

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Ю.М. Туз,
Ю.С. Шумков,
О.В. Козир**

АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

**За загальною редакцією доктора технічних наук,
професора Ю. М. Туза**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти за освітньою програмою
«Інформаційні вимірювальні технології та системи»
спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти *Тесик Ю.Ф.*, д-р техн. наук, ст. наук. співробітник,
Інститут електродинаміки НАН України
Артюхов В.Г., канд. техн. наук, доц., доцент кафедри системного
проектування навчально-наукового інституту прикладного
системного аналізу, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Шевченко К.Л.* д-р техн. наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 07.04.2022 р.)
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету
(протокол № 2/22 від 28.02.2022 р.)*

В навчальному посібнику викладено питання автоматизованого аналізу засобів вимірювальної техніки. Наведено моделі вимірювальних пристроїв як об'єкта проектування та їх нормовані метрологічні характеристики. Викладено матричний апарат аналізу вимірювальних пристроїв, похибок перетворення. Розглянуто обчислення визначників в символьному вигляді з використанням алгебри Грассмана, знаходження похідних визначників, розкладання визначників у ряд. Наведено приклади використання визначників в автоматизованому аналізі електричних кіл. Наведено проектування вимірювальних перетворювачів підвищеної точності, функціональних перетворювачів. Наведено опис програмного пакету побудови матричних моделей і моделей похибок вимірювальних пристроїв. Наведено аналіз характерних для вимірювальної техніки вузлів та пристроїв, які мають нелінійні компоненти та інерційні ланки, на основі їх опису системами нелінійних диференціальних рівнянь та їх розв'язку у середовищі систем комп'ютерної математики.. Наведена ідентифікація динамічних характеристик термоперетворювачів.

Призначений для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка». Може бути корисним для фахівців, які спеціалізуються в галузі розробки засобів вимірювальної техніки та систем.

Реєстр. № НП 21/22-384. Обсяг 11,54 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Ю. М. Туз, Ю. С. Шумков, О. В. Козир
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ	5
Тема 1. Вимірювальний пристрій як об'єкт проектування	7
Лекція 1. Метрологічні характеристики засобів вимірювань	7
Лекція 2. Статична характеристика вимірювальних пристроїв. Основні визначення	17
Лекція 3. Статична характеристика вимірювальних пристроїв із просторовим розподілом каналів	27
Лекція 4. Статична характеристика вимірювальних пристроїв з часовим розподілом каналів	36
Лекція 5. Статична характеристика вольтметра ВЗ-59 з поелемент- ною мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів ...	49
Лекція 6. Статична характеристика вимірювальних кіл двонаправлених елементів	63
Лекція 7 Детермінована модель похибок вимірювальних пристроїв .	67
Лекція 8. Стохастична модель похибок засобів вимірювання	79
Лекція 9. Динамічні характеристики засобів вимірювань	87
Лекція 10. Похибка визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі за результатами експерименту (похибка за наявності залежних елементів в матриці системи)	99
Тема 2. Обчислення визначників у символьному вигляді	107
Лекція 11. Знаходження визначників матриць з використанням алгебри Грассмана	108
Лекція 12. Похідні визначників. Розкладання визначників у ряд ...	120
Тема 3. Визначники та автоматизований аналіз електричних кіл	130
Лекція 13. Матричний метод. Приклади практичного аналізу вимірювальних пристроїв з використанням визначників	131
Тема 4. Проектування перетворювачів підвищеної точності	147

Лекція 14. Методи корекції похибок вимірювальних пристроїв. Алгоритм адитивної ітераційної корекції. Алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції	148
Лекція 15. Дослідження умов збіжності ітераційної корекції. Критерій збіжності. Показник швидкості збіжності	154
Тема 5. Проектування функціональних перетворювачів	166
Лекція 16. Проектування функціональних перетворювачів. Схеми функціональних перетворювачів з кусково-лінійною апроксимацією	166
Тема 6. Моделювання вимірювальних пристроїв за допомогою систем нелінійних диференціальних рівнянь	175
Лекція 17. Дослідження динаміки перетворювачів амплітудних значень змінної напруги	175
Лекція 18. Дослідження динаміки лінійного перетворювача середньоквадратичних значень змінної напруги	212
Тема 7. Ідентифікація динамічної моделі термопари	235
Лекція 19. Визначення параметрів динамічної моделі термопари	235
Лекція 20. Похибки математичної моделі перехідної та амплітудно-частотної характеристик термопар	251
Додатки	260
Додаток А. Метрологічне забезпечення вимірювальних каналів з мостовими схемами	260
Додаток Б. Програма автоматизованого аналізу вимірювальних пристроїв	278
Додаток В. Практична реалізація динамічних вимірів швидкопротікаючих високотемпературних процесів	292
Список рекомендованої літератури	315

ВСТУП

Вимірювальні пристрої на відміну від інших технічних пристроїв відрізняються нормованими метрологічними характеристиками, закріпленими міжнародними, державними та галузевими стандартами. Найважливішими характеристиками є функції перетворення вимірюваних величин в їх значення та похибки вимірювання. Процес проектування вимірювальних пристроїв передбачає створення на основі попереднього досвіду структурних, функціональних та принципівих схем. Для їх опису створюють рівняння перетворення та рівняння похибок. Оскільки методика загального синтезу вимірювальних пристроїв і їх оптимізація не достатньо розвинута, то оцінка відповідності спроектованого пристрою проводиться шляхом аналізу ряду варіантів, внесення змін і повторного аналізу до отримання найбільш оптимального рішення. Тому автоматизація процесу аналізу стає особливо актуальною. На сьогодні пропонується декілька програмних пакетів моделювання електричних схем з широкою базою компонентів. Як правило результатом моделювання є масиви даних або графічні залежності. В той же час аналітичні моделі є більш змістовними для подальшого аналізу, оптимізації та оцінки отриманих результатів.

Метою є оволодіння студентами технологією автоматизованого аналізу засобів вимірювальної техніки (ЗВТ), в якій найбільш перспективним є застосування матричних рівнянь завдяки можливості кодування змінних за місцем їх знаходження і подальших переміщень відповідно до створених алгоритмів. Предметом вивчення є процедури складання матричних рівнянь, алгоритмізації їх розв'язку відносно вимірюваних величин та похибок. Як відомо, матричні рівняння є апаратом, придатним для систем лінійних рівнянь. Для застосування їх для роботи з нелінійними блоками, розривними в часі структурними схемами врахований той факт, що в просторі інформаційних змінних рівняння з нелінійними членами можуть бути представлені шляхом заміни змінних у вигляді системи лінійних рівнянь і

розв'язані через визначники у вигляді аналітичних залежностей. Виходячи з властивостей визначників створені рівняння похибок в матричній формі з можливістю точного представлення сумарної похибки незалежно від розміру похибок складових структурної схеми. Також в матричній формі представлені рівняння з комплексними коефіцієнтами. Розглянуті приклади аналізу характерних для вимірювальної техніки пристроїв, які мають нелінійні та інерційні компоненти, на основі опису системами нелінійних диференціальних рівнянь.

В результаті навчання студент повинен оволодіти методами складання матричних рівнянь для опису структурних, функціональних і принципових схем, як з лінійними так і нелінійними елементами при функціонуванні блоків розподілених в просторі та перериванням в часі, отримати в аналітичній формі рівняння перетворення, рівняння похибок, як в статичному так і в динамічному режимах роботи, зробити оцінку невизначеностей. Дисципліна «Автоматизація аналізу вимірювальних пристроїв» формує у здобувачів вищої освіти відповідні компетенції за освітньою програмою «Інформаційні вимірювальні технології та системи» спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка».

Розділи 1, 2, 3, 4, 5 написані Тузом Ю.М.. Розділ 6 написав Шумков Ю.С.. Розділ 7 написали Туз Ю.М., Козир О.В. До додатків увійшли матеріали робіт, автори яких Туз Ю.М., Козир О.В.. Програмний пакет створив Козир О.В.

ТЕМА 1. ВИМІРЮВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ЯК ОБ'ЄКТ ПРОЕКТУВАННЯ

Технологія проектування різних технічних об'єктів, незалежно від їхніх фізичних принципів роботи та призначення, складається з ряду етапів: визначення фізичного принципу дії для конкретних умов, вибору або пошуку найбільш раціонального технічного рішення при обраному принципі дії, визначення оптимальних значень параметрів обраного технічного рішення.

Проектування засобів вимірювань має свої особливості, які витікають з визначення засобу вимірювання (ДСТУ 2681-94. «Метрологія. Терміни та визначення»).

Лекція 1. Метрологічні характеристики засобів вимірювань

Засіб вимірювання. Метрологічні характеристики засобів вимірювань. Класифікація засобів вимірювань. Моделі засобів вимірювання на етапі проектування. Узагальнена модель вимірювального пристрою. Задача проектування вимірювального пристрою. Лінійність перетворення по інформаційним змінним. Односпрямованість елементів вимірювального кола. Етапи проектування. Контрольні запитання і завдання.

Засіб вимірювання – це технічний засіб, що використовується при вимірюванні та має нормовані метрологічні властивості. Ця особливість, яка регламентована ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 та "ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений", повинна бути відображена насамперед у моделі технічного об'єкту, що підлягає проектуванню.

Найважливіші характеристики засобів вимірювань, які можуть бути покладені в основу моделі, такі.

1. Номінальна статична характеристика перетворення вимірювального перетворювача $f_n(x)$, яка повинна виражатися у вигляді формули, графіка, таблиці.

2. Характеристики систематичної складової Δ_c похибки засобів вимірювань: межа Δ_{cd} допустимої систематичної складової похибки засобів

вимірювань даного типу або межа $\Delta_{\text{сд}}$ допустимої систематичної складової похибки, математичного очікування $M[\Delta_{\text{с}}]$ і середньоквадратичного відхилення $\sigma[\Delta_{\text{с}}]$ систематичної складової похибки засобів вимірювань даного типу.

3. Характеристики випадкової складової $\overset{\circ}{\Delta}$ похибки засобів вимірювань: межа $\sigma_{\text{д}}[\overset{\circ}{\Delta}]$ допустимого середньоквадратичного відхилення випадкової складової похибки засобу вимірювання даного типу або межа $\sigma_{\text{д}}[\overset{\circ}{\Delta}]$ допустимого середньоквадратичного відхилення випадкової складової похибки, номінальна нормалізована автокореляційна функція $r_{\overset{\circ}{\Delta}}(\tau)$ або номінальна функція спектральної густини $S_{\overset{\circ}{\Delta}}(\omega)$ випадкової складової похибки та межі допустимих відхилень цих функцій від номінальних.

4. Характеристики похибки Δ засобів вимірювань: межа $\Delta_{\text{д}}$ допустимої похибки засобів вимірювань даного типу або межа $\Delta_{\text{д}}$ допустимої похибки, математичне очікування $M[\Delta]$ і середньоквадратичне відхилення $\sigma[\overset{\circ}{\Delta}]$ похибки засобів вимірювань даного типу (останні характеристики можуть застосовуватися для засобів вимірювань, найбільше значення середнього квадратичного відхилення $\sigma[\overset{\circ}{\Delta}]$ випадкової складової похибки яких не перевищує q у відсотках $\Delta_{\text{д}}$), варіація b вихідного сигналу вимірювального перетворювача і варіація показань вимірювального приладу, нормовані межею допустимого значення $b_{\text{д}}$ варіації засобів вимірювань даного типу.

Перераховані характеристики засобів вимірювань повинні виражатися числом або функцією (формулою, графіком, таблицею) інформативного параметру вхідного або вихідного сигналу як характеристики абсолютних або відносних, або приведених похибок.

5. Динамічні характеристики засобів вимірювань:

- вид функції зв'язку між змінними в часі вхідними та вихідними сигналами (наприклад, вид передавальної функції, імпульсної перехідної характеристики, перехідної характеристики для засобів вимірювання, які можна вважати лінійними), номінальні значення і найбільші допустимі відхилення від номінальних значень коефіцієнтів зазначеної функції зв'язку;
- графіки (таблиці) номінальних амплітудно- й фазочастотних характеристик і найбільші допустимі відхилення від номінальних характеристик;
- час встановлення показів t_b (часткова динамічна характеристика);
- для вимірювальних перетворювачів, які навіть приблизно не можуть вважатися лінійними, – будь-які характеристики, що дають змогу встановити зв'язок між вхідним і вихідним сигналами, які змінюються в часі.

6. Засоби вимірювання функціонують в різних кліматичних зонах, в умовах впливу електромагнітних, гравітаційних та інших полів. Для забезпечення єдності вимірювань в цих умовах ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 передбачає нормування функції впливу $\psi(\xi)$, яка встановлює залежність похибки засобу вимірювання від відхилення однієї з впливаючих величин ξ від нормального значення або виходу її за межі нормальної області значень.

Функція впливу $\psi(\xi)$, або найбільші допустимі зміни $\Delta(\xi)$, повинні нормуватися окремо для кожного впливаючого фактору (параметру).

Функції впливу можуть нормуватися для спільних змін величин, що впливають, якщо функція впливу будь-якої однієї величини істотно залежить від інших впливаючих величин.

Функції впливу $\psi(\xi)$ повинні нормуватися у вигляді номінальної функції впливу (формулою, таблицею або графіком) і межі допустимих відхилень від номінальної функції або граничної функцією впливу.

7. Функції розподілу систематичної і випадкової складових похибки засобів вимірювань повинні представлятися формулами із вказанням

числових значень параметрів, таблицями, графіками, стандартними апроксимаціями, інтервалом із зазначенням імовірності.

Необхідність забезпечення єдності вимірювань не тільки в межах галузі, країни, регіону, а й в усьому світі призвела до того, що параметри і властивості засобів вимірювань, мабуть, як жодного іншого технічного об'єкту, регламентовані великою кількістю стандартів галузевих, державних, міжнародних (наприклад, стандарти ISO), міжнародних галузевих (наприклад, стандарти міжнародної електротехнічної комісії), глобальними міжнародними стандартами, наприклад міжнародною системою одиниць фізичних величин СІ.

Виходячи з викладеного, для опису засобу вимірювань доцільно застосувати загальну модель і виділити підмоделі, які дозволяють не тільки проектувати засоби вимірювань, а й дати опис проектування відповідно до стандартів на засіб вимірювання даного типу.

Розглянемо найбільш загальні підмоделі засобів вимірювання.

Номінальна статична характеристика є окремим випадком *динамічної характеристики* при $t \rightarrow \infty$, проте вона виділяється в окрему характеристику, оскільки більшість засобів вимірювань використовується в усталеному режимі. У цьому випадку динамічна характеристика використовується на етапі проектування для визначення часу встановлення показників, після збігу якої характеристику можна вважати статичною.

Характеристики похибок засобів вимірювань можуть бути встановлені тільки апостеріорно після статистичних випробувань представницької групи засобів вимірювань даного типу. Разом з тим завдання автоматизованого проектування передбачає встановлення характеристик похибок на основі апріорної інформації про похибки елементів засобів вимірювань. Це завдання пов'язано з визначенням спільної густини ймовірностей великого числа елементів і передбачає велику обчислювальну продуктивність технічних засобів автоматизованого проектування.

Функції впливу зовнішніх факторів, що впливають на характеристики засобів вимірювань є одними з найважливіших характеристик, тому що по них визначається область застосування засобів вимірювань даного типу. Достовірність визначення функцій впливу розрахунковим шляхом для багатокомпонентних засобів вимірювань невисока внаслідок багатозв'язковості залежностей, так і неможливості точного опису полів впливових факторів у зонах різних компонент засобів вимірювань. Найбільш вірогідно функції впливу можуть бути визначені експериментально.

Таким чином, проектування засобів вимірювання включає проектування по апіорній інформації та уточнення отриманих моделей, особливо в частині підмоделей похибок і функцій впливу по апостеріорній експериментальній інформації, причому останній етап передбачає великий обсяг обчислень при обробці статистичної інформації і, безумовно, має бути одним з найважливіших етапів автоматизації проектування.

З урахуванням розглянутих особливостей засобів вимірювання доцільно виділити такі етапи їх проектування:

- складання динамічної детермінованої моделі;
- складання статичної детермінованої моделі;
- складання детермінованої моделі похибки;
- складання стохастичної моделі похибки;
- складання детермінованої моделі функції впливу;
- складання стохастичної моделі функції впливу;
- отримання зазначених моделей експериментальним шляхом;
- уточнення моделей на основі теоретичних і експериментальних даних.

Для побудови засобів вимірювання використовується велика кількість фізичних ефектів і способів використання фізичних принципів; самі засоби, призначені для вимірювання різних фізичних величин, відрізняються великою різноманітністю. Тому є доцільним навести коротку класифікацію

засобів вимірювань і виділити їх загальні структурні елементи. Згідно ДСТУ 2681-94, розрізняють такі основні види засобів вимірювань.

Міра – засіб вимірювання, призначений для відтворення фізичної величини заданого розміру.

Вимірювальний прилад – засіб вимірювання, призначений для створення сигналу вимірювальної інформації у формі, доступній для безпосереднього сприйняття спостерігачем. Вимірювальні прилади класифікуються залежно від форми надання інформації та виду перетворення вхідної величини. Розрізняють аналогові, цифрові, показуючі, реєструючі, самописні, друкувальні, прямої дії, порівняння, інтегруючі, сумуючі. З точки зору побудови вимірювального кола або структурної схеми слід виділити прилади прямої дії, в яких передбачено одне або декілька перетворень сигналу вимірювальної інформації в одному напрямку, тобто без застосування зворотного зв'язку, а також прилади порівняння, призначені для безпосереднього порівняння вимірюваної величини з величиною, значення якої відомо.

Вимірювальний перетворювач – засіб вимірювання, призначений для вироблення сигналу вимірювальної інформації у формі, зручній для передачі, подальшого перетворення, обробки та/або зберігання, але не піддається безпосередньому сприйняттю спостерігачем. Вимірювальні перетворювачі поділяють на: первинні, проміжні, передавальні, масштабні.

Сукупність вимірювальних приладів і вимірювальних перетворювачів називається *вимірювальними пристроями*.

Вимірювальна система – сукупність засобів вимірювання (мір, вимірювальних приладів, вимірювальних перетворювачів) і допоміжних пристроїв, з'єднаних між собою каналами зв'язку, призначена для створення сигналів вимірювальної інформації у формі, зручній для автоматичної обробки, передачі та/або використання в автоматичних системах управління.

Наведемо ще кілька термінів, що використовуються в метрології:

- *перетворювальний елемент засобу вимірювання* – елемент засобу вимірювання, в якому відбувається одне з ряду послідовних перетворень величини;

- *вимірювальне коло засобу вимірювання* – сукупність перетворених елементів засобу вимірювання, що забезпечує здійснення всіх перетворень сигналу вимірювальної інформації;

- *сигнал вимірювальної інформації* – сигнал, функціонально пов'язаний з вимірюваною величиною;

- *вимірювальна інформація* – інформація про значеннях вимірюваних фізичних величин.

Узагальнена модель вимірювального пристрою може бути представлена

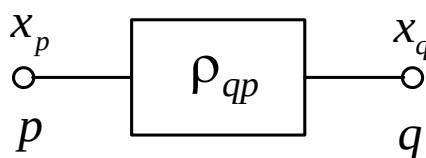


Рисунок 1.1 Узагальнена модель вимірювального пристрою

На вхід пристрою поступає власне безліч входних сигналів, що містять безліч величин, частина з яких в даній задачі підлягає вимірюванню, а частина – ні. Ті величини, що підлягають вимірюванню, іноді називають інформативними параметрами сигналу, а невимірювані – неінформативними. Останні хоча безпосередньо не вимірюються, проте впливають на результат вимірювання інформативних параметрів унаслідок неідеальної селективності вимірювальних перетворювачів.

Наприклад, на вхід частотоміра надходить сигнал у вигляді синусоїдної напруги $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Вимірюваною величиною є частота $f = \frac{\omega}{2\pi}$. У цій вимірювальній задачі амплітуда і фаза не вимірюються і при вимірюванні частоти є неінформативними параметрами сигналу. Водночас амплітуда сигналу впливає на якість формування інтервалів часу, внаслідок чого при малих U_m виникає похибка вимірювання частоти.

Якщо цей же сигнал надходить на вхід вольтметра, то вимірюваною величиною є амплітуда напруги U_m , а неінформативними параметрами сигналу – частота і фаза. Якщо вимірювальне коло має амплітудно-частотну похибку, то неінформативний параметр – частота – викликає похибку вимірювання амплітуди.

Якщо цей же сигнал подати на вхід амплітудного аналізатора спектра, то вимірюваними величинами є амплітуда і частота сигналу. Однак при вимірюванні амплітуди частота є неінформативним параметром і може призвести до похибки вимірювання амплітуди так само, як амплітуда сигналу до похибки вимірювання частоти.

На вимірювальне коло впливають зовнішні фактори, що створюють похибку вимірювання відповідно до функції впливу.

Джерелами похибок є також діапазон параметрів компонентів вимірювального кола, їх нестабільність, взаємний вплив їх один на одного тепловими та електромагнітними полями, вібрацією, випромінюванням.

Таким чином, задача проектування вимірювального пристрою зводиться до мінімізації похибки пристрою при обмеженні на масу, габаритні розміри і вартість виробу, або до мінімізації вагогабаритних параметрів при обмеженнях на похибку або до створення пристрою з обмеженнями на всі його параметри – похибку, вартість, масу, габаритні розміри, умови застосування.

Специфічна особливість вимірювальних пристроїв є такою, що з передачі інформаційних параметрів сигналу вони є лінійними пристроями. Наприклад, в вольтметрі ефективних значень відбуваються нелінійні перетворення електричного сигналу відповідно до залежності

$$U_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt},$$

у той же час показання ідеального вольтметра повинні бути рівні ефективному значенню вимірюваної напруги на вході.

Ще більш наочним прикладом є ватметр активної потужності, у вимірювальному колі якого залежно від принципу дії містяться перемножуючий пристрій або квадратичні перетворювачі, тоді як покази ідеального ватметра відповідають активній потужності на навантаженні [1].

Лінійність перетворення по інформаційним змінним дозволяє застосувати апарат лінійної алгебри для складання моделей та аналізу вимірювальних пристроїв, і це є передумовою для автоматизації проектування, оскільки апарат лінійної алгебри наразі найбільш алгоритмізований, і в цій області розроблені великі комплекси математичного та програмного забезпечення.

Слід зазначити, що в більшості випадків перетворювальні елементи вимірювального кола односпрямовані, тобто такі, в яких по даному елементу вимірювальна інформація передається від входу до виходу, а назад від виходу до входу не передається. Прикладами односпрямованих перетворювальних елементів є перетворювачі частоти в напругу. Дійсно, адитивне зміщення вихідної напруги від зовнішнього джерела не призводить до зміни частоти на вході перетворювача.

В електромеханічному приладі постійного струму вимірюється струм, взаємодіючи з магнітним потоком постійного магніту перетворюється в механічний момент, який не може перетворитися в постійний струм на вході приладу.

Односпрямованістю майже завжди володіють перетворювальні елементи, в яких відбувається перетворення форми інформації.

Елементи, в яких форма інформації не перетворюється, мають односпрямованість, достатню для практичних цілей у разі великої відмінності вхідних і вихідних імпедансів.

Для точного аналізу вимірювального кола необхідно враховувати характер перетворювальних елементів. Методи аналізу вимірювальних кіл з двонаправленими елементами розроблені в [2].

Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть метрологічні характеристики, які можуть бути покладені в основу моделі засобів вимірювань під час проектування.*
2. *Наведіть основні етапи проектування засобів вимірювання та їх особливості.*
3. *Наведіть класифікацію засобів вимірювань та виділити їх загальні структурні елементи.*
4. *Наведіть визначення міри, як засобу вимірювання.*
5. *Наведіть визначення вимірювального приладу, які є види вимірювальних приладів, визначення сигналу вимірювальної інформації.*
6. *Наведіть визначення вимірювального перетворювача, які бувають види вимірювальних перетворювачів.*
7. *Наведіть визначення вимірювальної системи*
8. *Наведіть визначення термінів, таких як перетворювальний елемент засобу вимірювання, вимірювальне коло засобу вимірювання, сигнал вимірювальної інформації, вимірювальна інформація.*
9. *У чому полягає задача проектування вимірювального пристрою?*
10. *Які специфічні особливості мають вимірювальні пристрої і які треба враховувати під час проектування? Наведіть приклади.*
11. *Поясніть лінійність перетворення по інформаційним змінним, односпрямованість перетворення елементів вимірювального кола. Наведіть приклади.*
12. *Який математичний апарат є доцільним для складання моделі вимірювальних пристроїв та аналізу? Поясніть, чому.*

Лекція 2. Статична характеристика вимірювальних пристроїв.

Основні визначення

Визначення ρ -параметрів перетворювача. Моделі елементарних операцій перетворювальних елементів Матрична форма системи рівнянь функціонування вимірювального пристрою. Типові структурні схеми вимірювальних пристроїв. Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів. Послідовне з'єднання перетворювальних елементів з адитивною похибкою на виході елементів. Система рівнянь кола. Матрична форма системи. Властивості матриці. Формальні правила заповнення клітин матриці коефіцієнтів. Загальний коефіцієнт перетворення через визначники системи. Контрольні запитання і завдання.

При проектуванні вимірювальних пристроїв в більшості випадків на основі досвіду розробника з використанням банку даних про фізичні принципи та методи побудови будується вимірювальне коло засобу вимірювання, тобто складається сукупність перетворювальних елементів і встановлюються зв'язки між ними для вирішення даної вимірювальної задачі. Відповідь на придатність синтезованого таким чином вимірювального кола при заданих обмеженнях може бути дана тільки в результаті його аналізу, тобто після створення математичної моделі, адекватної динамічної та статичної характеристик, а також характеристикам похибки. Процедура синтезу в більшості випадків ітераційна на основі результатів аналізу і оцінок похибок пристрою. Тому завдання аналізу є найважливішим етапом проектування вимірювальних пристроїв. Враховуючи багаторазовість процедур аналізу, розглянемо методи і алгоритми аналізу, найбільш придатні для реалізації на ЕОМ.

Наразі опубліковано ряд монографій, навчальних посібників, підручників, присвячених аналізу електронних схем, інформаційних пристроїв, пристроїв автоматики. Тому буде правильно рекомендувати скористатися цими джерелами [2, 3, 4], а в цьому посібнику на конкретних прикладах викласти найбільш придатні методи аналізу для автоматизованого проектування вимірювальних пристроїв, приділивши особливу увагу методам аналізу похибок, як найважливішої підмоделі вимірювального пристрою.

Отже, припустимо, синтезовано вимірювальне коло засобу вимірювання. Аналогом вимірювального кола є структурна схема, функціональна схема, блок-схема. Усі ці поняття в основному вкладається один і той же зміст, а саме – це сукупність перетворювальних елементів і джерел сигналів із зазначенням функціональних зв'язків між ними.

Універсальною моделлю перетворювального елемента є чотиріполюсник, в якому дві входні і дві вихідні змінні зв'язуються через параметри чотиріполюсника. Число змінних може бути скорочено, якщо користуватися різними співвідношеннями між ними. У вимірювальній техніці, автоматиці, радіотехніці найчастіше використовується відношення вихідної змінної до входних, що отримало назву (згідно ДСТУ 2681-94) коефіцієнта перетворення вимірювального перетворювача, рівного відношенню сигналу на виході вимірювального перетворювача, що відображає вимірювану величину, до сигналу на вході перетворювача. У [2] коефіцієнт перетворення названий ρ -параметром перетворювача. У теорії графів точки q та p називаються полюсами, відношення ρ_{qp} -гілкою. Тоді

$$\rho_{qp} = \frac{x_q}{x_p}. \quad (1.1)$$

Сигнал «причина» x_p – незалежна змінна, сигнал «наслідок» x_q – залежна змінна. Для односпрямованих елементів можлива передача тільки в напрямку від p до q . Коефіцієнт передачі в протилежному напрямку для них дорівнює:

$$\rho_{pq} = \frac{x_p}{x_q} = 0.$$

У разі перетворювальних елементів двонаправленої дії можлива передача з виходу на вхід. Для них має місце:

$$\rho_{pq} = \frac{x_p}{x_q} \neq 0.$$

Вимірювальне коло можна представити у вигляді сукупності перетворювальних елементів, в яких відбувається одна з елементарних операцій:

- пропорційної зміни

$$x_q = \rho_{qp} x_p, \quad \rho_{qp} = \frac{x_q}{x_p}. \quad (1.2)$$

- підсумовування (рис. 1.2)

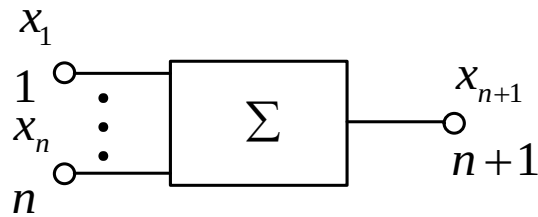


Рисунок 1.2 – Підсумовуючий перетворювальний елемент

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.3)$$

при цьому коефіцієнт перетворення по кожній змінній

$$\rho_{(n+1)i} = \frac{x_{(n+1)i}}{x_i} = 1, \quad (1.4)$$

де $x_{(n+1)i}$ – частина вихідного сигналу, викликана i -м вхідним сигналом;

- перемноження (рис. 1.3)

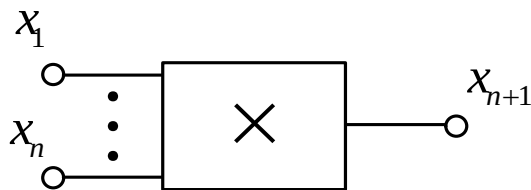


Рисунок 1.3 – Перемножуючий перетворювальний елемент

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^n x_i, \quad (1.5)$$

його лінійний аналог

$$\rho_{(n+1)n} = \frac{x_{n+1}}{\prod_{i=1}^n x_i}; \quad (1.6)$$

- функціонального нелінійного перетворення (рис. 1.4), $x_q = f(x_p)$.

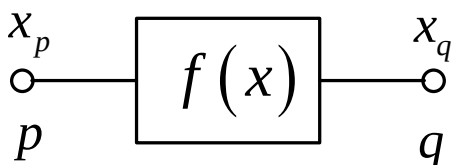


Рисунок 1.4 – Нелінійний перетворювальний елемент

З урахуванням того, що у вимірювальних пристроях перетворення вимірювальної інформації лінійно, шляхом заміни змінних функціональний перетворювач може бути представлений лінійним по інформаційним змінним.

Дійсно, заміною $x_p = y_p$, $f(x_p) = y_q$ отримаємо (рис. 1.5) $\rho_{qp} = \frac{y_q}{y_p}$

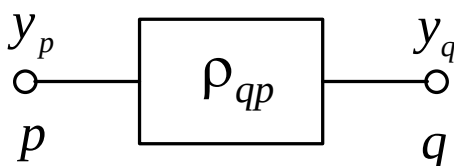


Рисунок 1.5 – Лінійний аналог нелінійного перетворювального елемента

Пояснимо це на прикладі перетворювача діючих значень напруги. В останньому, згідно з визначенням, передбачена операція зведення в квадрат миттєвого значення напруги, інтегрування і осереднення:

$$u_d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt.$$

Насправді в такому перетворювачі інформаційним параметром вхідного сигналу, або вимірюваної величини, є квадрат діючого значення напруги. Зв'язок між вихідним сигналом і квадратом діючого значення напруги на вході лінійний.

Функціонування вимірювального кола може бути описано системою рівнянь, що доцільно представити в матричній формі та розв'язувати щодо шуканих змінних через відповідні визначники.

При зображенні вимірювального кола число полюсів мінімум на одиницю більше числа гілок. Тому систему рівнянь для гілок необхідно доповнити тотожностями для полюсів з автономними (незалежними) змінними типу $x_j = x_j$.

Доповнення системи тотожностями не дозволяє отримати повну систему незалежних рівнянь, тому й рішення можливе тільки відносно сукупності змінних у певних співвідношеннях.

Найбільш типові структурні схеми вимірювальних пристроїв являють собою послідовне включення односпрямованих і двонаправлених елементів, послідовне включення елементів, що мають адитивну похибку, схеми з від'ємним зворотним зв'язком, схеми, що діють за принципом інваріантності на основі корекції похибок, що містять нелінійні елементи, що передбачають взаємне розділення каналів.

Тому нижче на прикладах перерахованих різновидів структурних схем будуть розглянуті правила складання матричних рівнянь і акцентовано увагу на особливості, характерні для них.

Правила обчислення визначників у символьному вигляді викладені в розд. 2.

Приклад 1

Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів

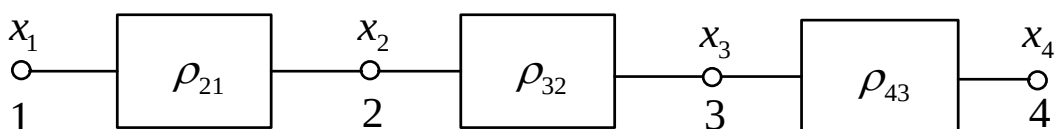


Рисунок 1.6 – Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів

Система рівнянь кола:

$$\begin{cases} x_1 = x_1; \\ x_2 = \rho_{21}x_1; \\ x_3 = \rho_{32}x_2; \\ x_4 = \rho_{43}x_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ця ж система в загальному вигляді:

$$\begin{cases} \rho_{11}x_1 + \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4 = x_1; \\ -\rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4 = 0; \\ \rho_{31}x_1 - \rho_{32}x_2 + \rho_{33}x_3 + \rho_{34}x_4 = 0; \\ \rho_{41}x_1 + \rho_{42}x_2 - \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Порівняння (1.7) та (1.8) дає:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = \rho_{44} = 1;$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{31} = \rho_{34} = \rho_{41} = \rho_{42} = 0.$$

Величини $\rho_{21}, \rho_{32}, \rho_{43}$ в системі (1.8) помножені на -1 .

Матрична форма системи (1.8) матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\rho_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\rho_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

$\uparrow$
Матриця коефіцієнтів

$\uparrow$
Матриця-
стовпець
змінних

$\uparrow$
Матриця-
стовпець
правих
частин

Матриця коефіцієнтів завжди квадратна, її розмірність $n \times n$, де n – число змінних.

Аналіз матриці коефіцієнтів дозволяє встановити формальні правила заповнення клітин ij , де i – номер рядка, j – номер стовпця.

1. Зв'язок полюса j і відповідно змінної x_j , існує тільки з прилеглими (поруч розташованими) полюсами та відповідними змінними x_i . Коефіцієнт передачі в напрямку передачі $\rho_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$ і в таблицю проставляється зі знаком «-». Коефіцієнт передачі в протилежному напрямі при відсутності передачі сигналу (для односпрямованих елементів) $\rho_{ji} = 0$. Для двонаправлених елементів $\rho_{ji} \neq 0$ і в таблицю проставляється зі знаком «+».

2. Коефіцієнт передачі від полюса j до неприлеглих полюсів дорівнює нулю. Це можна трактувати як рівність нулю всіх неприлеглих змінних, що відповідає режиму короткого замикання всіх неприлеглих полюсів.

3. Зв'язок полюсу з самим собою здійснюється через коефіцієнт передачі $\rho_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

4. Для суматора коефіцієнт передачі дорівнює одиниці і проставляється у відповідну клітку зі знаком «-».

5. Клітки матриці коефіцієнтів заповнюються за стовпцями. При цьому у відповідний рядок стовпця j проставляються коефіцієнти передачі змінної j полюса з усіма полюсами відповідно до правил 1-4. При цьому номер розглянутої змінної є номером стовпця, а номери всіх інших змінних – номерами рядків. Отже, перший стовпець ($j=1$) матриці коефіцієнтів отримуємо таким чином:

- полюс 1 має зв'язок з самим собою через $\rho_{11} = 1$ (правило 3);
- полюс 1 має зв'язок з полюсом 2 через коефіцієнт ρ_{21} , який проставляється у другий рядок першого стовпця зі знаком «-» (правило 1);
- полюс 1 має зв'язок з неприлеглим полюсом 3 через коефіцієнт $\rho_{31} = 0$, який проставляється в третій рядок першого стовпця (правило 2);
- полюс 1 має зв'язок з неприлеглим полюсом 4 через коефіцієнт $\rho_{41} = 0$, який проставляється в четвертий рядок першого стовпця (правило 2).

Аналогічно описаному для першого стовпця заповнюються всі стовпці матриці коефіцієнтів.

Загальний коефіцієнт передачі за правилом Крамера знаходиться як відношення відповідних детермінантів:

$$k_{41} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{\det 4 / \det C}{\det 1 / \det C} = \frac{\det 4}{\det 1},$$

де $\det C$ – визначник матриці коефіцієнтів (системи); $\det 4$ – визначник матриці коефіцієнтів, в якому 4-й стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин; $\det 1$ – визначник матриці коефіцієнтів, в якому 1-й стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин.

Таким чином, маємо:

$$k_{41} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -\rho_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^{1+4} x_1 \begin{vmatrix} -\rho_{21} & 1 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} \end{vmatrix}}{x_1} = \rho_{21} \rho_{32} \rho_{43}.$$

* * *

Приклад 2

Послідовне з'єднання перетворювальних елементів з адитивною похибкою на виході елементів

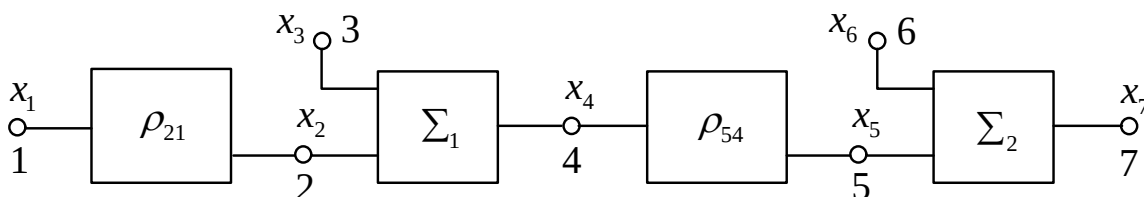


Рисунок 1.7 – Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням елементів і адитивною похибкою на виході елементів

Система рівнянь кола:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = x_1 & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_1 ; \\ x_2 = \rho_{21} x_1 & -\rho_{21} x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0 ; \\ x_3 = x_3 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_3 ; \\ x_4 = x_3 + x_2 & 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0 ; \\ x_5 = \rho_{54} x_4 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - \rho_{54} \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0 ; \\ x_6 = x_6 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_6 ; \\ x_7 = x_6 + x_5 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 - 1 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 0 . \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Матричний запис (1.10) має вигляд:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\rho_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{54} & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{array} \right] . \quad (1.11)$$

$\uparrow$
Матриця коефіцієнтів

$\uparrow$
Матриця-стовпець змінних

$\uparrow$
Матриця-стовпець правих частин

Введення тотожностей $x_3 = x_3$ для додаткових незалежних змінних x_3 і x_6 призвело до того, що матриця-стовпець правих частин містить у відповідних рядках ці змінні.

