BChastota;
Alpha=2.33*10^-6; Betta=1.2*10^6; Hi=8.8*10^-5; Kappa=156; v=8.43*10^3; Yung=10^11; Puason=0.27;
MyK=2;
%h=MyK*10^-4; x=0; grafnumb=2;
h=1/Betta; z=1; grafnumb=1;
a=(10^-3)/h; x=0;
Chastota=0.5*(1/MyK)*10^9;% BChastota=1;%4*Chastota*h/(2*v);
LinTyp='-b';
LinWid=3;
%
I0=10^2;
%
%
Lambda=Yung*Puason/((1+Puason)*(1-2*Puason)); Mu=Yung/(2+2*Puason); Bz=3*Lambda+2*Mu; Ct=Lambda+2*Mu;
Etta=Bz/Ct;
A=[(v*h/Hi) -(Alpha*Betta*(h^2)*I0/(2*Kappa))];
%
delta=0.0125; N=2.8*10^4;
%
T=zeros(1,N); T_2=zeros(1,N);
%
Temperature=zeros(1,N); TPotok=zeros(1,N);
%Peremecheniya=zeros(1,N); MehNapryageniya=zeros(1,N);
%Peremecheniya_Stat=zeros(1,N);
%
tuslov=3;
%
%
wh=waitbar(0,'Please wait ...');
for k=1:N
    waitbar(k/N,wh);
    T(k)=FT(tuslov,k*delta);
    T_2(k)=FT(tuslov,(k-0.5)*delta);
%
%Block of calculation of Temperature
%
    Temper_Tochn(k)=FTemper_Tochn(A,a,Betta,h,x,z,(k-0.5)*delta);
    TepPotok_Tochn(k)=FTepPotok_Tochn(A,a,Betta,h,x,z,(k-0.5)*delta);
%
    Temperature(k)=delta*(T_2(1:1:k)*Temper_Tochn(k:-1:1));
    TPotok(k)=delta*(T_2(1:1:k)*TepPotok_Tochn(k:-1:1));
end
close(wh);
if N>1
    t=[1:N].*delta.*h./v;
    figure(1);
    hold on
    plot(t,T,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
    Title('Modulation');
    hold off
    figure(2);
    hold on
    %subplot(2,1,grafnumb);
    plot(t,Temperature./Alpha,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
    Title('Temperature');
    hold off
    figure(3);
    hold on
    %subplot(2,1,grafnumb);
    plot(t,TPotok./(Alpha*h),LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')

```

```

    Title('TPotok');
    hold off
end

function y=FT(number,t)
global BChastota;
tauI=1*(10^(-8))*((8.43*10^3)*(1.2*10^6));
TI=2*tauI;
BChastota=4/tauI;
if number==1
    y=1;
elseif number==2
    if t<=tauI
        y=(1/tauI)*t;
    else
        y=1;
    end
elseif number==3
    if t<=tauI
        y=1;
    else
        y=0;
    end
elseif number==4
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*(1/(2*tauI))*t);
    else
        y=0;
    end
elseif number==5
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else
        y=0;
    end
elseif number==6
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else
        y=-1;
    end
elseif number==7
    y=sin(2*pi*BChastota*t);
elseif number==8
    if t<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*t))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==9
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*t);
    else
        y=0;
    end
elseif number==10
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI)))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==11
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI));
    else
        y=0;
    end
end

```

```

else
    y=0;
end
end

function y=FTemper_Tochn(A,a,Betta,h,x,z,t)
L=0; F=0;
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    L=exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-2*exp(-(Betta*h)*z+(t*((Betta*h)^2)/A(1)));
else
    L=-exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
F=0.5*(erf((x+a)/(2*sqrt(t/A(1))))-erf((x-a)/(2*sqrt(t/A(1)))));
y=(A(2)/(2*A(1)))*L*F;

function y=FTepPotok_Tochn(A,a,Betta,h,x,z,t)
L=0; F=0;
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    L=-exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(Betta*h)*z+(t*((Betta*h)^2)/A(1)));
else
    L=exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
F=0.5*(erf((x+a)/(2*sqrt(t/A(1))))-erf((x-a)/(2*sqrt(t/A(1)))));
y=(Betta*h)*(A(2)/(2*A(1)))*L*F;

function y=FTemper_Ryadi(A,a,Betta,h,x,z,t,L,n)
F=0; y=0;
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    F=exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-2*exp(-(Betta*h)*z+(t*((Betta*h)^2)/A(1)));
else
    F=-exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
k=1:n;
bk(1)=(a)/(L);
bk(2:n+1)=(2./(k*pi)).*sin((k*pi*a)/L).*exp(-(((k*pi)/L).^2*t/A(1)).*cos((k*pi*x)/L);
y=sum(bk)*(A(2)/(2*A(1)))*F;

function y=FTepPotok_Ryadi(A,a,Betta,h,x,z,t,L,n)
F=0; y=0;
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    F=-exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(Betta*h)*z+(t*((Betta*h)^2)/A(1)));
else
    F=exp(-(z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(z/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((z/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(z/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
k=1:n;
bk(1)=(a)/(L);
bk(2:n+1)=(2./(k*pi)).*sin((k*pi*a)/L).*exp(-(((k*pi)/L).^2*t/A(1)).*cos((k*pi*x)/L);
y=sum(bk)*(Betta*h)*(A(2)/(2*A(1)))*F;

```

Додаток Г Двовимірна стаціонарна задача

```

clear Alpha Betta Hi Kappa v Yung Puason h x I0 Lambda Mu Bz Ct Etta A delta N deltaP T T_2 RM_ RM1 RM2 RM3 RM4
RS_ RS GM_ GM1 GM2 GM3 GM4 GS_ GS F S C Temperature TPotok Peremecheniya Peremecheniya_Stat MehNapryageniya
tuslov nuslov nuslov1;
global BChastota;
Alpha=2.33*10^-6; Betta=1.2*10^6; Hi=8.8*10^-5; Kappa=156; v=8.43*10^3; Yung=10^11; Puason=0.27;
MyK=2;
%h=MyK*10^-4; x=0; grafnumb=2;
h=1/Betta; x=1; grafnumb=1;
Chastota=0.5*(1/MyK)*10^9;% BChastota=1;%4*Chastota*h/(2*v);
LinTyp='-b';
LinWid=3;
%
I0=10^2;
%
%
Lambda=Yung*Puason/((1+Puason)*(1-2*Puason)); Mu=Yung/(2+2*Puason); Bz=3*Lambda+2*Mu; Ct=Lambda+2*Mu;
Etta=Bz/Ct;
A=[(v*h/Hi) -(Alpha*Betta*(h^2)*I0/(2*Kappa))];
%
delta=0.00000125; N=2.8*10^4; deltaP=[floor(1/delta) floor(x/delta) floor((1-x)/delta)];
%
T=zeros(1,N); T_2=zeros(1,N);
%
Temperature=zeros(1,N); TPotok=zeros(1,N);
Peremecheniya=zeros(1,N); MehNapryageniya=zeros(1,N);
Peremecheniya_Stat=zeros(1,N);
%
tuslov=2;
%
%
wh=waitbar(0,'Please wait ...');
for k=1:N
    waitbar(k/N,wh);
    T(k)=FT(tuslov,k*delta);
    T_2(k)=FT(tuslov,(k-0.5)*delta);
%
%Block of calculation of Temperature
%
    TemperSver(k)=FTemperSver(A,Betta,h,x,(k-0.5)*delta);
    TeplovPotokSver(k)=FTeplovPotokSver(A,Betta,h,x,(k-0.5)*delta);
    PeremSver(k)=FPeremSver(A,Betta,Etta,h,x,(k-0.5)*delta);
    Perem_StatSver(k)=FU_Stat(A,Betta,Etta,h,x,(k-0.5)*delta);
    SigmaSver(k)=FSigmaSver(A,Betta,Etta,h,x,(k-0.5)*delta);
%
    Temperature(k)=delta*(T_2(1:1:k)*TemperSver(k:-1:1));
    TPotok(k)=delta*(T_2(1:1:k)*TeplovPotokSver(k:-1:1));
    Peremecheniya(k)=delta*(T_2(1:1:k)*PeremSver(k:-1:1));
    Peremecheniya_Stat(k)=delta*(T_2(1:1:k)*Perem_StatSver(k:-1:1));
    MehNapryageniya(k)=delta*(T_2(1:1:k)*SigmaSver(k:-1:1))-Etta*Temperature(k);
end
pogr=abs((Peremecheniya-Peremecheniya_Stat)./Peremecheniya)*100;
close(wh);
if N>1
    t=[1:N].*delta.*h./v;
    figure(1);
    hold on
    plot(t,T,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
    Title('Modulation');
    hold off
    %figure(2);
    %hold on

```

```

%subplot(2,1,grafnumb);
%plot(t,Temperature./Alpha,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
%Title('Temperature');
%hold off
%figure(3);
%hold on
%subplot(2,1,grafnumb);
%plot(t,TPotok./(Alpha*h),LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
%Title('TPotok');
%hold off
figure(4);
hold on
%subplot(2,1,grafnumb);
subplot(2,1,1);
plot(t,Peremecheniya.*h,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
Title('Peremecheniya');
hold off
hold on
subplot(2,1,2);
plot(t,Peremecheniya_Stat.*h,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
Title('Peremecheniya_S_t_a_t');
hold off
figure(5);
hold on
%subplot(2,1,grafnumb);
plot(t,MehNapryageniya.*Ct,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
Title('MehNapryageniya');
hold off
figure(6);
hold on
semilogy(t,pogr,LinTyp,'LineWidth',LinWid); grid on; set(gca,'grid','-')
Title('Pogreschnost, %');
hold off
end

function y=FT(number,t)
global BChastota;
tauI=2*(10^(-12))*((8.43*10^3)*(1.2*10^6));
TI=2*tauI;
BChastota=4/tauI;
if number==1
    y=1;
elseif number==2
    if t<=tauI
        y=(1/tauI)*t;
    else
        y=1;
    end
elseif number==3
    if t<=tauI
        y=1;
    else
        y=0;
    end
elseif number==4
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*(1/(2*tauI))*t);
    else
        y=0;
    end
elseif number==5
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else

```

```

        y=0;
    end
elseif number==6
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=1;
    else
        y=-1;
    end
elseif number==7
    y=sin(2*pi*BChastota*t);
elseif number==8
    if t<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*t))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==9
    if t<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*t);
    else
        y=0;
    end
elseif number==10
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=(1+sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI)))/2;
    else
        y=0;
    end
elseif number==11
    if (t-floor(t/TI)*TI)<=tauI
        y=sin(2*pi*BChastota*(t-floor(t/TI)*TI));
    else
        y=0;
    end
end

```

```

function y=FTemperSver(A,Betta,h,x,t)
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    y=(A(2)/(2*A(1)))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-2*exp(-(Betta*h)*x+(t*((Betta*h)^2)/A(1))));
else
    y=(A(2)/(2*A(1)))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end

```

```

function y=FTeplovPotokSver(A,Betta,h,x,t)
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    y=((Betta*h)*A(2))/(2*A(1))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(Betta*h)*x+(t*((Betta*h)^2)/A(1))));
else
    y=((Betta*h)*A(2))/(2*A(1))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end

```

```

function y=FPeremSver(A,Betta,Etta,h,x,t)
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    yu(1)=-(A(1)/(2*Betta*h))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-2*exp(-(Betta*h)*x+(t*((Betta*h)^2)/A(1))));
else
    yu(1)=-(A(1)/(2*Betta*h))*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))-(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
if t<=x

```

```

if (-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    yu(2)=-((Betta*h)/A(1))*(-0.5*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t)))+erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t)));
else
    yu(2)=-((Betta*h)/A(1))*(-0.5*(2*exp(A(1)*(t-x))+exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-
exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)-(x/2)*sqrt(A(1)/t)))+erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
yu(3)=(A(1)/(Betta*h))*(erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
yu(4)=-0.5*(exp((Betta*h)*(t-x))-exp(-(Betta*h)*(t+x)));
yu(5)=-(A(1)/(2*Betta*h))*(exp((Betta*h)*(t-x))+exp(-(Betta*h)*(t+x)));
else
    if (-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
        yu(2)=-((Betta*h)/A(1))*(exp(A(1)*(t-x))-erfcx(sqrt(A(1)*(t-x)))-0.5*(exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-
sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t)))+erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t)));
    else
        yu(2)=-((Betta*h)/A(1))*(-erfcx(sqrt(A(1)*(t-x)))-0.5*(exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)-
(x/2)*sqrt(A(1)/t)))+erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t)));
    end
    yu(3)=-erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A(1)))+(A(1)/(Betta*h))*(erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
    yu(4)=0.5*(exp(-(Betta*h)*(t-x))+exp(-(Betta*h)*(t+x)));
    yu(5)=-(A(1)/(2*Betta*h))*(exp(-(Betta*h)*(t-x))+exp(-(Betta*h)*(t+x)));
end
y=((Etta*A(2))/((A(1)^2)-((Betta*h)^2)))*sum(yu);

```

```

function y=FU_Stat(A,Betta,Etta,h,x,t)
if ((x/2)*sqrt(A(1)/t)-(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))>=0
    y=-Etta*(A(2)/(A(1)*Betta*h))*(0.5*(exp(-(x^2)*A(1))/(4*t))*erfcx((x/2)*sqrt(A(1)/t)+(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-
((x^2)*A(1))/(4*t))*erfcx((x/2)*sqrt(A(1)/t)-(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))-erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
(Betta*h)*x+((Betta*h)^2)/A(1))*t);
else
    y=-Etta*(A(2)/(A(1)*Betta*h))*(0.5*(exp(-(x^2)*A(1))/(4*t))*erfcx((x/2)*sqrt(A(1)/t)+(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))-exp(-
((x^2)*A(1))/(4*t))*erfcx((x/2)*sqrt(A(1)/t)-(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))-erfc((x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end

```

```

function y=FSigmaSver(A,Betta,Etta,h,x,t)
if (-(Betta*h)*sqrt(t/A(1))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
    ys(1)=(A(1)/2)*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-(Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-2*exp(-(Betta*h)*x+(t*((Betta*h)^2)/A(1))));
else
    ys(1)=(A(1)/2)*(-exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))-(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t)));
end
if t<=x
    if (-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
        ys(2)=(Betta*h)*(-0.5*(exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))));
    else
        ys(2)=(Betta*h)*(-0.5*(2*exp(A(1)*(t-x))-exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)-(x/2)*sqrt(A(1)/t))));
    end
    ys(3)=-A(1)*exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t);
    ys(4)=((Betta*h)/2)*(exp((Betta*h)*(t-x))-exp(-(Betta*h)*(t+x)));
    ys(5)=(A(1)/2)*(exp((Betta*h)*(t-x))+exp(-(Betta*h)*(t+x)));
else
    if (-sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))>=0
        ys(2)=(Betta*h)*(sqrt(1/(A(1)*pi)*(t-x))+exp(A(1)*(t-x))-erfcx(sqrt(A(1)*(t-x)))-0.5*(-exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))+exp(-(x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(-
sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))));
    else

```