Загальний коефіцієнт перетворення дорівнює:

$$k_{71} = \frac{\det 7}{\det 1} = \rho_{21} \rho_{54} + \rho_{54} \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_6}{x_1} . \quad (1.12)$$

* * *

Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть визначення статичної моделі вимірювального пристрою, яка використовується під час проектування, коефіцієнту перетворення. Що називають ρ -параметром перетворювача і його структурних елементів?*
2. *Наведіть основні моделі перетворювальних елементів, якими можна представити вимірювальне коло. Дайте їх визначення, структурну модель, основне рівняння моделі.*
3. *Як можна описати системою рівнянь функціонування вимірювального кола? Наведіть найбільш типові структурні моделі вимірювальних пристроїв.*
4. *Наведіть структуру, систему рівнянь, матричну форму системи рівнянь вимірювального кола з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів.*
5. *Наведіть структуру, систему рівнянь, матричну форму системи рівнянь вимірювального кола з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів та з адитивною похибкою на виході елементів.*
6. *Наведіть формальні правила складання системи рівнянь вимірюваного кола у матричній формі, визначення матриці коефіцієнтів, правила заповнення клітин матриці.*
7. *Як знаходиться загальний коефіцієнт передачі через визначники матриці? Наведіть приклади визначення загального коефіцієнту для вимірювального кола з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів з адитивною похибкою на виході елементів і без похибки.*

Лекція 3. Статична характеристика вимірювальних пристроїв із просторовим розподілом каналів

Типові структурні схеми вимірювальних пристроїв із просторовим розподілом каналів. Вимірювальний підсилювач з від'ємним зворотним зв'язком. Матрична форма системи рівнянь функціонування пристрою. Загальний коефіцієнт передачі як відношення детермінантів системи. Вимірювальний підсилювач з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором. Система рівнянь кола. Матричний запис. Загальний коефіцієнт перетворення. Застосування матричного методу для аналізу вимірювальних кіл, які мають в своєму складі нелінійні елементи. Послідовне включення лінійних і нелінійних перетворювальних елементів. Ватметр з перемножувальним перетворювачем. Ватметр сумо-різницевого типу. Системи лінійних рівнянь в просторі інформаційних змінних. Матричний запис системи в просторі інформаційних змінних. Загальний коефіцієнт перетворення. Зворотне перетворення інформаційних змінних на сигнальні. Контрольні запитання і завдання.

Статична характеристика вимірювальних пристроїв. Типові структурні схеми вимірювальних пристроїв із просторовим розподілом каналів

Приклад 1

Розглянемо вимірювальний підсилювач з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 1.8).

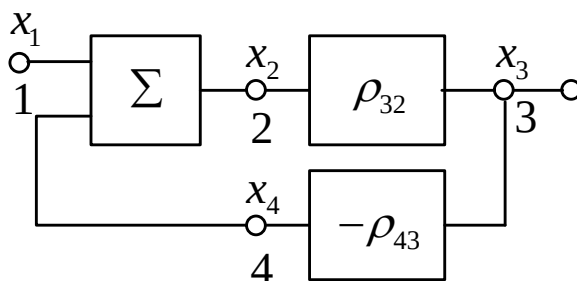


Рисунок 1.8 – Вимірювальний підсилювач з від'ємним зворотним зв'язком (ВЗЗ)

Розмірність матриці коефіцієнтів дорівнює числу змінних.

Матриця коефіцієнтів має розмірність 4×4 , матриця змінних і матриця правих частин – 4×1 :

$$\begin{bmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

$$k_{31} = \frac{x_3}{x_1} = \frac{\det 3}{\det 1} = \frac{\rho_{32}}{1 + \rho_{32}\rho_{43}}.$$

* * *

Приклад 2

Вимірювальний підсилювач з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором

Складемо матричний запис. Число змінних 6, отже, розмірність матриці коефіцієнтів 6×6 , матриці-стовпці змінних і правих частин мають по 6 рядків. Число незалежних змінних 1 (x_1) отже, матриця правих частин буде мати тільки одини ненульовий рядок – перший.

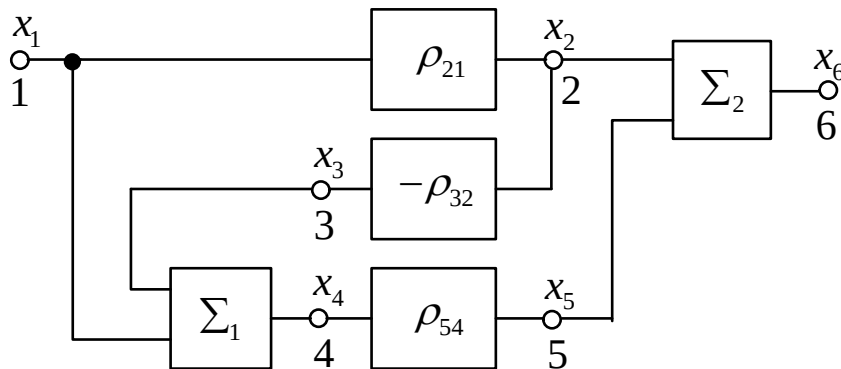


Рисунок 1.9 – Вимірювальний підсилювач з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором [5]

Відповідно до викладених вище правил заповнимо матрицю коефіцієнтів, потім матриці змінних і правих частин.

$$\begin{bmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\rho_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \rho_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{54} & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Загальний коефіцієнт перетворення дорівнює:

$$k_{61} = \frac{x_6}{x_1} = \frac{\det 6}{\det 1} = \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}. \quad (1.15)$$

* * *

Приклад 3

Послідовне включення лінійних і нелінійних перетворювальних елементів

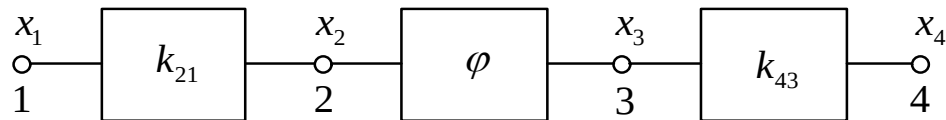


Рисунок 1.10 – Схема послідовного включення лінійних і нелінійних блоків

Система нелінійних рівнянь в просторі сигналів:

$$x_1 = x_1; \quad x_2 = k_{21} \cdot x_1; \quad x_3 = \varphi(x_2); \quad x_4 = k_{43}x_3. \quad (1.16)$$

Нехай функціональний блок описується поліноміальною залежністю:

$$x_3 = \varphi(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2; \quad (1.17)$$

Оскільки $x_2 = k_{21}x_1$, одержимо:

$$\varphi(x_2) = a_0 + a_1k_{21}x_1 + a_2k_{21}^2x_1^2. \quad (1.18)$$

Виконаємо заміну змінних з метою побудови системи лінійних рівнянь в просторі інформаційних змінних:

$$a_0 = y_1; a_1 k_{21} x_1 = y_2; a_2 k_{21}^2 x_1^2 = y_3.$$

Тоді $x_3 = y_4 = y_1 + y_2 + y_3; y_5 = x_4; \rho_{54} = k_{43}; y_5 = \rho_{54} y_4.$ (1.19)

Структурна схема пристрою (рис. 1.10) після заміни змінних буде мати вигляд, представлений на рис. 1.11.

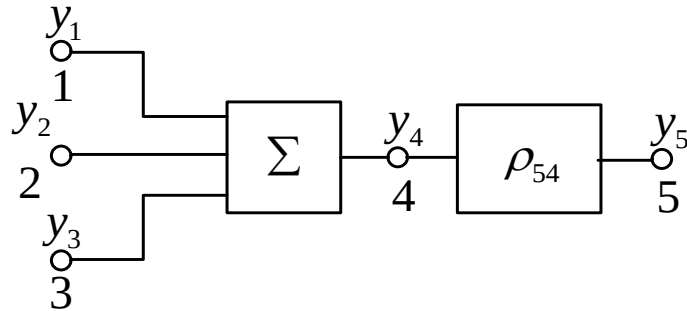


Рисунок 1.11 – Структурна схема пристрою рис 1.10 після заміни змінних

Матричне рівняння схеми (рис. 1.11) в просторі інформаційних змінних матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & & 1 & & & \\ 3 & & & 1 & & \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & \\ 5 & & & & -\rho_{54} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Знайдемо відношення:

$$\frac{y_5}{y_2} = \frac{\det 5}{\det 2} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3) \rho_{54}}{y_2}. \quad (1.21)$$

Після зворотної заміни змінних отримаємо:

$$k_{41} = \frac{x_4}{x_1} = k_{43} \left(\frac{a_0}{x_1} + a_1 k_{21} + a_2 k_{21}^2 x_1 \right). \quad (1.22)$$

* * *

Приклад 4

Ватметр з перемножувальним перетворювачем (рис. 1.12)

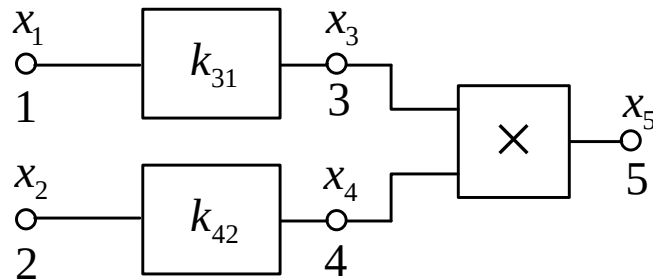


Рисунок 1.12 – Схема ватметра з перемножувальним перетворювачем

Вимірювальне коло в просторі сигналів x описується системою:

$$x_3 = k_{31}x_1; \quad x_4 = k_{42}x_2; \quad x_5 = x_3x_4. \quad (1.23)$$

Введемо змінну $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_5$, $k_{31}k_{42} = \rho_{21}$. Тоді система лінійних рівнянь в просторі інформаційних змінних набуде вигляду:

$$y_1 = y_1; \quad y_2 = \rho_{21}y_1.$$

Інформаційна модель у просторі змінних y наведена на рис. 1.13.

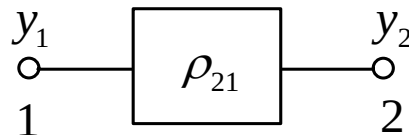


Рисунок 1.13 – Інформаційна модель ватметра, що відповідає рис. 1.12

Матрична модель в просторі змінних y :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.24)$$

Розв'язок (1.24) буде:

$$y_2 = \rho_{21}y_1. \quad (1.25)$$

Після заміни змінних отримаємо:

$$x_5 = k_{31}k_{42}x_1x_2.$$

* * *

Приклад 5

Ватметр сума-різницевого типу

Вимірювальне коло (нелінійна модель) такого ватметра в просторі сигналів x подано на рис. 1.14.

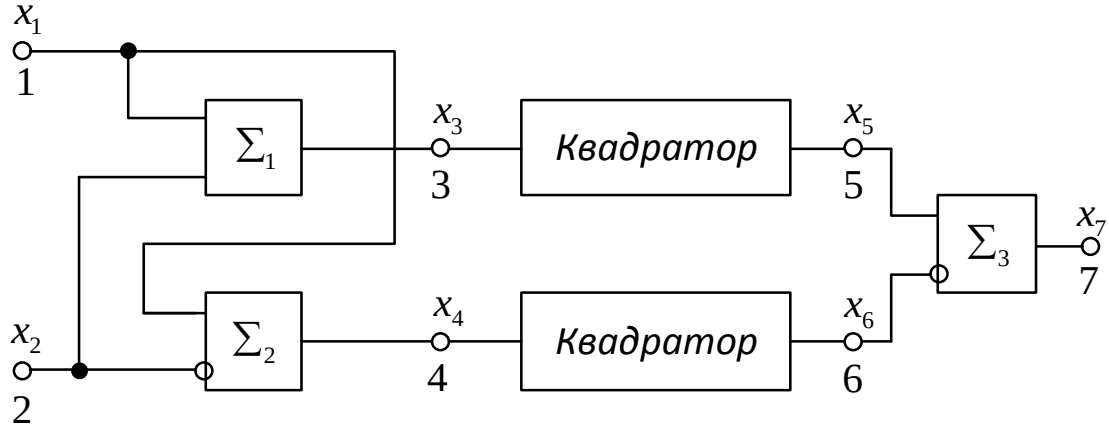


Рисунок 1.14 – Схема ватметра сума-різницевого типу

Модель описується системою нелінійних і лінійних рівнянь в просторі сигналів x

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 ; \\ x_4 = x_1 - x_2 ; \\ x_5 = k_{53}x_3^2 ; \\ x_6 = k_{64}x_4^2 ; \\ x_7 = x_5 - x_6 . \end{cases} \quad (1.26)$$

Розв'язання системи (1.26) методом підстановки дає залежності:

$$\begin{aligned} x_5 &= k_{53}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2); \\ x_6 &= k_{64}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2); \\ x_7 &= x_1^2(k_{53} - k_{64}) + 2x_1x_2(k_{53} + k_{64}) + x_2^2(k_{53} - k_{64}); \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для отримання лінійної моделі за інформаційними змінними, які позначимо буквою y , проведемо заміни:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2; & y_2 = 2x_1x_2; & y_3 = x_2^2; \\ y_4 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2; & y_5 = x_5; \\ y_6 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2; & y_7 = x_6; \\ y_8 = x_7; & k_{53} = \rho_{54}; & k_{64} = \rho_{76}. \end{cases}$$

Запишемо систему рівнянь у просторі інформаційних змінних y :

$$\begin{cases} y_1 = y_1; & y_2 = y_2; & y_3 = y_3; & y_4 = y_1 + y_2 + y_3; \\ y_5 = \rho_{54}y_4; & y_6 = y_1 - y_2 + y_3; & y_7 = \rho_{76}y_6; & y_8 = y_5 - y_7. \end{cases} \quad (1.28)$$

Перші три рівняння є тотожністю, тому система (1.28) недовизначена і її розв'язання можливе лише відносно сукупності змінних. У розв'язання відносно будь-якої змінної входять змінні, складові тотожності.

На основі системи (1.28) складемо модель ватметра (рис. 1.15), лінійну за інформаційними змінними в просторі y .

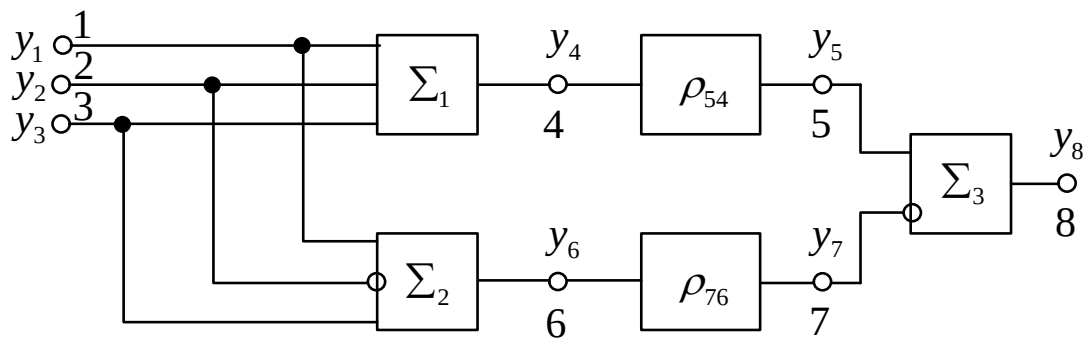


Рисунок 1.15 – Інформаційна модель ватметра сумо-різницевого типу

Матрична форма моделі ватметра, лінійної за інформаційними змінними, складена за вище наведеними правилами, матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix}
 i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 6 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{76} & 1 & 0 \\
 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (1.29)$$

Знайдемо вихідну величину y_8 :

$$y_8 = \frac{\det 8}{\det C} = y_1(\rho_{54} - \rho_{76}) + y_2(\rho_{54} + \rho_{76}) + y_3(\rho_{54} - \rho_{76}) .$$

Провівши зворотну заміну змінних – інформаційних на сигнальні, отримаємо:

$$x_7 = x_1^2(k_{53} - k_{64}) + 2x_1x_2(k_{53} + k_{64}) + x_2^2(k_{53} - k_{64}) . \quad (1.30)$$

Якщо виконується умова інваріантності до неінформативних параметрів

$$k_{53} = k_{64} = k ,$$

отримаємо:

$$x_7 = 4k x_1 x_2 .$$

Як видно, рівняння (1.27), отримане шляхом підстановок із системи нелінійних рівнянь (1.26), і рівняння (1.30), отримане з матричного рівняння (1.29) після зворотної заміни змінних, співпадають.

Цей приклад підтверджує можливість застосування матричного методу для аналізу вимірювальних кіл, які мають в своєму складі нелінійні елементи.

* * *

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклади вимірювальних пристроїв з просторовим розподілом каналів, характерні особливості.

2. Наведіть структуру вимірювального підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком, систему рівнянь у матричній формі, рішення системи відносно коефіцієнту перетворення через визначники матриці.

3. Наведіть структуру вимірювального підсилювача з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором, систему рівнянь у матричній формі, рішення системи відносно коефіцієнту перетворення через визначники матриці.

4. Наведіть структуру вимірювального підсилювача з послідовним включенням лінійних і нелінійних перетворювальних елементів, процедуру лінеаризації системи відносно інформативних параметрів шляхом заміни змінних, систему лінійних рівнянь у матричній формі у просторі інформаційних змінних, рішення системи відносно коефіцієнту перетворення через визначники матриці.

5. Наведіть структуру ватметра з перемножувальним перетворювачем в просторі сигналів, систему нелінійних рівнянь, процедуру лінеаризації системи відносно інформативних параметрів шляхом заміни змінних.

6. Наведіть лінійну модель ватметра в просторі інформаційних змінних, систему лінійних рівнянь ватметра у матричній формі у просторі інформаційних змінних, рішення системи відносно коефіцієнта перетворення через визначники матриці та зворотну заміну змінних.

7. Наведіть структуру ватметра сумо-різницевого типу, систему нелінійних рівнянь в просторі сигналів.

8. Наведіть процедуру лінеаризації системи відносно інформативних параметрів шляхом заміни змінних, модель ватметра зі інформаційними змінними, систему лінійних рівнянь у матричній формі у просторі інформаційних змінних, рішення системи відносно коефіцієнта перетворення через визначники матриці, зробіть зворотну заміну змінних.

Лекція 4. Статична характеристика вимірювальних пристроїв з часовим розподілом каналів

Структурні схеми вимірювальних пристроїв із часовим розподілом каналів. Цифровий фазометр з адитивною корекцією. Створення інформаційної моделі шляхом заміни схеми з часовим розподілом каналів на схему з розподілом каналів у просторі. Матричні рівняння за інформаційними моделями. Вольтметр напруги змінного струму з мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів. Створення інформаційної моделі. Матричні рівняння за інформаційними моделями. Результат вимірювання через визначники інформаційної системи. Перехід до сигнальних параметрів. Результат вимірювання відносно сигнальних параметрів. Контрольні запитання і завдання.

Розглянемо цей тип пристроїв на прикладі цифрового фазометра з адитивною корекцією [6], схема якого представлена на рис. 1.16.

На рисунку зазначені: $\Phi 1$, $\Phi 2$ – вибіркові фільтри; $\Pi 01$, $\Pi 02$ – підсилювачі-обмежувачі; ТФВП – тригерний фазовимірювальний перетворювач; РЛ – реверсивний лічильник.

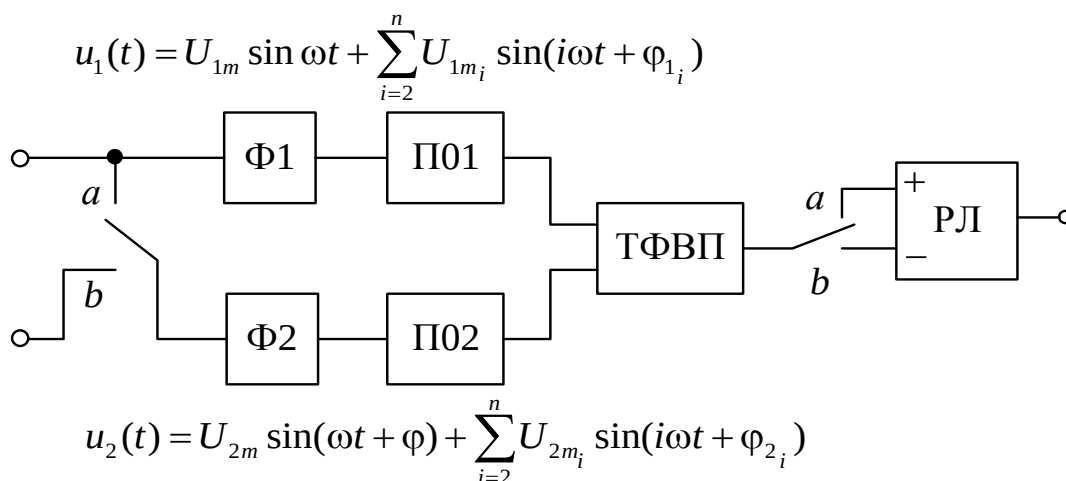


Рисунок 1.16 – Схема цифрового фазометра з адитивною корекцією

В такт "a" на обидва канали фазометра надходить спотворений сигнал

$$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t + \sum_{i=2}^n U_{1m_i} \sin(i\omega t + \varphi_{1_i})$$

і вимірюється фазовий зсув на виході каналів перетворення, який заноситься на сумуючий вхід реверсивного лічильника.

В такт "b" на перший канал надходить той самий сигнал, а на другий – інший сигнал

$$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=2}^n U_{2m_i} \sin(i\omega t + \varphi_{2_i})$$

і фазовий зсув між ними надходить на від'ємний вхід реверсивного лічильника, залишок показань якого є результатом вимірювання.

Інформаційна модель створюється шляхом заміни схеми з часовим розподілом каналів на схему з розподілом каналів у просторі.

При цьому збільшується кількість інформаційних змінних на число, відповідне кожному часовому каналові. Матрична модель буде мати розмірність рівну загальній кількості змінних. Для отримання матричного рівняння не має значення нумерація змінних, але для логічної простежуваності доцільно нарощувати номер змінної послідовно з нарощуванням номеру часового каналу (такту роботи). Створимо інформаційну модель цифрового фазометра, зображеного на рис.1.16, враховуючи наступні особливості роботи фазометра.

В фазометрі інформаційними змінними є фазові зсуви сигналів, що подаються на його входи. Результатом вимірювання має бути різниця зсувів фаз вхідних сигналів.

Фільтри першого і другого каналів Ф1 і Ф2 служать для ослаблення вищих гармонік. Підсилювачі-обмежувачі ПО1 і ПО2 служать для формування імпульсів керування станом тригера, призначеного для формування інтервалу часу, пропорційного фазового зсуву.

Фільтри і підсилювачі-обмежувачі можуть вносити додаткові фазові зсуви в канали фазометра. Ці додаткові фазові зсуви є фазовими похибками каналів.

Зважаючи на адитивність фазових зсувів інформаційну модель каналу слід представити в вигляді суматора, на один вхід якого подається фазовий зсув вхідного сигналу, а на другий вхід подається фазова похибка каналу. Вихідний інформаційний сигнал суматора є їх сума.

ТФВП має інформаційну модель у вигляді суматора, але з одним інвертуючим входом. Реверсивний лічильник (РЛ) також має інформаційну модель у вигляді суматора з одним інвертуючим входом.

З урахуванням зазначених роз'яснень інформаційна модель фазометра зображена на рис. 1.17.

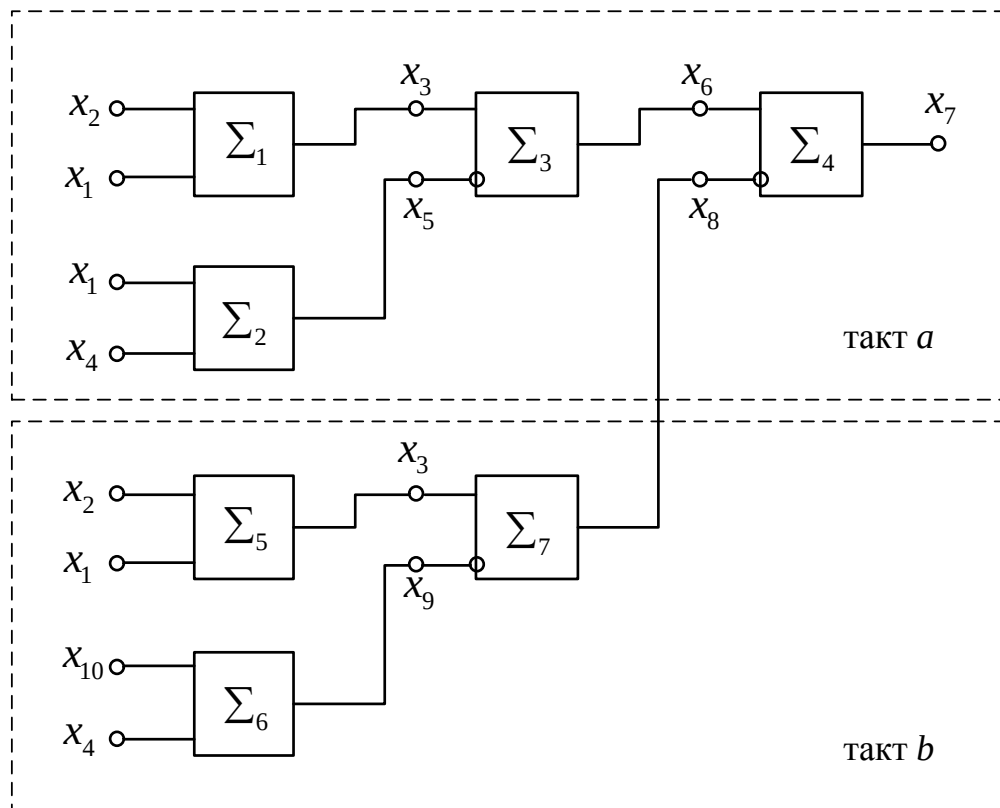


Рисунок 1.17 – Інформаційна модель фазометра з адитивною корекцією при часовому розподілі каналів: x_1, x_{10} – фазові зсуви вхідних сигналів; x_2, x_4 – фазові зсуви каналів.

Модель фазометра в матричній формі у відповідності з викладеними правилами про зв'язки між вузлами має вигляд:

$$\begin{bmatrix}
 i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 9 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 x \\
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9 \\
 x_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \\
 x_1 \\
 x_2 \\
 0 \\
 x_4 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 x_{10}
 \end{bmatrix}
 .$$

Оскільки вимірювальне коло містить тільки підсумовуючі елементи, то матрична форма містить тільки одиниці і сильно розріджена нулями. Це полегшує процес обчислення визначників. Кінцевий результат такий:

$$x_7 = \frac{\det 7}{\det C} = x_{10} - x_1 .$$

Вольтметри напруги змінного струму з мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів

Вольтметри напруги змінного струму використовують для вимірювання амплітудних та інтегральних значень сигналу таких, як середнє, середньовипрямлене та середньоквадратичне значення.

Традиційно вольтметри змінного струму будуються за трьома структурними схемами.

В першій схемі послідовно включені детектор напруги змінного струму і підсилювач напруги постійного струму з подальшим її вимірюванням. Частотний і динамічний діапазони в цьому випадку визначаються в основному властивостями детектора.

В другій схемі послідовно включені підсилювач і детектор з подальшим вимірюванням постійної напруги. Частотний і динамічний діапазони за

такою схемою, в основному, визначаються вхідним підсилювачем напруги змінного струму.

За третьою схемою інтегральні характеристики напруги змінного струму визначаються шляхом обробки вибірок миттєвих значень сигналу. Частотний і динамічний діапазони вольтметра в цьому випадку, в основному, визначається підсилювачем і можливостями аналого-цифрового перетворювача (АЦП).

Складовими похибок вольтметра є адитивні і мультиплікативні похибки його блоків. Як показано в [5] мультиплікативна корекція похибок найбільш ефективна тоді, коли у вимірювальному каналі його мультиплікативні похибки переважають адитивні. У підсилювачів їх частотні похибки є мультиплікативними і в широкому діапазоні частот є переважаючими над адитивними. Саме тому, в найбільш широкосмугових високочутливих вольтметрах застосовується мультиплікативна корекція [7].

В алгоритмах мультиплікативної корекції застосовують тільки операції множення – ділення, через що з'являється можливість скорочення деяких коефіцієнтів, які включають в себе мультиплікативні похибки, перш за все частотні.

Алгоритми мультиплікативної корекції містять нелінійні операції, тому нижче розглянемо дві структурні схеми вольтметрів напруги змінного струму як приклади застосування матричного аналізу вимірювальних пристроїв з нелінійними перетворюваннями, в яких застосовуються операції множення – ділення.

Структурна схема вольтметра [8, 9] з мультикативною корекцією і часовим розподілом каналів представлена на рис. 1.18.

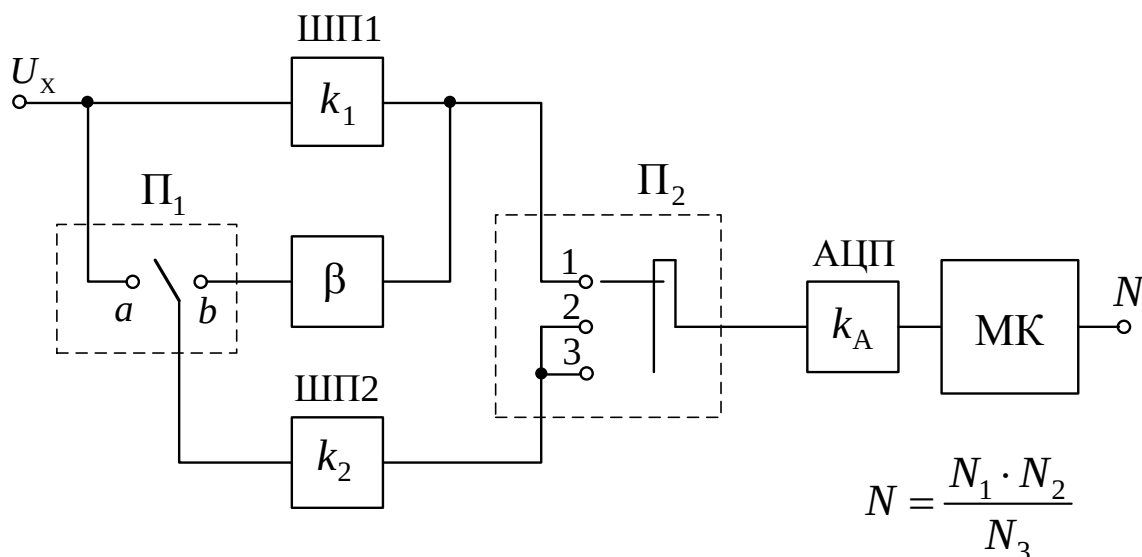


Рисунок 1.18 – Структурна схема вольтметра з мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів

На схемі (1.18) прийняті такі позначення: ШП1, ШП2 – широкосмугові підсилювачі (k_1, k_2 – коефіцієнти підсилення); β – зворотна ланка (коефіцієнт перетворення β); Π_1 , Π_2 – перемикачі; АЦП – аналого-цифровий перетворювач з коефіцієнтом перетворення k_A ; МК – мікроконтролер.

Вольтметр працює наступним чином.

В *першому такті* перемикач Π_1 знаходиться в положенні "a", перемикач Π_2 – в положенні "1". Вхідна напруга U_x нормується (підсилюється або ослаблюється) ШП1 з коефіцієнтом передачі k_1 , перетворюється АЦП в кодові еквіваленти з коефіцієнтом перетворення k_A (одержуємо масив вибірок миттєвих значень), які записується в пам'ять МК.

Будемо вважати, що операції вимірювання миттєвих значень сигналу за допомогою АЦП та отримання значень його інтегральних параметрів на основі обробки за допомогою МК вибірок миттєвих значень сигналу в кожному такті перетворення відбуваються згідно алгоритмів роботи АЦП і МК. При цьому одержуємо відповідні числові значення інтегрального

параметру, що вимірюється, в кожному такті перетворення. Тобто в першому такті одержуємо значення N_1 .

В *другому такті* перемикач Π_1 утримується в положенні "а", а перемикач Π_2 переводиться в положення "2". При цьому вхідна напруга U_x нормується (підсилюється або ослаблюється) ШП2 з коефіцієнтом передачі k_2 , перетворюється АЦП в кодові еквіваленти (масив вибірок миттєвих значень), які записуються в пам'ять МК. В результаті обробки в МК вибірок миттєвих значень сигналу одержуємо числове значення інтегрального параметру N_2 .

В *третьому такті* перемикач Π_1 переводиться в положення "b", перемикач Π_2 – в положення "3". Після цього вхідна напруга U_x нормується (підсилюється або ослаблюється) ШП1 з коефіцієнтом передачі k_1 , зворотною ланкою β , ШП2 з коефіцієнтом передачі k_2 , потім перетворюється АЦП в кодові еквіваленти (масив вибірок миттєвих значень), які записуються в пам'ять МК. В результаті обробки в МК вибірок миттєвих значень сигналу одержуємо числове значення інтегрального параметру N_3 .

Мікроконтролер МК обчислює результат вимірювання інтегрального параметру у вигляді добутку чисел N_1 і N_2 , поділеному на число N_3 :

$$N = \frac{N_1 \cdot N_2}{N_3}.$$

Блоки з коефіцієнтами передачі k_1, k_2, k_A і β мають адитивні та мультиплікативні похибки. Виходячи з опису роботи вольтметра та його блоків, створимо інформаційну модель (рис. 1.19).

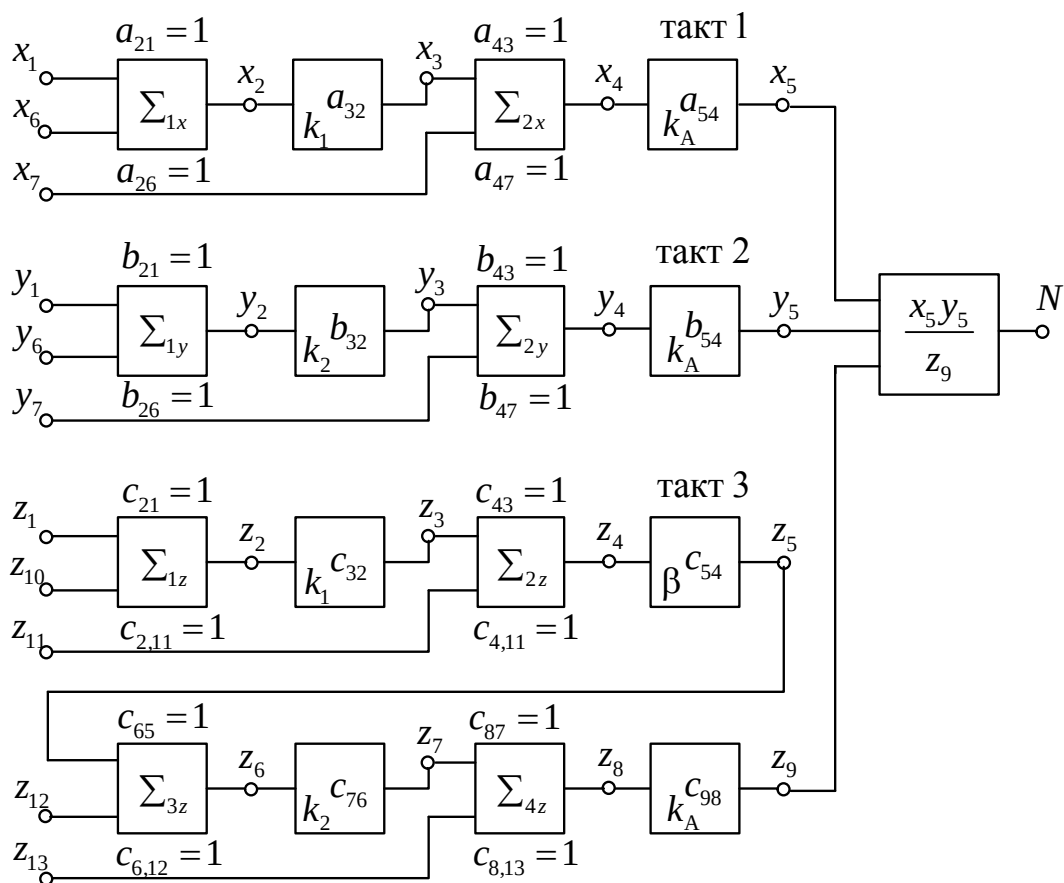


Рисунок 1.19 – Інформаційна модель вольтметра (рис. 1.18)

В інформаційній моделі (рис. 1.19) інформаційні і сигнальні змінні пов'язані наступним чином:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_1 = z_1 = U_x ; \\
 a_{21} &= a_{26} = a_{43} = a_{47} = b_{21} = b_{26} = b_{43} = b_{47} = \\
 &= c_{21} = c_{211} = c_{43} = c_{411} = c_{65} = c_{6,12} = c_{87} = c_{8,13} = 1 ; \\
 a_{32} &= c_{32} = k_1 ; \quad b_{32} = c_{76} = k_2 ; \quad c_{54} = \beta ; \quad a_{54} = b_{54} = c_{98} = k_A ; \\
 x_6 &= z_{10} = \Delta_1 ; \quad y_6 = z_{12} = \Delta_2 ; \quad z_{11} = \Delta_\beta ; \quad x_7 = y_7 = z_{13} = \Delta_A .
 \end{aligned}$$

де Δ_1 – абсолютна адитивна, приведена до входу, похибка нормуючого перетворювача k_1 ; Δ_2 – абсолютна адитивна, приведена до входу, похибка нормуючого перетворювача k_2 ; Δ_β – абсолютна адитивна, приведена до входу, похибка зворотної β -ланки; Δ_A – абсолютна адитивна, приведена до входу, похибка аналого-цифрового перетворювача.