```

        ys(2)=(Betta*h)*(sqrt(1/(A(1)*pi*(t-x)))-erfcx(sqrt(A(1)*(t-x)))-0.5*(-exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)+(x/2)*sqrt(A(1)/t))-exp(-((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx(sqrt(A(1)*t)-(x/2)*sqrt(A(1)/t))));
    end
    ys(3)=-((Betta*h)/sqrt(A(1)*pi*(t-x)))+(((Betta*h)^2)/A(1))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-x)/A(1)))-A(1)*exp(-
((x/2)^2*(A(1)/t))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+(x/2)*sqrt(A(1)/t));
    ys(4)=((Betta*h)/2)*(exp(-(Betta*h)*(t-x))-exp(-(Betta*h)*(t+x)));
    ys(5)=(A(1)/2)*(-exp(-(Betta*h)*(t-x))+exp(-(Betta*h)*(t+x)));
end
y=((Etta*A(2))/((A(1)^2)-((Betta*h)^2)))*sum(ys);

function y=FW1(A,Betta,Etta,h,t)
F=zeros(1,3);
%F1
if t<=0.5
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/t)-sqrt(A(1)*t)));
elseif t<=1
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))-2*exp(-(A(1)*(1-t)-(Betta*h)))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-
0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t)));
else
    F(1)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx(sqrt(A(1)*t))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t))-
exp(-(Betta*h))*erfcx(sqrt(A(1)*(t-1)))+exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(sqrt(A(1)*(t-1))+0.5*sqrt(A(1)/(t-1))));
end
%F2
if t<=1
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t)));
elseif t<=1+0.5*(A(1)/(Betta*h))
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(((Betta*h)/sqrt(A(1)))^2)*((A(1)/(Betta*h))+1-t))-
exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1)))-exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/(t-1))-(Betta*h)*sqrt((t-
1)/A(1))));
else
    F(2)=0.25*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*(-erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1)))+exp(-(Betta*h)-
(A(1)/(4*t)))*erfcx((Betta*h)*sqrt(t/A(1))+0.5*sqrt(A(1)/t))-exp(-(Betta*h))*erfcx((Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1)))+exp(-
(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/(t-1))+(Betta*h)*sqrt((t-1)/A(1))));
end
%F3
if t<=1
    F(3)=0.5*Etta*(A(2)/(A(1)+(Betta*h)))*exp(-(Betta*h)*t);
else
    F(3)=0;
end
y=sum(F);

function y=FW2(A,Etta,t)
if t<=1
    y=0.5*Etta*(1-erfcx(sqrt(A(1)*t)));
else
    y=0.5*Etta*(1-erfcx(sqrt(A(1)*t))-erfc(0.5*sqrt(A(1)/(t-1)))+exp(-(A(1)/(4*(t-1)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/(t-
1))+sqrt(A(1)*(t-1))));
end

function y=FW3(A,Etta,t)
if t<=0.5
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))+exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(0.5*sqrt(A(1)/t)-sqrt(A(1)*t)));
elseif t<=1
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))+2*exp(-(A(1)*(1-t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t)));
else
    y=0.5*Etta*(-erfc(0.5*sqrt(A(1)/t))-exp(-(A(1)/(4*t)))*erfcx(-0.5*sqrt(A(1)/t)+sqrt(A(1)*t))+1+erfcx(sqrt(A(1)*(t-1))));
end

```


Додаток Д Одновимірна стаціонарна задача

```

clear all
%Параметры слоев
Alpha=[2.33*10^-6 2.33*10^-6 2.33*10^-6]; Beta=[1.2*10^6 1.2*10^6 1.2*10^6]; Hi=[8.8*10^-5 8.8*10^-5 8.8*10^-5];
Kappa=[156 156 156]; Yung=[10^11 10^11 10^11]; Puason=[0.27 0.27 0.27]; v=[8.43*10^3 8.43*10^3 8.43*10^3];
%Alpha=[2.33*10^-6 7.44*10^-6 2.33*10^-6]; Beta=[1.2*10^6 10^6 1.2*10^6]; Hi=[8.8*10^-5 6.4*10^-5 8.8*10^-5];
Kappa=[156 81 156]; Yung=[10^11 0.9*10^11 10^11]; Puason=[0.27 0.3 0.27]; v=[8.43*10^3 5.15*10^3 8.43*10^3];
%Получение дополнительных констант
Lambda=Yung.*Puason./((1+Puason).*(1-2*Puason)); Mu=Yung./(2+2*Puason); Bz=3*Lambda+2*Mu;
Ct=Lambda+2*Mu; Etta=Bz./Ct;
%Ввод параметров обработки
I0=10^25;
MyGraf='b',
%-----
fn=10^2;
fs=10^1;
fk=fn;%7*10^4;
%-----
L=1*10^-4;
%-----
xn=0;
xs=10^-6;
xk=xn;
%-----
dn=(3*L/8);
ds=10^-5;
dk=dn;%(3*L/4)-(L/10);
%-----
d1n=(L/4);
d1s=10^-6;
d1k=d1n;
%-----
k1=zeros(12,1); k2=zeros(12,1); k3=zeros(12,1); k4=zeros(12,1); k5=zeros(12,1); k6=zeros(12,1); k7=zeros(12,1);
k8=zeros(12,1); k9=zeros(12,1); k10=zeros(12,1); k11=zeros(12,1); k12=zeros(12,1); f=zeros(12,1);
%Программа
Params;
if fn==fk
    Chast=fn;
    Omega=2*pi*Chast;
    WParams;
    if xn==xk
        x=xn;
        if dn==dk
            d=dn;
            if d1n==d1k
                d1=d+d1n;
                MakeKoeff;
                Result;
                Peremechenie;
                U
            else
                md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mU(1:nd1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d1. ');
                for d1step=1:nd1
                    d1=d+md1(d1step);
                    waitbar(d1step/nd1,h);
                    if d1<L
                        MakeKoeff;
                        Result;
                        Peremechenie;
                        mU(d1step)=U;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
close(h);
figure(1)
plot(md1,abs(mU),MyGraf)
xlabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
figure(2)
plot(md1,angle(mU),MyGraf)
xlabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
end
else
if d1n==d1k
md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mU(1:nd)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d. ');
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
d1=d+d1n;
waitbar(dstep/nd,h);
if d1<L
MakeKoeff;
Result;
Peremechenie;
mU(dstep)=U;
end
end
close(h);
figure(1)
plot(md,abs(mU),MyGraf)
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
figure(2)
plot(md,angle(mU),MyGraf,'FontName','Times New Roman Cyr')
xlabel('d, м')
Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
else
md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
mU(1:nd1,1:nd)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d&d1. ');
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
for d1step=1:nd1
d1=d+md1(d1step);
waitbar(((dstep-1)*nd1+d1step)/(nd*nd1),h);
if d1<L
MakeKoeff;
Result;
Peremechenie;
mU(d1step,dstep)=U;
end
end
end
close(h);
figure(1)
mesh(md,md1,abs(mU))
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
figure(2)
mesh(md,md1,angle(mU))
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
end
end
else

```

```

if dn==dk
    d=dn;
    if d1n==d1k
        d1=d+d1n;
        mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); mU(1:nx)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array x. ');
        for xstep=1:nx
            x=L+mx(xstep);
            waitbar(xstep/nx,h);
            MakeKoeff;
            Result;
            Peremechenie;
            mU(xstep)=U;
        end
        close(h);
        figure(1)
        plot(mx,abs(mU))
        xlabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        figure(2)
        plot(mx,angle(mU))
        xlabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
    else
        mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
        mU(1:nd1,1:nx)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array x&d1. ');
        for xstep=1:nx
            x=mx(xstep);
            for d1step=1:nd1
                d1=d+md1(d1step);
                waitbar(((xstep-1)*nd1+d1step)/(nx*nd1),h);
                if d1<L
                    MakeKoeff;
                    Result;
                    Peremechenie;
                    mU(d1step,xstep)=U;
                end
            end
        end
        close(h);
        figure(1)
        mesh(mx,md1,abs(mU))
        xlabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        figure(2)
        mesh(mx,md1,angle(mU))
        xlabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
    end
else
    if d1n==d1k
        mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mU(1:nd,1:nx)=0;
        h=waitbar(0,'Please wait. Array x&d. ');
        for xstep=1:nx
            x=mx(xstep);
            for dstep=1:nd
                d=md(dstep);
                d1=d+d1n;
                waitbar(((xstep-1)*nd+dstep)/(nx*nd),h);
                if d1<L
                    MakeKoeff;
                    Result;
                    Peremechenie;

```



```

xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
else
    mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
    mU(1:nd1,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d1. ');
    for fstep=1:nf
        Omega=2*pi*mChast(fstep);
        WParametrs;
        for d1step=1:nd1
            d1=d+md1(d1step);
            waitbar(((fstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nd1),h);
            if d1<L
                MakeKoeff;
                Result;
                Peremechenie;
                mU(d1step,fstep)=U;
            end
        end
    end
    close(h);
    figure(1)
    mesh(mChast,md1,abs(mU))
    xlabel('f, Гц')
    ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
    Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
    figure(2)
    mesh(mChast,md1,angle(mU))
    xlabel('f, Гц')
    ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
    Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
end
else
    if d1n==d1k
        mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mU(1:nd,1:nf)=0;
        h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d. ');
        for fstep=1:nf
            Omega=2*pi*mChast(fstep);
            WParametrs;
            for dstep=1:nd
                d=md(dstep);
                d1=d+d1n;
                waitbar(((fstep-1)*nd+dstep)/(nf*nd),h);
                if d1<L
                    MakeKoeff;
                    Result;
                    Peremechenie;
                    mU(dstep,fstep)=U;
                end
            end
        end
        close(h);
        figure(1)
        mesh(mChast,md,abs(mU))
        xlabel('f, Гц')
        ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        figure(2)
        mesh(mChast,md,angle(mU))
        xlabel('f, Гц')
        ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
    else

```

```

        mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); md1=[d1n:d1s:d1k];
nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mU(1:nd1,1:nd,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d&d1.');
```

```

    for fstep=1:nf
        Omega=2*pi*mChast(fstep);
        WParams;
        for dstep=1:nd
            d=md(dstep);
            for d1step=1:nd1
                d1=d+md1(d1step);
                waitbar(((fstep-1)*nd+(dstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nd*nd1),h);
                if d1<L
                    MakeKoef;
                    Result;
                    Peremechenie;
                    mU(d1step,dstep,fstep)=U;
                end
            end
        end
    end
else
    if dn==dk
        d=dn;
        if d1n==d1k
            d1=d+d1n;
            mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); mU(1:nx,1:nf)=0;
h=waitbar(0,'Please wait. Array f&x.');
```

```

        for fstep=1:nf
            Omega=2*pi*mChast(fstep);
            WParams;
            for xstep=1:nx
                x=L+mx(xstep);
                waitbar(((fstep-1)*nx+xstep)/(nf*nx),h);
                MakeKoef;
                Result;
                Peremechenie;
                mU(xstep,fstep)=U;
            end
        end
        close(h);
        figure(1)
        mesh(mChast,mx,abs(mU))
        xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
        ylabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Амплітуда механічних коливань, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        figure(2)
        mesh(mChast,mx,angle(mU))
        xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
        ylabel('x, м','FontName','Times New Roman Cyr')
        Title('Фаза механічних коливань, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
    else
        mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); md1=[d1n:d1s:d1k];
nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mU(1:nd1,1:nx,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&x&d1.');
```

```

    for fstep=1:nf
        Omega=2*pi*mChast(fstep);
        WParams;
        for xstep=1:nx
            x=mx(xstep);
            for d1step=1:nd1
                d1=d+md1(d1step);
                waitbar(((fstep-1)*nx+(xstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nx*nd1),h);
                if d1<L
                    MakeKoef;

```

```

Result;
Peremechenie;
mU(d1step,xstep,fstep)=U;
end
end
end
end
end
else
if d1n==d1k
mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); md=[dn:ds:dk];
nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mU(1:nd,1:nx,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&x&d. ');
for fstep=1:nf
Omega=2*pi*mChast(fstep);
WParameters;
for xstep=1:nx
x=mx(xstep);
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
d1=d+d1n;
waitbar(((fstep-1)*nx+(xstep-1)*nd+dstep)/(nf*nx*nd),h);
if d1<L
MakeKoeff;
Result;
Peremechenie;
mU(dstep,xstep,fstep)=U;
end
end
end
end
else
mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mx=[xn:xs:xk]; nx=(floor((xk-xn)/xs)+1); md=[dn:ds:dk];
nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mU(1:nd1,1:nd,1:nx,1:nf)=0;
h=waitbar(0,'Please wait. Array f&x&d&d1. ');
for fstep=1:nf
Omega=2*pi*mChast(fstep);
WParameters;
for xstep=1:nx
x=mx(xstep);
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
for d1step=1:nd1
d1=d+md1(d1step);
waitbar(((fstep-1)*nx+(xstep-1)*nd+(dstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nx*nd*nd1),h);
if d1<L
MakeKoeff;
Result;
Peremechenie;
mU(d1step,dstep,xstep,fstep)=U;
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
k1(1,1)=exp(-wp(1,1)*d);
k1(3,1)=-wp(2,1);
k1(4,1)=-wp(2,1)*exp(-wp(1,1)*d);
k1(7,1)=-wp(7,1)*exp(-wp(1,1)*d);

```