На основі інформаційної моделі (рис. 1.19) створимо матричну модель вольтметра. Для цього необхідно скласти матричні рівняння для каналів x, y, z , віднайти змінні x_5, y_5, z_9 і створити через відповідні визначники вираз

$$N = \frac{x_5 \cdot y_5}{z_9},$$

де

$$x_5 = \frac{\det C_x}{\det C_x}; \quad y_5 = \frac{\det C_y}{\det C_y}; \quad z_9 = \frac{\det C_z}{\det C_z};$$

$$N = \frac{\det C_x \cdot \det C_y}{\det C_x \cdot \det C_y} \times \frac{\det C_z}{\det C_z};$$

Зважаючи на те, що

$$\det C_x = \det C_y = \det C_z = 1,$$

дістаємо:

$$N = \frac{\det C_x \cdot \det C_y}{\det C_z}. \quad (1.31)$$

Добуток двох визначників порядку m та n дорівнює визначнику порядку $m+n$, який створюється шляхом з'єднання цих визначників так, щоб головна діагональ другого визначника була подовженням головної діагоналі першого, і заповнення вільних клітин визначника добутку поза межами визначників співмножників нулями.

Матричні рівняння (MPX, MPY, MPZ), отримані за інформаційними моделями каналів X, Y, Z , мають вигляд:

$$\text{MPX} \rightarrow \begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & & -1 & \\ 3 & & -k_1 & 1 & & & & \\ 4 & & & -1 & 1 & & & -1 \\ 5 & & & & -k_A & 1 & & \\ 6 & & & & & & 1 & \\ 7 & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1 \\ \\ \\ \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{MPY} \rightarrow \begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & & -1 & \\ 3 & & -k_2 & 1 & & & & \\ 4 & & & -1 & 1 & & & -1 \\ 5 & & & & -k_A & 1 & & \\ 6 & & & & & & 1 & \\ 7 & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ y_1 \\ \\ \\ \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}.$$

MPZ $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & & & & & & -1 & & & \\ 3 & & -k_1 & 1 & & & & & & & & & & \\ 4 & & & -1 & 1 & & & & & & & -1 & & \\ 5 & & & & -\beta & 1 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & -1 & 1 & & & & & & -1 & \\ 7 & & & & & & -k_2 & 1 & & & & & & \\ 8 & & & & & & & -1 & 1 & & & & & -1 \\ 9 & & & & & & & & -k_A & 1 & & & & \\ 10 & & & & & & & & & & 1 & & & \\ 11 & & & & & & & & & & & 1 & & \\ 12 & & & & & & & & & & & & 1 & \\ 13 & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ z_1 \\ \\ \\ \\ \\ z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \end{bmatrix}.$$

Результат вимірювання дорівнює:

$$N =$$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1				x_1									
2	-1	1				-1								
3		$-k_1$	1											
4			-1	1			-1							
5				$-k_A$										
6					x_6	1								
7					x_7		1							
8								1				y_1		
9								-1	1				-1	
10									$-k_2$	1				
11										-1	1			-1
12											$-k_A$			
13												y_6	1	
14												y_7		1

=

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1								z_1				
2	-1	1								-1			
3		$-k_1$	1										
4			-1	1							-1		
5				$-\beta$	1								
6					-1	1						-1	
7						$-k_2$	1						
8							-1	1					-1
9								$-k_A$					
10									z_{10}	1			
11									z_{11}		1		
12									z_{12}			1	
13									z_{13}				1

Підрахунок в середовищі програми автоматизованого аналізу вимірювальних пристроїв ПААВП (див. розд. 6) визначників в чисельнику і знаменнику останнього виразу дає такі результати:

$$\begin{aligned} \det(\text{чисельник}) &= \\ &= k_A^2 (x_7 y_7 + x_7 y_6 k_2 + x_7 y_1 k_2 + x_6 y_7 + x_6 y_6 k_1 k_2 + \\ &+ x_6 y_1 k_1 k_2 + x_1 y_7 k_1 + x_1 y_6 k_1 k_2 + x_1 y_1 k_1 k_2); \\ \det(\text{знаменник}) &= \\ &= k_A (z_{13} + z_{12} k_2 + z_{11} k_2 \beta + z_{10} k_1 k_2 \beta + z_1 k_1 k_2 \beta). \end{aligned}$$

Повертаючись до сигнальних параметрів схеми вольтметра (рис. 1.18) і позначивши відносні похибки $\delta_i = \frac{\Delta_i}{u}$, після алгебраїчних перетворень одержимо вираз для результату вимірювання:

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_5 \cdot y_5}{z_9} = \frac{\det x_5 \cdot \det y_5}{\det z_9} = \\ &= U_X \cdot \frac{k_A}{\beta} \cdot \frac{1 + \delta_2 + \frac{\delta_1}{k_2} + \delta_A \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \frac{\delta_1 \delta_2}{k_2} + \frac{\delta_2 \delta_A}{k_1} + \frac{\delta_A^2}{k_1 k_2}}{1 + \delta_1 \frac{\delta_2}{k_2 \beta} + \frac{\delta_\beta}{k_1} + \frac{\delta_A}{k_1 k_2 \beta}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклади вимірювальних пристроїв з часовим розподілом каналів, характерні особливості.
2. Наведіть структурну модель цифрового фазометра з адитивною корекцією у просторі сигналів. Наведіть через типові моделі елементів інформаційну модель фазометра з адитивною корекцією при часовому розподілі каналів. За рахунок чого збільшується кількість інформаційних змінних?
3. Наведіть інформаційну модель фазометра у матричній формі. Чому дорівнює розмірність матричної моделі? Який характер має матриця

системи? Яке рішення через визначники матриці відносно коефіцієнту перетворення має система?

4. Які основні структури вольтметрів змінного струму існують? У яких випадках використовується мультиплікативна чи адитивна корекція похибок? Які операції в алгоритмах корекції? Які похибки переважають у широкосмугових високочутливих вольтметрах і яка корекція використовується?

5. Наведіть структуру вольтметра напруги змінного струму з мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів у просторі сигналів. Пояснить принцип роботи. Як обчислюють результат вимірювання за тактами роботи вольтметра?

6. Який вигляд має модель вольтметра в просторі інформаційних змінних, що зображено через типові моделі елементів? Вкажіть зв'язок інформаційних і сигнальних змінних.

7. Створіть на основі інформаційної моделі матричну модель вольтметра напруги змінного струму з мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів. Вкажіть матричні рівняння за інформаційними моделями каналів перетворення. Чому дорівнює результат перетворення через відношення визначників, знайдених з матричних рівнянь?

8. Який характер мають визначники матричних рівнянь каналів перетворення та результату вимірювання через відношення визначників? Результат вимірювання, знайдений через відношення визначників.

**Лекція 5. Статична характеристика вольтметра ВЗ-59 з
поелементною мультиплікативною корекцією і часовим розподілом
каналів**

Структурна схема широкосмугового вольтметра ВЗ-59. Інформаційна модель вольтметра ВЗ-59 з урахуванням адитивних і мультиплікативних похибок блоків. Матричні рівняння каналів інформаційної моделі. Результат вимірювання через визначники інформаційної моделі. Перехід від інформаційних змін до сигнальних змін. Результат вимірювання в просторі сигнальних змінних. Точний вираз та спрощений вираз похибки. Контрольні запитання і завдання.

Вольтметр ВЗ-59 вимірює середньоквадратичне значення напруги змінного струму в діапазоні частот 10 Гц – 100 МГц, має нижню межу вимірювання 1 мВ. Для мінімізації впливу адитивних і мультиплікативних, перш за все частотних похибок, застосована поелементна мультиплікативна корекція [5,7,10].

Структурна схема вольтметра представлена на рис. 1.20. На схемі прийняті такі позначення: ШП1, ШП2 – широкосмугові підсилювачі основного і допоміжного каналів з коефіцієнтами перетворення k_1^0 , k_1^1 ; ЛД1, ЛД2 – лінеаризовані детектори основного і допоміжного каналів з коефіцієнтами перетворення k_2^0 , k_2^1 ; β_1 , β_2 – зворотні ланки (коефіцієнти перетворення β_1 , β_2); П₁, П₂, П₃ – перемикачі; АЦП – аналого-цифровий перетворювач з коефіцієнтом перетворення k_A ; МК – мікроконтролер.

На схемі (1.20) також наведено:

Σ_1^0 , Σ_2^0 , Σ_1^1 , Σ_2^1 , Σ_{β_1} , Σ_{β_2} , Σ_A – позначення умовних суматорів адитивних похибок, приведених до входів відповідних блоків;

Δ_1^0 , Δ_2^0 , Δ_1^1 , Δ_2^1 , Δ_{β_1} , Δ_{β_2} , Δ_A – абсолютні адитивні приведені до входу похибки відповідних блоків.

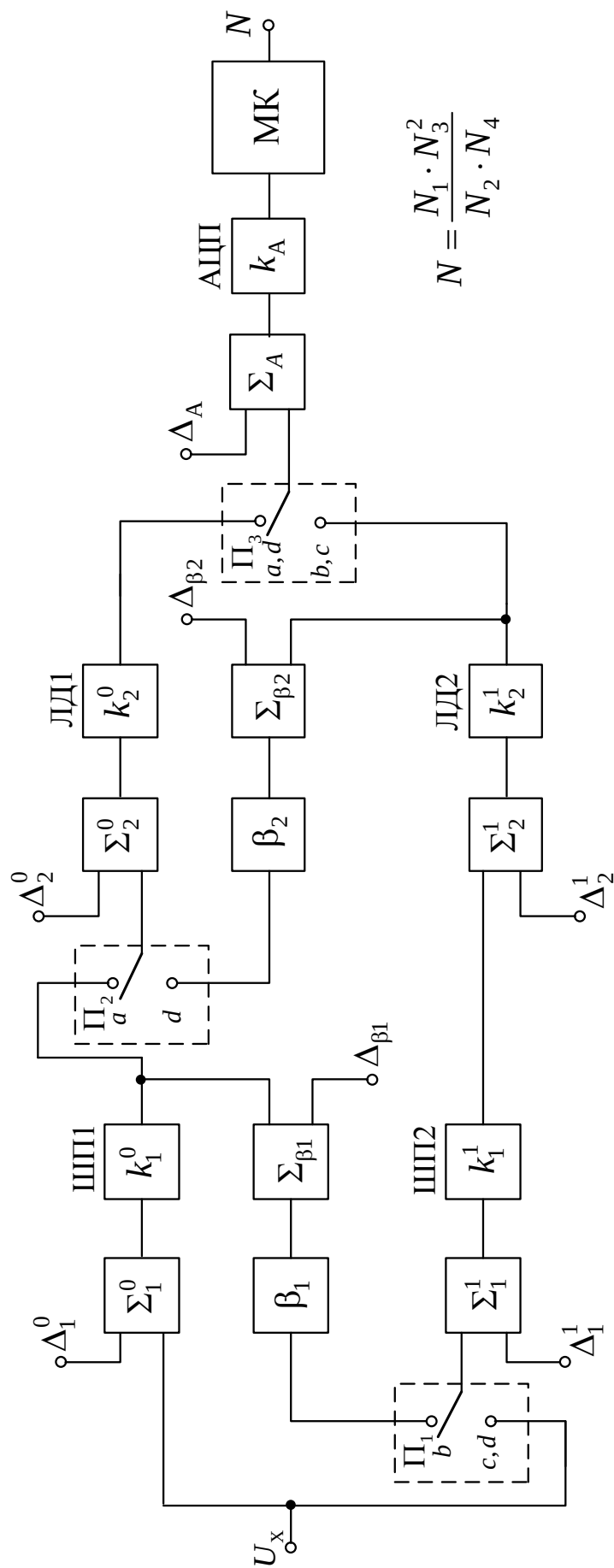


Рисунок 1.20 – Структурна схема широкодіапазона вольметра ВЗ-59

Вольтметр працює наступним чином. Вхідна напруга U_x перетворюється чотирма шляхами в кодові еквіваленти N_1, N_2, N_3, N_4 , які з виходу АЦП поступають на мікроконтролер МК і запам'ятовуються.

Кодовий еквівалент N_1 (такт "a") одержують при перетворенні вхідної напруги U_x підсилювачем k_1^0 , детектором k_2^0 і аналого-цифровим перетворювачем k_A .

Кодовий еквівалент N_2 (такт "b") одержують при перетворенні вхідної напруги U_x підсилювачем k_1^0 , зворотною ланкою β_1 , підсилювачем k_1^1 , детектором k_2^1 і аналого-цифровим перетворювачем k_A .

Кодовий еквівалент N_3 (такт "c") одержують при перетворенні вхідної напруги U_x підсилювачем k_1^1 , детектором k_2^1 і аналого-цифровим перетворювачем k_A .

Кодовий еквівалент N_4 (такт "d") одержують при перетворенні вхідної напруги U_x підсилювачем k_1^1 , детектором k_2^1 , зворотною ланкою β_2 , детектором k_2^0 , і аналого-цифровим перетворювачем k_A .

Мікроконтролер МК обчислює результат вимірювання у вигляді:

$$N = \frac{N_1 \cdot (N_3)^2}{N_2 \cdot N_4}.$$

Усі блоки мають адитивні і мультиплікативні похибки. Інформаційна модель представлена на рис. 1.21.

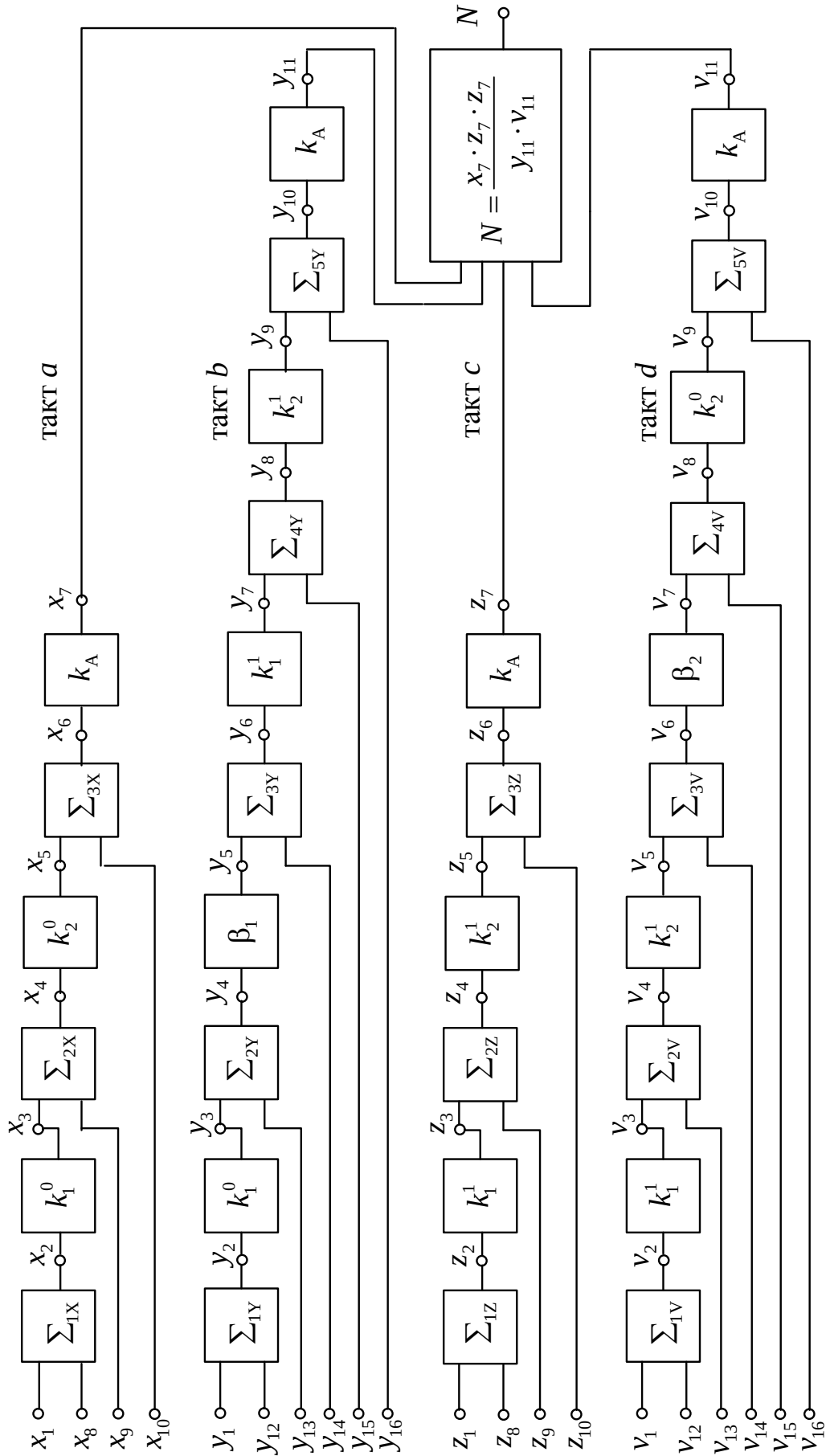


Рисунок 1.21 – Інформаційна модель вольтметра ВЗ-59 (рис.1.20)

Матричні рівняння (MPX, MPY, MPZ, MPV), які описують кожний шлях перетворення, мають наступний вигляд:

- матричні рівняння інформаційного каналу X (N_1)

$$MPX \rightarrow \begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & & & & & & & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & & & & -1 & & \\ 3 & & -k_1^0 & 1 & & & & & & & \\ 4 & & & -1 & 1 & & & & & -1 & \\ 5 & & & & -k_2^0 & 1 & & & & & \\ 6 & & & & & -1 & 1 & & & & -1 \\ 7 & & & & & & -k_A & 1 & & & \\ 8 & & & & & & & & 1 & & \\ 9 & & & & & & & & & 1 & \\ 10 & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} ;$$

- матричні рівняння інформаційного каналу Y (N_2)

MPY →

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	-1	1										-1				
3		$-k_1^0$	1													
4			-1	1									-1			
5				$-\beta_1$	1											
6					-1	1								-1		
7						$-k_1^1$	1									
8							-1	1							-1	
9								$-k_2^1$	1							
10									-1	1						-1
11										$-k_A$	1					
12												1				
13													1			
14														1		
15															1	
16																1

 $\times$

y
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8
y_9
y_{10}
y_{11}
y_{12}
y_{13}
y_{14}
y_{15}
y_{16}

 $=$

y_1
y_{12}
y_{13}
y_{14}
y_{15}
y_{16}

 $;$

- матричні рівняння інформаційного каналу Z (N_3)

MPZ →

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	-1	1						-1		
3		$-k_1^1$	1							
4			-1	1					-1	
5				$-k_2^1$	1					
6					-1	1				-1
7						$-k_A$	1			
8								1		
9									1	
10										1

 $\times$

z
z_1
z_2
z_3
z_4
z_5
z_6
z_7
z_8
z_9
z_{10}

 $=$

z_1
z_8
z_9
z_{10}

 $;$

- матричні рівняння інформаційного каналу V (N_4)

MPV →

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	-1	1										-1				
3		$-k_1^1$	1													
4			-1	1									-1			
5				$-k_2^1$	1											
6					-1	1								-1		
7						$-\beta_2$	1									
8							-1	1							-1	
9								$-k_2^0$	1							
10									-1	1						-1
11										$-k_A$	1					
12												1				
13													1			
14														1		
15															1	
16																1

 $\times$

v
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
v_{10}
v_{11}
v_{12}
v_{13}
v_{14}
v_{15}
v_{16}

 $=$

v_1
v_{12}
v_{13}
v_{14}
v_{15}
v_{16}

 $.$

Результат вимірювання знаходиться згідно виразу:

$$N = \frac{x_7 \cdot (z_7)^2}{y_{11} \cdot v_{11}}$$

Згідно правила Крамера маємо:

$$x_7 = \frac{\det x_7}{\det C_x}; \quad z_7 = \frac{\det z_7}{\det C_z};$$

$$y_{11} = \frac{\det y_{11}}{\det C_y}; \quad v_{11} = \frac{\det v_{11}}{\det C_v}.$$

Оскільки детермінанти системи при зображеному на рис. 1.21 включенні блоків дорівнюють одиниці, то

$$N = \frac{\det x_7 \cdot (\det z_7)^2}{\det y_{11} \cdot \det v_{11}}. \quad (1.33)$$

В виразі (1.33) має місце добуток трьох визначників 10 порядку в чисельнику і добуток двох визначників 16 порядку в знаменнику. Тобто вираз (1.33) може бути представлений відношенням визначника 30 порядку до визначника 32 порядку, а при їх підрахунку є дрібно-раціональною функцією вхідного сигналу, адитивних похибок блоків і їх коефіцієнтів перетворення.

$$\begin{aligned}
 \det(\text{чисельник}) = & (k_A)^3 x_{10} (z_{10})^2 + \\
 & + 2(k_A)^3 x_{10} z_{10} k_2^1 z_9 + 2(k_A)^3 x_{10} z_{10} k_1^1 k_2^1 z_8 + \\
 & + 2(k_A)^3 x_{10} z_{10} z_1 k_1^1 k_2^1 + (k_A)^3 x_{10} (k_2^1)^2 (z_9)^2 + 2(k_A)^3 x_{10} (k_2^1)^2 z_9 k_1^1 z_8 + \\
 & + 2(k_A)^3 x_{10} (k_2^1)^2 z_9 z_1 k_1^1 + (k_A)^3 x_{10} (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (z_8)^2 + \\
 & + 2(k_A)^3 x_{10} (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 z_8 z_1 + (k_A)^3 x_{10} (z_1)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + k_2^0 (k_A)^3 x_9 (z_{10})^2 + \\
 & + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 z_{10} k_2^1 z_9 + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 z_{10} k_1^1 k_2^1 z_8 + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 z_{10} z_1 k_1^1 k_2^1 + \\
 & + k_2^0 (k_A)^3 x_9 (k_2^1)^2 (z_9)^2 + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 (k_2^1)^2 z_9 k_1^1 z_8 + \\
 & + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 (k_2^1)^2 z_9 z_1 k_1^1 + k_2^0 (k_A)^3 x_9 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (z_8)^2 + \\
 & + 2k_2^0 (k_A)^3 x_9 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 z_8 z_1 + k_2^0 (k_A)^3 x_9 (z_1)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + \\
 & + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (z_{10})^2 + \\
 & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 z_{10} k_2^1 z_9 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 z_{10} k_1^1 k_2^1 z_8 + \\
 & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 z_{10} z_1 k_1^1 k_2^1 + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (k_2^1)^2 (z_9)^2 + \\
 & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (k_2^1)^2 z_9 k_1^1 z_8 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (k_2^1)^2 z_9 z_1 k_1^1 + \\
 & + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (z_8)^2 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 z_8 z_1 + \\
 & + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 x_8 (z_1)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (z_{10})^2 + \\
 & + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 z_{10} k_2^1 z_9 + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 z_{10} k_1^1 k_2^1 z_8 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 z_{10} z_1 k_1^1 k_2^1 + x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 (z_9)^2 + \\
 & + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 z_9 k_1^1 z_8 + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 z_9 z_1 k_1^1 + \\
 & + x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (z_8)^2 + 2x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 z_8 z_1 + \\
 & + x_1 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (z_1)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 ; \\
 \det (\text{знаменник}) = & (k_A)^2 y_{16} v_{16} + (k_A)^2 y_{16} k_2^0 v_{15} + \\
 & + (k_A)^2 y_{16} b_2 k_2^0 v_{14} + (k_A)^2 y_{16} k_2^1 \beta_2 k_2^0 v_{13} + \\
 & + (k_A)^2 y_{16} k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0 v_{12} + (k_A)^2 y_{16} v_1 k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0 + \\
 & + k_2^1 (k_A)^2 y_{15} v_{16} + k_2^1 (k_A)^2 y_{15} k_2^0 v_{15} + k_2^1 (k_A)^2 y_{15} \beta_2 k_2^0 v_{14} + \\
 & + (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{15} \beta_2 k_2^0 v_{13} + (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{15} k_1^1 \beta_2 k_2^0 v_{12} + \\
 & + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{14} v_{16} + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{14} k_2^0 v_{15} + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{13} v_{16} + \\
 & + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{14} \beta_2 k_2^0 v_{14} + (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{15} v_1 k_1^1 \beta_2 k_2^0 + \\
 & + k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{14} \beta_2 k_2^0 v_{13} + (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{14} \beta_2 k_2^0 v_{12} + \\
 & + (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{14} v_1 \beta_2 k_2^0 + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{13} k_2^0 v_{15} + \\
 & + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{13} \beta_2 k_2^0 v_{14} + \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{13} \beta_2 k_2^0 v_{13} + \\
 & + \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{13} \beta_2 k_2^0 v_{12} + \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{13} v_1 \beta_2 k_2^0 + \\
 & + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{12} v_{16} + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{12} k_2^0 v_{15} + \\
 & + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 y_{12} \beta_2 k_2^0 v_{14} + k_1^0 \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{12} \beta_2 k_2^0 v_{13} + \\
 & + k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{12} \beta_2 k_2^0 v_{12} + k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 y_{12} v_1 \beta_2 k_2^0 + \\
 & + y_1 k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 v_{16} + y_1 k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 k_2^0 v_{15} + \\
 & + y_1 k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 v_{14} + y_1 k_1^0 \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 v_{13} +
 \end{aligned}$$

$$+ y_1 k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 v_{12} + y_1 k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 v_1 \beta_2 k_2^0 .$$

Після зворотних підстановок від моделі в просторі інформаційних змінних x, y, z, v перейдемо до структурної схеми (рис. 1.20) в просторі сигнальних змінних:

$$x_1 = y_1 = z_1 = v_1 = U_x; \quad x_8 = y_{12} = \Delta_1^0;$$

$$y_{13} = \Delta_{\beta_1}; \quad v_{14} = \Delta_{\beta_2};$$

$$x_{10} = y_{16} = z_{10} = v_{16} = \Delta_A; \quad y_{14} = z_8 = v_{12} = \Delta_1^1;$$

$$x_9 = v_{15} = \Delta_2^0; \quad y_{15} = z_9 = v_{13} = \Delta_2^1,$$

$$\begin{aligned} \det (\text{чисельник}) = & (k_A)^3 (\Delta_A)^3 + 2(k_A)^3 (\Delta_A)^2 k_2^1 \Delta_2^1 + 2(k_A)^3 (\Delta_A)^2 k_1^1 k_2^1 \Delta_1^1 + \\ & + 2(k_A)^3 (\Delta_A)^2 U_x k_1^1 k_2^1 + (k_A)^3 \Delta_A (k_2^1)^2 (\Delta_2^1)^2 + 2(k_A)^3 \Delta_A (k_2^1)^2 \Delta_2^1 k_1^1 \Delta_1^1 + \\ & + 2(k_A)^3 \Delta_A (k_2^1)^2 \Delta_2^1 U_x k_1^1 + (k_A)^3 \Delta_A (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (\Delta_1^1)^2 + \\ & + 2(k_A)^3 \Delta_A (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \Delta_1^1 U_x + (k_A)^3 \Delta_A (U_x)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + \\ & + k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (\Delta_A)^2 + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 \Delta_A k_2^1 \Delta_2^1 + \\ & + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 \Delta_A k_1^1 k_2^1 \Delta_1^1 + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 \Delta_A U_x k_1^1 k_2^1 + \\ & + k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (k_2^1)^2 (\Delta_2^1)^2 + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 k_1^1 \Delta_1^1 + \\ & + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 U_x k_1^1 + k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (\Delta_1^1)^2 + \\ & + 2k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \Delta_1^1 U_x + k_2^0 (k_A)^3 \Delta_2^0 (U_x)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + \\ & + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (\Delta_A)^2 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 \Delta_A k_2^1 \Delta_2^1 + \\ & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 \Delta_A k_1^1 k_2^1 \Delta_1^1 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 \Delta_A U_x k_1^1 k_2^1 + \\ & + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (k_2^1)^2 (\Delta_2^1)^2 + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 k_1^1 \Delta_1^1 + \\ & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 U_x k_1^1 + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (\Delta_1^1)^2 + \\ & + 2k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \Delta_1^1 U_x + k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_1^0 (U_x)^2 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (\Delta_A)^2 + 2U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_A k_2^1 \Delta_2^1 + \\
 & + 2U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_A k_1^1 k_2^1 \Delta_1^1 + 2(U_x)^2 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 \Delta_A k_1^1 k_2^1 + \\
 & + U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 (\Delta_2^1)^2 + 2U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 k_1^1 \Delta_1^1 + \\
 & + 2(U_x)^2 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_2^1)^2 \Delta_2^1 k_1^1 + U_x k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (\Delta_1^1)^2 + \\
 & + 2(U_x)^2 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \Delta_1^1 + (U_x)^3 k_1^0 k_2^0 (k_A)^3 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 . \\
 \det (\text{знаменник}) = & (k_A)^2 (\Delta_A)^2 + (k_A)^2 \Delta_A k_2^0 \Delta_2^0 + (k_A)^2 \Delta_A \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + \\
 & + (k_A)^2 \Delta_A k_2^1 \beta_2 k_2^0 \Delta_2^1 + (k_A)^2 \Delta_A k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0 \Delta_1^1 + (k_A)^2 \Delta_A U_x k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0 + \\
 & + k_2^1 (k_A)^2 \Delta_2^1 \Delta_A + k_2^1 (k_A)^2 \Delta_2^1 k_2^0 \Delta_2^0 + k_2^1 (k_A)^2 \Delta_2^1 \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + \\
 & + (k_2^1)^2 (k_A)^2 (\Delta_2^1)^2 \beta_2 k_2^0 + 2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_2^1 k_1^1 \beta_2 k_2^0 \Delta_1^1 + \\
 & + (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_2^1 U_x k_1^1 \beta_2 k_2^0 + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^1 \Delta_A + \\
 & + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^1 k_2^0 \Delta_2^0 + k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^1 \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + \\
 & + (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 (\Delta_1^1)^2 \beta_2 k_2^0 + (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_1^1 U_x \beta_2 k_2^0 + \\
 & + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} \Delta_A + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} k_2^0 \Delta_2^0 + \\
 & + \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} \beta_2 k_2^0 \Delta_2^1 + \\
 & + \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} \beta_2 k_2^0 \Delta_1^1 + \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_{\beta_1} U_x \beta_2 k_2^0 + \\
 & + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^0 \Delta_A + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^0 k_2^0 \Delta_2^0 + \\
 & + k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_1^0 \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + k_1^0 \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_1^0 \beta_2 k_2^0 \Delta_2^1 + \\
 & + k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_1^0 \beta_2 k_2^0 \Delta_1^1 + k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \Delta_1^0 U_x \beta_2 k_2^0 + \\
 & + U_x k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \Delta_A + U_x k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 k_2^0 \Delta_2^0 + \\
 & + U_x k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 \Delta_{\beta_2} + U_x k_1^0 \beta_1 k_1^1 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 \Delta_2^1 +
 \end{aligned}$$

$$+ U_x k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 \Delta_1^1 + (U_x)^2 k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 (k_A)^2 \beta_2 k_2^0 .$$

Позначивши відносні адитивні похибки $\delta_i = \frac{\Delta_i}{u}$, після алгебраїчних

перетворень одержимо вираз для результату вимірювання:

$$\begin{aligned} N = U_x \cdot \frac{k_A}{\beta_1 \beta_2} \cdot \frac{1 + \delta_1^0 + \frac{\delta_2^0}{k_1^0} + 2\delta_1^1 + 2\frac{\delta_2^1}{k_1^1} + \frac{\delta_A}{k_1^0 k_2^0} + 2\frac{\delta_A}{k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_A \delta_2^1}{(k_1^1)^2 k_2^1} +}{1 + \delta_1^0 + \delta_1^1 + \frac{\delta_1^1}{k_1^0 \beta_1} + \frac{\delta_2^1}{k_1^1} + \frac{\delta_2^1}{k_1^0 \beta_1 k_1^1} + \frac{\delta_{\beta_1}}{k_1^0} + \frac{\delta_{\beta_2}}{k_1^1 k_2^1} + \frac{\delta_2^0}{k_1^1 k_2^1 \beta_2} +} \\ + 2\frac{\delta_A \delta_1^1}{k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_2^1 \delta_1^1}{k_1^1} + 2\delta_1^0 \delta_1^1 + 2\frac{\delta_1^0 \delta_2^1}{k_1^1} + 2\frac{\delta_2^0 \delta_1^1}{k_1^0} + 2\frac{\delta_2^0 \delta_2^1}{k_1^0 k_1^1} + 2\frac{\delta_1^0 \delta_A}{k_1^1 k_2^1} + \\ + \frac{\delta_A}{k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1} + \frac{\delta_A}{k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0} + \delta_1^0 \delta_1^1 + \frac{\delta_1^0 \delta_2^1}{k_1^1} + \frac{\delta_1^0 \delta_{\beta_2}}{k_1^1 k_2^1} + \frac{\delta_{\beta_1} \delta_1^1}{k_1^0} + \frac{\delta_{\beta_1} \delta_2^1}{k_1^0 k_1^1} + \\ + 2\frac{\delta_A \delta_1^1}{k_1^0 k_2^0} + 2\frac{\delta_A \delta_2^1}{k_1^0 k_2^0 k_1^1} + 2\frac{\delta_2^0 \delta_A}{k_1^0 k_1^1 k_2^1} + (\delta_1^1)^2 + \frac{(\delta_2^1)^2}{(k_1^1)^2} + \frac{(\delta_A)^2}{(k_1^1)^2 (k_2^1)^2} + \\ + \frac{\delta_{\beta_1} \delta_{\beta_2}}{k_1^0 k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_2^1 \delta_1^1}{k_1^0 \beta_1 k_1^1} + \frac{\delta_1^0 \delta_2^0}{k_1^1 k_2^1 \beta_2} + \frac{\delta_{\beta_1} \delta_2^0}{k_1^0 k_1^1 k_2^1 \beta_2} + \frac{\delta_1^0 \delta_A}{k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0} + \\ + 2\frac{(\delta_A)^2}{k_1^0 k_2^0 k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_1^0 \delta_2^1 \delta_1^1}{k_1^1} + 2\frac{\delta_1^0 \delta_A \delta_1^1}{k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_2^0 \delta_2^1 \delta_1^1}{k_1^0 k_1^1} + 2\frac{\delta_1^0 \delta_A \delta_2^1}{(k_1^1)^2 k_2^1} + \\ + \frac{\delta_1^1 \delta_{\beta_2}}{k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1} + \frac{\delta_A \delta_1^1}{k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1} + \frac{\delta_{\beta_1} \delta_A}{k_1^0 k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0} + \frac{\delta_1^1 \delta_2^0}{k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 \beta_2} + \\ + 2\frac{\delta_2^0 \delta_A \delta_1^1}{k_1^0 k_1^1 k_2^1} + 2\frac{\delta_A \delta_2^1 \delta_1^1}{k_1^0 k_2^0 k_1^1} + 2\frac{\delta_2^0 \delta_A \delta_2^1}{k_1^0 (k_1^1)^2 k_2^1} + \delta_1^0 (\delta_1^1)^2 + \frac{\delta_2^0 (\delta_1^1)^2}{k_1^0} + \frac{\delta_1^0 (\delta_2^1)^2}{(k_1^1)^2} + \\ + \frac{\delta_A \delta_2^1}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 k_2^1} + \frac{\delta_1^1 \delta_A}{k_1^0 \beta_1 k_1^1 k_2^1 \beta_2 k_2^0} + \frac{\delta_2^1 \delta_{\beta_2}}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 k_2^1} + \frac{\delta_2^1 \delta_A}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 k_2^1 \beta_2 k_2^0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\delta_1^0 (\delta_A)^2}{(k_1^1)^2 (k_2^1)^2} + \frac{\delta_A (\delta_1^1)^2}{k_1^0 k_2^0} + \frac{\delta_2^0 (\delta_2^1)^2}{k_1^0 (k_1^1)^2} + \frac{\delta_A (\delta_2^1)^2}{k_1^0 k_2^0 (k_1^1)^2} + \frac{\delta_2^0 (\delta_A)^2}{k_1^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2} + \\
 & + \frac{\delta_2^1 \delta_2^0}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 k_2^1 \beta_2} + \frac{\delta_A \delta_2^0}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \beta_2} + \frac{\delta_A \delta_{\beta_2}}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2} + \\
 & + 2 \frac{(\delta_A)^2 \delta_1^1}{k_1^0 k_2^0 k_1^1 k_2^1} + 2 \frac{(\delta_A)^2 \delta_2^1}{k_1^0 k_2^0 (k_1^1)^2 k_2^1} + \frac{(\delta_A)^3}{k_1^0 k_2^0 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2} \\
 & + \frac{(\delta_A)^2}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2 (k_2^1)^2 \beta_2 k_2^0} + \frac{(\delta_1^1)^2}{k_1^0 \beta_1} + \frac{(\delta_2^1)^2}{k_1^0 \beta_1 (k_1^1)^2} . \quad (1.34)
 \end{aligned}$$

Вираз (1.34) є точним і включає в себе похибки 1-го, 2-го і 3-го порядків в чисельнику і 1-го та 2-го порядку в знаменнику.

В залежності від значень коефіцієнтів і значень похибок частиною похибок можна знехтувати, внаслідок чого відбувається спрощення виразу. Наприклад, зворотна ланка є пасивним елементом і в більшості випадків їх адитивними похибками можна знехтувати ($\delta_\beta \approx 0$).

Врахуємо мультиплікативні похибки блоків k_1^0 , k_1^1 , k_2^0 , k_2^1 . Позначимо блоки виразами:

$$k_1^0 = k_{H1}^0 (1 + \gamma_1^0); \quad k_1^1 = k_{H1}^1 (1 + \gamma_1^1); \quad k_2^0 = k_{H2}^0 (1 + \gamma_2^0); \quad k_2^1 = k_{H2}^1 (1 + \gamma_2^1),$$

де k_{H1}^0 , k_{H1}^1 , k_{H2}^0 , k_{H2}^1 - номінальні значення коефіцієнтів;
 γ - мультиплікативна похибка.

За умовами налагоджування

$$k_{H1}^0 \cdot \beta_{H1} = k_{H1}^1 \cdot \beta_{H1} = k_{H2}^0 \cdot \beta_{H2} = k_{H2}^1 \cdot \beta_{H2} = 1$$

та при виконанні умови

$$k_1^0 \gg 1, \quad k_1^1 \gg 1$$

отримаємо:

$$N \cong \frac{U_x}{\beta_1 \cdot \beta_2} \cdot \left[1 + \frac{\delta_1^1 \cdot (\gamma_1^0 + \delta_1^0)}{(1 + \gamma_1^0) \cdot (1 + B)} \right],$$

де B – похибки вищих порядків малості в формулі (1.34).

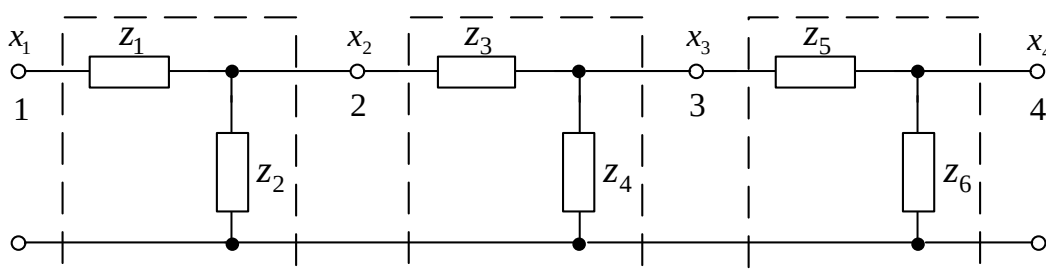
Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть структурну схему вольтметра ВЗ-59 з поелементною мультиплікативною корекцією і часовим розподілом каналів в просторі сигналів.*
2. *Наведіть модель вольтметра ВЗ-59 через типові моделі елементів в просторі інформативних параметрів. Поясніть, як враховується часовий розподіл каналів перетворення і мультиплікативної корекції, під час побудови інформаційної моделі вольтметра.*
3. *Який вигляд мають матричні рівняння, які описують окремі канали перетворення?*
4. *Якій вираз, знайдений через визначники, має результат вимірювання в просторі інформаційних змінних? Як знайти результат вимірювання в просторі сигнальних змінних?*

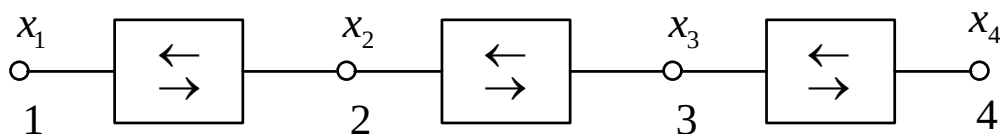
Лекція 6. Статична характеристика вимірювальних кіл двонаправлених елементів

Приклад вимірювального кола двонаправлених елементів - триланковий дільник напруги. Матричний запис системи рівнянь. Результат перетворення. Подання виразів визначниками. Процедура подання на прикладі перетворювача з адитивною корекцією. Контрольні запитання і завдання.

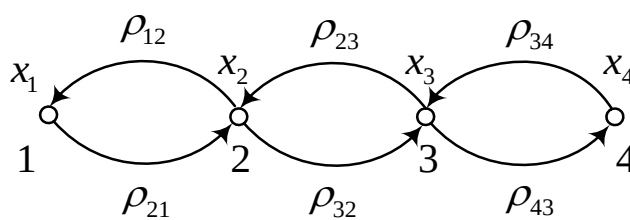
Розглянемо вимірювальне коло двонаправлених елементів [2]. На рис. 1.22 подано схему триланкового дільника напруги.



а)



б)



в)

Рисунок 1.22 – Триланковий дільник напруги: а – принципова схема триланкового дільника напруги; б – вимірювальне коло дільника напруги; в – сигнальний граф дільника напруги

Вимірювальне коло (рис. 1.22,б) дільника напруги містить двонаправлені елементи. Коефіцієнт ρ знаходиться як відношення

відповідних змінних за умови рівності нулю всіх неприлеглих змінних, тобто вважаючи коротке замикання неприлеглих вузлів:

$$\rho_{21} = \frac{\frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}}{z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}}; \quad \rho_{32} = \frac{\frac{z_4 z_5}{z_4 + z_5}}{z_3 + \frac{z_4 z_5}{z_4 + z_5}}; \quad \rho_{43} = \frac{z_6}{z_5 + z_6};$$

$$\rho_{12} = 1; \quad \rho_{23} = \frac{\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}}{z_3 + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}}; \quad \rho_{34} = \frac{\frac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}{z_5 + \frac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}.$$

Матричний запис:

$$\begin{bmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & \rho_{12} & 0 & 0 \\ 2 & -\rho_{21} & 1 & \rho_{23} & 0 \\ 3 & 0 & -\rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ 4 & 0 & 0 & -\rho_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$k_{41} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{\det 4}{\det 1} = \frac{\rho_{21} \rho_{32} \rho_{43}}{1 + \rho_{43} \rho_{34} + \rho_{32} \rho_{23}}. \quad (1.35)$$

Якщо $\rho_{34} = 0$ і $\rho_{23} = 0$, то $k_{41} = \rho_{21} \cdot \rho_{32} \cdot \rho_{43}$.

Подання виразів визначниками

Враховуючи те, що операції над матрицями та визначниками легко алгоритмізуються, в ряді випадків, наприклад, при наступному аналізі похибок доцільно представляти моделі вимірювальних пристроїв визначниками.

Процедура знаходження елементів визначника, який при обчисленні був би тотожний початковому виразу, зводиться до розв'язання системи рівнянь, складених шляхом прирівнювання окремих доданків розкритого визначника доданком початкового виразу. Порядок потрібного визначника дорівнює числу співмножників доданка алгебраїчного виразу, де це число найбільше.

Розглянемо перетворювач з адитивною корекцією (рис. 1.9), для якого
(1.15)

$$k_{61} = \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}.$$

У цьому виразі найбільше число співмножників в третьому доданку – три, а число доданків менше $3! = 6$. Тому k_{61} може бути представлено визначником не більше третього порядку.

Шлях розв'язку наступний:

$$\begin{aligned} \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Припустимо $a_{11} = \rho_{21}$, $a_{22} = \rho_{54}$, $a_{33} = -\rho_{32}$, тоді $a_{11}a_{22}a_{33} = -\rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}$;

$$-a_{11}a_{23}a_{32} = \rho_{21}, \text{ звідки } a_{23} = -1, a_{32} = 1;$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} = 0, \text{ звідки } a_{12} = 0; a_{21} = 0;$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} = 0, \text{ звідки } a_{12} = 0;$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} = 0, \text{ звідки } a_{21} = 0;$$

$$-a_{13}a_{22}a_{32} = \rho_{54}, \text{ звідки } a_{13} = -1, a_{31} = 1.$$

Отже, дістанемо:

$$\rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} = \begin{vmatrix} \rho_{21} & 0 & -1 \\ 0 & \rho_{54} & -1 \\ 1 & 1 & -\rho_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Елементами визначника, звісно, можуть бути числа і функції залежно від початкового виразу.

Доцільність подання виразів визначниками буде підтверджена нижче при аналізі похибок для будь-яких прирощень елементів визначника.

Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть приклад вимірювальних кіл, модель яких містить двонаправлені елементи. Який вигляд має сигнальний граф, що містять двонаправлені елементи?*
2. *Як знайти коефіцієнти ρ таких кіл? Наведіть матричний запис системи рівнянь. Наведіть приклад загального коефіцієнту передачі, та як його виразити через визначники системи?*
3. *У чому полягає процедура знаходження елементів визначника, який був би тотожний виразу моделі вимірювальних пристроїв? Наведіть приклади.*

Лекція 7. Детермінована модель похибок вимірювальних пристроїв

Матрична форма детермінованого рівняння похибки. Методика отримання детермінованої моделі похибок вимірювальних пристроїв. Алгебраїчний метод знаходження прирощення функції по прирощенням аргументів. Відносне прирощення результату вимірювання у випадку матричних моделей системи рівнянь вимірювальних пристроїв. Послідовність тотожних перетворень визначника матриці, елементи якого мають прирощення. Основні визначення. Методика знаходження прирощення визначника n -го порядку в залежності від прирощень його елементів. Відносне прирощення 1-го порядку визначника n -го порядку. Відносне прирощення визначника n -го порядку у загальному випадку. Модель похибки вимірювального підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком. Контрольні запитання і завдання.

Існує кілька методик отримання детермінованих моделей похибок вимірювальних пристроїв [2]. Найбільш поширені моделі чутливості, які є частковими похідними статичної та динамічної характеристик пристрою за відповідними змінними.

У більшості випадків використовують тільки перші похідні. Однак при цьому не тільки неточно обчислюється похибка, але виникає небезпека отримання принципово невірного висновку про функціонування пристрою.

Це особливо проявляється в пристроях, де реалізовано принцип інваріантності [5]. Тому в деяких роботах поставлені і вирішені завдання отримання детермінованої моделі похибки пристрою при довільних прирощеннях величин, що є джерелами похибок. Так, в [2] розроблено алгебраїчний метод знаходження прирощення функції по прирощенням аргументів. Сутність цього методу полягає в тому, що будь-який як завгодно складний вираз може бути представлено каскадом елементарних функцій. Для всіх елементарних функцій знайдені вирази для повних прирощень за будь-яких прирощень аргументів. Застосовуючи послідовно ці вирази, шляхом тільки алгебраїчних перетворень можна знайти прирощення для будь-якої функції, не зважаючи на її складність.

Приклад 1

Наприклад, вираз

$$k = \frac{k_1 k_2 + k_3 k_4}{k_5 + k_6 k_7}$$

можна представити часткою

$$k = \frac{B}{A},$$

чисельник B і знаменник A як суми

$$B = C + D, \quad A = E + L,$$

доданки суми C, D, L як добутки

$$C = k_1 k_2; \quad D = k_3 k_4; \quad L = k_6 k_7.$$

Вирази прирощень елементарних функцій представлені в [2].

* * *

Незважаючи на простоту і універсальність цього методу, його застосування в автоматизованому аналізі ускладнено в зв'язку зі складністю машинних алгебраїчних перетворень в загальному вигляді.

Тому нижче наведено методику отримання детермінованої моделі похибки, коли модель характеристики пристрою задано в матричній формі.

Як було показано вище, шукані характеристики є відношенням визначників.

Відносне прирощення відношення $z = \frac{x}{y}$ дорівнює:

$$\delta_z = \frac{\delta x - \delta y}{1 + \delta y},$$

де δx , δy – відносні прирощення чисельника і знаменника.

Якщо x і y задані визначниками, то зрозуміла необхідність знаходження прирощень визначників залежно від прирощень їхніх елементів.

Скористаємося теоремою, відповідно до якої визначник, в якому елементи одного стовпця являють собою суму двох величин, дорівнює сумі двох визначників того ж порядку, де відповідний стовпець першого визначника складається з перших доданків вихідного стовпця, а відповідний стовпець другого визначника складається з других доданків вихідного стовпця. Тобто маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \bar{a}_{1j} + \Delta_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \bar{a}_{2j} + \Delta_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \bar{a}_{nj} + \Delta_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \bar{a}_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \bar{a}_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \bar{a}_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \bar{a}_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \Delta_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \Delta_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \Delta_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \Delta_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Неважко показати, що визначник, в якому всі елементи є сумою двох величин, дорівнює сумі 2^n визначників того ж порядку, елементи стовпців яких складаються тільки з доданків елементів у різних поєднаннях.

* * *

Приклад 2

Проілюструємо викладене на визначнику 3-го порядку. Нехай кожен елемент визначника є сумою

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}, \quad (1.37)$$

де $\bar{a}_{ij}$ – номінальне значення елемента; Δ_{ij} – прирощення елемента або похибка елемента.

Послідовність тотожних перетворень визначника наведено на рис. 1.23.

Визначення. D_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$ – це визначник n -го порядку k -го порядку приращення:

D_n^0 – визначник n -го порядку нульового порядку приращень ($k = 0$) не містить стовпців приращень, а містить лише стовпці номінальних значень елементів визначника, внаслідок цього є номінальним значенням визначника;

D_n^1 – визначник n -го порядку 1-го порядку приращень ($k = 1$) містить один стовпець приращень, а решта – стовпці номінальних значень;

D_n^2 – визначник n -го порядку 2-го порядку приращень ($k = 2$) містить два стовпці приращень, а решта – стовпці номінальних значень;

D_n^n – визначник n -го порядку n -го порядку приращень ($k = n$) містить тільки стовпці приращень і не містить стовпців номінальних значень.

Визначник D_n^n є визначником матриці приращень $[\Delta_{ij}]$, $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n$.

Визначення. $B_k(D_n)$ – це член k -го порядку приращень, який є сумою визначників n -го порядку k -го порядку приращень.

Число визначників в сумі $B_k(D_n)$ дорівнює числу сполучень C_n^k з порядку визначника n за порядком приращень k :

$$B_k(D_n) = \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k = D_{n,1}^k + D_{n,2}^k + \dots + D_{n,C_n^k}^k. \quad (1.38)$$

Тоді, відповідно до викладеного вище, визначник n -го порядку, в якому всі елементи є сумою номінального значення та приращення елемента, дорівнює:

$$D_n = \sum_{k=0}^n B_k(D_n). \quad (1.39)$$

Нагадаємо, що число сполучень C_n^k із n по k є коефіцієнтами бінома Ньютона, які легко визначаються за трикутником Паскаля (рис. 1.24).

n		$\Sigma = 2^n$
1	1	1
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128

Рисунок 1.24 – Трикутник Паскаля

Приклад 3

Наприклад визначник 3-го порядку, в якому всі елементи є суми $a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}$, подається як сума визначників, загальна кількість яких дорівнює $2^3 = 8$, у тому числі:

- визначників нульового порядку прирощень $C_3^0 = 1$;
- визначників 1-го порядку прирощень $C_3^1 = 3$;
- визначників 2-го порядку прирощень $C_3^2 = 3$;
- визначників 3-го порядку прирощень $C_3^3 = 1$.

Тобто маємо:

$$D_3 = \sum_{k=0}^3 B_k(D_3) = B_0(D_3) + B_1(D_3) + B_2(D_3) + B_3(D_3);$$

де

$$B_0(D_3) = D_3^0 = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_1(D_3) = D_{3,1}^1 + D_{3,2}^1 + D_{3,3}^1 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \Delta_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \Delta_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \Delta_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \Delta_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \Delta_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \Delta_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \Delta_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_2(D_3) = D_{3,1}^2 + D_{3,2}^2 + D_{3,3}^2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \bar{a}_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \bar{a}_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \bar{a}_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \bar{a}_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \bar{a}_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \bar{a}_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \bar{a}_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_3(D_3) = D_3^3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначник 4-го порядку, в якому $a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}$, дорівнює сумі $2^4 = 16$ визначників, у тому числі:

- визначників нульового порядку прирощень $C_4^0 = 1$;
- визначників 1-го порядку прирощень $C_4^1 = 4$;
- визначників 2-го порядку прирощень $C_4^2 = 6$;
- визначників 3-го порядку прирощень $C_4^3 = 4$;
- визначників 4-го порядку прирощень $C_4^4 = 1$.

Тобто маємо:

$$D_4 = \sum_{k=0}^4 B_k(D_4) = B_0(D_4) + B_1(D_4) + B_2(D_4) + B_3(D_4) + B_4(D_4).$$

* * *

Для наближеного аналізу похибок враховують тільки визначники 1-го порядку прирощень. Оскільки число визначників 1-го порядку прирощень дорівнює порядку визначника $C_n^1 = n$, а розкладання кожного визначника за відповідним стовпцем прирощення дає n доданків, що складаються з добутку прирощення на алгебраїчний доданок, то загальне число доданків в члені 1-го порядку прирощень дорівнює n^2 :

$$B_1(D_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}, \quad (1.40)$$

де Δ_{ij} – прирощення ij -го елемента; A_{ij} – алгебраїчне доповнення ij -го прирощення.

Відносне прирощення 1-го порядку:

$$\delta_1 = \frac{B_1(D_n)}{B_0(D_n)}. \quad (1.41)$$

Відносне прирощення 1-го порядку, виражене через відносні прирощення елементів:

$$\delta_1 = \frac{1}{B_0(D_n)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \bar{a}_{ij} A_{ij}, \quad (1.42)$$

де $\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\bar{a}_{ij}}$ відносне прирощення ij -го елемента.

У загальному випадку похибка визначника є многочлен порядку n відносно похибок елементів, тобто

$$\begin{aligned} \delta = F(\delta_{ij}) = & \sum_1^{nC_n^1} \delta_{ij} C_{ij}^1 + \\ & + \sum_1^{n(n-1)C_n^2} \delta_{ij} \delta_{pq} C_{ij,pq}^2 + \sum_1^{n(n-1)(n-2)C_n^3} \delta_{ij} \delta_{pq} C_{ij,pq,lm}^2 + \dots + \sum_1^{n!C_n^n} C_{ij}^n \prod_1^k \delta_{ij}^{\circ}, \quad (1.43) \\ & i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тут

$$C_{ij}^1 = \bar{a}_{ij} \bar{A}_{ij}^1 / B_0(D_n),$$

де $\bar{a}_{ij}$ – номінальні значення ij -го елемента визначника; $\bar{A}_{ij}^1$ – номінальні значення алгебраїчних доповнень 1-го порядку; $B_0(D_n)$ – номінальні значення визначника;

$$C_{ij,pq}^2 = \bar{a}_{ij} \bar{a}_{pq} \bar{A}_{ij,pq}^2 / B_0(D_n),$$

де $\bar{a}_{pq}$ – номінальні значення елементів додаткового мінору до мінору $\bar{a}_{ij}$;

$\bar{A}_{ij,pq}^2$ – номінальні значення алгебраїчних доповнень 2-го порядку;

$$C_{ij,pq,lm}^3 = \bar{a}_{ij} \bar{a}_{pq} \bar{a}_{lm} \bar{A}_{ij,pq,lm}^3 / B_0(D_n),$$

де $\bar{a}_{lm}$ – номінальні значення елементів додаткових мінорів 2-го порядку;

$\bar{A}_{ij,pq,lm}^3$ – номінальні значення алгебраїчних доповнень 3-го порядку;

$$C_{ij}^n = A_{ij}^n \prod_1^n \bar{a}_{ij} / B_0(D_n),$$

де $\prod_1^n \bar{a}_{ij}$ – добутки номінальних значень елементів визначника в різних неповторюваних поєднаннях; A_{ij}^n – алгебраїчне доповнення n -го порядку, чисельно рівне ± 1 .

Рівняння (1.43) дозволяє точно обчислити похибку визначника при будь-яких значеннях похибки δ_{ij} , але в більшості випадків для практичних цілей достатньо врахування похибок 1-го порядку малості, а для засобів вимірювань, що працюють за принципом інваріантності, і 2-го порядку малості.

Таким чином, отримана загальна оперативна, достатньо формалізована і придатна для реалізації на ЕОМ методика знаходження прирощення визначника n -го порядку в залежності від прирощень його елементів при будь-яких наскільки завгодно великих прирощеннях останніх. Як окремий випадок отримано прирощення визначника n -го порядку з урахуванням прирощень першого порядку.

Якщо елементи визначника є деякими функціями, залежними одне від одного, що реалізується, наприклад, у визначнику Вандермонда, то необхідно насамперед скласти матрицю прирощень і її стовпці використовувати для заміни стовпців у відповідних членах $B_k(D_n)$.

Приклад 4

Як приклад застосування описаної методики розглянемо модель похибки вимірювального підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком (див. рис. 1.8), описаного системою рівнянь (1.13). Його коефіцієнт передачі:

$$k_{31} = \frac{\det 3}{\det 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^{1+3} x_1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(-1)^{1+1} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{D_q}{D_3} = \frac{\rho_{32}}{1 + \rho_{32}\rho_{43}},$$

де D_q, D_3 – визначники чисельника і знаменника відповідно.

Складемо матриці прирощень для D_q і D_3 :

$$[\Delta_{D_q}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\Delta_{D_3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 0 \end{bmatrix}.$$

Відносна похибка k_{31} :

$$\delta k_{31} = \frac{\delta D_q - \delta D_3}{1 + \delta D_3},$$

де

$$\delta D_q = \frac{1}{B_{q0}(D_q)} \sum_{k=1}^3 B_{qk}(D_q); \quad \delta D_3 = \frac{1}{B_{30}(D_3)} \sum_{k=1}^3 B_{3k}(D_3).$$

Якщо матриця прирощень має нульові стовпці, то число визначників k -го порядку прирощень, що не дорівнюють нулю, менше C_n^k і дорівнює числу C_p^k сполучень з p по k , де p – число ненульових стовпців в матриці прирощень, $k=1, 2, \dots, p$. Визначники k -го порядку прирощень при $k > p$ дорівнюють нулю.

З урахуванням цього зауваження внаслідок того, що матриця прирощень чисельника має тільки один ненульовий стовпець (другий), $p=1$, визначник першого порядку прирощень буде один ($C_1^1=1$), а визначники 2-го і 3-го порядку прирощень відсутні. Тоді маємо:

$$\delta D_q = \frac{1}{B_{q0}(D_q)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\Delta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{32}}{\bar{\rho}_{32}}.$$

Матриця прирощень знаменника містить два ненульових стовпця (перший і другий), $p=2$, тому в прирощенні знаменника будуть два визначника 1-го порядку прирощень ($C_2^1=2$) і один визначник 2-го порядку прирощень ($C_2^2=1$). При цьому $B_{33}(D_3)=0$.

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \delta D_3 &= \frac{1}{B_{30}(D_3)} \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\Delta_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{43} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\bar{\rho}_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\Delta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 1 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{B_{30}(D_3)} (\Delta_{32}\bar{\rho}_{43} + \Delta_{43}\bar{\rho}_{32} + \Delta_{32}\Delta_{43}) = \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} (\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43}), \end{aligned}$$

$$\text{де } \delta_{32} = \frac{\Delta_{32}}{\bar{\rho}_{32}}; \delta_{43} = \frac{\Delta_{43}}{\bar{\rho}_{43}}; B_{30}(D_3) = 1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43};$$

$$\delta k_{31} = \frac{\delta_{32} - \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} (\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43})}{1 + \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} (\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43})} = \frac{\delta_{32} - \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}\delta_{43} - \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}\delta_{32}\delta_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43} + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}(\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43})}.$$

$$\text{При } |\delta_{32}| \ll 1; |\delta_{43}| \ll 1$$

$$\delta k_{31} \cong \frac{\delta_{32}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} - \frac{\delta_{43}\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}(1 + \delta_{32})}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}.$$

* * *

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть визначення детермінованої моделі похибок вимірювальних пристроїв. Які підходи існують при складанні моделі похибок, недоліки та переваги цих підходів? Яка сутність алгебраїчного методу? Наведіть приклади.

2. Поясніть методику отримання детермінованої моделі похибки вимірювальних пристроїв, коли модель характеристики пристроїв задано в матричній формі. Наведіть приклад.
3. Наведіть приклад тотожних перетворень визначника 3-го порядку, кожен елемент якого є сумою номінального значення та похибки елемента.
4. Наведіть основні визначення для визначників n -го порядку та k -го порядку прирошення.
5. Чому дорівнює визначник n -го порядку, в якому всі елементи є сумою номінального значення та прирошення елемента? Наведіть приклад.
6. Які визначники враховують для наближеного аналізу похибок? Чому дорівнює відносне прирошення 1-го порядку, виражене через відносні прирошення елементів?
7. Наведіть приклад застосування методики для визначення похибки вимірювального підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком, описаного системою рівнянь у матричній формі. Поясніть на прикладі сутність методу знаходження відносної похибки коефіцієнту перетворення.

Лекція 8. Стохастична модель похибок засобів вимірювання

Перехід від детермінованої матричної моделі похибок до імовірнісної моделі. Числові показники випадкової похибки. Структура стохастичної моделі похибки. Математичне сподівання, дисперсія, закон розподілу сумарної похибки на прикладв моделі похибки, усіченої до членів 2-го порядку прирощень. Математичне сподівання, дисперсія похибки визначників матриці, які складаються з добутків, а також доданків з двох залежних випадкових величин. Контрольні запитання і завдання.

Матрична форма моделей засобів вимірювань і матрична форма детермінованого рівняння похибки дозволяють в машинопридатній формі перейти до імовірнісної моделі похибки і оцінити випадкові похибки.

Для визначення всіх нормованих характеристик випадкової похибки відповідно до ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 досить мати в розпорядженні такі числові показники як математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення і закон розподілу густини імовірності, а для характеристики випадкових процесів – автокореляційну функцію і/або спектральну густину.

Як було показано вище, похибка засобу вимірювання (ЗВ), модель якого задана як відношення визначників, дорівнює:

$$\delta_{ЗВ} = \frac{\delta_{\text{ч}} - \delta_{\text{з}}}{1 + \delta_{\text{з}}}, \quad (1.44)$$

де $\delta_{\text{ч}}, \delta_{\text{з}}$ – відносні похибки чисельника і знаменника, які становлять відносні прирощення відповідних визначників.

Відносне прирощення визначника представляється сумою $(2^n - 1)$ визначників k -го порядку прирощень ($k=1 \dots n$) і є функцією похибок елементів визначника:

$$\delta = F(\delta_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.45)$$

Нехай δ_{ij}° є випадкові складові похибок елементів матриці і задані математичними сподіваннями $M\{\delta_{ij}^{\circ}\}$, дисперсіями $D\{\delta_{ij}^{\circ}\}$, законами

розподілу густини імовірності $P\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)$, а також коваріаціями $\text{cov}\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}, \overset{\circ}{\delta}_{pq}\right)$.

Необхідно знайти числові та функціональні характеристики похибки визначника:

$$M\left\{\overset{\circ}{\delta}\right\} = M\left\{F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right\}; \quad D\left\{\overset{\circ}{\delta}\right\} = D\left\{F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right\};$$

$$P\left(\overset{\circ}{\delta}\right) = P\left[F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Стохастична модель похибок утворюється з детермінованої, якщо у виразі (1.43) похибки вважати випадковими величинами, позначивши їх $\overset{\circ}{\delta}$. Тоді

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\delta} = F(\overset{\circ}{\delta}_{ij}) = & \sum_1^{nC'_n} \overset{\circ}{\delta}_{ij} C_{ij}^1 + \sum_1^{n(n-1)C_n^2} \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} C_{ij,pq}^l + \\ & + \sum_1^{n(n-1)(n-2)C_n^3} \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} \overset{\circ}{\delta}_{lm} C_{ij,pq,lm}^3 + \dots + \sum_1^{n!C_n^n} C_{ij}^n \prod_1^n \overset{\circ}{\delta}_{ij}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рівняння (1.46) дозволяє точно обчислити похибку визначника при будь-яких значеннях похибки δ_{ij} , але в більшості випадків для практичних цілей достатньо обліку похибок 1-го порядку малості, а для засобів вимірювань, що працюють за принципом інваріантності, і 2-го порядку малості.

За структурою рівняння (1.46) являє собою суму:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (1.47)$$

Математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань доданків, тобто

$$m_y = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i}.$$

Дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій плюс подвоєні коваріації доданків, тобто

$$D_y = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + 2 \sum a_i a_j r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}. \quad (1.48)$$

При великому числі доданків відповідно до граничних теорем закон розподілу сумарного розподілу близький до нормального і повністю характеризується своїми математичним сподіванням і дисперсією.

У формулі (1.46), усіченої до членів 2-го порядку прирощень, характерними складовими є добутки двох випадкових величин $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$, а також завідомо корельовані доданки

$$\overset{\circ}{\delta}_{ij} + \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}, \quad \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} + \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{lm}. \quad (1.49)$$

Тому знайдемо вираз для математичного сподівання і дисперсії добутку, а також коваріацію величин $\overset{\circ}{\delta}_{ij}$ і $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$, $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$ і $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{lm}$.

Приклад 1

Нехай x_1, x_2, x_3 – у загальному випадку три залежні випадкові величини з коефіцієнтами кореляції r_{12}, r_{13}, r_{23} , математичними сподіваннями $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}$, і дисперсіями $D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}$. Також нехай

$$x_1 = \tilde{x}_1 + m_{x_1}; \quad x_2 = \tilde{x}_2 + m_{x_2}, \quad x_3 = \tilde{x}_3 + m_{x_3},$$

де $\tilde{x}$ – центрована випадкова величина. Тоді

$$\begin{aligned} M \{x_1 x_2\} &= M \left\{ (\tilde{x}_1 + m_{x_1}) (\tilde{x}_2 + m_{x_2}) \right\} = \\ &= M \left\{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 m_{x_1} + \tilde{x}_1 m_{x_2} + m_{x_1} m_{x_2} \right\} = M \left\{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \right\} + m_{x_1} m_{x_2}. \end{aligned}$$

Відповідно до визначення:

$$M \left\{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \right\} = \text{cov}(x_1, x_2) = r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}.$$

Тому

$$M \{x_1 x_2\} = m_{x_1} m_{x_2} + r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}. \quad (1.50)$$

Для добутку незалежних величин:

$$M\{x_1 x_2\} = m_{x_1} m_{x_2}. \quad (1.51)$$

Для центрованих залежних:

$$M\{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2\} = r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}. \quad (1.52)$$

Дисперсія добутку дорівнює:

$$\begin{aligned} D\{x_1 x_2\} &= M\left\{\left(x_1 x_2 - M\{x_1 x_2\}\right)^2\right\} = M\left\{\left(x_1 x_2\right)^2\right\} - \left[M\{x_1 x_2\}\right]^2 = \\ &= M\left\{\left(\tilde{x}_1 + m_{x_1}\right)^2 \left(\tilde{x}_2 + m_{x_2}\right)^2\right\} - \left(m_{x_1} m_{x_2} + r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}\right)^2 = \\ &= M\left\{\begin{aligned} &\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 m_{x_1} + \tilde{x}_2^2 m_{x_1}^2 + 2\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 m_{x_2} + 4\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 m_{x_1} m_{x_2} + \\ &+ 2\tilde{x}_2 m_{x_2} m_{x_1}^2 + \tilde{x}_1^2 m_{x_2}^2 + 2\tilde{x}_1 m_{x_1} m_{x_2}^2 + m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 - m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 - \\ &- 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - r_{12}^2 \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 \end{aligned}\right\}. \end{aligned}$$

Позначаючи центральні моменти порядку $k_1 + k_2$ через

$$\rho_{x_1^{k_1} x_2^{k_2}} = M\left\{\left(x_1 - m_{x_1}\right)^{k_1} \left(x_2 - m_{x_2}\right)^{k_2}\right\},$$

а також враховуючи те, що математичні сподівання центрованих випадкових величин дорівнюють нулю, отримаємо:

$$\begin{aligned} D\{x_1 x_2\} &= m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + \rho_{x_1^2 x_2^2} + 2m_{x_1} \rho_{x_1 x_2^2} + 2m_{x_2} \rho_{x_1^2 x_2} + \\ &+ 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - r_{12}^2 D_{x_1} D_{x_2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Центральні моменти порядку $k_1 + k_2$ можуть бути обчислені через спільні густини ймовірності.

Для незалежних величин коефіцієнт кореляції, а також змішані центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю, тому

$$D\{x_1 x_2\} = m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + D_{x_1} D_{x_2} \quad (1.54)$$

Для центрованих залежних величин:

$$D\{x_1 x_2\} = \rho_{x_1^2 x_2^2} - r_{12}^2 D_{x_1} D_{x_2}. \quad (1.55)$$

Для нормально розподілених величин центральні моменти будь-якого непарного порядку дорівнюють нулю, а центральний момент будь-якого парного порядку можна виразити через відповідні моменти 2-го порядку, тому

$$D\{x_1 x_2\} = m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + (1 - r_{12}^2) D_{x_1} D_{x_2}. \quad (1.56)$$

Знайдемо коваріацію випадкових величин x_1 і $x_1 x_2$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_1, x_1 x_2) &= M\left\{\left(x_1 - m_{x_1}\right)\left(x_1 x_2 - M\{x_1 x_2\}\right)\right\} = \\ &= M\left\{x_1^2 x_2\right\} - m_{x_1} M\left\{x_1 x_2\right\} = M\left\{\left(\tilde{x}_1 + m_{x_1}\right)^2\left(\tilde{x}_2 + m_{x_2}\right)\right\} - \\ &- m_{x_1}^2 m_{x_2} - m_{x_1} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} = \rho_{\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2} + m_{x_1} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + m_{x_2} D_{x_1}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Для незалежних величин x_1 і x_2

$$\text{cov}(x_1, x_1 x_2) = m_{x_2} D_{x_1}. \quad (1.58)$$

Для центрованих

$$\text{cov}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \tilde{x}_2) = \rho_{\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2} = \text{cov}(\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2). \quad (1.59)$$

З (1.56) і (1.52) отримаємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{x_1, x_1 x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_1 x_2)}{\sigma_{x_1} \sqrt{D\{x_1 x_2\}}}. \quad (1.60)$$

Для незалежних x_1, x_2 з (1.60), (1.53, 1.57) отримаємо:

$$r_{x_1, x_1 x_2} \frac{m_{x_2} \sigma_{x_1}}{\sqrt{m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + D_{x_1} D_{x_2}}} = \left(1 + \frac{m_{x_1}^2 D_{x_2}}{m_{x_2}^2 D_{x_1}} + \frac{D_{x_2}}{m_{x_2}^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.61)$$

З (1.61) видно, що для центрованої величини x_2 , тобто при $m_{x_2} \rightarrow 0$, коефіцієнт кореляції x_1 і $x_1 x_2$ також прямує до нуля. При великих значеннях m_{x_2} , в порівнянні з дисперсією D_{x_2} , m_{x_1} коефіцієнт кореляції прямує до одиниці.

* * *

Приклад 2

Можна показати, що дисперсія добутку трьох незалежних величин

$$D\{x_1 x_2 x_3\} = m_{x_2}^2 m_{x_3}^2 D_{x_1} + m_{x_1}^2 m_{x_3}^2 D_{x_2} + m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 D_{x_3} + m_{x_3}^2 D_{x_1} D_{x_2} + \\ + m_{x_2}^2 D_{x_1} D_{x_3} + m_{x_1}^2 D_{x_3} D_{x_2} + D_{x_1} D_{x_2} D_{x_3}. \quad (1.62)$$

Дисперсія добутку n незалежних величин може бути виражена аналогічно (1.62) як сума добутків квадратів математичних сподівань і дисперсій. Формула (1.62) отримана шляхом розкладання $x_1 x_2 x_3$ в ряд Тейлора в точках $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}$:

$$\text{cov}(x_1 x_2, x_1 x_3) = \rho_{x_1^2 x_2 x_3} + 2m_{x_1} \rho_{x_1 x_2 x_3} + m_{x_1}^2 r_{23} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} + m_{x_3} \rho_{x_1^2 x_2} + \\ + m_{x_1} m_{x_3} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + m_{x_2} m_{x_3} D_{x_1} - r_{13} r_{12} D_{x_1} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}. \quad (1.63)$$

Для незалежних x_1, x_2, x_3 :

$$\text{cov}(x_1, x_2, x_1 x_3) = m_{x_2} m_{x_3} D_{x_1}. \quad (1.64)$$

Таким чином, отримано математичні сподівання, дисперсії і коваріації доданків формули (1.46), обмеженою членами 2-го порядку прирощень включно.

Підставляючи в (1.47) і (1.48) відповідні значення математичних сподівань, дисперсій і коваріацій доданків формули (1.45), отримаємо математичні сподівання і дисперсії випадкової похибки засобу вимірювання.

* * *

Приклад 3

Для прикладу знайдемо $M\{\delta_{61}\}$ і $D\{\delta_{61}\}$ пристрою, показаного на рис. 1.9, скориставшись формулою (1.43), вважаючи похибки незалежними.

Позначаючи $M\left\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right\} = m_{ij}$ і $D\left\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right\} = D_{ij}$, з (1.43), (1.51), (1.54), (1.58) і

(1.64) отримаємо:

$$m_{61} = -m_{32}(1 + m_{21} + m_{54}) - m_{21}m_{54};$$

$$D_{61} = D_{32} + m_{21}^2 D_{54} + m_{54} D_{21} + D_{54} D_{21} + m_{32}^2 D_{21} + m_{21}^2 D_{32} + D_{21} D_{32} + m_{32}^2 D_{54} + m_{54}^2 D_{32} + D_{54} D_{32} + 2(m_{21} D_{32} + m_{54} D_{32} + m_{54} m_{32} D_{21} + m_{21} m_{32} D_{54} + m_{21} m_{54} D_{32}).$$

* * *

Для засобів вимірювання інтегруючого перетворення випадкові похибки являють собою інтегральні вибірки випадкового процесу погрішності як випадкової функції часу [5].

Математичне сподівання таких вибірок для нестационарного випадкового процесу дорівнює:

$$M\{\xi_i\} = M\left\{\frac{1}{T_u} \int_{t_0}^{t_0+T_u} \xi(t) dt\right\} = \frac{1}{T_u} \int_{t_0}^{t_0+T_u} m(t) dt,$$

$$D\{\xi_i\} = \frac{1}{T_u^2} \iint_{t_0}^{t_0+T_u} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - M^2\{\xi_i\},$$

де $R(t_1, t_2)$ – автокореляційна функція нестационарного процесу.

Якщо випадковий процес похибки стаціонарний, тоді маємо:

$$M\{\xi_i\} = 0; \quad D\{\xi_i\} = \frac{2}{T_u} \int_0^{T_u} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau,$$

де $R(\tau)$ – автокореляційна функція ергодичного процесу.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому дорівнює похибка засобу вимірювання, детермінована модель якого задана як відношення визначників? Як пов'язана стохастична модель похибок із її детермінованою моделлю, якщо похибки вважати випадковими величинами?