```

k1(9,1)=-wp(9,1);
k1(10,1)=-wp(9,1)*exp(-wp(1,1)*d);
stepen(1)=0;
%-----
k2(1,1)=-exp(-imag(wp(1,2)*d)*i);
k2(2,1)=exp(-real(wp(1,2)*d1)+real(wp(1,2)*d)-imag(wp(1,2)*d1)*i);
k2(4,1)=wp(2,2)*exp(-imag(wp(1,2)*d)*i);
k2(5,1)=-wp(2,2)*exp(-real(wp(1,2)*d1)+real(wp(1,2)*d)-imag(wp(1,2)*d1)*i);
k2(7,1)=wp(7,2)*exp(-imag(wp(1,2)*d)*i);
k2(8,1)=-wp(7,2)*exp(-real(wp(1,2)*d1)+real(wp(1,2)*d)-imag(wp(1,2)*d1)*i);
k2(10,1)=wp(9,2)*exp(-imag(wp(1,2)*d)*i);
k2(11,1)=-wp(9,2)*exp(-real(wp(1,2)*d1)+real(wp(1,2)*d)-imag(wp(1,2)*d1)*i);
stepen(2)=-real(wp(1,2)*d);
%-----
k3(2,1)=-exp(-imag(wp(1,3)*d1)*i);
k3(5,1)=wp(2,3)*exp(-imag(wp(1,3)*d1)*i);
k3(6,1)=-wp(2,3)*exp(-real(wp(1,3)*L)+real(wp(1,3)*d1)-imag(wp(1,3)*L)*i);
k3(8,1)=wp(7,3)*exp(-imag(wp(1,3)*d1)*i);
k3(11,1)=wp(9,3)*exp(-imag(wp(1,3)*d1)*i);
k3(12,1)=-wp(9,3)*exp(-real(wp(1,3)*L)+real(wp(1,3)*d1)-imag(wp(1,3)*L)*i);
stepen(3)=-real(wp(1,3)*d1);
%-----
k4(1,1)=exp(imag(wp(1,1)*d)*i);
k4(3,1)=wp(2,1)*exp(-real(wp(1,1)*d));
k4(4,1)=wp(2,1)*exp(imag(wp(1,1)*d)*i);
k4(7,1)=wp(7,1)*exp(imag(wp(1,1)*d)*i);
k4(9,1)=-wp(9,1)*exp(-real(wp(1,1)*d));
k4(10,1)=-wp(9,1)*exp(imag(wp(1,1)*d)*i);
stepen(4)=real(wp(1,1)*d);
%-----
k5(1,1)=-exp(real(wp(1,2)*d)-real(wp(1,2)*d1)+imag(wp(1,2)*d)*i);
k5(2,1)=exp(imag(wp(1,2)*d1)*i);
k5(4,1)=-wp(2,2)*exp(real(wp(1,2)*d)-real(wp(1,2)*d1)+imag(wp(1,2)*d)*i);
k5(5,1)=wp(2,2)*exp(imag(wp(1,2)*d1)*i);
k5(7,1)=-wp(7,2)*exp(real(wp(1,2)*d)-real(wp(1,2)*d1)+imag(wp(1,2)*d)*i);
k5(8,1)=wp(7,2)*exp(imag(wp(1,2)*d1)*i);
k5(10,1)=wp(9,2)*exp(real(wp(1,2)*d)-real(wp(1,2)*d1)+imag(wp(1,2)*d)*i);
k5(11,1)=-wp(9,2)*exp(imag(wp(1,2)*d1)*i);
stepen(5)=real(wp(1,2)*d1);
%-----
k6(2,1)=-exp(real(wp(1,3)*d1)-real(wp(1,3)*L)+imag(wp(1,3)*d1)*i);
k6(5,1)=-wp(2,3)*exp(real(wp(1,3)*d1)-real(wp(1,3)*L)+imag(wp(1,3)*d1)*i);
k6(6,1)=wp(2,3)*exp(imag(wp(1,3)*L)*i);
k6(8,1)=-wp(7,3)*exp(real(wp(1,3)*d1)-real(wp(1,3)*L)+imag(wp(1,3)*d1)*i);
k6(11,1)=wp(9,3)*exp(real(wp(1,3)*d1)-real(wp(1,3)*L)+imag(wp(1,3)*d1)*i);
k6(12,1)=-wp(9,3)*exp(imag(wp(1,3)*L)*i);
stepen(6)=real(wp(1,3)*L);
%-----
k7(7,1)=exp(-wp(3,1)*d);
k7(9,1)=-wp(4,1);
k7(10,1)=-wp(4,1)*exp(-wp(3,1)*d);
%-----
k8(7,1)=-exp(-wp(3,2)*d);
k8(8,1)=exp(-wp(3,2)*d1);
k8(10,1)=wp(4,2)*exp(-wp(3,2)*d);
k8(11,1)=-wp(4,2)*exp(-wp(3,2)*d1);
%-----
k9(8,1)=-exp(-wp(3,3)*d1);
k9(11,1)=wp(4,3)*exp(-wp(3,3)*d1);
k9(12,1)=-wp(4,3)*exp(-wp(3,3)*L);
%-----
k10(7,1)=exp(wp(3,1)*d);
k10(9,1)=wp(4,1);
k10(10,1)=wp(4,1)*exp(wp(3,1)*d);

```



```

%-----
k11(7,1)=-exp(wp(3,2)*d);
k11(8,1)=exp(wp(3,2)*d1);
k11(10,1)=-wp(4,2)*exp(wp(3,2)*d);
k11(11,1)=wp(4,2)*exp(wp(3,2)*d1);
%-----
k12(8,1)=-exp(wp(3,3)*d1);
k12(11,1)=-wp(4,3)*exp(wp(3,3)*d1);
k12(12,1)=wp(4,3)*exp(wp(3,3)*L);
%-----
f(1,1)=(-wp(5,1)+wp(5,2))*exp(-Beta(1)*d);
f(2,1)=(-wp(5,2)+wp(5,3))*exp(-Beta(2)*d1-(Beta(1)-Beta(2))*d);
f(3,1)=wp(6,1);
f(4,1)=(wp(6,1)-wp(6,2))*exp(-Beta(1)*d);
f(5,1)=(wp(6,2)-wp(6,3))*exp(-Beta(2)*d1-(Beta(1)-Beta(2))*d);
f(6,1)=wp(6,3)*exp(-Beta(3)*L-(Beta(1)-Beta(2))*d-(Beta(2)-Beta(3))*d1);
f(7,1)=(wp(8,1)-wp(8,2))*exp(-Beta(1)*d);
f(8,1)=(wp(8,2)-wp(8,3))*exp(-Beta(2)*d1-(Beta(1)-Beta(2))*d);
f(9,1)=wp(10,1);
f(10,1)=(wp(10,1)-wp(10,2))*exp(-Beta(1)*d);
f(11,1)=(wp(10,2)-wp(10,3))*exp(-Beta(2)*d1-(Beta(1)-Beta(2))*d);
f(12,1)=wp(10,3)*exp(-Beta(3)*L-(Beta(1)-Beta(2))*d-(Beta(2)-Beta(3))*d1);

p(1,:)=(1+i)./sqrt(2*Hi);
p(2,:)=Kappa.*p(1,:);
p(3,:)=i./v;
p(4,:)=Ct.*p(3,:);
p(5,:)=Beta./Kappa*I0/2;
p(6,:)=(Beta.^2)*I0/2;
p(7,:)=Alpha.*Etta.*p(1,:);

wp(1,:)=p(1,:).*sqrt(Omega);
wp(2,:)=p(2,:).*sqrt(Omega);
wp(3,:)=p(3,:).*Omega;
wp(4,:)=p(4,:).*Omega;
wp(5,:)=p(5,:)./(wp(1,:).^2-Betta.^2);
wp(6,:)=p(6,:)./(wp(1,:).^2-Betta.^2);
wp(7,:)=p(7,:).*sqrt(Omega)./(wp(1,:).^2-wp(3,:).^2);
wp(8,:)=Alpha.*Beta.*Etta.*wp(5,:)./(Betta.^2-wp(3,:).^2);
wp(9,:)=Alpha.*Bz.*(wp(3,:).^2)./(wp(3,:).^2-wp(1,:).^2);
wp(10,:)=Alpha.*Bz.*(wp(3,:).^2).*wp(5,:)./(wp(3,:).^2-Betta.^2);

MyDet=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12]);
A(1)=det([f k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
A(2)=det([k1 f k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
A(3)=det([k1 k2 f k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
B(1)=det([k1 k2 k3 f k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
B(2)=det([k1 k2 k3 k4 f k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
B(3)=det([k1 k2 k3 k4 k5 f k7 k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
C(1)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 f k8 k9 k10 k11 k12])/MyDet;
C(2)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 f k9 k10 k11 k12])/MyDet;
C(3)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 f k10 k11 k12])/MyDet;
D(1)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 f k11 k12])/MyDet;
D(2)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 f k12])/MyDet;
D(3)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 f])/MyDet;

if x>=0&x<=d
    U=wp(7,1)*(-A(1)*exp(-wp(1,1)*x-stepen(1))+B(1)*exp(wp(1,1)*x-stepen(4)))+C(1)*exp(-
wp(3,1)*x)+D(1)*exp(wp(3,1)*x)-wp(8,1)*exp(-Beta(1)*x);
elseif x>d&x<=d1

```