2. Якими параметрами характеризується випадкова складова похибки елементів матриці? Наведіть визначення математичного сподіваннями, дисперсії, коваріації випадкових похибок.

3. *Яка модель похибки визначника використовується для точного обчислення, спрощена модель похибки для практичних цілей? Чим вони відміняються один від одного?*

4. *Чому дорівнює математичне сподівання суми похибок? Чому дорівнює дисперсія суми похибок? Чому дорівнює коваріація?*

Лекція 9. Динамічні характеристики засобів вимірювань

Нормовані динамічні характеристики засобів вимірювань (лінійних в просторі сигналів). Часові та частотні, повні та часткові динамічні характеристики. Основні визначення. Приклад структурної динамічної моделі пристрою з адитивною корекцією. Матричний запис динамічної моделі. Передавальна функція та перехідна характеристика через визначники матриць динамічної моделі. Комплексна частотна похибка коефіцієнту передавання вимірювального пристрою, складові комплексної похибки. Геометрична інтерпретація. Контрольні запитання і завдання.

Як зазначалося вище, згідно ДСТУ ГОСТ 8.009:2008, в якості динамічних характеристик засобів вимірювань вибирається одна з наступних повних характеристик: диференційні рівняння, перехідна характеристика, імпульсна перехідна характеристика або амплітудно-фазочастотна характеристика.

У більшості випадків нормуються часткові динамічні характеристики – час встановлення, амплітудно-частотна характеристика, фазочастотна характеристика, параметри вхідного імпедансу.

Аналітичним шляхом часткові характеристики отримують з повних, тому на етапі проектування необхідне знання повних динамічних характеристик. Часткові динамічні характеристики відносно просто визначаються експериментальним шляхом.

Найбільш повно динамічні властивості описуються диференційними рівняннями, оскільки це придатне як для лінійних, так і нелінійних систем.

Однак слід зазначити, що не існує загального аналітичного способу розв'язання нелінійних диференційних рівнянь, за винятком ряду спеціальних нелінійних рівнянь, для яких є точні розв'язання, тому широкого поширення набули асимптотичні методи розв'язання і дослідження нелінійних диференційних рівнянь [11].

Останнім часом стали використовуватися чисельні методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь [12].

Поняття перехідної, імпульсної перехідної й амплітудно- та фазочастотних характеристик під час точного розгляду відноситься до

лінійних в просторі сигналів вимірювальних кіл, а оскільки такі кола широко застосовуються [13,14,15,16], то розглянемо спосіб складання цих характеристик.

Перехідна характеристика $h(t)$ є функцією часу і становить собою реакцію лінійного вимірювального кола на вхідний сигнал у вигляді одиничної ступінчастої функції $1(t)$ за нульових початкових умов.

В операторній формі реакція кола на сигнал у вигляді стрибка $x(t) = x_0 \cdot 1(t)$ дорівнює:

$$y(p) = x(p) \cdot W(p) = \frac{x_0}{p} \cdot W(p), \quad (1.65)$$

де $\frac{x_0}{p}$ – зображення вхідного сигналу $x(t)$; $W(p)$ – основна (системна) операторна передавальна функція вимірювального кола.

Передавальна функція $W(p)$ вимірювального кола, що дорівнює відношенню зображення $y(p)$ вихідного сигналу до зображення вхідного сигналу $x(p)$, тобто $W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$ за нульових початкових умов, може бути отримана в матричній формі аналогічно тому, як вище отримані статичні характеристики засобів вимірювань, якщо коефіцієнти передачі перетворювальних елементів представити в операторній формі, вважати ρ_{ji} – операторні функції, тобто $\rho_{ji}(p)$, а також змінні x_i представити операторними функціями комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$, тобто $x_i(p)$.

Тоді матричний запис передавальної функції буде мати вигляд:

$$[\rho(p)] \times [x(p)] = [x_n(p)], \quad (1.66)$$

де $[\rho(p)]$ – квадратна матриця коефіцієнтів; $[x(p)]$ – матриця-стовпець змінних; $[x_n(p)]$ – матриця-стовпець правих частин.

Маючи передавальну функцію, за формулою (1.65) знаходимо зображення вихідного сигналу, а застосувавши зворотне перетворення, знаходимо перехідну характеристику.

Приклад 1

Як приклад розглянемо перехідну характеристику пристрою, зображеного на рис. 1.9, вважаючи перетворюючі елементи динамічними.

Структурна схема пристрою зображена на рис. 1.25.

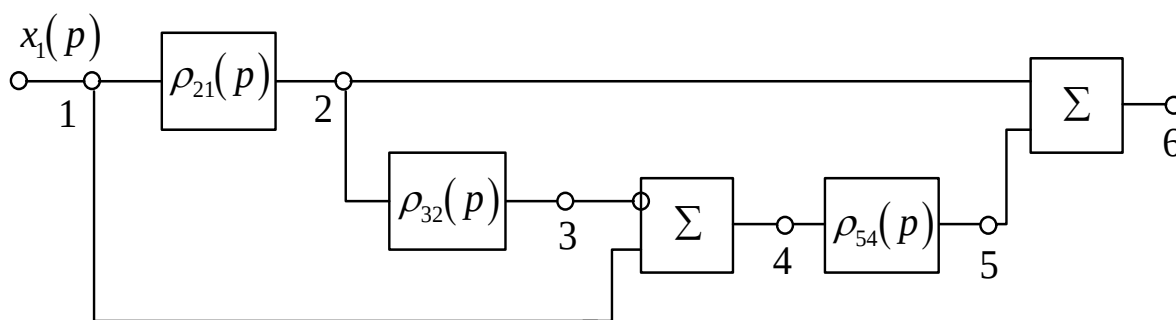


Рисунок 1.25 – Структурна схема пристрою з адитивною корекцією та динамічними перетворювальними елементами

Матричний запис динамічної моделі пристрою:

$$\begin{bmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\rho_{21}(p) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -\rho_{32}(p) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{54}(p) & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(p) \\ x_1(p) \\ x_2(p) \\ x_3(p) \\ x_4(p) \\ x_5(p) \\ x_6(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ x_1(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Передавальна функція дорівнює:

$$W(p) = \frac{x_6(p)}{x_1(p)} = \frac{\det 6(p)}{\det 1(p)} = \rho_{21}(p) + \rho_{54}(p) - \rho_{21}(p)\rho_{54}(p)\rho_{32}(p).$$

Хай $\rho_{21}(p)$ і $\rho_{54}(p)$ містять по одній інерційній ланці, що має динамічну модель першого порядку, а $\rho_{32}(p)$ – безінерційну ланку, тобто

$$\rho_{21}(p) = \rho_{21} \frac{1}{1 + p\tau_{21}}; \quad \rho_{54}(p) = \rho_{54} \frac{1}{1 + p\tau_{54}}; \quad \rho_{32}(p) = \rho_{32}.$$

Якщо $x_1(p) = x_{01} / p$, то зображення перехідної характеристики:

$$x_6(p) = \frac{x_{01}}{p} \left[\frac{\rho_{21}}{1 + p\tau_{21}} + \frac{\rho_{54}}{1 + p\tau_{54}} - \frac{\rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}}{(1 + p\tau_{21})(1 + p\tau_{54})} \right],$$

а відповідна йому нормована перехідна характеристика матиме вигляд:

$$\frac{x_6(t)}{x_{01}} = \rho_{21}(1 - e^{a_1 t}) + \rho_{54}(1 - e^{a_2 t}) - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} \left(1 - \frac{a_2 e^{a_1 t} - a_1 e^{a_2 t}}{a_1 - a_2} \right),$$

$$\text{де } a_1 = -\frac{1}{\tau_{21}}; \quad a_2 = -\frac{1}{\tau_{54}}.$$

* * *

Час установа $t_{уст}$ є найбільшим коренем рівняння:

$$\frac{x_{вих}(t)}{x_{вих}(t \rightarrow \infty)} = 1 \pm \gamma,$$

де γ – задана зона відхилення від усталеного режиму. На рис. 1.26 $t_{уст} = t_5$, оскільки після закінчення часу t_5 перехідна характеристика не виходить за межі зони похибки 2γ .

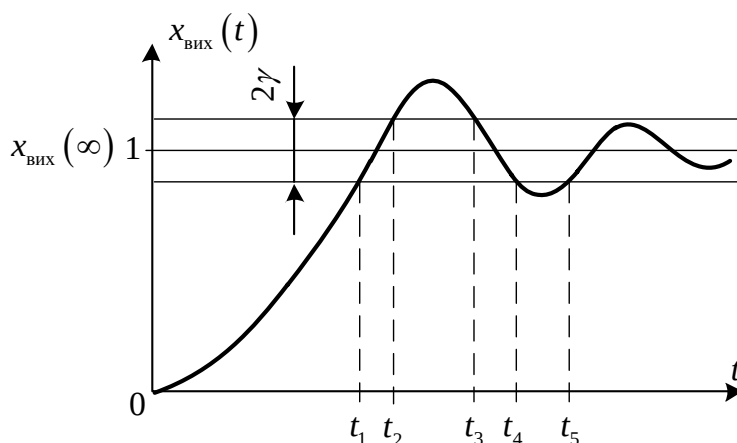


Рисунок 1.26 – Перехідна характеристика

Серед часткових нормованих метрологічних характеристик вимірювальних пристроїв найбільш поширені амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики.

Як зазначалося вище, ці характеристики мають сенс для лінійних в просторі сигналів вимірювальних кіл. Нелінійні в просторі сигналів кола збагачують спектр вихідного сигналу. У ряді випадків під час аналізу нелінійних кіл під частотною характеристикою розуміють відповідні співвідношення між сигналами першої гармоніки.

Амплітудно-частотну і фазочастотну характеристики отримують з передавальної функції шляхом заміни комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$ змінною $j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$.

У загальному вигляді передавальна функція задається у вигляді відношення двох поліномів змінної p або $j\omega$:

$$W(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^m b_i p^i}, \quad (1.67)$$

або

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}, \quad (1.68)$$

де непарні значення $i = 1, 3, 5, \dots$ утворюють уявну частину доданків, а парні $i = 0, 2, 4, \dots$ – їхню дійсну частину.

Нагадаємо, що модуль відношення комплексних чисел дорівнює відношенню їхніх модулів, модуль добутку дорівнює добутку модулів, а фазовий зсув відношення двох комплексних чисел дорівнює різниці фаз чисельника та знаменника, фазовий зсув добутку комплексних чисел дорівнює сумі фазових зрушень.

Це впливає з уявлення комплексних чисел в полярній системі координат

$$\rho(j\omega) = \rho_1(j\omega) \dots \rho_n(j\omega) = |\rho_1(j\omega)| \dots |\rho_n(j\omega)| e^{j(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}. \quad (1.69)$$

Для підготовки алгоритму обчислення амплітудно-частотної та фазочастотної характеристик доцільно представити їхнє вираження в найбільш зручній для алгоритмізації формі.

Для цього скористаємося наступним. Зведення числа $j = \sqrt{-1}$ у ступінь дає значення $+j$ при $i = 1, 5, 9, \dots$; $-j$ при $i = 3, 7, 11, \dots$; 1 при $i = 0, 4, 8, 12, \dots$; -1 при $i = 2, 6, 10, \dots$, тобто

$$\begin{aligned} j^k &= j && \text{при } k = 4 \cdot i + 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ j^l &= -j && \text{при } l = 4 \cdot i + 3, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ j^p &= 1 && \text{при } p = 4 \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ j^q &= -1 && \text{при } q = 4 \cdot i + 2, \quad i = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Враховуючи цей вираз, (1.68) можна представити як часткові суми дійсної та уявної складових чисельника і знаменника:

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^{i-1} a_i \omega^i}{\sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^{i-1} b_i \omega^i}, \quad (1.70)$$

або

$$\begin{aligned} W(j\omega) = & \frac{\sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-4}{4} \leq i \leq \frac{n}{4}} a_{4i} \omega^{4i} - \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-6}{4} \leq i \leq \frac{n-2}{4}} b_{4i+2} \omega^{4i+2} + j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-5}{4} \leq i \leq \frac{n-1}{4}} a_{4i+1} \omega^{4i+1} - j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-7}{4} \leq i \leq \frac{n-3}{4}} a_{4i+3} \omega^{4i+3}}{\sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-4}{4} \leq i \leq \frac{m}{4}} b_{4i} \omega^{4i} - \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-6}{4} \leq i \leq \frac{m-2}{4}} b_{4i+2} \omega^{4i+2} + j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-5}{4} \leq i \leq \frac{m-1}{4}} b_{4i+1} \omega^{4i+1} - j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-7}{4} \leq i \leq \frac{m-3}{4}} b_{4i+3} \omega^{4i+3}} \end{aligned} \quad (1.71)$$

або

$$W(j\omega) = \frac{A_r(\omega) + jA_I(\omega)}{B_r(\omega) + jB_I(\omega)}, \quad (1.72)$$

де $A_r(\omega)$ і $B_r(\omega)$ – дійсні частини чисельника та знаменника;
 $A_I(\omega)$, $B_I(\omega)$ – уявні частини чисельника та знаменника відповідно.

Амплітудно-частотна характеристика описується виразом:

$$|W(j\omega)| = \sqrt{\frac{[A_r(\omega)]^2 + [A_I(\omega)]^2}{[B_r(\omega)]^2 + [B_I(\omega)]^2}}. \quad (1.73)$$

Фазочастотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)} - \text{Arctg} \frac{B_I(\omega)}{B_r(\omega)}, \quad (1.74)$$

де

$$\operatorname{Arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)}, & A_r(\omega) > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)}, & A_r(\omega) < 0, A_I(\omega) > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)}, & A_r(\omega) < 0, A_I(\omega) < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & A_r(\omega) = 0, A_I(\omega) > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & A_r(\omega) = 0, A_I(\omega) < 0. \end{cases}$$

$\operatorname{Arctg} \frac{A_I(\omega)}{A_r(\omega)} = \arg(z) \in (-\pi; \pi]$ – головне значення аргументу комплексного числа $z = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)\cos\varphi + jA(\omega)\sin\varphi$, $z = A(j\omega) = A_r(\omega) + jA_I(\omega)$. Аргумент комплексного числа – величина багатозначна і визначається з точністю до $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k.$$

Примітка. Для запису комплексного числа Z в показниковій формі достатньо знайти головне значення аргументу комплексного числа, тобто вважати $\varphi = \arg(z)$.

За виглядом частотної характеристики вимірювальні пристрої можна поділити на дві групи: першу, в якій мінімізується відхилення частотної характеристики від постійного значення в деякій точці ω_0 , тобто мінімізується частотна похибка, і другу, в якій частотна характеристика має спеціальну форму і нормується ця форма теж відносно деякої частоти ω_0 .

Перша група приладів більш показна, до неї відносяться амперметри, вольтметри, ватметри, фазометри, підсилювачі, осцилографи, вимірювачі амплітудно-частотних характеристик, атенюатори, генератори тощо.

До другої групи належать селективні вольтметри, аналізатор спектру, вимірювальні приймачі, інтегратори, диференціатори тощо.

Для зручності представлення та розрахунків частотна характеристика часто подається у відносних одиницях як по осі абсцис, так і по осі ординат. За вісь частот береться відношення:

$$\omega / \omega_0 = \Omega, \quad (1.75)$$

причому $\Omega_0 = 1$, де ω_0 – деяка початкова частота.

За віссю ординат береться відношення

$$k_F = \frac{|W(j\omega)|}{|W(j\omega_0)|}. \quad (1.76)$$

Величини Ω і k_F часто представляються в логарифмічному масштабі.

Частотна похибка дорівнює:

$$\gamma_F = k_F - 1. \quad (1.77)$$

Тоді вираз (1.68) набуде вигляду:

$$W(j\Omega) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \omega_0^i (j\Omega)^i}{\sum_{i=0}^m b_i \omega_0^i (j\Omega)^i}; \quad (1.78)$$

а вираз (1.70) – вигляду:

$$W(j\Omega) = \frac{\sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i}{\sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i}. \quad (1.79)$$

Враховуючи те, що модуль частотної характеристики дорівнює кореню квадратному з квадратів дійсної та уявної складових, то за малих частотних похибок останню доцільно знаходити за формулами наближеного обчислення від квадрата модуля частотної характеристики.

З (1.77) одержимо:

$$k_F^2 = (1 + \gamma_F)^2,$$

Звідки

$$\gamma_F \approx \frac{k_F^2 - 1}{2}.$$

За малих частотних похибок, їй можна надати більш наочну форму.

Для цього зробимо нормування у виразі (1.72), розділивши ліву та праву частини на модуль коефіцієнта передачі на частоті калібрування Ω_0 :

$$\dot{k}_F = \frac{W(j\Omega)}{|W(j\Omega_0)|} = \frac{A_r(\Omega) + jA_I(\Omega)}{|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)}, \quad (1.81)$$

де

$$\begin{aligned} A_r(\Omega) &= \sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i; \quad A_I(\Omega) = \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i; \\ B_r(\Omega) &= \sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i; \quad B_I(\Omega) = \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i. \end{aligned}$$

Вираз (1.81) тотожно перетворимо до вигляду:

$$\dot{k}_F = 1 + \frac{A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j[A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]}{|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)}. \quad (1.82)$$

Другий доданок у виразі (1.82) є комплексною похибкою $\Delta \dot{k}_F$ коефіцієнта $\dot{k}_F$. Модуль і аргумент $\Delta \dot{k}_F$ дорівнюють:

$$|\Delta \dot{k}_F| = \sqrt{\frac{[A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_r(\Omega)]^2 + [A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]^2}{[|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega)]^2 + [|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]^2}}; \quad (1.83)$$

$$\varphi_\Delta = \text{Arctg} \frac{A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)}{A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_r(\Omega)} - \text{Arctg} \frac{B_I(\Omega)}{B_r(\Omega)}. \quad (1.84)$$

Ортогональні складові вектора похибки:

$$(\Delta \dot{k}_F)_r = |\Delta \dot{k}_F| \cos \varphi_\Delta; \quad (\Delta \dot{k}_F)_I = |\Delta \dot{k}_F| \sin \varphi_\Delta. \quad (1.85)$$

Геометрична інтерпретація виразу (1.81) представлена на рис. 1.27.

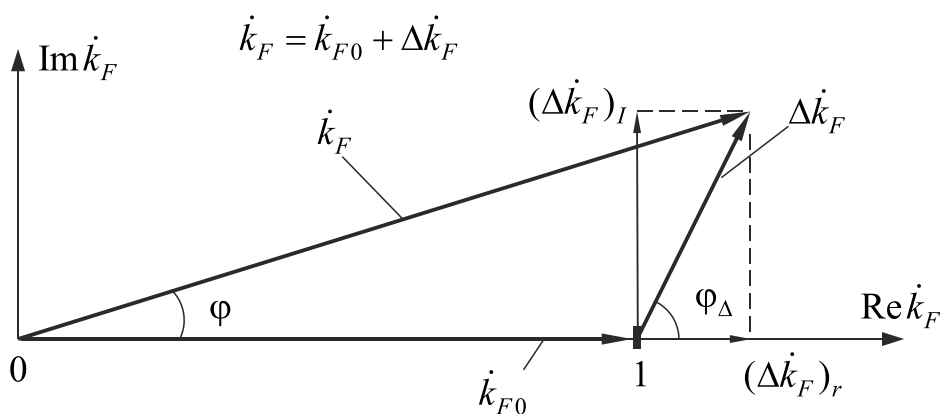


Рисунок 1.27 – Геометрична інтерпретація частотної похибки

За малих значеннях частотних похибок орієнтовно можна вважати, що похибка модуля:

$$\gamma_F = |\dot{k}_F| - 1 \approx (\Delta \dot{k}_F)_r, \quad (1.86)$$

фазова похибка:

$$\varphi \approx \arctg(\Delta \dot{k}_F)_I. \quad (1.87)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть повні та часткові, частотні та часові динамічні характеристики засобів вимірювання. Який зв'язок між цими характеристиками? Область застосування або для яких моделей вимірювальних пристроїв та які характеристики можна застосовувати?
2. Наведіть операторну передавальну функцію вимірювального кола. Як у матричній формі зазначити передавальну функцію вимірювального пристрою? Чи можна застосувати операторну передавальну функцію для нелінійних кіл?
3. Наведіть приклад матричного запису динамічної моделі вимірювального пристрою через динамічні моделі елементів пристрою
4. Як нормується частотна похибка для різних груп вимірювальних пристроїв?

5. Виразить у загальному випадку комплексну похибку коефіцієнту передавання вимірювального пристрою та складові його похибки у вигляді модуля та аргументу комплексної похибки. Виразить ортогональні складові вектору комплексної похибки та надайте геометричну інтерпретацію.

6. Наведіть спрощений вираз за малих значень частотних похибок.

Лекція 10. Похибка визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі за результатами експерименту (похибка за наявності залежних елементів в матриці системи)

Похибка коефіцієнтів регресії поліноміальної моделі за результатами експерименту за наявності залежних елементів в матриці системи. Складові похибки апроксимації. Коефіцієнти регресії системи рівнянь поліноміальної моделі. Матричний запис системи та її розв'язок відносно коефіцієнтів через визначники матриць. Визначник Вандермонда. Похибка коефіцієнтів через похибки визначників системи. Матриця похибок визначників системи з урахуванням перших наближень. Приклад розрахунку похибки коефіцієнтів регресії полінома третього порядку з використанням матричного апарата. Контрольні запитання і завдання.

Вище було отримано загальний вираз для абсолютної похибки визначника залежно від похибок його елементів

$$\Delta D = F(\Delta_{ij}). \quad (1.88)$$

Елементи a_{ij} визначника можуть бути залежними. В цьому разі слід знайти припущення елемента a_{pq} , залежного від елемента a_{ij} , як функцію припущення Δ_{ij} , тобто

$$\Delta_{pq} = \varphi(\Delta_{ij}). \quad (1.89)$$

Розглянемо приклад визначення похибки коефіцієнтів регресії поліноміальної моделі за результатами експерименту.

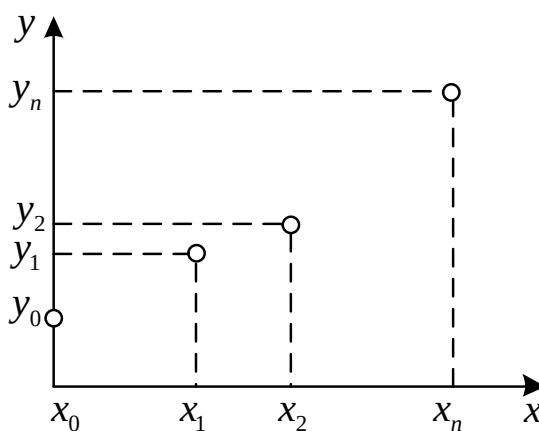


Рисунок 1.28 – Вузлові точки експериментальної залежності

Нехай внаслідок експерименту зняті вузлові точки деякої залежності (рис. 1.28), невідомої до проведення експерименту

$$y = \varphi(x), \quad (1.90)$$

і зведені в таблицю

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

(1.91)

Нехай як апроксимуюча обрана поліноміальна залежність порядку n :

$$y = P_n(x), \quad (1.92)$$

тобто

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (1.93)$$

або

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Похибка апроксимації має дві складові: першу, обумовлену обмеженістю порядку полінома, і другу, зумовлену похибками визначення координат вузлових точок.

Перша складова похибки досліджена дуже докладно [12] за умови, що вузлові точки одночасно належать як залежності, що повинна бути апроксимована, так і апроксимуючій функції (у цьому разі поліному). Іншими словами, апроксимуюча функція обов'язково проходить через вузли апроксимуємої залежності. Відхилення апроксимуючої й апроксимуємої залежностей оцінюється виходячи з різних критеріїв, найчастіше максимальним відхиленням або середньоквадратичним відхиленням, або іншими інтегральними відхиленнями.

Друга складова завжди має місце при експериментальному визначенні координат вузлових точок і обумовлена похибками задання або змін аргументів x_i і вимірювання, або встановлення значень функції y_i .

Коефіцієнти полінома a_i , які часто називають коефіцієнтами регресії, знаходяться з системи рівнянь:

[illegible]

Система (1.94) містить $(n+1)$ рівняння відносно $(n+1)$ невідомих, якими є коефіцієнти a_i .

Для автоматизованого розв'язку системи (1.94) відносно a_i ($i = 0 \dots n$), а також визначення похибок Δa_i залежно від похибок x_i і y_i , як було показано вище, доцільно систему (1.94) записати у матричній формі.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & \dots j \dots & n+1 \\ \hline 1 & 1 & x_0 & x_0^2 & & x_0^n \\ \hline 2 & 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \hline 3 & 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline i & 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \dots x_{i-1}^{(j-1)} \dots & x_{i-1}^n \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline n+1 & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} a \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} y \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right] . \quad (1.95)$$

Матриця системи буде мати порядок $n + 1$. Її коефіцієнти визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{\det 1}{\det C}, \quad a_1 = \frac{\det 2}{\det C}, \quad a_{i-1} = \frac{\det i}{\det C}, \quad (1.96)$$

де $\det C$ – визначник системи (1.95); $\det i$ – визначник системи, в якому i -й стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин рівнянь системи (1.95).

Для знаходження похибок a_{i-1} необхідно знати похибки визначника $\det i$ і визначника системи $\det C$, оскільки відносна похибка a_{i-1}

$$\delta a_{i-1} = \frac{\delta \det i - \delta \det C}{1 + \delta \det C}. \quad (1.97)$$

Для знаходження похибок визначників необхідно знати матрицю похибок визначників $\det i$ і $\det C$ або/і матрицю похибок y_i .

Визначником системи є *визначник Вандермонда*. Матриця похибок для нього з урахуванням тільки перших наближень має вигляд:

$i \setminus j$	1	2	3	$\dots j \dots$	$n+1$
1	0	Δ_0	$2\bar{x}_0\Delta_0$		$n\bar{x}_0^{n-1}\Delta_0$
2	0	Δ_1	$2\bar{x}_1\Delta_1$		$n\bar{x}_1^{n-1}\Delta_1$
3	0	Δ_2	$2\bar{x}_2\Delta_2$		$n\bar{x}_2^{n-1}\Delta_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	0	Δ_{i-1}	$2\bar{x}_{i-1}\Delta_{i-1}$	$\dots (j-1)x_{i-1}^{-j-2}\Delta_{i-1} \dots$	$n\bar{x}_{i-1}^{n-1}\Delta_{i-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	0	Δ_n	$2\bar{x}_n\Delta_n$		$n\bar{x}_n^{n-1}\Delta_n$

$$, \quad (1.98)$$

де $\bar{x}_i$ – номінальне значення; Δ_i – похибка $x_i = \bar{x}_i + \Delta_i$.

Матриця-стовпець прирощень y_i складається з Δy_i ($i = 0, \dots, n$).

За необхідності більш точного визначення похибок слід користуватися прирошенням елементів, отриманих на основі розкладання бінома Ньютона.

Нехай $x_i = \bar{x}_i + \Delta_i = \bar{x}_i(1 + \delta_i)$, де $\delta_i = \frac{\Delta_i}{\bar{x}_i}$ – відносна похибка. Тоді:

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{x}_i(1 + \delta_i); \\ x_i^2 &= \bar{x}_i^2(1 + \delta_i)^2 = \bar{x}_i^2(1 + 2\delta_i + \delta_i^2); \\ x_i^3 &= \bar{x}_i^3(1 + \delta_i)^3 = \bar{x}_i^3(1 + 3\delta_i + 3\delta_i^2 + \delta_i^3); \\ &\dots\dots\dots; \\ x_i^n &= \bar{x}_i^n(1 + \delta_i)^n = \bar{x}_i^n(1 + C_n^1\delta_i + C_n^2\delta_i^2 + C_n^3\delta_i^3 + \dots + C_n^n\delta_i^n). \end{aligned} \tag{1.99}$$

Число сполучень з n по k ($k=1, \dots, n$) легко знаходиться з трикутника Паскаля.

Загальний член матриці похибок, виражений через відносні похибки при врахуванні перших наближень:

$$\Delta_{ij} = (j-1) \bar{x}_{i-1}^{j-1} \delta_{i-1}, \quad (1.100)$$

де i та j – номери рядків і стовпців матриці похибок визначника системи; $i=(1, \dots, n+1)$; $j=(1, \dots, n+1)$; n – порядок полінома.

За необхідності врахування більш високих наближень слід користуватися формулами (1.99).

З матричного рівняння (1.95) за формулами (1.96) можна отримати коефіцієнти полінома a_i , а з матриці номінальних значень і матриці похибок визначника системи та матриці похибок правих частин – похибки визначника $\det i$

$$B_1(D_n) = \sum_{l=1}^n D_{n,l}^1. \quad (1.101)$$

Приклад 1

Необхідно знайти коефіцієнти апроксимуючого полінома експериментально отриманої залежності.

Нехай апроксимуючий поліном має третій порядок ($n=3$). В такому разі число вузлів дорівнює $n+1=4$, розмірність матриці коефіцієнтів $(n+1) \times (n+1) = 4 \times 4$.

Запишемо рівняння полінома

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Вважаючи x_0, x_1, x_2, x_3 і y_0, y_1, y_2, y_3 відомими, а a_0, a_1, a_2, a_3 невідомими, запишемо на основі (1.95) в матричній формі систему рівнянь для знаходження a_i :

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c|cccc} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 2 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 3 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 4 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{array} \\ \times \begin{bmatrix} a \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (1.102)$$

З (1.102) отримаємо:

$$a_0 = \frac{\det 1}{\det C}; \quad a_1 = \frac{\det 2}{\det C}; \quad a_2 = \frac{\det 3}{\det C}; \quad a_3 = \frac{\det 4}{\det C}. \quad (1.103)$$

З (1.102), згідно (1.98) і (1.100), отримаємо матрицю похибок визначника системи. Також запишемо матрицю-стовпець похибок правих частин:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\det C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|cccc} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & \bar{x}_0\delta_0 & 2\bar{x}_0^2\delta_0 & 3\bar{x}_0^3\delta_0 \\ 2 & 0 & \bar{x}_1\delta_1 & 2\bar{x}_1^2\delta_1 & 3\bar{x}_1^3\delta_1 \\ 3 & 0 & \bar{x}_2\delta_2 & 2\bar{x}_2^2\delta_2 & 3\bar{x}_2^3\delta_2 \\ 4 & 0 & \bar{x}_3\delta_3 & 2\bar{x}_3^2\delta_3 & 3\bar{x}_3^3\delta_3 \end{array} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix}. \quad (1.104)$$

Запишемо визначники:

$$\det 1 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ y_1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \det 4 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (1.105)$$

Похибка 1-го порядку приросту детермінанта згідно (1.101), (1.104), (1.105) дорівнює:

$$B_1(\det 1) = \sum_{l=1}^4 D'_{4,l} = \begin{vmatrix} \Delta y_0 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\ \Delta y_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\ \Delta y_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\ \Delta y_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0 & \bar{x}_0 \delta_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\ y_1 & \bar{x}_1 \delta_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\ y_2 & \bar{x}_2 \delta_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\ y_3 & \bar{x}_3 \delta_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} y_0 & \bar{x}_0 & 2\bar{x}_0^2 \delta_0 & \bar{x}_0^3 \\ y_1 & \bar{x}_1 & 2\bar{x}_1^2 \delta_1 & \bar{x}_1^3 \\ y_2 & \bar{x}_2 & 2\bar{x}_2^2 \delta_2 & \bar{x}_2^3 \\ y_3 & \bar{x}_3 & 2\bar{x}_3^2 \delta_3 & \bar{x}_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0 \bar{x} & \bar{x}_0^2 & 3\bar{x}_0^3 \delta_0 \\ y_1 \bar{x} & \bar{x}_1^2 & 3\bar{x}_1^3 \delta_1 \\ y_2 \bar{x} & \bar{x}_2^2 & 3\bar{x}_2^3 \delta_2 \\ y_3 \bar{x} & \bar{x}_3^2 & 3\bar{x}_3^3 \delta_3 \end{vmatrix}, \quad (1.106)$$

або

$$B_1(\det 1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}. \quad (1.107)$$

Загальне число доданків у виразі (1.107) дорівнює 16.

Відносна похибка $\delta \det 1$ в першому наближенні дорівнює:

$$\delta \det 1 = \frac{B_1(\det 1)}{B_0(\det 1)}, \quad (1.108)$$

причому

$$B_0(\det 1) = \begin{vmatrix} \bar{y}_0 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\ \bar{y}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\ \bar{y}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\ \bar{y}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3 \end{vmatrix}. \quad (1.109)$$

Користуючись формулами (1.97), (1.107), (1.108), (1.109), отримаємо вираз похибки коефіцієнта a_0 .

Користуючись програмною реалізацією методики, можна отримати шукані a_0, a_1, a_2, a_3 , а також їхні похибки в залежності від похибок $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ в символьному (аналітичному) вигляді. Надавши цим похибкам, а також іншим величинам кількісні значення, отримаємо

кількісні значення a_0 , a_1 , a_2 , a_3 з урахуванням похибок координат вузлових точок.

* * *

Контрольні запитання і завдання

1. Як формулюється задача знаходження коефіцієнтів поліноміальної моделі за результатами експерименту за наявності залежних елементів в матриці системи? Наведіть приклад визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі через визначники системи.

2. Як знайти похибки визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі? Наведіть приклади матриці похибок. Що називають визначником Вандермонда системи?

3. Наведіть приклад, як знайти коефіцієнти апроксимуючого полінома третього порядку залежності, отриманої експериментально. Наведіть матрицю похибок визначника системи та знайдіть похибки визначення коефіцієнтів.

ТЕМА 2. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ В СИМВОЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

Як відомо, визначник матриці n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів матриці в різних неповторюваних поєднаннях.

Число елементів в кожному добутку дорівнює порядку визначника, а число доданків в сумі дорівнює $n!$. Число визначників усіх порядків прирощень, як було показано вище, під час аналізу похибок, дорівнює 2^n .

Таким чином, за повного аналізу структурних схем пристроїв у загальному вигляді число членів, що містять n елементів, дорівнює $M = 2^n \cdot n!$, що становить для визначників високих порядків величезну цифру. Наприклад, для $n = 10$, $M = 2^{10} \times 10! = 3,71589 \times 10^9$, а число символів, що підлягає кодуванню в n разів більше. Якщо використовувати, як це прийнято, для кодування символу один байт, то необхідна пам'ять перевершує $3,7 \times 10^{10}$ байтів. Очевидно, завдання обчислення визначників в аналітичному вигляді складає великі труднощі.

Водночас, матриці, що описують структурні схеми реальних пристроїв, сильно розріджені нулями, тож число ненульових елементів в рядку рідко перевершує два-три елементи. Завдяки цьому число ненульових елементів суми розкритого визначника різко скорочується. Для точного визначення необхідного ресурсу пам'яті, користуючись висновками алгебри Грассмана [17], можна знайти кількість ненульових членів. Доцільно використовувати алгебру Грассмана також для обчислень розріджених нулями визначників в аналітичному вигляді.

Лекція 11. Знаходження визначників розріджених матриць з використанням алгебри Грассмана

Основні аксіоми алгебри Грассмана. Одиниці Грассмана, властивість антикомутативності. Символьне зображення визначника. Дробово-символьний запис визначника. Безпорядок. Алгоритм обчислення визначників з урахуванням алгебри Грассмана. Застосування алгебри Грассмана для знаходження визначників розрідженої матриці. Контрольні запитання і завдання.

За допомогою сучасної термінології, алгебрі Грассмана можна надати наступне визначення: це асоціативна алгебра над полем дійсних чисел, породжена системою елементів $l_1, l_2, \dots, l_n$, що називаються одиницями Грассмана, і яка визначається наступними умовами (властивість антикомутативності):

$$l_k \cdot l_s = -l_s \cdot l_k. \quad (2.1)$$

Звідси випливає

$$\text{при } k = s \quad l_s \cdot l_s = 0 \quad (2.2)$$

Числа Грассмана – це лінійні комбінації породжуючих елементів $l_1, l_2, \dots, l_n$, тобто лінійні форми:

$$x_i = a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{in}l_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}l_j, \quad (2.3)$$

де a_{ij} , – дійсні числа ($a_{ij} \in R$).

Безліч лінійних форм $\{x_k\}$ утворює лінійний простір.

Добуток лінійних форм підпорядковується умові антикомутативності:

$$x_k \cdot x_s = -x_s \cdot x_k, \quad (2.4)$$

з якого випливає:

$$\text{при } k = s \quad x_s \cdot x_s = -x_s \cdot x_s, \text{ тобто } x_s \cdot x_s = 0$$

Іншими словами, добуток чисел Грассмана антикомутативний, а добуток, що містить хоча б два однакових співмножника, дорівнює нулю.

Розглянемо квадратну матрицю A розміром $n \times n$, елементами якої є дійсні числа a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$):

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{n \times n}.$$

Запишемо лінійні форми, що відповідають кожному рядку матриці:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = a_{i1} l_1 + a_{i2} l_2 + a_{ij} l_j + a_{in} l_n; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Перемножимо всі лінійні форми $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$. Отримаємо n^n доданків. Частина доданків стане рівною нулю, оскільки в них увійдуть співмножниками однакові одиниці Грассмана. Можуть бути відмінні від нуля лише ті доданки, які містять тільки різні одиниці $l_1 l_2 \dots l_n$.

Враховуючи властивість антикомутативності, добутку одиниць Грассмана завжди можна надати вигляду:

$$\pm l_1 l_2 \dots l_n.$$

Після зведення подібних членів остаточно матимемо:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \pm D l_1 l_2 \dots l_n.$$

де D – визначник матриці A порядку n :

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|.$$

Приклад 1

Наприклад, для обчислення

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

перемножують лінійні форми, що відповідають рядкам визначника:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}l_1 + a_{12}l_2; \\x_2 &= a_{21}l_1 + a_{22}l_2,\end{aligned}$$

звідки отримують:

$$x_1 \cdot x_2 = a_{11}a_{21}l_1l_1 + a_{11}a_{22}l_1l_2 + a_{12}a_{21}l_2l_1 + a_{12}a_{22}l_2l_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})l_1l_2.$$

Значення виразу $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ є шуканим визначником.