```

U=wp(7,2)*(-A(2)*exp(-wp(1,2)*x-stepen(2))+B(2)*exp(wp(1,2)*x-stepen(5)))+C(2)*exp(-
wp(3,2)*x)+D(2)*exp(wp(3,2)*x)-wp(8,2)*exp(-Beta(2)*x-(Beta(1)-Beta(2))*d);
elseif x>d1&x<=L
U=wp(7,3)*(-A(3)*exp(-wp(1,3)*x-stepen(3))+B(3)*exp(wp(1,3)*x-stepen(6)))+C(3)*exp(-
wp(3,3)*x)+D(3)*exp(wp(3,3)*x)-wp(8,3)*exp(-Beta(3)*x-(Beta(1)-Beta(2))*d-(Beta(2)-Beta(3))*d1);
end

```

Електричне напруження для закріпленої кераміки

```

clear all
%Параметры слоев
%Alpha=[2.33*10^-6 2.33*10^-6 2.33*10^-6]; Beta=[1.2*10^6 1.2*10^6 1.2*10^6]; Hi=[8.8*10^-5 8.8*10^-5
8.8*10^-5]; Kappa=[156 156 156]; Yung=[10^11 10^11 10^11]; Puason=[0.27 0.27 0.27]; v=[8.43*10^3 8.43*10^3
8.43*10^3];
Alpha=[2.33*10^-6 7.44*10^-6 2.33*10^-6]; Beta=[1.2*10^6 10^6 1.2*10^6]; Hi=[8.8*10^-5 6.4*10^-5 8.8*10^-5];
Kappa=[156 81 156]; Yung=[10^11 0.9*10^11 10^11]; Puason=[0.27 0.3 0.27]; v=[8.43*10^3 5.15*10^3 8.43*10^3];
%Параметры керамики
ro4=7330; Ce=1.06*10^11; eps3=935*8.85*10^-12; e3=15.1;
%Получение дополнительных констант
Lambda=Yung.*Puason./((1+Puason).*(1-2*Puason)); Mu=Yung./(2+2*Puason); Bz=3*Lambda+2*Mu;
Ct=Lambda+2*Mu; Etta=Bz./Ct;
%Ввод параметров обработки
I0=10^25;
MyGraf=':b';
%-----
fn=10^2;
fs=10^2;
fk=10^5;
%-----
L=4*10^-4;
%-----
L1n=10^-7;
L1s=10^-7;
L1k=(10^-4)/10;
%-----
dn=(1*L/4)-(L/100);
ds=(L/10);
dk=dn;%(3*L/4)-(L/10);
%-----
d1n=(L/50);
d1s=10^-6;
d1k=d1n;
%-----
k1=zeros(14,1); k2=zeros(14,1); k3=zeros(14,1); k4=zeros(14,1); k5=zeros(14,1); k6=zeros(14,1); k7=zeros(14,1);
k8=zeros(14,1); k9=zeros(14,1); k10=zeros(14,1); k11=zeros(14,1); k12=zeros(14,1); k13=zeros(14,1); k14=zeros(14,1);
f=zeros(14,1);
%Программа
ParametrskZnT;
if fn==fk
    Chast=fn;
    Omega=2*pi*Chast;
    WParametrskZnT;
    if L1n==L1k
        L1=L+L1n;
        if dn==dk
            d=dn;
            if d1n==d1k
                d1=d+d1n;
                MakeKoeffKZnT;
                ResultkZnT;
                NapragnenieKZnT;
                Psi
            end
        end
    end
end

```

```

else
    md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mPsi(1:nd1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d1.');
```

$$d1 = d + md1(d1step);$$

$$waitbar(d1step/nd1, h);$$

```

    if d1 < L
        MakeKoeffKZnT;
        ResultKZnT;
        NapragniekZnT;
        mPsi(d1step)=Psi;
    end
end
close(h);
figure(1)
hold on
plot(md1,abs(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
xlabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
plot(md1,angle(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
xlabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
end
else
    if d1n==d1k
        md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mPsi(1:nd)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d.');
```

$$d = md(dstep);$$

$$d1 = d + d1n;$$

$$waitbar(dstep/nd, h);$$

```

    if d1 < L
        MakeKoeffKZnT;
        ResultKZnT;
        NapragniekZnT;
        mPsi(dstep)=Psi;
    end
end
close(h);
figure(1)
hold on
plot(md,abs(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
plot(md,angle(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
end
else
    md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
    mPsi(1:nd1,1:nd)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array d&d1.');
```

$$d = md(dstep);$$

```

    for d1step=1:nd1
        d1=d+md1(d1step);
        waitbar(((dstep-1)*nd1+d1step)/(nd*nd1),h);
        if d1 < L
            MakeKoeffKZnT;
            ResultKZnT;
```

```

        NapragenieKZnT;
        mPsi(d1step,dstep)=Psi;
    end
end
end
close(h);
figure(1)
hold on
mesh(md,md1,abs(mPsi))
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
mesh(md,md1,angle(mPsi))
xlabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
end
end
else
    if dn==dk
        d=dn;
        if d1n==d1k
            d1=d+d1n;
            mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1); mPsi(1:nL1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array L1. ');
            for L1step=1:nL1
                L1=L+mL1(L1step);
                waitbar(L1step/nL1,h);
                MakeKoeffKZnT;
                ResultKZnT;
                NapragenieKZnT;
                mPsi(L1step)=Psi;
            end
            close(h);
            figure(1)
            hold on
            plot(mL1,abs(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
            xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
            Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
            hold off
            figure(2)
            hold on
            plot(mL1,angle(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
            xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
            Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
            hold off
        else
            mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
            mPsi(1:nd1,1:nL1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array L1&d1. ');
            for L1step=1:nL1
                L1=mL1(L1step);
                for d1step=1:nd1
                    d1=d+md1(d1step);
                    waitbar(((L1step-1)*nd1+d1step)/(nL1*nd1),h);
                    if d1<L
                        MakeKoeffKZnT;
                        ResultKZnT;
                        NapragenieKZnT;
                        mPsi(d1step,L1step)=Psi;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
close(h);
figure(1)
hold on
mesh(mL1,md1,abs(mPsi))
xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
mesh(mL1,md1,angle(mPsi))
xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
end
else
if d1n==d1k
mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1);
mPsi(1:nd,1:nL1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array L1&d. ');
for L1step=1:nL1
L1=mL1(L1step);
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
d1=d+d1n;
waitbar(((L1step-1)*nd+dstep)/(nL1*nd),h);
if d1<L
MakeKoeffKZnT;
ResultKZnT;
NapragenieKZnT;
mPsi(dstep,L1step)=Psi;
end
end
end
close(h);
figure(1)
hold on
mesh(mL1,md,abs(mPsi))
xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
mesh(mL1,md,angle(mPsi))
xlabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
else
mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1);
md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mPsi(1:nd1,1:nd,1:nL1)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array L1&d&d1. ');
for L1step=1:nL1
L1=mL1(L1step);
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
for d1step=1:nd1
d1=d+md1(d1step);
waitbar(((L1step-1)*nd+(dstep-1)*nd1+d1step)/(nL1*nd*nd1),h);
if d1<L
MakeKoeffKZnT;
ResultKZnT;

```

```

        NapragenieKZnT;
        mPsi(d1step,dstep,L1step)=Psi;
    end
end
end
end
end
end
else
    if L1n==L1k
        L1=L+L1n;
        if dn==dk
            d=dn;
            if d1n==d1k
                d1=d+d1n;
                mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mPsi(1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f. ');
                for fstep=1:nf
                    Omega=2*pi*mChast(fstep);
                    waitbar(fstep/nf,h);
                    WParametrskZnT;
                    MakeKoeffKZnT;
                    ResultKZnT;
                    NapragenieKZnT;
                    mPsi(fstep)=Psi;
                end
                close(h);
                figure(1)
                hold on
                plot(mChast,abs(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
                xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
                Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
                hold off
                figure(2)
                hold on
                plot(mChast,angle(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
                xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
                Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
                hold off
            else
                mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1);
                mPsi(1:nd1,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d1. ');
                for fstep=1:nf
                    Omega=2*pi*mChast(fstep);
                    WParametrskZnt;
                    for d1step=1:nd1
                        d1=d+md1(d1step);
                        waitbar(((fstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nd1),h);
                        if d1<L
                            MakeKoeffKZnT;
                            ResultKZnT;
                            NapragenieKZnT;
                            mPsi(d1step,fstep)=Psi;
                        end
                    end
                end
                close(h);
                figure(1)
                hold on
                mesh(mChast,md1,abs(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
                xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
                ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
                Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
                hold off
            end
        end
    end
end

```

```

figure(2)
hold on
mesh(mChast,md1,angle(mPsi),MyGraf,'LineWidth',0.5)
xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
end
else
if d1n==d1k
mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mPsi(1:nd,1:nf)=0;
h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d. ');
for fstep=1:nf
Omega=2*pi*mChast(fstep);
WParametrskZnT;
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
d1=d+d1n;
waitbar(((fstep-1)*nd+dstep)/(nf*nd),h);
if d1<L
MakeKoeffKZnT;
ResultKZnT;
NapragenieKZnT;
mPsi(dstep,fstep)=Psi;
end
end
end
close(h);
figure(1)
hold on
mesh(mChast,md,abs(mPsi))
xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
mesh(mChast,md,angle(mPsi))
xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('d, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
else
mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); md=[dn:ds:dk]; nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); md1=[d1n:d1s:d1k];
nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mPsi(1:nd1,1:nd,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&d&d1. ');
for fstep=1:nf
Omega=2*pi*mChast(fstep);
WParametrskZnT;
for dstep=1:nd
d=md(dstep);
for d1step=1:nd1
d1=d+md1(d1step);
waitbar(((fstep-1)*nd+(dstep-1)*nd1+d1step)/(nf*nd*nd1),h);
if d1<L
MakeKoeffKZnT;
ResultKZnT;
NapragenieKZnT;
mPsi(d1step,dstep,fstep)=Psi;
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end

```

```

else
    if dn==dk
        d=dn;
        if d1n==d1k
            d1=d+d1n;
            mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1);
mPsi(1:nL1,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&L1.');
```

```

for fstep=1:nf
    Omega=2*pi*mChast(fstep);
    WParametrskZnT;
    for L1step=1:nL1
        L1=L+mL1(L1step);
        waitbar(((fstep-1)*nL1+L1step)/(nf*nL1),h);
        MakeKoeffKZnT;
        ResultkZnT;
        NapragniekZnT;
        mPsi(L1step,fstep)=Psi;
    end
end
close(h);
figure(1)
hold on
mesh(mChast,mL1,abs(mPsi))
xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Амплітуда електричного потенціалу, В','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
figure(2)
hold on
mesh(mChast,mL1,angle(mPsi))
xlabel('f, Гц','FontName','Times New Roman Cyr')
ylabel('L1, м','FontName','Times New Roman Cyr')
Title('Фаза електричного потенціалу, рад','FontName','Times New Roman Cyr')
hold off
else
    mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1);
md1=[d1n:d1s:d1k]; nd1=(floor((d1k-d1n)/d1s)+1); mPsi(1:nd1,1:nL1,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array
f&L1&d1.');
```

```

for fstep=1:nf
    Omega=2*pi*mChast(fstep);
    WParametrskZnT;
    for L1step=1:nL1
        L1=mL1(L1step);
        for d1step=1:nd1
            d1=d+md1(d1step);
            waitbar(((fstep-1)*nL1+(L1step-1)*nd1+d1step)/(nf*nL1*nd1),h);
            if d1<L
                MakeKoeffKZnT;
                ResultkZnT;
                NapragniekZnT;
                mPsi(d1step,L1step,fstep)=Psi;
            end
        end
    end
end
end
end
else
    if d1n==d1k
        mChast=[fn:fs:fk]; nf=(floor((fk-fn)/fs)+1); mL1=[L1n:L1s:L1k]; nL1=(floor((L1k-L1n)/L1s)+1); md=[dn:ds:dk];
nd=(floor((dk-dn)/ds)+1); mPsi(1:nd,1:nL1,1:nf)=0; h=waitbar(0,'Please wait. Array f&L1&d.');
```

```

for fstep=1:nf
    Omega=2*pi*mChast(fstep);
    WParametrskZnT;
    for L1step=1:nL1
```



```
k1(1,1)=exp(-wp(1,1)*d);
k1(3,1)=-wp(2,1);
k1(4,1)=-wp(2,1)*exp(-wp(1,1)*d);
k1(7,1)=-wp(7,1)*exp(-wp(1,1)*d);
k1(11,1)=-wp(9,1);
k1(12,1)=-wp(9,1)*exp(-wp(1,1)*d);
stepen(1)=0;
%-----
k2(1,1)=-exp(-imag(wp(1,2))*d*i);
k2(2,1)=exp(-real(wp(1,2))*d1+real(wp(1,2))*d-imag(wp(1,2))*d1*i);
k2(4,1)=wp(2,2)*exp(-imag(wp(1,2))*d*i);
k2(5,1)=-wp(2,2)*exp(-real(wp(1,2))*d1+real(wp(1,2))*d-imag(wp(1,2))*d1*i);
k2(7,1)=wp(7,2)*exp(-imag(wp(1,2))*d*i);
k2(8,1)=-wp(7,2)*exp(-real(wp(1,2))*d1+real(wp(1,2))*d-imag(wp(1,2))*d1*i);
k2(12,1)=wp(9,2)*exp(-imag(wp(1,2))*d*i);
k2(13,1)=-wp(9,2)*exp(-real(wp(1,2))*d1+real(wp(1,2))*d-imag(wp(1,2))*d1*i);
stepen(2)=-real(wp(1,2))*d;
%-----
k3(2,1)=-exp(-imag(wp(1,3))*d1*i);
k3(5,1)=wp(2,3)*exp(-imag(wp(1,3))*d1*i);
```