* * *

Для визначення кількості ненульових членів достатньо використовувати тільки властивість $l_s l_s = 0$. Тому для спрощення доцільно покласти всі ненульові елементи перетворюваного визначника рівними одиниці. Тоді спрощені лінійні форми будуть:

$$\{x_i\} = \sum_{j=1}^n l_j, \quad (2.5)$$

а число ненульових членів у сумі розкритого визначника буде дорівнювати числу членів у добутку $\prod_{j=1}^n \{x_i\}$, за вирахуванням членів, у які входить хоча б один добуток виду $l_s l_s$.

Приклад 2

Застосування алгебри Грассмана проілюструємо на прикладі пристрою (рис. 1.9), що описується матричним рівнянням (1.14). Визначник $\det \mathbf{B}$ матиме вигляд:

$$\det 6 = \begin{vmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 6 & 0 & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Спрощена лінійна форма визначника:

$$\begin{aligned} x_1 &= (l_1 + l_6); & x_2 &= (l_1 + l_2); & x_3 &= (l_2 + l_3); \\ x_4 &= (l_1 + l_3 + l_4); & x_5 &= (l_4 + l_5); & x_6 &= (l_2 + l_5). \end{aligned}$$

Добуток спрощених лінійних форм:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^6 \{x_i\} &= (l_1 + l_6)(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)(l_1 + l_3 + l_4) \cdot (l_4 + l_5)(l_2 + l_5) = \\ &= l_6 l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 + l_6 l_1 l_3 l_4 l_5 l_2 + l_6 l_2 l_3 l_1 l_4 l_5. \end{aligned}$$

У підсумку, отримано три ненульових члена. Запис спроститься, якщо у виразі використовувати тільки індекси одиниць Грассмана, вважаючи їх символами.

* * *

Уведемо поняття символного зображення визначника.

Визначення. Символьне зображення визначника – це таке зображення, яке в кожному рядку містить на місці ненульових елементів цифри, рівні номеру стовпця, де розташований даний ненульовий елемент.

Тоді для визначника (2.6) отримаємо:

$$S \det 6 = \prod_{i=1}^6 x_i = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5.$$

Для прикладу наведемо символне зображення визначника $S \det 6$, на якому зображені також траєкторії відбору елементів:

$$S \det 6 = \left| \begin{array}{c|cccccc} & j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline i & 1 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & 2 & & & & \\ & 3 & & 2 & 3 & & & \\ & 4 & 1 & & 3 & 4 & & \\ & 5 & & & & 4 & 5 & \\ & 6 & & 2 & & & 5 & \end{array} \right| \quad (2.7)$$

Для побудови алгоритму перетворення визначника необхідне точне позиціонування кожного елемента, тобто двома індексами, що відповідають координатами клітки матриці. Присвоїмо елементу a_{ij} символ $\frac{i}{j}$, де i – номер рядка, j – номер стовпця.

Уведемо поняття дробово-символьного запису визначника.

Визначення. Дробово-символьний запис визначника – це запис, отриманий як добуток лінійних форм, де кожен елемент позначений як дріб, у чисельнику якого стоїть номер рядка, а в знаменнику – номер стовпця, де розташований даний елемент.

Тоді для визначника (2.6) отримаємо:

$$DS \det 6 = \prod_{i=1}^6 \{x_i\} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{3}\right) \times \left(\frac{4}{1} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{5}\right).$$

Проведемо символні перетворення $DS \det 6$ з урахуванням того, що добуток однакових символів у знаменнику перетворює відповідний доданок в нуль, незалежно від символу в чисельнику, який, як зазначено, позначає номер рядка:

$$DS \det 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}.$$

Як бачимо, після перемноження виходить сума добутків дробово-символьних позначень елементів так, що в чисельнику кожного добутку стоять номери рядків, у знаменнику – стовпців. Зручно, коли в кожному доданку номери рядків розташовані по порядку.

Дробово-символьний запис дозволяє побудувати найбільш короткий алгоритм обчислення визначника.

Перехід від оригінального зображення визначника до символьного позначимо знаком $\overset{\bullet}{\longleftrightarrow}$, а перехід від символьного до оригінального зображення – знаком $\underset{\bullet}{\longleftrightarrow}$, наприклад:

$$\begin{aligned} \det 6 &\overset{\bullet}{\longleftrightarrow} S \det 6, \\ S \det 6 &\underset{\bullet}{\longleftrightarrow} \det 6. \end{aligned} \quad (2.8))$$

Для обчислення доданків розкритого визначника складаються добутки символьних дробів так, що в чисельнику розташовуються в упорядкованому вигляді $(1, 2, 3, \dots, n)$ номери рядків визначника, а в знаменнику номери стовпців, з яких взято ненульовий елемент цього рядка. Відбір елементів йде послідовно з кожного рядка визначника. При цьому в знаменнику не повинно бути повторюваних номерів стовпців визначника, а порядок їхнього розташування виходить довільний, але загальне число номерів дорівнює числу стовпців, тобто порядку визначника. Оскільки відбір елементів відбувається з кліток матриці, зображеної на площині, можна говорити про траєкторії послідовності відбору.

За неможливості закінчити почату послідовність розташування чисел в знаменнику через неминучість появи повторюваного номера стовпця або відсутності ненульових елементів шукається інша траєкторія з неповторюваних номерів стовпців починаючи з рядка, що передує тому, в якому повторився номер стовпця.

Такий перебір відбувається до досягнення всіх можливих перестановок в знаменнику.

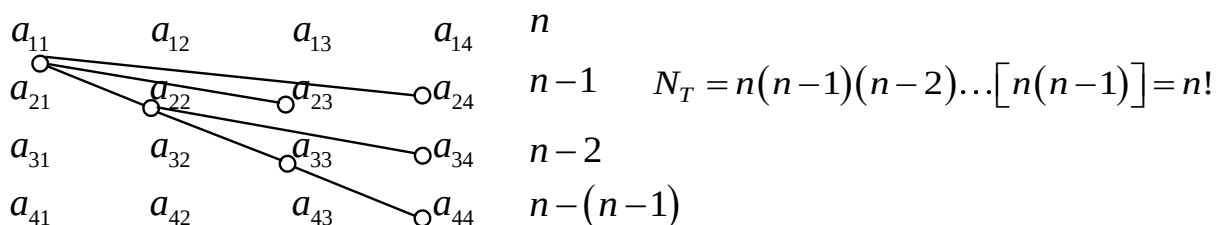
Зауважимо, що дробово-символьний запис вказує на коефіцієнт передачі у відповідних вузлах схеми, тобто

$$\frac{i}{j} \rightarrow \frac{x_i}{x_j} = a_{ij}.$$

За такого підходу стає зрозумілим, чому число доданків розкритого визначника з усіма ненульовими елементами дорівнює $n!$.

Дійсно, з першого рядка може починатися n траєкторій, але через другий рядок можуть пройти від кожного елемента тільки $n-1$ траєкторія, оскільки один елемент першого рядка вже задіяний, через третій рядок від одного елемента першого рядка вже може пройти $n-2$ траєкторій, бо вже будуть задіяні один елемент першого рядка та той елемент другого рядка, що не повторився. Від цього ж елемента першого рядка можуть пройти через четвертий рядок $n-3$ траєкторій і так далі. Тому загальне число траєкторій дорівнює $N_T = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 = n!$

Ілюстрація траєкторій:



Визначник дорівнює, як бачимо, сумі $n!$ членів, що представляють собою добутки елементів визначника по одному з кожного рядка та кожного стовпця, тобто

$$D = \sum_{k=1}^n (-1)^{p_k} \prod_{i,j=1}^n a_{ij},$$

причому в кожному добутку i набирає значення $1, 2, 3, \dots, n$, а j також набирає значення від 1 до n , але порядок розташування значень j в кожному добутку повинен бути неповторюваний. Число ненульових доданків дорівнює числу завершених неповторюваних траєкторій знаменників. Знак перед кожним добутком визначається як $\text{sign}(-1)^{p_k}$, де p_k – число

безпорядків в знаменнику k -го доданка за дробово-символьного запису доданків.

Визначення. *Безпорядок – це подія, за якої в невпорядкованій числовій послідовності старша цифра стоїть перед молодшою.*

Кількість безпорядків p_k – це число старших цифр, розташованих перед молодшими в деякій невпорядкованій числовій послідовності.

Наприклад, для послідовностей:

– 3 2 1 4 5 $p = 3$, оскільки перед 1 стоять 2 і 3, а перед 2 стоїть 3;

– 1 3 2 4 5 $p = 1$, оскільки перед 2 стоїть 3;

– 1 2 3 4 5 $p = 0$, оскільки перед молодшими цифрами не стоять старші цифри;

– 5 4 3 2 1 $p = 10$, оскільки перед 1 стоять 2, 3, 4, 5, перед 2 стоять 3, 4, 5, перед 3 стоять 4, 5, перед 4 стоїть 5.

Число безпорядків дорівнює також мінімальному числу перестановок, які необхідно виконати, щоб досягти заданої впорядкованості.

Під час відбору елементів, починаючи з довільного рядка, знак перед кожним доданком визначається за числом перестановок в знаменнику, необхідних для його упорядкування до виду чисельника.

При цьому шляхи перестановок можуть бути довільними. Неоптимальний шлях завжди більше на $2 \cdot k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) мінімального і не змінює парності або непарності мінімальної кількості перестановок.

У загальному випадку число безпорядків визначається із системи нерівностей, представлених в табл. 2.1, де прийняті такі позначення:

j – цифра в знаменнику (збігається з номером стовпця);

j_i – цифра в знаменнику, взята з i -го рядка (наприклад, 4_3 цифра четвертого стовпця третього рядка);

j_n – остання цифра в знаменнику, тобто взята з останнього рядка (при нормальній впорядкованості чисельника);

n – число рядків; $i < n$.

Якщо взяти цифру з рядка $l \rightarrow j_l$ і порівняти її з цифрою з рядка $i \rightarrow j_i$, причому $l > i$, і результат порівняння, відповідний «менше», позначити одиницею ($C = 1$), а результат порівняння, відповідний «більше», позначити нулем ($C = 0$), тобто якщо $j_l < j_i$, то

$$C(j_l < j_i)_{l>i} = 1, \quad (2.9)$$

якщо $j_l > j_i$, то

$$C(j_l > j_i)_{l>i} = 0, \quad (2.10)$$

отримаємо систему нерівностей, подану в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

$l = n; i < n$	$l = n-1; i < n-1$	$l = n-2; i < n-2$	...	$l = 2; i < 2$
$j_n < j_{n-1} \rightarrow 1$ $j_n > j_{n-1} \rightarrow 0$ $j_n < j_{n-2} \rightarrow 1$ $j_n > j_{n-2} \rightarrow 0$ $j_n < j_{n-3} \rightarrow 1$ $j_n > j_{n-3} \rightarrow 0$ $\vdots$ $j_n < j_2 \rightarrow 1$ $j_n > j_2 \rightarrow 0$ $j_n < j_1 \rightarrow 1$ $j_n > j_1 \rightarrow 0$	$j_{n-1} < j_{n-2} \rightarrow 1$ $j_{n-1} > j_{n-2} \rightarrow 0$ $j_{n-1} < j_{n-3} \rightarrow 1$ $j_{n-1} > j_{n-3} \rightarrow 0$ $\vdots$ $j_{n-1} < j_2 \rightarrow 1$ $j_{n-1} > j_2 \rightarrow 0$ $j_{n-1} < j_1 \rightarrow 1$ $j_{n-1} > j_1 \rightarrow 0$	$j_{n-2} < j_{n-3} \rightarrow 1$ $j_{n-2} > j_{n-3} \rightarrow 0$ $\vdots$ $j_{n-2} < j_2 \rightarrow 1$ $j_{n-2} > j_2 \rightarrow 0$ $j_{n-2} < j_1 \rightarrow 1$ $j_{n-2} > j_1 \rightarrow 0$	...	$j_2 < j_1 \rightarrow 1$ $j_2 > j_1 \rightarrow 0$

Загальна кількість порівнянь для визначення кількості безпорядків кожного доданка визначника n -го порядку дорівнює сумі членів арифметичної прогресії, в якій

$$a_1 = 1, \quad d = 1, \quad a_k = n - 1, \quad k = n - 1.$$

Тоді

$$S_n = kd \frac{a_1 + a_k}{2} = (n - 1) \frac{n}{2}. \quad (2.11)$$

Для визначника п'ятого порядку $S_n = 10$.

З таблиці. 2.1, з огляду на умови (2.9) і (2.10), можна записати:

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} C(j_n \leq j_i) + \sum_{i=1}^{n-2} C(j_{n-1} \leq j_i) + \sum_{i=1}^{n-3} C(j_{n-2} \leq j_i) + \dots + C(j_2 \leq j_1). \quad (2.12)$$

Число сум у виразі (2.12) дорівнює $n - 1$, верхня межа кожної суми на одиницю менше, ніж у попередній сумі, тому в загальному вигляді (2.12) можна записати так:

$$p = \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{i=1}^q C(j_{q+1} \leq j_i). \quad (2.13)$$

Для прикладу обчислимо визначник $S \det 6$ (2.7).

На визначнику (2.7) зображені можливі траєкторії відбору елементів.

Складено дробово-символьний запис:

$$\begin{aligned} DS \det 6 = & \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^{p_1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} (-1)^{p_2} + \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^{p_3}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

На основі системи нерівностей (2.9, 2.10) за формулою (2.13) обчислено число безпорядків p_1 :

$q=1$	$i=1$	$j_2=1$	$j_1=6$	$C(1<6)=1$
$q=2$	$i=1$	$j_3=2$	$j_1=6$	$C(2<6)=1$
$q=2$	$i=2$	$j_3=2$	$j_2=1$	$C(2>1)=0$
$q=3$	$i=1$	$j_4=3$	$j_1=6$	$C(3<6)=1$
$q=3$	$i=2$	$j_4=3$	$j_2=1$	$C(3>1)=0$
$q=3$	$i=3$	$j_4=3$	$j_3=2$	$C(3>2)=0$
$q=4$	$i=1$	$j_5=4$	$j_1=6$	$C(4<6)=1$
$q=4$	$i=2$	$j_5=4$	$j_2=1$	$C(4>1)=0$
$q=4$	$i=3$	$j_5=4$	$j_3=2$	$C(4>2)=0$
$q=4$	$i=4$	$j_5=4$	$j_4=3$	$C(4>3)=0$
$q=5$	$i=1$	$j_6=5$	$j_1=6$	$C(5<6)=1$
$q=5$	$i=2$	$j_6=5$	$j_2=1$	$C(5>1)=0$
$q=5$	$i=3$	$j_6=5$	$j_3=2$	$C(5>2)=0$
$q=5$	$i=4$	$j_6=5$	$j_4=3$	$C(5>3)=0$
$q=5$	$i=5$	$j_6=5$	$j_5=4$	$C(5>4)=0$

$$p_1 = \sum C.$$

Аналогічно знаходимо: $p_2 = 8$, $p_3 = 7$.

Остаточно одержимо:

$$\begin{aligned}
 DS \det 6 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^5 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} (-1)^8 + \\
 &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^7 \xrightarrow{\bullet} \det 6 = -a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{54} \cdot a_{65} + \\
 &+ a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \cdot a_{62} - a_{16} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \cdot a_{54} \cdot a_{65}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, з урахуванням алгебри Грассмана, алгоритм містить насамперед процедуру визначення кількості ненульових членів і потім процедуру символьного обчислення визначників з урахуванням знаків перед доданком шляхом рахунку числа безпорядків в знаменнику.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому дорівнює визначник матриці n -го порядку? Який характер мають матриці, що описують структурні схеми реальних пристроїв? Які переваги дає метод обчислення визначників з використанням апарата алгебри Грассмана для пристроїв з розрідженими матрицями?

2. Наведіть основні аксіоми алгебри Грассмана. Наведіть визначення одиниць Грассмана. Чому дорівнює добуток чисел Грассмана (властивість антикомутативності)? Наведіть визначення через числа Грассмана визначника другого порядку.

3. Як за допомогою алгебри Грассмана знайти визначник розрідженої матриці? Наведіть застосування алгебри Грассмана на прикладі вимірювального підсилювача з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором.

4. Наведіть визначення символного запису визначників та дробово-символьного запису визначників. Наведіть дробово-символьний запис визначника щодо попереднього прикладу. Зробіть перехід від дробово-символьного запису до оригінального зображення визначника.

5. Що є безпорядок в числовій послідовності. Наведіть визначення. Для чого він служить? Наведіть застосування поняття безпорядку щодо попереднього прикладу.

6. Алгоритм обчислення визначників з урахуванням алгебри Грассмана.

Лекція 12. Похідні визначників. Розкладання визначників у ряд

Похідні визначників (постановка задачі, область використання). Похідна визначників з незалежними елементами. Похідна визначників з функціонально пов'язаними елементами. Т-розкладання визначників. Визначник комплексної матриці. Контрольні запитання і завдання.

Якщо елементи квадратної матриці вважати деякими змінними, то її визначник є функцією багатьох змінних

$$D = D(a_{ij}). \quad (2.15)$$

Змінні a_{ij} можуть бути як незалежними, так і функціонально пов'язаними, тобто

$$a_{pq} = \varphi(a_{ij}). \quad (2.16)$$

Наприклад, у визначнику Вандермонда елементи одного рядка пов'язані ступеневою залежністю

$$a_{ij} = (a_i)^j \mid_{j=0, \dots, (n-1)}. \quad (2.17)$$

Поняття похідної визначника не тільки важливе саме по собі, але й необхідне при вирішенні задач оптимізації, для знаходження вихідного опору складних активних електричних кіл, тощо.

Наприклад, вихідний опір активного двополюсника

$$-z_{вих} = \frac{\partial U_{вих}}{\partial I_{вих}} \quad (2.18)$$

і знаходиться тільки при зміні навантаження, тобто

$$-z_{вих} = \frac{\frac{\partial U_{вих}}{\partial z_n}}{\frac{\partial I_{вих}}{\partial z_n}}, \quad (2.19)$$

де z_n – опір навантаження. Знак мінус обумовлений тут тим, що при збільшенні z_n струм зменшується.

Розглянемо похідну визначника з незалежними елементами

$$a_{pq} \neq \varphi(a_{ij}). \quad (2.20)$$

Представляючи визначник як суму добутків усіх елементів a_{ij} певного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення A_{ij} :

$$D = \det[a_{ij}] = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n,$$

та з огляду на те, що алгебраїчне доповнення A_{ij} не містить елемента a_{ij} , отримаємо похідну від $D = D(a_{ij})$ за змінної a_{ij} як похідну від добутку $a_{ij} A_{ij}$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (2.21)$$

де M_{ij} – доповнюючий мінор елемента a_{ij} у визначнику $D_n = \det[a_{ij}]$ n -го порядку, тобто це визначник $n-1$ -го порядку, одержаний з визначника $D_n = \det[a_{ij}]$ викресленням з нього i -го рядка та j -го стовпця.

Розглянемо *похідну визначника з функціонально пов'язаними елементами*. Нехай всі елементи визначника в загальному випадку функціонально пов'язані і є функцією незалежної змінної x , тобто:

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(x). \quad (2.22)$$

Безпосереднє диференціювання досить громіздке, оскільки воно зводиться до диференціювання добутку кількох функцій. Тому для знаходження часткової похідної визначника за певною змінною скористаємося поняттям похідної:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta x}, \quad (2.23)$$

де ΔD – прирощення визначника, викликане прирощенням змінної x .

Як було показано вище (див. (1.38)), прирощення визначника, викликане прирощенням його елементів, дорівнює сумі членів k -го порядку прирощень ($k=1, \dots, n$):

$$\Delta D = \sum_{k=1}^n B_k(D_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k, \quad (2.24)$$

де

$$B_k(D_n) = \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k \quad (2.25)$$

– член k -го порядку прирощення.

Тут $D_{n,l}^k$ – l -й визначник n -го порядку k -го порядку прирощень; D_n^k – визначник n -го порядку, в якому k стовпців замінені прирощеннями відповідних елементів, рівних номінальним (початковим) значенням відповідних елементів; C_n^k – число сполучень з n по k .

Нагадаємо, що член першого порядку прирощень дорівнює:

$$B_1(D_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}. \quad (2.26)$$

Якщо у визначнику D елемент $a_{ij} = \varphi_{ij}(x)$, то прирощення Δa_{ij} можна знайти, скориставшись поданням функції рядом Тейлора:

$$\Delta a_{ij} = \Delta \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} (1/m!) \varphi_{ij}^{(m)}(x_0) \cdot (\Delta x)^m, \quad (2.27)$$

де x_0 – номінальне (початкове) значення змінної x , в межах якого функція розкладається в ряд Тейлора; $\varphi_{ij}^{(m)}(x_0)$ – похідна порядку m функції $\varphi_{ij}(x)$ в точці x_0 .

Приклад 1

Подальший виклад будемо ілюструвати визначником третього порядку, в якому всі елементи залежні, тобто

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \varphi_{13}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \varphi_{23}(x) \\ \varphi_{31}(x) & \varphi_{32}(x) & \varphi_{33}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

Матриця прирощень визначника:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Елементи $\Delta\varphi_{ij}$ знаходяться за формулою (2.27).

Визначник (2.28) дорівнює:

$$D_3 = B_0(D_3) + B_1(D_3) + B_2(D_3) + B_3(D_3), \quad (2.30)$$

де

$$B_0(D_3) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \varphi_{13}(x_0) \\ \varphi_{21}(x_0) & \varphi_{22}(x_0) & \varphi_{23}(x_0) \\ \varphi_{31}(x_0) & \varphi_{32}(x_0) & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix}; \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} B_1(D_3) = & \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \varphi_{12}(x_0) & \varphi_{13}(x_0) \\ \Delta\varphi_{21} & \varphi_{22}(x_0) & \varphi_{23}(x_0) \\ \Delta\varphi_{31} & \varphi_{32}(x_0) & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \Delta\varphi_{12} & \varphi_{13}(x_0) \\ \varphi_{21}(x_0) & \Delta\varphi_{22} & \varphi_{23}(x_0) \\ \varphi_{31}(x_0) & \Delta\varphi_{32} & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \Delta\varphi_{13} \\ \varphi_{21}(x_0) & \varphi_{22}(x_0) & \Delta\varphi_{23} \\ \varphi_{31}(x_0) & \varphi_{32}(x_0) & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Узагальнений вираз для $B_1(D_n)$ на основі (2.26) матиме вигляд:

$$B_1(D_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{ij} A_{ij}. \quad (2.33)$$

Член другого порядку прирощень для визначника (2.28) дорівнює:

$$\begin{aligned}
 B_2(D_3) = & \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \varphi_{13}(x_0) \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \varphi_{23}(x_0) \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \varphi_{12}(x_0) & \Delta\varphi_{13} \\ \Delta\varphi_{21} & \varphi_{22}(x_0) & \Delta\varphi_{23} \\ \Delta\varphi_{31} & \varphi_{32}(x_0) & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} \\ \varphi_{21}(x_0) & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} \\ \varphi_{31}(x_0) & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \quad (2.34)$$

* * *

У загальному вигляді вираз (2.34) може бути представлено як сума добутків двох різних прирощень і відповідних алгебраїчних доповнень другого порядку. Число доданків в сумі $n(n-1) \cdot C_n^2$, тобто

$$B_2(D_n) = \sum_{l=1}^{n(n-1)C_n^2} \Delta\varphi_{ij} \Delta\varphi_{pq} \bar{A}_{ij,pq}, \quad (2.35)$$

де $\bar{A}_{ij,pq}$ – алгебраїчне доповнення другого порядку, що складається з номінальних значень елементів.

Член третього порядку прирощень у визначнику (2.28) дорівнює матриці прирощень.

У загальному випадку член k -го порядку прирощень складається із суми добутків k прирощень на алгебраїчне доповнення k -го порядку.

Алгебраїчне доповнення k -го порядку – це визначник, який утворюється з початкового визначника послідовним викреслюванням k стовпців і k рядків, в яких розташовані k елементів.

Число доданків в сумі дорівнює:

$$n(n-1) \dots (n+1-k) C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} C_n^k. \quad (2.36)$$

Вираз для $B_k(D_n)$ має вигляд:

$$B_k(D_n) = \sum_{l=1}^{\frac{n!}{(n-k)!} C_n^k} \bar{A}_n^k \prod \Delta\varphi_{i,j}, \quad (2.37)$$

де $\bar{A}_n^k$ – алгебраїчне доповнення k -го порядку прирощень визначника n -го порядку.

Враховуючи те, що межа суми дорівнює сумі меж, з (2.23) і (2.24), отримаємо:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^4 B_k(D_3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_1(D_3)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_2(D_3)}{\Delta x} + \dots \quad (2.38)$$

Знайдемо границі для доданків при $k=1, 2, \dots, n$. Оскільки границя добутку функції на сталу дорівнює добутку границі функції на цю сталу, із (2.33) і (2.27) отримаємо границю:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_1(D_n)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta \varphi_{ij} \bar{A}_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi_{ij}^{(m)}(x_0) (\Delta x)^m \right] \bar{A}_{ij}}{\Delta x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Залежність (2.39) може бути отримана і простіше, якщо врахувати, що за визначенням

$$\varphi'_{ij}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_{ij}}{\Delta x}, \quad (2.40)$$

члени другого і вищих порядків прирощень, як впливає з (2.35) і (2.37), містять добутки прирощень, тому з урахуванням (2.27) при $k \geq 2$ маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_k(D_n)}{\Delta x} \Big|_{k \geq 2} = 0, \quad (2.41)$$

оскільки при $m \geq 2$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^m}{\Delta x} = 0. \quad (2.42)$$

Таким чином, похідна визначника, що містить функціонально пов'язані елементи, дорівнює сумі добутків похідних функціонально пов'язаних елементів на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \phi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij} , \quad (2.43)$$

де $\bar{A}_{ij}$ – номінальні значення алгебраїчного доповнення.

Звісно, доданки, що містять незалежні елементи, дорівнюють нулю, оскільки дорівнюють нулю похідні від незалежних величин.

З (2.43) видно, що похідна порядку m при залежних елементах дорівнює:

$$\frac{\partial^m D}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \phi_{ij}^{(m)}(x_0) \bar{A}_{ij} . \quad (2.44)$$

Т-розкладання визначників

Якщо елементи квадратної матриці вважати деякими змінними, то її визначник є функцією багатьох змінних і може бути представлений рядом Тейлора в межах певних початкових значень змінних a_{ij} .

Як відомо, подання функції багатьох змінних рядом Тейлора в загальному випадку передбачає отримання часткових похідних першого і більш високих порядків вихідної функції, а також змішаних похідних різних порядків.

Оскільки розкритий визначник при незалежних елементах є лінійною комбінацією своїх елементів, то в наборі похідних будуть відсутні похідні по одній змінній вище першого порядку й будуть присутніми похідні першого порядку та змішані похідні вищих порядків. Максимальний порядок похідних дорівнює порядку визначника.

Вище було отримано розкладання визначника на суму визначників k -го порядку прирощень ($k = 0, \dots, n$). Назвемо це розкладання Т-розкладанням визначника. З порівняння Т-розкладання з розкладанням визначника як функції багатьох змінних в ряд Тейлора можна зробити висновок, що форми розкладань збігатимуться, а саме: визначник нульового порядку прирощень $k = 0$ є початковим значенням функції. Наступні члени є добутками прирощень змінних на постійні коефіцієнти. У розкладанні

Тейлора ці коефіцієнти є частковими похідними, діленими на $k!$, де k – порядок похідної, і мають вигляд

$$\frac{1}{1!} \frac{\partial F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij}}; \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}}; \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \partial a_{kl} \partial a_{pq}} \dots; \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \dots \partial a_{mn}}.$$

У Т-розкладанні коефіцієнти є алгебраїчним доповненням k -го порядку ($k = 0, \dots, n$).

Під алгебраїчним доповненням k -го порядку будемо розуміти визначник, який залишається після послідовного викреслювання рядків і стовпців з елементами визначника у вигляді прирощень, які входять у добуток, утворюючи елемент k -го порядку прирощень.

Прирівнюючи коефіцієнти ряду Тейлора та Т-розкладання, приходимо до висновку, що похідна k -го порядку визначника як функція своїх елементів дорівнює алгебраїчному доповненню k -го порядку, помноженому на $k!$.

Якщо елементи визначника функціонально пов'язані, то в розкладанні будуть також похідні вищих порядків за даною змінною, коли існують вищі похідні даного елемента. Для знаходження вищих похідних однієї змінної та знаходження змішаних похідних необхідно користуватися формулою (2.44).

Визначник комплексної матриці

Матриця $\dot{C}$, елементи якої є комплексними величинами

$$c_{ij} = a_{ij} + jb_{ij},$$

є сумою двох матриць – матриці A , елементами якої є дійсні частини елементів матриці $\dot{C}$, тобто a_{ij} , і матриці $\dot{B}$, елементами якої є уявні частини елементів матриці $\dot{C}$, тобто jb_{ij} :

$$\dot{C} = A(a_{ij}) + \dot{B}(jb_{ij}).$$

Використовуючи теорему про визначник суми двох матриць в термінах, прийнятих в Т-розкладанні визначника, отримаємо:

$$\dot{D}_{\dot{C}} = \sum_{k=0}^n (j)^k \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k, \quad k \leq n.$$

Визначення. Уведемо поняття визначника n -го порядку уявності $\dot{D}_n^k$ – визначник, в якому елементи k стовпців є уявними частинами елементів матриці $\dot{C}$, тобто jb_{ij} , а $n-k$ стовпців дійсними частинами елементів стовпців матриці $\dot{C}$, тобто a_{ij} .

Використовуючи властивість загального множника елементів стовпця (рядка) можна записати:

$$\dot{D}_n^k = (j)^k D_n^k,$$

де $\dot{D}_n^k$ – визначник, що містить k стовпців елементів b_{ij} і $n-k$ стовпців елементів a_{ij} .

Враховуючи властивість ступенів числа j , отримаємо:

$$\dot{D}_{\dot{C}} = \operatorname{Re}(\dot{D}_{\dot{C}}) + j \operatorname{Im}(\dot{D}_{\dot{C}}),$$

де

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\dot{D}_{\dot{C}}) &= \sum_{k=0,4,8,\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k - \sum_{k=2,6,10,\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k; \\ \operatorname{Im}(\dot{D}_{\dot{C}}) &= \sum_{k=1,5,9,\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k - \sum_{k=3,7,11,\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k. \end{aligned}$$

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклад визначників з залежними елементами. При рішенні яких задач важливим є поняття похідної визначника? Наведіть приклади.
2. Як визначити похідну визначника з незалежними елементами? Наведіть приклад.

3. Як визначити похідну визначника з функціонально пов'язаними елементами? У чому складність? Як формулюється задача визначення часткової похідної визначника через його прирощення, яке викликано прирощенням змінної?

4. Чому дорівнює прирощення визначника, викликане прирощенням його елементів? Наведіть на прикладі визначника третього порядку, в якому всі елементи залежні.

5. Наведіть вираз першої похідної визначника, що містить функціонально пов'язані елементи. Одержіть вираз для похідної m -го порядку при залежних елементах.

6. Наведіть розкладання в ряд Тейлора функцій багатьох змінних. Наведіть розкладання визначників в ряд Тейлора, якщо елементи квадратної матриці вважати деякими змінними.

7. Наведіть, чому дорівнює визначник матриці з комплексними величинами.

ТЕМА 3. ВИЗНАЧНИКИ ТА АВТОМАТИЗОВАНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Завданням розрахунку електричних кіл є визначення струмів у гілках і потенціалів у вузлах при заданих опорах гілок.

Для аналізу роботи кола, оптимізації режимів, визначення чутливості до зміни окремих гілок і джерел необхідно використовувати аналітичні співвідношення, що визначають стан кола в загальному вигляді.

Електричні кола повністю описуються законом Ома, першим і другим законами Кірхгофа, на основі яких складаються системи рівнянь стану кола.

У зв'язку з тим, що точність обчислень під час вирішення системи рівнянь високих порядків була незадовільною через нагромадження похибок, теоретичні основи електротехніки розвивалися шляхом скорочення числа рівнянь, пошуку найбільш короткого шляху визначення стану даної ділянки кола. На цьому етапі були запропоновані методи перетворення кіл із зменшенням числа вузлів і контурів (наприклад, перетворення зірки в трикутник і трикутника в зірку). Використовувалися принцип накладання, метод холостого ходу і короткого замикання, властивість взаємності, метод вузлових потенціалів для рішення відносно потенціалів необхідних вузлів, метод контурних струмів. Щоб не було сумніву в правильності рішення, широко використовувався критерій балансу потужностей. Згодом велике поширення отримали топологічні методи дослідження кіл, істотно спростили завдання аналізу та синтезу завдяки більшій формалізації всіх процедур.

Лекція 13. Матричний метод аналізу. Приклади практичного аналізу вимірювальних пристроїв з використанням визначників

Приклади практичного аналізу вимірювальних пристроїв з використанням визначників матричних рівнянь. Підсилювач з послідовним зворотним зв'язком. Матричне рівняння. Коефіцієнт підсилення через відношення визначників. Відносна похибка коефіцієнту через матриці похибок визначників. Вихідний опір електричного кола з активними елементами. Підсилювач з послідовним зворотним зв'язком за напругою. Підсилювач з послідовним зворотним зв'язком за струмом. Матричні рівняння підсилювачів. Вихідний опір через визначники матриц. Контрольні запитання і завдання.

Наведемо приклади практичного аналізу вимірювальних пристроїв з використанням визначників матричних рівнянь.

Приклад 1

Знайдемо коефіцієнт підсилення схеми підсилювача з послідовним зворотним зв'язком (рис. 3.1).

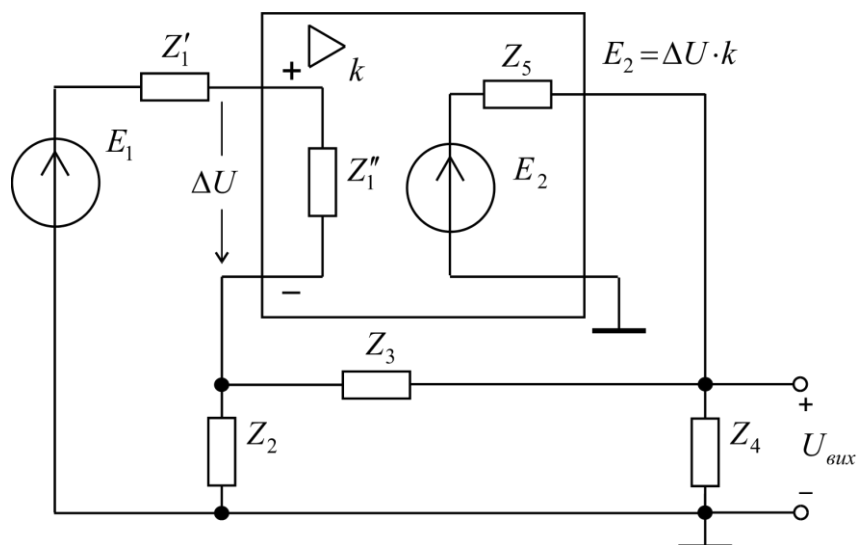


Рисунок 3.1 – Схема підсилювача з послідовним зворотним зв'язком

Врахуємо вхідний і вихідний опір операційного підсилювача (ОП), а також джерела сигналу.

На схемі показано: Z_1' – внутрішній опір джерела сигналу; Z_1'' – вхідний опір ОП; Z_2 , Z_3 – опори кола зворотного зв'язку; Z_4 – опір навантаження; Z_5 – вихідний опір ОП; E_2 – джерело вихідної напруги ОП; I_1 – вхідний струм ОП; k – коефіцієнт підсилення ОП за напругою.

Позначимо $Z_1' + Z_1'' = Z_1$. Еквівалентна схема подана на рис. 3.2. Тут показані три контури і два вузли, одне незалежне джерело E_1 і одне залежне джерело $E_2 = \Delta U \cdot k = Z_1'' I_1 \cdot k$. Тому відносно струмів гілок схема описується системою з п'яти рівнянь.

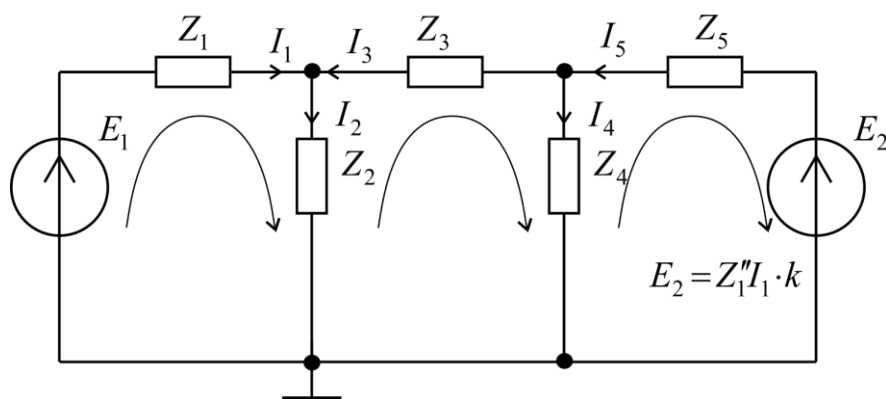


Рисунок 3.2 – Еквівалентна схема підсилювача з послідовним ВЗЗ

Візьмемо в якості додатного напрямку струмів до вузла, від'ємного – від вузла, також обхід контурів за годинниковою стрілкою. У разі збігу напрямку струму в гілці і напрямку обходу контуру напруга на відповідній ділянці кола береться зі знаком «+» в лівій частині рівняння. У разі збігу напрямку джерела та напрямку обходу ставиться знак «+», якщо джерело записується в праву частину рівняння.

Враховуючи прийняті умови складемо систему рівнянь відносно струмів гілок:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Z_1 I_1 + Z_2 I_2 & & = E_1; \\ I_1 - I_2 + I_3 & & = 0; \\ & - I_3 - I_4 + I_5 & = 0; \\ - Z_2 I_2 - Z_3 I_3 + Z_4 I_4 & & = 0; \\ & - Z_4 I_4 - Z_5 I_5 & = -E_2, \end{array} \right.$$

або, з урахуванням залежного джерела $E_2 = \Delta U \cdot k = Z_1'' I_1 \cdot k$, одержимо систему:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Z_1 I_1 & + & Z_2 I_2 & = & E_1; \\ I_1 & - & I_2 & + & I_3 & = & 0; \\ & & & - & I_3 & - & I_4 & + & I_5 & = & 0; \\ & & - & Z_2 I_2 & - & Z_3 I_3 & + & Z_4 I_4 & = & 0; \\ Z_1'' k I_1 & & & & - & Z_4 I_4 & - & Z_5 I_5 & = & 0. \end{array} \right.$$

Складемо матричне рівняння, мінімізуючи при цьому кількість знаків "-" з метою скорочення числа символів:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1'' k & & & Z_4 & Z_5 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} I_i \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

$\uparrow$
Матриця коефіцієнтів

$\uparrow$
Матриця-
стовпець
струмів

$\uparrow$
Матриця-
стовпець
незалежн
их е.р.с.

Знайдемо коефіцієнт перетворення вхідної напруги E_1 у вихідну напругу

$$U_{вих} = Z_4 I_4:$$

$$k_{41} = \frac{Z_4 I_4}{E_1}. \quad (3.2)$$

Струм дорівнює:

$$I_4 = \frac{\det 4}{\det C}, \quad (3.3)$$

де $\det C$ – визначник системи (матриці коефіцієнтів); $\det 4$ – визначник матриці коефіцієнтів, в якому четвертий стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин рівняння (3.1). Із (3.2) і (3.3) одержимо:

$$k_{41} = \frac{\det 4}{\det C} \cdot \frac{Z_4}{E_1}, \quad (3.4)$$

$$k_{41} = \frac{(Z_2 Z_5 + Z_3 Z_1'' k + Z_2 Z_1'' k) Z_4}{Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_1'' k}, \quad (3.5)$$

де

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k_{41} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}.$$

Формула (3.4) спроститься, якщо $\det 4$ розкласти відносно елемента $a_{14} = E_1$.

Тоді

$$\det 4 = E_1 A_{14} = E_1 (-1)^{1+4} M_{14}. \quad (3.6)$$

Не порушуючи нумерацію елементів визначника, запишемо:

$$M_{14} = \begin{vmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \\ 3 & & & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & \\ 5 & -Z_1'' k & & & Z_5 \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) в (3.4), отримаємо:

$$k_{41} = \frac{(-1)^5 \cdot M_{14} \cdot Z_4}{\det C}. \quad (3.8)$$

* * *

Приклад 2

Відносна похибка k_{41} дорівнює:

$$\begin{aligned} \delta(k_{41}) &= \frac{\delta(M_{14} Z_4) - \delta(\det C)}{1 + \delta(\det C)} = \\ &= \frac{\delta(M_{14}) + \delta(Z_4) + \delta(M_{14}) \delta(Z_4) - \delta(\det C)}{1 + \delta(\det C)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для знаходження відносних похибок визначників необхідно скласти матриці похибок визначників:

$$\left[\Delta_{M_{14}} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline 3 & & & & \\ \hline 4 & & \Delta Z_2 & \Delta Z_3 & \\ \hline 5 & -\Delta(Z_1''k) & & & \Delta Z_5 \end{array} \right]; \quad (3.10)$$

$$\left[\Delta_{\det C} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \Delta Z_1 & \Delta Z_2 & & & \\ \hline 2 & & & & & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline 4 & & \Delta Z_2 & \Delta Z_3 & -\Delta Z_4 & \\ \hline 5 & \Delta(Z_1''k) & & & \Delta Z_4 & \Delta Z_5 \end{array} \right]. \quad (3.11)$$

Знайдемо похибки з урахуванням величин першого порядку малості:

$$B_1(M_{14}) = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & -1 & 1 & \\ \hline 3 & & & 1 & -1 \\ \hline 4 & & Z_2 & Z_3 & \\ \hline 5 & -\Delta(Z_1''k) & & & Z_5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & & 1 & \\ \hline 3 & & & 1 & -1 \\ \hline 4 & & \Delta Z_2 & Z_3 & \\ \hline 5 & -Z_1''k & & & Z_5 \end{array} \right| +$$

$$+ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & -1 & & \\ \hline 3 & & & & -1 \\ \hline 4 & & Z_2 & \Delta Z_3 & \\ \hline 5 & -Z_1''k & & & Z_5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline 3 & & & 1 & \\ \hline 4 & & Z_2 & Z_3 & \\ \hline 5 & -Z_1''k & & & \Delta Z_5 \end{array} \right|; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
 & B_1(M_{14}) = \\
 & = (-1)^{4+1} (-\Delta Z_1'' k) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ Z_2 & Z_3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \Delta Z_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -Z_1'' k & 0 & Z_5 \end{vmatrix} + \\
 & + (-1)^{3+3} \Delta Z_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -Z_1'' k & 0 & Z_5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \Delta Z_5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \\
 & = \Delta Z_1'' k (Z_3 - Z_2) - \Delta Z_2 (Z_5 - Z_1'' k) + \Delta Z_3 Z_1'' k - \Delta Z_5 Z_2 ;
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\delta_1(M_{14}) = \frac{B_1(M_{14})}{\bar{M}_{14}}. \tag{3.14}$$

Абсолютна похибка першого порядку малості визначника системи:

$$\begin{aligned}
 B_1(\det C) = & \begin{vmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \Delta Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -\Delta(Z_1'' k) & & & Z_4 & Z_5 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & \Delta Z_2 & & & \\ 2 & 1 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & \Delta Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1'' k & & & Z_4 & Z_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & & & \\ 3 & & & & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & \Delta Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1'' k & & & Z_4 & Z_5 \end{vmatrix} + \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -\Delta Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & \Delta Z_4 & Z_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_4 & \Delta Z_5 \end{vmatrix}.$$

Відносна похибка $\det C$ дорівнює:

$$\delta_1(\det C) = \frac{B_1(\det C)}{\det \bar{C}}, \quad (3.16)$$

де $\det \bar{C}$ – номінальне значення визначника системи.

Підставляючи (3.14) і (3.16) в (3.9), отримаємо вираз похибки в першому наближенні.

Для отримання похибки в другому наближенні необхідно знайти члени другого порядку наближень B_2 шляхом заміни у визначниках номінальних значень двох стовпців стовпцями матриці прирощень.

За необхідності врахування похибок більш високих порядків потрібно врахувати члени вищих порядків прирощень.

* * *

Вихідний опір ділянки електричного кола

Вихідний опір ділянки електричного кола дорівнює похідній вихідної напруги по струму навантаження і може бути визначений тільки в разі зміни навантаження, тобто

$$-Z_{вих} = \frac{\partial U_{вих}}{\partial I_{вих}} = \frac{\frac{\partial U_{вих}}{\partial Z_n}}{\frac{\partial I_{вих}}{\partial Z_n}}. \quad (3.17)$$

Знак «—» перед $Z_{вих}$ обумовлений тим, що при збільшенні Z_n струм зменшується.

У простих випадках це очевидні співвідношення, а в більш складних, наприклад в пристроях зі зворотним зв'язком, вихідний опір визначається шляхом перетворення кола або застосуванням формули (3.17).

Зауважимо, що опір електричного кола між певними двома точками є тим же самим опором, незалежно від того, споживає схема енергію, або віддає її. Тому вихідний опір між певними двома точками дорівнює вхідному, якщо дана ділянка кола є приймачем.

Як впливає з формули (3.17), для визначення вихідного опору необхідно знайти похідні напруги та струму гілки з опору даної гілки. Якщо напруга й струм задані в матричній формі, то слід обчислити похідні визначників. Тоді отримаємо вираз для вихідного опору для випадку, коли вихідні напруги й струм є рішеннями матричного рівняння.

За законом Ома

$$U_{вих} = I_{вих} Z_H, \quad (3.18)$$

де Z_H – опір навантаження.

У вигляді матричного запису

$$U_{вих} = \frac{\det I_H}{\det C} Z_H. \quad (3.19)$$

Тут і надалі

$$I_H = I_{вих}.$$

До речі, у прикладі 1 були такі позначення $I_H = I_{вих} = I_4$, $U_{вих} = I_4 Z_4$,

$$I_4 = \frac{\det 4}{\det C}, \quad U_{вих} = \frac{\det I_4}{\det C} Z_4.$$

Підставимо (3.19) в (3.17):

$$-Z_{вих} = \frac{\frac{\partial}{\partial Z_H} \left(\frac{\det I_H}{\det C} Z_H \right)}{\frac{\partial}{\partial Z_H} \left(\frac{\det I_H}{\det C} \right)}.$$

Після перетворень отримаємо:

$$Z_{вух} = \frac{\det I_n \cdot \det C}{\det I_n \cdot \det' C - \det' I_n \cdot \det C} - Z_n. \quad (3.20)$$

Нагадаємо, що

$$\begin{cases} \det' I_n = \frac{\partial \det I_n}{\partial Z_n}; \\ \det' C = \frac{\partial \det C}{\partial Z_n}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Зазвичай, елементи, що містять Z_n , розташовані в стовпці, відповідному I_n , оскільки в рівняннях контурних струмів спад напруги на гілці навантаження дорівнює $I_n \cdot Z_n$.

У цих випадках $\det I_n$ не містить Z_n , отже, маємо:

$$\det' I_n = 0.$$

Тому формула (3.20) спрощується:

$$Z_{вух} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n. \quad (3.22)$$

Нерідко вираз (3.22) може бути далі спрощено, якщо $\det C$ розкласти за елементами стовпця, що містить Z_n :

$$Z_{вух} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{in}(Z_{in}) A_{in}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \phi'_{in}(Z_{nn}) A_{in}} - Z_n \quad (3.23)$$

де $\phi_{in}(Z_n)$ – елемент, що містить Z_n ; A_{in} – відповідне ϕ_{in} алгебраїчне доповнення; Z_{nn} – номінальне значення Z_n .

Для забезпечення автоматизованого перетворення формули (3.20) в символьному вигляді бажано операції перемноження та диференціювання також подати у вигляді визначників.

У зв'язку з цим нагадаємо, що добутком визначників A і B порядку m та n є визначник порядку $m+n$, в якому перший визначник доповнюється другим визначником так, щоб його головна діагональ була подовженням головної діагоналі першого, а вільні клітки визначника добутку (порядок $m+n$) поза межами визначників співмножників заповнюються нулями. Аналогічно цьому можна отримати визначник добутку будь якої кількості визначників будь яких порядків.

Розглянемо, наприклад, добуток визначників четвертого та другого порядків:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$C = A \cdot B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Похідна визначника при залежних елементах, як показано в п. 2.2, є сумою алгебраїчних доповнень, помножених на похідні відповідних їм мінорів – елементів визначника, тобто похідна визначника – це сума визначників, порядок яких на одиницю менше, ніж порядок диференційованого визначника, помножених на похідну відповідного елемента:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij}. \quad (3.25)$$

Таким чином, процедура знаходження вихідного опору зводиться до операцій над визначниками, які в свою чергу утворюють нові визначники. Тому визначення вихідного опору також легко піддається автоматизації обчислення в символьному вигляді. Проілюструємо викладене декількома прикладами.

Приклад 3

Знайти вихідний опір кола між точками 3 – 0 включення опору Z_4 .

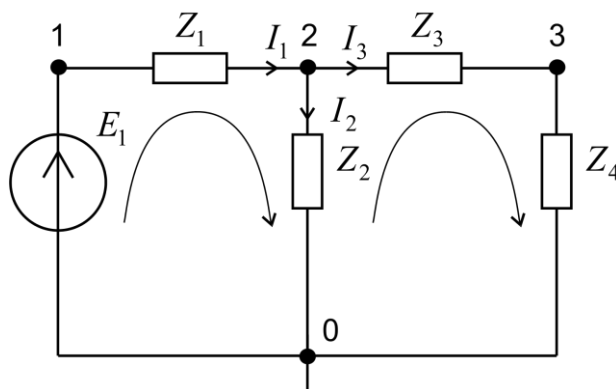


Рисунок 3.3 – Електричне коло з двома контурами

На схемі Z_4 – опір навантаження. Отже, $Z_4 = Z_n$, $I_n = I_3$.

Матричне рівняння, що описує схему на рис. 3.3, наступне:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -Z_2 & Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Враховуючи, що $\det' I_n = 0$, вираз $Z_{вих}$ можна отримати за формулою (3.22):

$$Z_{вих} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.27)$$

* * *

Приклад 4

Визначити вихідний опір підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за напругою (рис. 3.4).

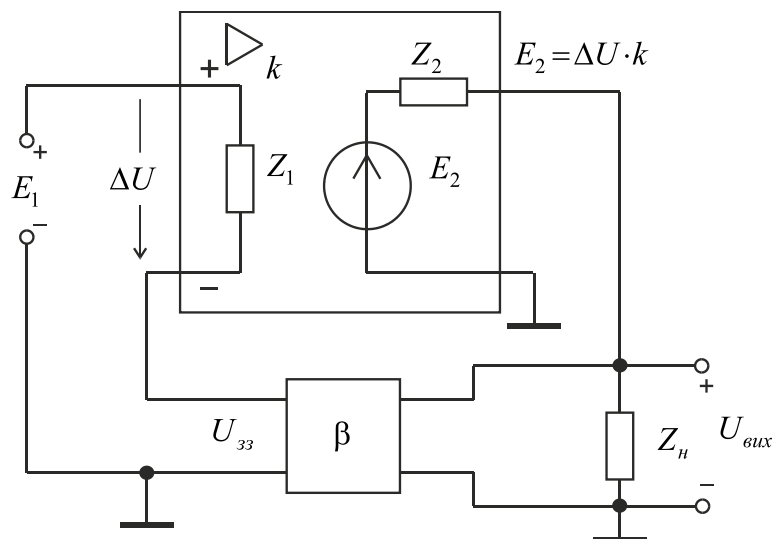


Рисунок 3.4 – Схема підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за напругою

З метою спрощення зробимо припущення, що вихідний опір джерела сигналу E_1 дорівнює нулю, вихідний опір блоку зворотного зв'язку β дорівнює нулю, вхідний опір блоку зворотного зв'язку дорівнює нескінченності. Еквівалентну схему підсилювача зображено на рис. 3.5.

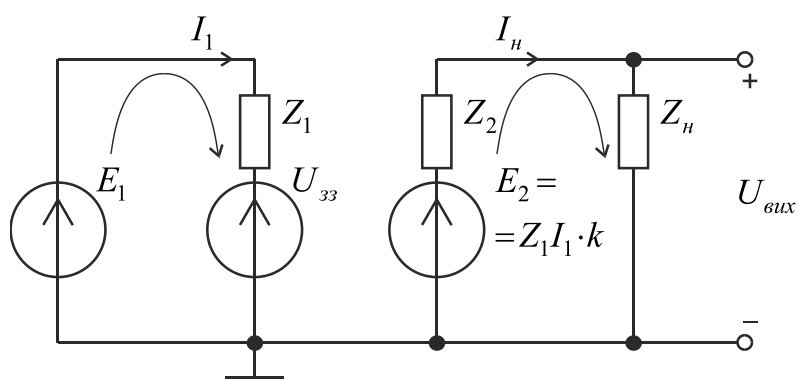


Рисунок 3.5 – Еквівалентна схема підсилювача рис. 3.4

Ураховуючи $E_2 = kI_1Z_1$, $U_{зз} = \beta I_n Z_H$, дістанемо наступні матричні рівняння, що описують еквівалентну схему:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_n \beta \\ -Z_1 k & Z_2 + Z_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.28)$$

$$\det I_n = \begin{vmatrix} Z_1 & E_1 \\ -Z_1 k & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.29)$$

Як бачимо, $\det I_n$ не залежить від Z_n , тому $\det' I_n = 0$ і вихідний опір слід обчислювати за формулою (3.22), тобто $Z_{вих} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n$.

З (3.28) маємо:

$$\det C = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_n \beta \\ -Z_1 k & Z_2 + Z_n \end{vmatrix}. \quad (3.30)$$

Відповідно до (3.25), дістанемо:

$$\det' C = Z_1 + Z_1 k \beta = Z_1 (1 + k \beta). \quad (3.31)$$

Підставляючи (3.30) і (3.31) в (3.22), одержимо:

$$\begin{aligned} Z_{вих} &= \frac{Z_1 (Z_2 + Z_n) + Z_1 Z_n k \beta}{Z_1 (1 + k \beta)} - Z_n = \\ &= \frac{Z_2 + Z_n + Z_n k \beta - Z_n - Z_n k \beta}{1 + k \beta} = \\ &= \frac{Z_2}{1 + k \beta}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

де Z_2 – вихідний опір операційного підсилювача.

* * *

Приклад 5

Знайти вихідний опір підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за струмом (рис. 3.6).

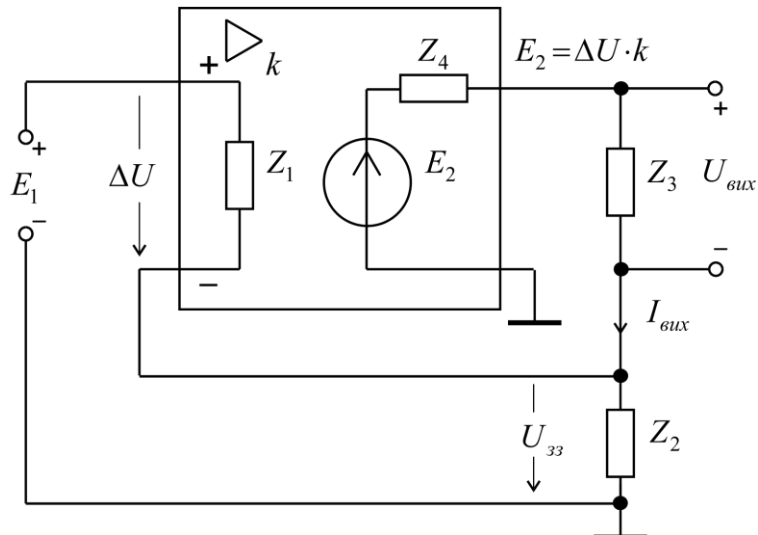


Рисунок 3.6 – Схема підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за струмом

Еквівалентну схему підсилювача наведено на рис. 3.7.

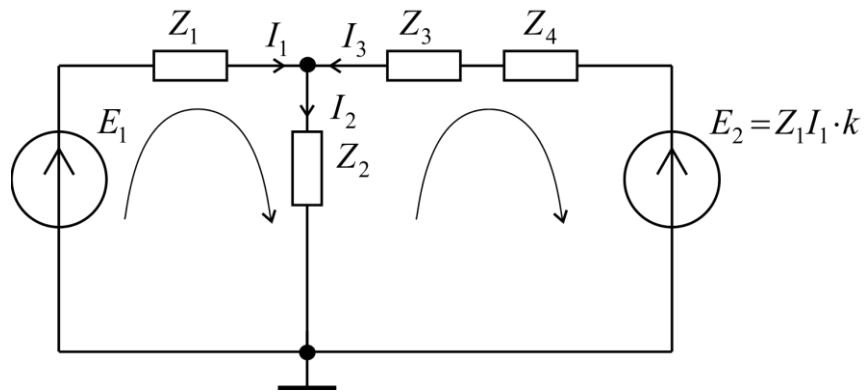


Рисунок 3.7 – Еквівалентна схема підсилювача рис. 3.6

На схемі позначено: Z_3 – опір навантаження, тобто $Z_n = Z_3$, $I_n = I_{\text{вих}} = I_3$. Вихідний опір підсилювача зі зворотним зв'язком $Z_{\text{вих}}$ шукаємо як опір між точками включення до схеми Z_3 . $E_2 = \Delta U \cdot k = Z_1 I_1 \cdot k$ – залежне джерело.

Матричне рівняння кола:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -Z_1 k & Z_2 & Z_n + Z_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Визначник $\det I_n$:

$$\det I_n = \det Z = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & E_1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -Z_1 k & Z_2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.34)$$

Визначник $\det I_n$ не залежить від Z_1 , тому $\det' I_n = 0$. Вихідний опір слід обчислювати за формулою (3.22).

З (3.33) маємо:

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -Z_1 k & Z_2 & Z_n + Z_4 \end{vmatrix} = \\ &= (Z_n + Z_4)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_1 k & Z_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Відповідно до (3.25), одержимо:

$$\det' C = \frac{\partial \det C}{\partial Z_n} = -Z_1 - Z_2. \quad (3.36)$$

Тоді

$$Z_{\text{вих}} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n = Z_4 + Z_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (1 + k). \quad (3.37)$$

Якщо $Z_1 \gg Z_2$, то матимемо:

$$Z_{\text{вих}} \approx Z_4 + Z_2 (1 + k). \quad (3.38)$$

* * *

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть схему еквівалентну заміщення підсилювача з послідовним зворотним зв'язком з урахуванням вхідного та вихідного опорів. Складіть систему рівнянь у матричній формі, знайдіть коефіцієнт перетворення вхідної напруги у вихідну через відношення визначників матриці коефіцієнтів і системи.

2. Чому дорівнює відносна похибка коефіцієнта перетворення для попереднього приладу? Складіть матриці похибок визначників схеми підсилювача з послідовним зворотним зв'язком через похибки окремих елементів схеми. Знайдіть відносну похибку коефіцієнту перетворення через визначники матриць похибок.

3. Поясніть сутність методу визначення опору відносно окремих ділянок, вхідного (вихідного) опору електричних схем з активними елементами, на відмінність від пасивних кіл. Чому дорівнює вихідний опір ділянки електричного кола з активними елементами? Знайдіть вихідний опір ділянки електричного кола, що містить активні елементи, через похідні напруги та струму гілки, відносно якої визначається опір, якщо напруга й струм задані в матричній формі.

4. Знайдіть вихідний опір ділянки електричного кола з двома контурами через визначники матричного рівняння.

5. Складіть еквівалентну схему підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за напругою та знайдіть вихідний опір через визначники матричного рівняння.

6. Складіть еквівалентну схему підсилювача з послідовним зворотним зв'язком за струмом та знайдіть вихідний опір через визначники матричного рівняння.

ТЕМА 4. ПРОЕКТУВАННЯ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ

Вимірювальний пристрій описується рівнянням вимірювання, що встановлює зв'язок вимірюваної та вихідної величин.

Ідеалізоване рівняння вимірювання прямопоказуючих приладів (цифрових і з градуйованими шкалами), незалежно від наявності або відсутності нелінійних і функціональних перетворень блоками приладу, є рівнянням прямої $Y = X$.

У загальному випадку похибки вимірювального пристрою не відомі, як і похибки, що вносяться неінформативними параметрами сигналу. Тому рівняння вимірювання, крім невідомої вимірюваної величини, містить додаткові невідомі, які можуть бути деталізовані або представлені багатовимірним вектором, що входить до складу функції перетворення вимірювального пристрою, унаслідок чого реальна функція перетворення також виявляється невідомою.

Інакше кажучи, відомі тільки вихідна величина вимірювального пристрою та номінальна функція перетворення, а реальна функція перетворення та вимірювана величина залишаються невідомими. Вимірювальна задача підвищення точності в загальному вигляді може ставитися як задача точного визначення реальної функції перетворення або як задача виключення функції перетворення.

Точне рішення можна отримати при наявності додаткових рівнянь, якщо загальне число основного та додаткових рівнянь дорівнює числу невідомих. В іншому разі можливе рішення тільки відносно комбінації невідомих.

Лекція 14. Методи корекції похибок вимірювальних пристроїв.

Алгоритм адитивної ітераційної корекції. Алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції

Методи корекції в залежності від способу створення додаткових рівнянь, алгоритмів корекції. Узагальнена схема пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим розподілом каналів. Алгоритм адитивної ітераційної корекції (ААІК). Алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції (АМІК). Рекурентність алгоритмів корекції. Основні параметри алгоритмів корекції. Контрольні запитання і завдання.

Залежно від способу створення додаткових рівнянь метод корекції похибок може бути представлений двома великими класами.

У першому класі додаткові рівняння створюються введенням тестових сигналів, що діють аналогічно вимірюваній величині, тобто не змінюють функцію перетворення коригуючого вимірювального пристрою.

У цьому разі система рівнянь має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0^*); \\ y_1 = \varphi(x_1); \\ y_2 = \varphi(x_2); \\ \dots; \\ y_n = \varphi(x_n). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де x_0^* – значення вимірюваної величини; y_0 – значення вихідної величини коригуючого пристрою; $x_1, \dots, x_n$ – значення тестових величин; $y_1, \dots, y_n$ – значення вихідних величин від впливу тестових величин $x_1, \dots, x_n$; $y = \varphi(x)$ – функція перетворення пристрою до корекції.

У другому класі додаткові рівняння складаються введенням тестових сигналів, деформуючих відомим чином функцію перетворення пристрою, що корегується.

У цьому разі система рівнянь має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0^*); \\ y_1 = \varphi_1(x_0^*); \\ y_2 = \varphi_2(x_0^*); \\ \dots \dots \dots; \\ y_n = \varphi_n(x_0^*). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Тут $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – функції перетворення пристрою, що корегується, під впливом на них відомих тестів; $y_1, \dots, y_n$ – значення вихідної величини за постійної вхідної й деформації функції перетворення під впливом тестів.

Вимірювальні пристрої з корекцією похибки повинні містити вузли, що дозволяють створювати додаткові рівняння й забезпечувати апаратне розв’язання системи рівнянь.

Залежно від виду математичних операцій, що містяться в алгоритмі роботи пристрою з корекцією похибки, доцільно виділити дві групи алгоритмів:

- в яких використовуються тільки операції додавання-віднімання, застосовуються в пристроях адитивної корекції (ПАК).
- в яких використовуються тільки операції множення-ділення, застосовуються в пристроях мультиплікативної корекції (ПМК).

Розглянемо більш докладно алгоритм адитивної та мультиплікативної ітераційних корекцій.

Узагальнена схема пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим поділом каналів, наведена на рис. 4.1.

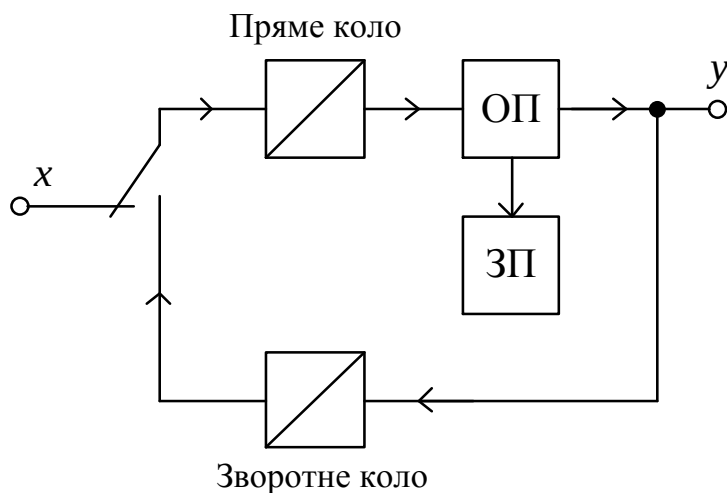


Рисунок 4.1 – Узагальнена схема пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим розподілом каналів

Пристрій містить:

- пряме коло зі статичною характеристикою

$$y = \varphi(x); \quad (4.3)$$

- зворотне коло з характеристикою

$$x = f(y); \quad (4.4)$$

- обчислювальний (ОП) і запам'ятовуючий (ЗП) пристрої.

Пряме коло приладу є аналоговий або аналого-цифровий перетворювач, точність якого недостатньо висока, зворотне коло приладу має значно вищу точність перетворення.

Алгоритм адитивної ітераційної корекції (ААІК)

У разі алгоритму адитивної ітераційної корекції (ААІК) пристрій працює таким чином. У першому такті вимірювання за допомогою прямого кола вимірювана величина x зі значенням x_0^* перетвориться в величину

$$y_0 = \varphi(x_0^*),$$

яка запам'ятовується ЗП і далі перетворюється зворотним колом у величину

$$x_0 = f(y_0).$$

У другому такті вихідна величина зворотного кола x_0 перетвориться прямим колом у величину

$$y' = \varphi(x_0) = \varphi[f(y_0)] = F(y_0). \quad (4.5)$$

Перший скоригований результат за допомогою запам'ятовуючого та обчислювального пристроїв виходить за алгоритмом

$$y_1 = y_0 + y_0 - F(y_0). \quad (4.6)$$

Для отримання другого скоригованого результату y_1 перетворюється зворотним колом у величину $x_1 = f(y_1)$, яка далі перетворюється прямим колом у величину

$$y' = \varphi(x_1) = F(y_1), \quad (4.7)$$

а другий скоригований результат знаходиться за алгоритмом

$$y_2 = y_0 + y_1 - F(y_1); \quad (4.8)$$

n -й скоригований результат

$$y_n = y_0 + y_{n-1} - F(y_{n-1}), \quad (4.9)$$

де

$$F(y_{n-1}) = \varphi(x_{n-1}) = \varphi[f(y_{n-1})] \quad (4.10)$$

– результат перетворення прямим колом вихідної величини зворотного кола, що має функцію перетворення $x = f(y)$, при подачі на її вхід величини y_{n-1} .

Алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції (АМІК)

На тій же узагальненій структурній схемі (рис. 4.1) розглянемо *алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції (АМІК)* з часовим розподілом каналів.

У першому такті вимірювання за допомогою прямого кола коригованого пристрою вимірювана величина x зі значенням x_0^* перетворюється у величину

$$y_0 = \varphi(x_0^*),$$

яка запам'ятовується в ЗП та перетворюється зворотним колом у величину

$$x_0 = f(y_0),$$

як і при адитивній корекції.

У другому такті вихідна величина зворотного кола x_0 подається на вхід прямого кола та перетворюється у величину

$$y'_0 = \varphi(x_0) = \varphi[f(y_0)] = F(y_0). \quad (4.11)$$

Перший скоригований результат за допомогою ЗП та ОП створюється за алгоритмом

$$y_1 = y_0 \frac{y_0}{F(y_0)}. \quad (4.12)$$

Для здійснення другого такту корекції y_1 переноситься в зворотний перетворювач, вихідний сигнал якого перетвориться далі зворотним колом у величину $x_1 = f(y_1)$

$$y'_1 = \varphi(x_1) = F(y_1); \quad (4.13)$$

другий скоригований результат знаходиться за алгоритмом

$$y_2 = y_0 \frac{y_1}{F(y_1)}; \quad (4.14)$$

n -й скоригований результат

$$y_n = y_0 \frac{y_{n-1}}{F(y_{n-1})}. \quad (4.15)$$

Вирази (4.9) і (4.15) є рекурентними, якщо n приймає значення 1, 2, 3, ..., n .

При дослідженні ітераційних алгоритмів корекції необхідно визначити:

- границю послідовності $\{y_n\}$, якщо вона існує, і умови збіжності послідовності $\{y_n\}$ до своєї межі;

- показник швидкості збіжності;
- похибку n -го наближення.

Контрольні запитання і завдання

1. *Якою моделлю відносно інформативних параметрів вимірюваних сигналів описується вимірювальний пристрій? Сформулюйте вимірювальну задачу підвищення точності в загальному вигляді, які величини та функції перетворення відомі, а які невідомі і потребують корекції. Що впливає на точність вимірювання?*
2. *Наведіть основні класи методів підвищення точності. Чим вони характеризуються, яка сутність методів цих класів? Що обов'язково є загальним для цих методів?*
3. *Наведіть два основних алгоритми роботи пристроїв з корекцією похибок в залежності від виду математичних операцій, які використовуються.*
4. *Наведіть узагальнену схему пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим розподілом каналів. Наведіть алгоритм адитивної ітераційної корекції. Які такти корекції та їх зміст? Поясніть властивість рекурентності алгоритму.*
5. *Наведіть узагальнену схему пристрою, що реалізує алгоритм мультиплікативної корекції з часовим розподілом каналів. Наведіть алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції, такти корекції та їх зміст. Поясніть рекурентність алгоритму.*
6. *Які основні параметри алгоритмів ітераційної корекції, що визначають їх роботоздатність, треба визначити під час проектування вимірювальних пристроїв?*

Лекція 15. Дослідження умов збіжності ітераційної корекції.

Критерій збіжності. Показник швидкості збіжності

Збіжність ітераційної корекції. Ітераційна формула результату вимірювання. Критерій збіжності. Графічне зображення допустимої області збіжності. Показник швидкості збіжності. Похибка n -го наближення. Число тактів корекції. Контрольні запитання і завдання.

Дослідження умов збіжності

Формули (4.9) і (4.15) можна подати у вигляді узагальненої ітераційної формули:

$$y_n = A(y_0, y_{n-1}), \quad (4.16)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$; A – оператор, який діє у просторі y .

Паралельно оператору $A(y_0, y_{n-1})$ можна ввести поняття операторної функції $A(y_0, y)$, а узагальненої ітераційній формулі поставити у відповідність рівняння

$$y = A(y_0, y). \quad (4.17)$$

Нижче буде доведено, що якщо ітераційна послідовність $\{y_n\}$ сходиться в точці y^* , тобто якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$, то значення y^* є коренем рівняння (4.17). Власне, рішеннями рівняння (4.17) є точки перетину операторної функції $A(y_0, y)$ з бісектрисою координатного кута, і таких рішень у загальному випадку може бути безліч. Ті з них, які можуть бути отримані за допомогою ітераційних формул, будемо називати ітераційними коренями операторної функції, а інші – неітераційними коренями.

Для фіксованого значення вимірюваної величини x_0^* операторна функція $A(y_0, y)$ є плоскою кривою в координатах $y, A(y_0, y)$. Але вимірювана величина x (а відтак, y) має широкий динамічний діапазон.

З огляду на це, операторну функцію слід розглядати як функцію двох змінних:

$$\begin{aligned} \text{для ААІК} \quad z(x, y) &= \varphi(x) + y - F(y); \\ \text{для АМІК} \quad z(x, y) &= \varphi(x) \cdot y / F(y). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тут $z(x, y)$ є певною поверхнею, при перетині якої площинами $x = \text{const}$, паралельними вертикальній площині ZOY , у цих площинах виходять плоскі криві операторної функції $A(y_0, y)$, що відповідають певним значенням x_0^* вимірюваної величини.

Перетин поверхні $z(x, y)$ бісекторною площиною кута ZOY дасть просторові криві, проекції яких на площину ZOY дають ітераційні та неітераційні корені. Просторові криві, що належать операторній поверхні й обмежують допустимі значення Y_0 у проекції на площину ZOY , утворюють певну область, яка може бути замкнутою або може мати особливі точки.

Узагальнений критерій збіжності тривимірного ітераційного процесу можна сформулювати наступним чином.

Критерій збіжності

Тривимірний ітераційний процес збігається, якщо крива $\varphi(x)$ і крива ітераційних коренів лежать всередині області, обмеженої проекціями кривих допустимих значень $y_0(x)$ і не проходять через особливі точки допустимих значень.

Розглянемо один з перетинів вертикальною площиною $x = x^* = \text{const}$ просторової операторної функції $z(x, y)$. У перетині, як зазначалося вище, утворюється плоска крива одновимірної операторної функції $A(y_0, y)$, тобто $z(x_0^*, y) = A(y_0, y)$. Знайдемо умови існування ітераційного кореня рівняння

$$y = A(y_0, y). \quad (4.19)$$

Нехай якимось чином виділено інтервал $[a, b]$ ізоляції кореня цього рівняння, і початкове наближення y_0' – будь-яка точка цього інтервалу.

Тоді послідовні наближення запишуться так:

$$\begin{cases} y_1 = A(y_0, y'_0); \\ y_2 = A(y_0, y_1); \\ \dots \dots \dots; \\ y_n = A(y_0, y_{n-1}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Доведемо, що якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$ за умови неперервності оператора $A(y_0, y)$ в точці y^* , то y^* є ітераційним коренем рівняння (4.19).

Дійсно, якщо функція $A(y_0, y)$ неперервна, то

$$y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_0, y_{n-1}) = A\left[y_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}\right] = A(y_0, y^*). \quad (4.21)$$

Отже, y^* є ітераційним коренем рівняння (4.19). Нескладно показати, що ітераційний корінь є значенням зворотної функції зворотного кола від шуканої величини. Наприклад, для ААІК

$$y = y_0 + y - F(y). \quad (4.22)$$

Підставляючи корінь, отримаємо:

$$\begin{aligned} y^* &= y_0 + y^* - F(y^*); \\ y_0 &= F(y^*) = \varphi(x_0^*); \\ \varphi(x_0^*) &= F(y^*) = \varphi[f(y^*)]. \end{aligned}$$

Якщо φ – монотонна функція

$$\begin{aligned} x_0^* &= f(y^*); \\ y^* &= f^{-1}(x_0^*). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для лінійного зворотного кола $x = y$, останній вираз має вигляд: $y^* = x^*$ (те ж можна показати й для АМІК).

Якщо y^* – точний корінь рівняння, то згідно з теоремою Лагранжа, використавши послідовність (4.20), можна записати:

$$\begin{cases} y_1 - y^* = A(y_0, y_0) - A(y_0, y^*) = (y_0 - y^*) A'(y_0, \xi_0); \\ y_2 - y^* = A(y_0, y_1) - A(y_0, y^*) = (y_1 - y^*) A'(y_0, \xi_1); \\ \dots\dots\dots \\ y_n - y^* = A(y_0, y_{n-1}) - A(y_0, y^*) = (y_{n-1} - y^*) A'(y_0, \xi_{n-1}), \end{cases} \quad (4.24)$$

де $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ – точки, що лежать усередині інтервалів $[y_0, y^*]; [y_1, y^*]; \dots; [y_{n-1}, y^*]$. Провівши послідовні підстановки різниць в (4.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} y_n - y^* &= (y_0 - y^*) A'(y_0, \xi_0) A'(y_0, \xi_1) A'(y_0, \xi_{n-1}) = \\ &= (y_0 - y^*) \prod_{i=0}^{n-1} A'(y_0, \xi_i). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для виконання умови однонаправленої збіжності, тобто такої збіжності процесу ітераційної корекції, за якої кожне наступне наближення ближче до y^* , ніж попереднє, а саме:

$$\begin{cases} |y_1 - y^*| < |y_0 - y^*|; \\ |y_2 - y^*| < |y_1 - y^*|; \\ \dots\dots\dots; \\ |y_n - y^*| < |y_{n-1} - y^*|, \end{cases} \quad (4.26)$$

необхідно припустити згідно з (4.24), що всі похідні

$$A'(y_0, \xi_0); A'(y_0, \xi), \dots, A'(y_0, \xi_{n-1})$$

за модулем менше або дорівнюють певному додатному числу M , яке менше одиниці.