```

k3(6,1)=-wp(2,3)*exp(-real(wp(1,3))*L+real(wp(1,3))*d1-imag(wp(1,3))*L*i);
k3(8,1)=wp(7,3)*exp(-imag(wp(1,3))*d1*i);
k3(9,1)=-wp(7,3)*exp(-real(wp(1,3))*L+real(wp(1,3))*d1-imag(wp(1,3))*L*i);
k3(13,1)=wp(9,3)*exp(-imag(wp(1,3))*d1*i);
k3(14,1)=-wp(9,3)*exp(-real(wp(1,3))*L+real(wp(1,3))*d1-imag(wp(1,3))*L*i);
stepen(3)=-real(wp(1,3))*d1;
%-----
k4(1,1)=exp(imag(wp(1,1))*d*i);
k4(3,1)=wp(2,1)*exp(-real(wp(1,1))*d);
k4(4,1)=wp(2,1)*exp(imag(wp(1,1))*d*i);
k4(7,1)=wp(7,1)*exp(imag(wp(1,1))*d*i);
k4(11,1)=-wp(9,1)*exp(-real(wp(1,1))*d);
k4(12,1)=-wp(9,1)*exp(imag(wp(1,1))*d*i);
stepen(4)=real(wp(1,1))*d;
%-----
k5(1,1)=-exp(real(wp(1,2))*d-real(wp(1,2))*d1+imag(wp(1,2))*d*i);
k5(2,1)=exp(imag(wp(1,2))*d1*i);
k5(4,1)=-wp(2,2)*exp(real(wp(1,2))*d-real(wp(1,2))*d1+imag(wp(1,2))*d*i);
k5(5,1)=wp(2,2)*exp(imag(wp(1,2))*d1*i);
k5(7,1)=-wp(7,2)*exp(real(wp(1,2))*d-real(wp(1,2))*d1+imag(wp(1,2))*d*i);
k5(8,1)=wp(7,2)*exp(imag(wp(1,2))*d1*i);
k5(12,1)=wp(9,2)*exp(real(wp(1,2))*d-real(wp(1,2))*d1+imag(wp(1,2))*d*i);
k5(13,1)=-wp(9,2)*exp(imag(wp(1,2))*d1*i);
stepen(5)=real(wp(1,2))*d1;
%-----
k6(2,1)=-exp(real(wp(1,3))*d1-real(wp(1,3))*L+imag(wp(1,3))*d1*i);
k6(5,1)=-wp(2,3)*exp(real(wp(1,3))*d1-real(wp(1,3))*L+imag(wp(1,3))*d1*i);
k6(6,1)=wp(2,3)*exp(imag(wp(1,3))*L*i);
k6(8,1)=-wp(7,3)*exp(real(wp(1,3))*d1-real(wp(1,3))*L+imag(wp(1,3))*d1*i);
k6(9,1)=wp(7,3)*exp(imag(wp(1,3))*L*i);
k6(13,1)=wp(9,3)*exp(real(wp(1,3))*d1-real(wp(1,3))*L+imag(wp(1,3))*d1*i);
k6(14,1)=-wp(9,3)*exp(imag(wp(1,3))*L*i);
stepen(6)=real(wp(1,3))*L;
%-----
k7(7,1)=exp(-wp(3,1)*d);
k7(11,1)=-wp(4,1);
k7(12,1)=-wp(4,1)*exp(-wp(3,1)*d);
%-----
k8(7,1)=-exp(-wp(3,2)*d);
k8(8,1)=exp(-wp(3,2)*d1);
k8(12,1)=wp(4,2)*exp(-wp(3,2)*d);
k8(13,1)=-wp(4,2)*exp(-wp(3,2)*d1);
%-----
k9(8,1)=-exp(-wp(3,3)*d1);
k9(9,1)=exp(-wp(3,3)*L);
k9(13,1)=wp(4,3)*exp(-wp(3,3)*d1);
k9(14,1)=-wp(4,3)*exp(-wp(3,3)*L);
%-----
k10(9,1)=-exp(-wpk(1)*L);
k10(10,1)=exp(-wpk(1)*L1);
k10(14,1)=wpk(2)*exp(-wpk(1)*L);
%-----
k11(7,1)=exp(wp(3,1)*d);
k11(11,1)=wp(4,1);
k11(12,1)=wp(4,1)*exp(wp(3,1)*d);
%-----
k12(7,1)=-exp(wp(3,2)*d);
k12(8,1)=exp(wp(3,2)*d1);
k12(12,1)=-wp(4,2)*exp(wp(3,2)*d);
k12(13,1)=wp(4,2)*exp(wp(3,2)*d1);
%-----
k13(8,1)=-exp(wp(3,3)*d1);
k13(9,1)=exp(wp(3,3)*L);
k13(13,1)=-wp(4,3)*exp(wp(3,3)*d1);

```

```

k13(14,1)=wp(4,3)*exp(wp(3,3)*L);
%-----
k14(9,1)=-exp(wpk(1)*L);
k14(10,1)=exp(wpk(1)*L1);
k14(14,1)=-wpk(2)*exp(wpk(1)*L);
%-----
f(1,1)=(-wp(5,1)+wp(5,2))*exp(-Betta(1)*d);
f(2,1)=(-wp(5,2)+wp(5,3))*exp(-Betta(2)*d1-(Betta(1)-Betta(2))*d);
f(3,1)=wp(6,1);
f(4,1)=(wp(6,1)-wp(6,2))*exp(-Betta(1)*d);
f(5,1)=(wp(6,2)-wp(6,3))*exp(-Betta(2)*d1-(Betta(1)-Betta(2))*d);
f(6,1)=wp(6,3)*exp(-Betta(3)*L-(Betta(1)-Betta(2))*d-(Betta(2)-Betta(3))*d1);
f(7,1)=(wp(8,1)-wp(8,2))*exp(-Betta(1)*d);
f(8,1)=(wp(8,2)-wp(8,3))*exp(-Betta(2)*d1-(Betta(1)-Betta(2))*d);
f(9,1)=wp(8,3)*exp(-Betta(3)*L-(Betta(1)-Betta(2))*d-(Betta(2)-Betta(3))*d1);
f(10,1)=0;
f(11,1)=wp(10,1);
f(12,1)=(wp(10,1)-wp(10,2))*exp(-Betta(1)*d);
f(13,1)=(wp(10,2)-wp(10,3))*exp(-Betta(2)*d1-(Betta(1)-Betta(2))*d);
f(14,1)=wp(10,3)*exp(-Betta(3)*L-(Betta(1)-Betta(2))*d-(Betta(2)-Betta(3))*d1);

p(1,:)=(1+i)./sqrt(2*Hi);
p(2,:)=Kappa.*p(1,:);
p(3,:)=i./v;
p(4,:)=Ct.*p(3,:);
p(5,:)=Betta./Kappa*I0/2;
p(6,:)=(Betta.^2)*I0/2;
p(7,:)=Alpha.*Etta.*p(1,:);
pk(1)=i*sqrt(ro4/(Ce+(e3^2)/eps3));
pk(2)=i*sqrt(ro4*(Ce+(e3^2)/eps3));

wp(1,:)=p(1,:).*sqrt(Omega);
wp(2,:)=p(2,:).*sqrt(Omega);
wp(3,:)=p(3,:).*Omega;
wp(4,:)=p(4,:).*Omega;
wp(5,:)=p(5,:)./(wp(1,:).^2-Betta.^2);
wp(6,:)=p(6,:)./(wp(1,:).^2-Betta.^2);
wp(7,:)=p(7,:).*sqrt(Omega)./(wp(1,:).^2-wp(3,:).^2);
wp(8,:)=Alpha.*Betta.*Etta.*wp(5,:)./(Betta.^2-wp(3,:).^2);
wp(9,:)=Alpha.*Bz.*(wp(3,:).^2)./(wp(3,:).^2-wp(1,:).^2);
wp(10,:)=Alpha.*Bz.*(wp(3,:).^2).*wp(5,:)./(wp(3,:).^2-Betta.^2);
wpk(1)=pk(1)*Omega;
wpk(2)=pk(2)*Omega;

Mydet=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12 k13 k14]);
C(4)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 f k11 k12 k13 k14])/Mydet;
D(4)=det([k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10 k11 k12 k13 f])/Mydet;

Psi=(e3/eps3)*(C(4)*exp(-wpk(1)*L)+D(4)*exp(wpk(1)*L));

```