З рівності (4.25) отримаємо:

$$|y_n - y| \leq |(y_0 - y)| M^n. \quad (4.27)$$

Переходячи до меж лівої та правої частин в останньому виразі, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(y_n - y)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |(y_0 - y)| \cdot M^n = |(y_0 - y^*)| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |M|^n = 0.$$

Оскільки $|M| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y^*) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*.$$

Таким чином, ітераційні корені рівняння (4.19) можуть існувати тільки на ділянці біля $y \in [a, b]$, де

$$|A'(y_0, y)| \leq |M| < 1. \quad (4.28)$$

Для ААІК останній вираз набуде вигляду:

$$|1 - F'(y)| \leq |M| < 1, \quad 0 < \xi \leq F'(y) \leq \chi < 2, \quad (4.29)$$

для лінійного зворотного кола

$$0 < \xi \leq \varphi'(y) \leq \chi < 2; \quad (4.30)$$

для АМІК

$$A'(y_0, y) = \frac{y_0}{F(y)} \left[1 - \frac{y F'(y)}{F(y)} \right]. \quad (4.31)$$

Враховуючи (4.31) вираз (4.29) набуде вигляду:

$$\left| 1 - \frac{y^* F'(y^*)}{F(y^*)} \right| \leq |M| < 1, \quad (4.32)$$

або

$$0 < \xi \leq \frac{y^* F'(y^*)}{F(y^*)} \leq \chi \leq 2. \quad (4.33)$$

Необхідно визначити область значень початкового наближення $y_0 \in [c, d]$, де ітераційний процес сходиться до ітераційного кореня. Це важливо, бо в вимірювальних пристроях, функція перетворення прямого кола яких має безперервну похідну, початкове наближення $y_0 = \varphi(x_0^*)$ однозначно

визначається вимірюваною величиною x_0^* , а не вибирається довільно в області ізоляції ітераційного кореня.

Обмежимо клас операторних функцій $A(y_0, y)$ таким, які мають безперервну похідну на даній ділянці аргументів. Для таких функцій можливі три випадки:

- рівняння (4.17) не має неітераційних коренів;
- неітераційний корінь розташований тільки з одного боку (ліворуч чи праворуч) від ітераційного кореня;
- ітераційний корінь розташований між двома неітераційними коренями.

У першому випадку операторна функція $A(y_0, y)$ перетинається з бісектрисою координатного кута тільки в одній точці, що є ітераційним коренем (рис. 4.2, а). В цьому випадку не виключено, що процес може виявитися не збіжним до y^* у випадку, якщо початкове наближення потрапляє в точку y^I або y^{II} , для яких значення операторної функції $A(y_0, y^I)$ і $A(y_0, y^{II})$ є протилежними вершинами квадрата, другою діагоналлю якого є бісектриса координатного кута. В цьому випадку ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерацій, якщо початкове наближення y_0 є абсцисою точки, розташованої всередині мінімального квадрата, що має протилежними вершинами точки операторної функції.

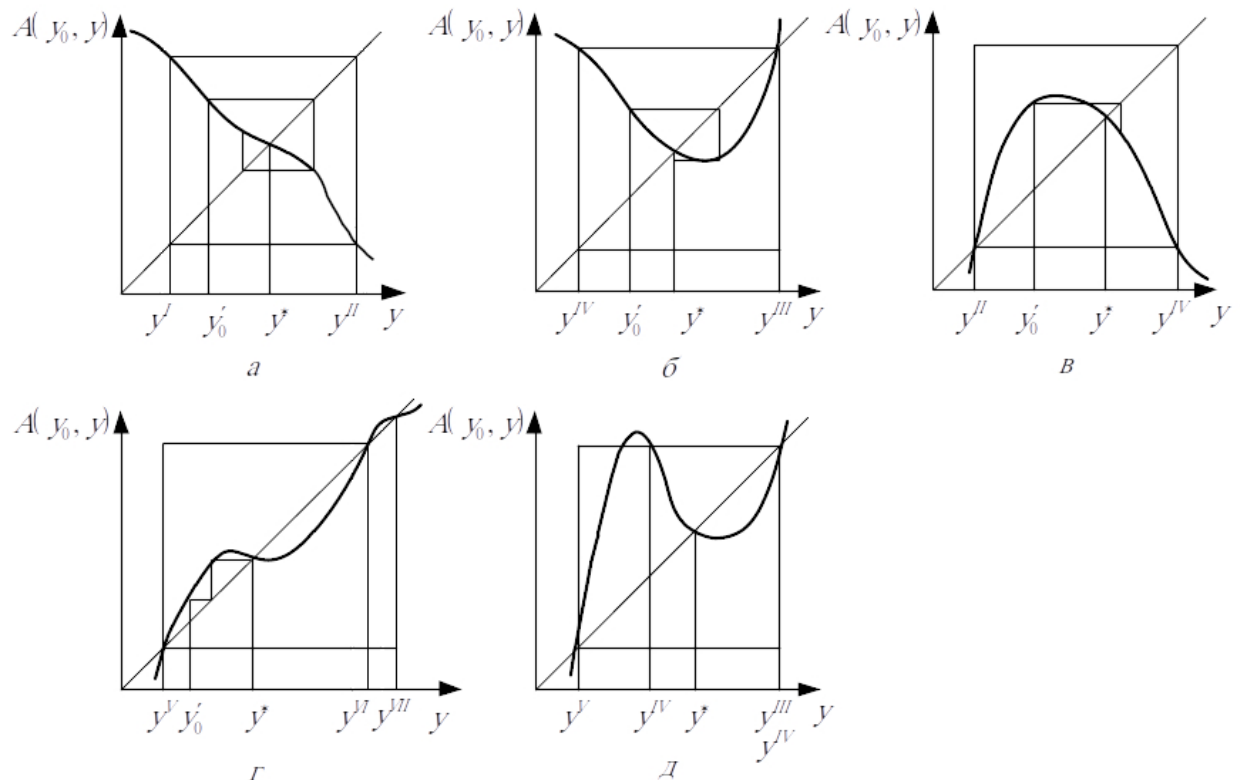


Рисунок 4.2 – Графічне зображення допустимої області збіжності

Абсциси згаданих вершин, як випливає з рис. 4.1, можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} y^I = A(y_0, y^{II}); \\ y^{II} = A(y_0, y^I). \end{cases} \quad (4.35)$$

Якщо система рівнянь (4.35) не має рішення, то збіжність до ітераційного кореня має місце за будь-якого початкового наближення.

У другому випадку (рис. 4.2, б) ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерації; якщо початкове наближення є абсцисою точки $[y_0', A(y_0', y)]$, що потрапляє в область, обмежену квадратом, одна вершина якого є найближчим неітераційним коренем, а друга (суміжна) розташована на операторній функції $A(y_0, y)$. Абсциса суміжної вершини квадрата y^{IV} є дійсним коренем рівняння

$$A(y_0, y^{IV}) = A(y_0, y^{III}) = y^{III}, \quad (4.36)$$

де y^{III} – неітераційний корінь.

Якщо рівняння (4.36) має кілька дійсних коренів, то абсциса вершини квадрата повинна бути найменш віддаленим від y^* коренем.

Рівняння (4.36) може не мати коренів. Тоді суміжна вершина квадрата віддалена на нескінченність. Якщо для цього випадку система (4.35) має рішення, тобто всередині останнього квадрата розташований квадрат згідно з першим випадком, то область збіжності визначатиметься умовами першого випадку.

У третьому випадку (див. рис. 4.2, в) ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерацій, якщо початкове наближення є абсцисою точки, що лежить усередині квадрата, вершинами якого є найближчі неітераційні корені.

Якщо всередині цього квадрата виконуються умови першого та другого випадків, то інтервал допустимих значень визначається за мінімальним квадратом.

Таким чином, ітераційний корінь рівняння може існувати тільки на ділянці, межі якого визначаються з нерівності (4.28).

Область допустимих значень початкового наближення знаходиться шляхом послідовного рішення (4.35) і (4.36).

Оскільки у вимірювальних пристроях початкове наближення вибирається не довільно, а однозначно пов'язане зі значенням вимірюваної величини x_0^* рівнянням $y_0 = \varphi(x_0^*)$, то виникає необхідність визначити допустиму область вимірюваної величини $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$, для якої можливе знаходження ітераційних коренів методами ітеративної корекції.

Для пристрою з лінійним зворотним колом $x = y$ допустима область x визначається областю існування ітераційних коренів, тобто з нерівності (4.28).

Показник швидкості збіжності

Для досягнення заданої точності необхідно здійснити кілька тактів ітерації. Чим швидше буде сходитися ітераційний процес до своєї межі, тим меншу кількість тактів ітерації необхідно проробити.

Для кількісного визначення швидкості збіжності уведемо поняття – показник швидкості збіжності $\eta_{n,n+1}$.

Визначення. Під показником швидкості збіжності будемо розуміти відношення похибки попереднього наближення до похибки подальшого:

$$\eta_{0,1} = \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|; \quad \eta_{1,2} = \left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right|; \quad \dots; \quad \eta_{(n-1),n} = \left| \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \right|, \quad (4.37)$$

де для лінійного зворотного кола:

$$\Delta_0 = y_0 - y^* = y_0 - x_0 \quad \text{– похибка початкового наближення};$$

$$\Delta_1 = y_1 - y^* = y_1 - x_0^* \quad \text{– похибка першого наближення};$$

$$\Delta_n = y_n - y^* = y_n - x_0^* \quad \text{– похибка } n\text{-го наближення}.$$

З (4.37) випливає:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{0,1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{1}{A'(y_0, \xi_0)}; \\ \eta_{1,2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{A'(y_0, \xi_1)}; \\ \dots \\ \eta_{(n-1),n} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{A'(y_{01}, \xi_{n-1})}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

З (4.38) видно, що показник швидкості збіжності в загальному випадку залежить як від значення вимірюваної величини x_0^* , так і від номера такту ітерації. Від цих величин залежить ξ_i , а значить, значення похідної $A'(y_0, \xi_i)$.

Чим менше за абсолютним значенням похідна операторної функції, тим більше показник швидкості збіжності й тим швидше сходиться ітеративний процес.

Для ітераційного процесу різниці, що сходиться $|y_i - y^*|$ (при лінійному зворотному колі $y_i - x_0^*$) зменшуються зі збільшенням номерів ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) Отже, абсциси y_i при збільшенні n наближаються до y^* і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n-1, n} = \frac{1}{[1 - \varphi'(x_0^*)]}.$$

Тому за великих n показник швидкості збіжності наближається до постійної величини, обернено пропорційної похідній операторної функції в точці збіжності.

Уведемо поняття граничного значення показника швидкості збіжності.

$$\eta = \frac{1}{1 - K} = \frac{1}{-\gamma}, \quad (4.39)$$

де γ – мультиплікативна похибка.

Якщо при будь-якому значенні ξ виявиться, що $A'(y_0, \xi_i) = 0$, то показник швидкості збіжності перетвориться у нескінченність.

Це свідчить про те, що y_n приблизно дорівнює ітераційному кореню y^* . Такий випадок можливий для ААІК у разі лінійного прямого і зворотного кіл за відсутності мультиплікативної похибки.

Для АМІК за лінійного прямого кола $y = Kx + b$ і лінійного зворотного кола $x = y$ нескладно отримати значення показника швидкості збіжності

$$\eta_{n, n+1} = \frac{xq^n \left(1 - \frac{xq}{b} \left[1 - q^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right) \right] \right)}{\left[1 - q^n \left(1 - \frac{xq}{b} \right) \right] xq^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right)} = \frac{1}{q} \frac{1 - q^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right)}{1 - q^n \left(1 - \frac{xq}{b} \right)}, \quad (4.40)$$

де $q = \frac{\delta}{1+\delta}$ (δ – відносна адитивна похибка).

З виразу (4.40) випливає, що показник швидкості збіжності для мультиплікативної корекції є нелінійна функція числа тактів і початкової похибки коригованого пристрою.

При переході до межі формула (4.40) спрощується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n,n+1} = \frac{1+\delta}{\delta}.$$

Показник швидкості збіжності збільшується при зменшенні відносної адитивної похибки і наближається до нескінченності при наближенні адитивної відносної похибки до нуля.

При збільшенні δ показник швидкості збіжності наближається до одиниці. Це свідчить про те, що значення двох поруч розташованих похибок приблизно рівні, тобто $\Delta_n \approx \Delta_{n+1}$.

Похибка n -го наближення

Узявши добуток показників швидкості збіжності та використавши (4.38), отримаємо:

$$\eta_{0,1}\eta_{1,2}\eta_{2,3}, \dots, \eta_{n-1,n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \dots \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n A'(y_0; \xi_i)}. \quad (4.41)$$

З (4.41) випливає, що збіжність ітераційного процесу буде знакозмінною, тобто наближення розташовуються по чергово з обох боків кінцевого значення y^* , якщо всі похідні $A'(y_0; \xi_i)$ на даній ділянці від'ємні.

Збіжність буде монотонною, тобто всі наближення розташовуються з одного боку від y^* , якщо похідні додатні.

Абсолютна похибка n -го наближення дорівнює:

$$\Delta_n = \Delta_0 \prod_{i=0}^n A'(y_0, \xi_i) = \Delta_0 \prod_{i=0}^n \frac{1}{\eta_{(i-1),i}}.$$

З останнього виразу для лінійних прямого і зворотного кіл можна отримати необхідне число тактів корекції.

Для ААІК:

$$n = \frac{\ln \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right|}{-\ln |\gamma|}; \quad (4.42)$$

для АМІК:

$$n = \frac{\ln \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right|}{-\ln |\delta|}. \quad (4.43)$$

Вирази (4.42) і (4.43) свідчать, що використання ААІК ефективне при малій мультиплікативній похибці, а використання АМІК ефективне при малій адитивній похибці.

Контрольні запитання і завдання

1. Як формулюються умови збіжності алгоритму адитивної ітераційної корекції? Наведіть приклад.
2. Як формулюються умови збіжності алгоритму мультиплікативної ітераційної корекції? Наведіть приклад. Наведіть графічне зображення допустимої області збіжності.
3. Наведіть визначення показника збіжності алгоритмів ітераційної корекції. Який показник швидкості збіжності АМІК для пристрою, що має лінійне пряме кола і лінійне зворотне коло?.
4. Чому дорівнює похибка n -го наближення ітераційної корекції для алгоритмів ААІК і АМІК? У яких випадках більш ефективне використання цих алгоритмів?

ТЕМА 5. ПРОЕКТУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Лекція 16. Проектування функціональних перетворювачів. Схеми функціональних перетворювачів з кусково-лінійною апроксимацією

Функціональні перетворювачі, область застосування у вимірювальній техніці. Критерії наближення при побудові кусково-лінійних апроксиматорів. Методика розрахунку кусково-лінійних апроксиматорів. Схеми функціональних перетворювачів з кусково-лінійною апроксимацією. Розрахунок ланок апроксиматорів. Контрольні запитання і завдання.

У вимірювальній техніці широко застосовуються функціональні перетворювачі [18], за допомогою яких виражається функціональний нелінійний зв'язок $y = \varphi(x)$. При використанні спеціальних схем зв'язок $y = \varphi(x)$ моделюється у вигляді кусково-лінійної залежності (рис. 5.1).

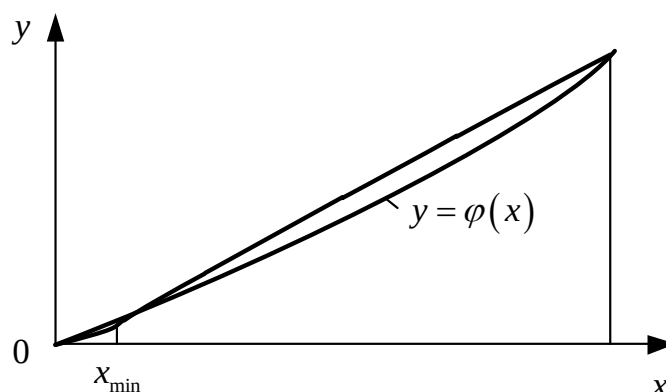


Рисунок 5.1 – Ділянка апроксимації залежності $y = \varphi(x)$ відрізком прямої

Розрахунок параметрів таких кусково-лінійних апроксиматорів – завдання досить складне й трудомістке, тому використання ЕОМ дозволяє автоматизувати процес розрахунку елементів схеми, зменшити витрати праці, з високим ступенем точності розрахувати всі необхідні параметри.

Задана нелінійна функціональна залежність $y = \varphi(x)$ на практиці зазвичай апроксимується кусково-лінійною залежністю з урахуванням різних похибок, а саме:

- апроксимація по максимально допустимій абсолютній похибці $\Delta y_{\max}$, яка приймається постійною на всіх ділянках апроксимації;
- апроксимація по максимально допустимій відносній похибці $\delta y_{\max}$, постійної на всіх ділянках апроксимації;
- апроксимація по максимально допустимій приведеній відносній похибці

$$\bar{\delta}_{\max} = \frac{\Delta y_{\max}}{y_n},$$

де $\Delta y_{\max}$ – максимально допустима абсолютна похибка апроксимації; y_n – номінальне значення величини.

Нині широке поширення під час проектування кусково-лінійних апроксиматорів отримала методика, основна ідея якої зводиться до отримання певного трансцендентного рівняння для відношення початку й кінця відрізка, а рівняння визначається типом апроксимуючого зв'язку $y = \varphi(x)$ і видом похибки, за якою проводиться апроксимація. Розв'язок одержують відносно координат ділянок апроксимації, а також нахилів апроксимуючих відрізків.

Подібні рівняння отримані та розв'язані аналітично тільки для деяких видів функції $\varphi(x)$.

Проте існуюча методика розрахунку не завжди може бути з успіхом застосована при розрахунку кусково-лінійних апроксиматорів, оскільки не завжди вдається отримати рівняння, за яким похибка визначається тільки відношенням кінця й початку апроксимуючого відрізка та не залежить від початку координат (наприклад, під час апроксимації деяких залежностей по $\delta y_{\max}$). Розв'язок отриманого трансцендентного рівняння представляє відомі труднощі.

Тому нижче наводиться методика розрахунку, яка базується на використанні ЕОМ і багато в чому вільна від вказаних недоліків. Крім того,

пропонована методика легко може бути узагальнена на випадок табличного завдання функції, що апроксимується.

Для мінімізації апаратних витрат, що однозначно пов'язано з мінімізацією кількості ділянок апроксимації, апроксимацію здійснюють січними та вибирають довжину апроксимуючої ділянки з умови рівності максимальних значень додатної та від'ємної похибки, як показано на рис. 5.2,

$$|\Delta_i| = |\Delta_{i_{\max}}| = |\Delta_{i+1}|.$$

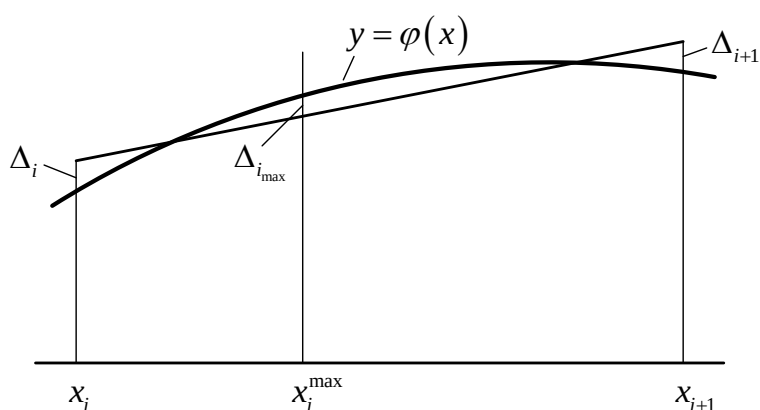


Рисунок 5.2 – Вибір довжини апроксимуючої ділянки

За тією ж максимальною абсолютною похибкою довжина ділянки, що апроксимується січною, більше довжини ділянки, що апроксимується хордою.

Розглянемо i -у ділянку апроксимації залежності $y = \varphi(x)$ відрізком прямої $K_i x + b_i$. Для точки x_i можна записати рівність

$$K_i x_i + b_i - \Delta_i = \varphi(x_i), \quad (5.1)$$

де Δ_i – похибка заданого виду:

$$\Delta_i = \begin{cases} p \cdot \Delta y_{\max}; \\ p \cdot \delta_{y_{\max}} \cdot \varphi(x_i); \\ p \cdot \Delta y_n, \end{cases}$$

де

$$\Delta y_n = \delta_{\max} \cdot y_n; \quad p = -\text{sign } \varphi''(x).$$

Аналогічні співвідношення можуть бути записані також і для інших характерних точок ділянки апроксимації:

- для точки x_{i+1} – кінця ділянки апроксимації:

$$K_i x_{i+1} + b_i - \Delta_{i+1} = \varphi(x_{i+1}); \quad (5.2)$$

- для точки $x_i^{\max}$:

$$K_i x_i^{\max} + b_i + \Delta_{i_{\max}} = \varphi(x_i^{\max}). \quad (5.3)$$

Координата максимальної похибки $x_i^{\max}$ всередині ділянки апроксимації визначається з відомої умови:

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0,$$

звідки

$$\varphi'(x_i^{\max}) = \frac{K_i}{C}, \quad (5.4)$$

де

$$C = \begin{cases} 1, & \text{якщо апроксимація проводиться по } \Delta_{y_{\max}}; \\ 1 - p \cdot \delta_{y_{\max}}, & \text{якщо апроксимація проводиться по } \delta_{y_{\max}}. \end{cases}$$

Для визначення параметрів апроксимуючої прямої по заданій похибці з отриманих рівнянь маємо:

- з рівняння (5.1)

$$b_i = \varphi(x_i) + \Delta_i - K_i x_i; \quad (5.5)$$

- з рівняння (5.3)

$$K_i = \frac{\varphi(x_i^{\max}) - \varphi(x_i) - \Delta_i - \Delta_{i_{\max}}}{x_i^{\max} - x_i}. \quad (5.6)$$

З урахуванням (5.6) виходячи з (5.4) дістанемо:

$$x_i^{\max} = x_i + \frac{\varphi(x_i^{\max}) - \varphi(x_i) - \Delta_i - \Delta_{i_{\max}}}{C \cdot \varphi'(x_i^{\max})}. \quad (5.7)$$

З рівняння (5.2) знаходимо координату правого кінця ділянки апроксимації

$$x_{i+1} = \frac{\varphi(x_{i+1}) + \Delta_{i+1} - b_i}{K_i}. \quad (5.8)$$

Таким чином, апроксимація функції перетворювання може бути здійснена у такий спосіб:

- визначається $x_i^{\max}$ за рівнянням (5.7);
- точка x_i або задається і в цьому випадку може бути початковою точкою апроксимації розглянутої кривої, або є правим кінцем попередньої ділянки апроксимації;
- розраховуються параметри відрізка прямої K_i і b_i за формулами (5.6), (5.5);
- знаходиться точка x_{i+1} за рівнянням (5.8).

Далі, беручи за початок наступної ділянки апроксимації точку x_{i+1} , розрахунок повторюється для $i + 1$ ділянки апроксимації.

Розв'язок нелінійних рівнянь (5.7), (5.8) може бути отримано одним з відомих методів, наприклад методом Ньютона.

За допомогою ЕОМ можна розрахувати параметри елементів кусково-лінійних апроксиматорів шляхом внесення певної зміни, яка визначається різницею тангенсів кутів нахилу апроксимуючих прямих попередньої та наступних ділянок.

Схеми функціональних перетворювачів з кусково-лінійною апроксимацією

Основу схеми перетворювачів складають суматор і апроксимуючі ланки (рис. 5.3). Їхня кількість визначається кількістю ділянок апроксимації.

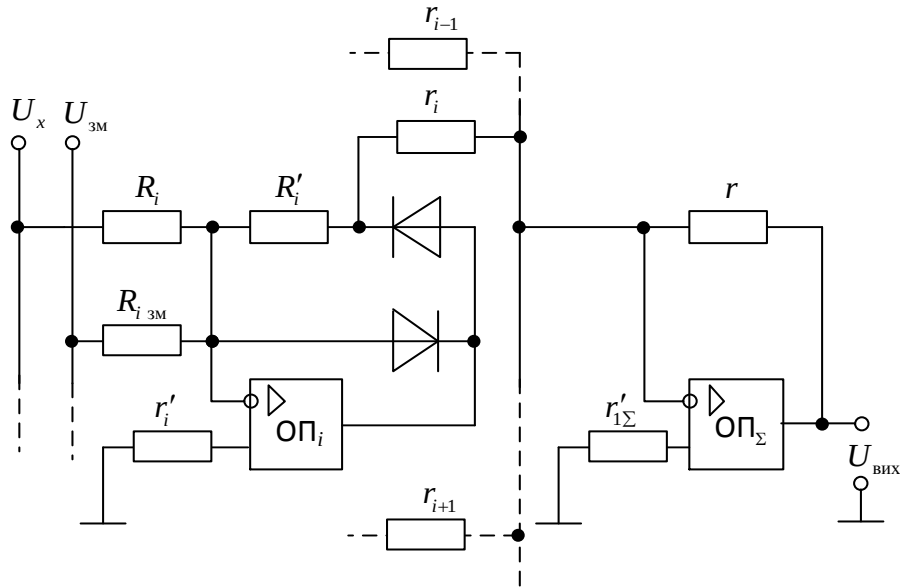


Рисунок 5.3 – Апроксимуюча ланка та вихідний суматор

Параметри апроксимуючих ланок і суматора можуть бути розраховані таким чином.

Встановлюючи значення $R_i = R'_i = R$, r , U_{3M} та визначивши кількість і параметри ділянок апроксимації, отримаємо:

$$r_i = \frac{r}{K'_i},$$

де K'_i – різниця тангенсів кутів нахилу, апроксимуючих прямих i -го і $i-1$ -го ділянок;

$$R_{i\ 3M} = \frac{U_{3M}}{U_i} R,$$

де U_i – координати початку відрізків апроксимації;

$$r'_i = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R_{i\ 3M}}}, \quad (5.9)$$

що необхідно для початкового симетрування входів диференціального підсилювача.

Відрізок $\varphi(x)$ на ділянці від 0 до $x_{i_{\min}}$ може бути заданий двома способами:

- на відрізку за апроксимуючу пряму прийнято продовження прямої першої ділянки апроксимації (рис. 5.4)

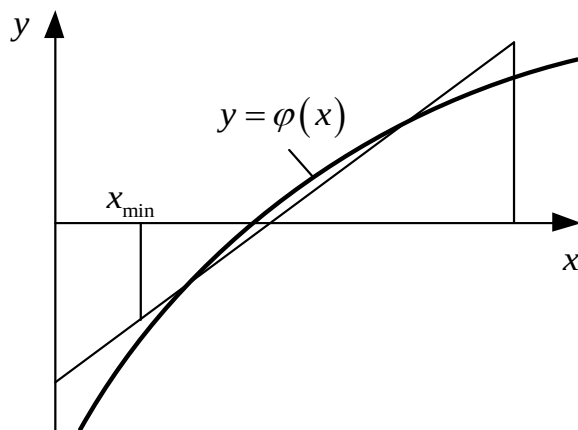


Рисунок 5.4 – Графік апроксимації початкової ділянки продовженням першої ділянки

тоді маємо:

$$R_{13M} = \frac{U_{3M}}{|b_1|} R; \quad r'_{1\Sigma} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} + \frac{1}{R_{13M}}}; \quad (5.10)$$

- на ділянці $0 - x_{\min}$ крива апроксимується відрізком прямої, яка проходить через початок координат, тоді маємо:

$$R_{13M} = 0; \quad r'_{1\Sigma} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}}, \quad (5.11)$$

де n – кількість ділянок апроксимації діапазону $x_{\min} - x_{\max}$.

У першому випадку на вході апроксиматора перед першою апроксимуючою ланкою ставляться відповідно два опори за схемою, наведеною на рис. 5.5.

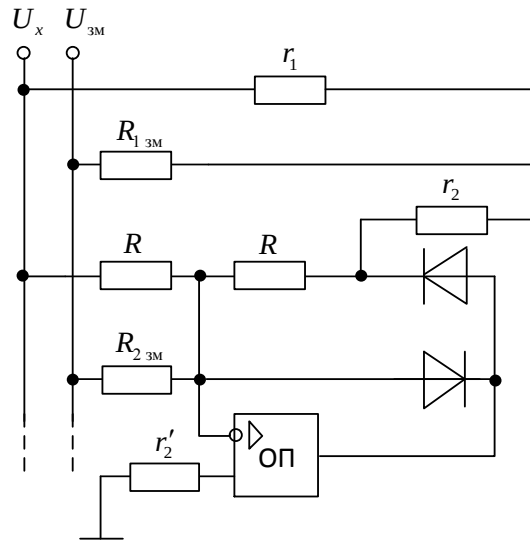


Рисунок 5.5 – Початкова ланка апроксиматора з продовженням першої ділянки

У другому випадку перша апроксимуюча ланка будується для апроксимації відрізка $0 - x_{\min}$ за схемою, наведеною на рис. 5.6.

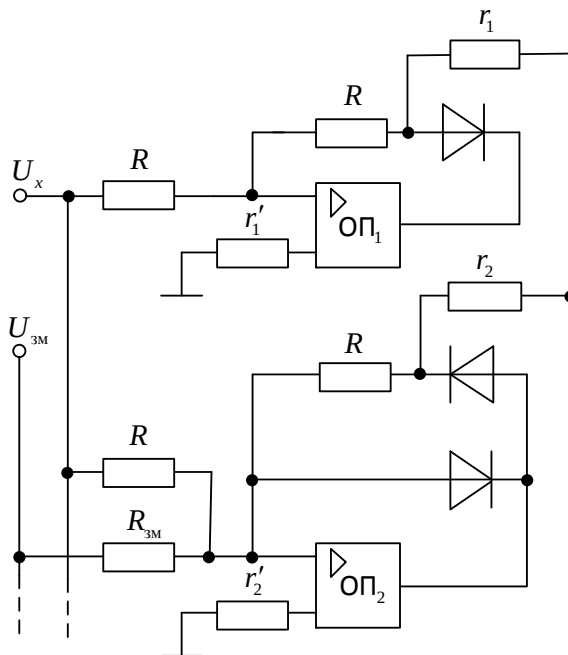


Рисунок 5.6 – Початкова ланка апроксиматора з початку координат

Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть критерії кусково-лінійної апроксимації функціональної характеристики перетворення, які використовуються при синтезі. Щодо яких параметрів кусково-лінійної залежності відбувається вирішення задачі апроксимації?*
2. *Поясніть спосіб наближення, що є близьким до найкращого рівномірного. Як визначаються похибка апроксимації та тривалість ділянки апроксимації по похибці попереднього відрізка? Якою є координата максимальної похибки усередині ділянки апроксимації?*
3. *Наведіть алгоритм апроксимації. Як визначити параметри аналітичного виразу для кожної ділянки прямої, що апроксимує?*
4. *Наведіть схему вихідного суматора та апроксимуючих ланок. Як розраховують параметри апроксимуючих ланок?*
5. *За якими способами будується апроксимуюча пряма на першій ділянці апроксимації та за якими схемами?*

ТЕМА 6. МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 17. Дослідження динаміки перетворювачів амплітудних значень змінної напруги

Широкопasmові вимірювальні перетворювачі амплітудних значень змінної напруги. Модель діода в режимі великого сигналу. Амплітудний детектор з відкритим входом. Складання системи нелінійних диференціальних рівнянь. Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях. Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу. Амплітудний детектор із закритим входом. Система нелінійних диференціальних рівнянь як математична модель детектору. Динамічна модель широкопasmового амплітудного детектору за методом взаємно-зворотних перетворень. Схема Андерсона. Методи чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь у системах комп'ютерної математики. Контрольні запитання і завдання.

Перетворювач амплітудних значень змінної напруги, або амплітудний детектор (АД) є головним пристроєм амплітудних вольтметрів змінного струму. Перетворювачі мають невелику частотну похибку перетворення і тому працюють на частотах до декілька одиниць ГГц.

Схема амплітудного детектора в режимі великого сигналу є нелінійною, тому традиційні методи аналізу лінійних кіл використовувати не можна. Моделювання та аналіз динамічних процесів у нелінійних колах здійснюється на основі диференціальних рівнянь.

Відомо, що нелінійні диференціальні рівняння або системи з такими рівняннями, як правило, не мають аналітичних методів розв'язання. Тому застосовують чисельні методи, широкі можливості використання яких дає система комп'ютерної математики Mathcad [19].

Диференціальні рівняння, які описують динамічні процеси в нелінійних колах, мають більш широке застосування, ніж у лінійних колах, тому що вони використовуються не тільки для розрахунків перехідних процесів, а й для періодичних процесів також.

При аналізі нелінійних кіл у режимі малого сигналу характеристики нелінійних елементів лінеаризують у межах робочої точки, що призводить до

розрахунку лінійного кола, в якому нелінійні елементи представлені їх диференційними параметрами в робочій точці.

Математична модель діода в режимі великого сигналу

Схему заміщення діода в режимі великого сигналу зображено на рис. 6.1 [20]

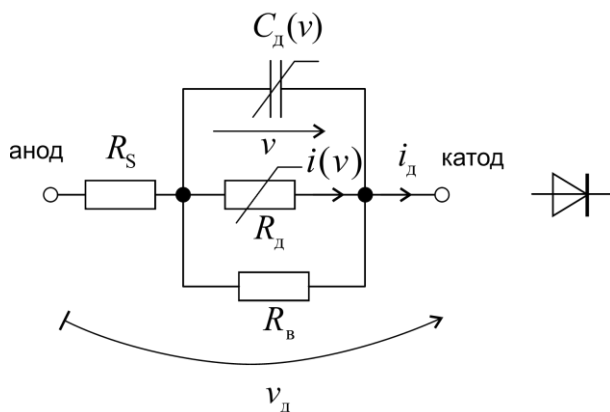


Рисунок 6.1 – Схема заміщення діода в режимі великого сигналу

Вона включає нелінійний опір $p-n$ переходу R_d , характеристика якого описується залежністю

$$i(v) = I_s \left(e^{\frac{v}{n \cdot \Phi_T}} - 1 \right), \quad (6.1)$$

нелінійну диференціальну ємність $p-n$ переходу C_d , опір витоку переходу R_B ($RL \geq 1 \text{ МОм}$) та об'ємний опір матеріалу напівпровідника в нейтральних зонах, що примикають до збідненого слою з обох сторін, і опір контактів R_S (RS). В дужках наводяться позначення відповідного параметра моделі діода в стандарті PSpice, який використовується в Micro-CAP, DesignLab [21, 22, 23, 24] та в інших системах схемотехнічного моделювання.

Ємність діода. Ємність діода $C_d = C_d(v_d) = \Delta Q_d / \Delta v_d$ – визначається, як відношення зміни заряду, який накопичений у переході, до напруги, яка обумовлює цю зміну. Тобто ємність визначена, як диференціальна (чи

динамічна), при цьому вона ще залежить від напруги v_d на $p-n$ переході (нелінійна).

Ємність діода має бар'єрну $C_{\text{бар}}$ і дифузійну $C_{\text{диф}}$ складові:

$$C_d = C_{\text{бар}} + C_{\text{диф}}. \quad (6.2)$$

Бар'єрна ємність $C_{\text{бар}}$ – ємність закритого $p-n$ переходу (працює, як звичайний конденсатор) і залежить від величини зворотної напруги. Бар'єрна ємність визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} C_{\text{бар}} = \frac{C_{60}}{(1 - v/\varphi_k)^m}, & v \leq FC \cdot \varphi_k; \\ C_{\text{бар}} = \frac{C_{60}}{(1 - FC)^{(1+m)}} \cdot [1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\varphi_k}], & v > FC \cdot \varphi_k, \end{cases} \quad (6.3)$$

де FC - коефіцієнт нелінійності бар'єрної ємності прямозміщеного переходу. Бар'єрна ємність має значення 1-20 пФ.

Пряме включення $p-n$ переходу додає до бар'єрної ємності ще дифузійну ємність $C_{\text{диф}}$ – ємність прямо зміщеного $p-n$ переходу, яка залежить від величини прямого струму та часу життя нерівноважних носіїв τ (ще називають час переносу заряду Transit Time).

$$C_{\text{диф}} = \frac{I_s \cdot \tau}{n \cdot \varphi_T} \cdot e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}}. \quad (6.4)$$

Порядок $C_{\text{диф}}$ – десятки і сотні пФ.

Параметри, які входять до складу зображеної вище моделі мають наступний сенс: I_s (IS) – зворотний струм, або струм насичення (має велику залежність від температури, тому називають ще тепловим струмом); φ_T (VT) – тепловий потенціал, $\varphi_T = kT/q$, де $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура за Кельвіном $T \text{ } ^\circ\text{K} = 273 \text{ } ^\circ + T \text{ } ^\circ\text{C}$ (так при температурі $T = 27 \text{ } ^\circ\text{C} = 300 \text{ } ^\circ\text{K} \rightarrow \varphi_T = 25 \text{ мВ}$); $n = 1,0 \div 2,5$ (N) – поправочний

коефіцієнт, що враховує відхилення характеристики діода від ідеальної моделі (коефіцієнт неідеальності); C_{60} (CJO) – бар’єрна ємність за нульового зміщення $p-n$ переходу, має значення декількох пФ; ϕ_k (VJ) – контактна різниця потенціалів (бар’єрний потенціал), яка $\phi_k \approx 0,2 \div 0,4$ В для германієвих і $\phi_k \approx 0,5 \div 0,8$ В для кремнієвих діодів; $m = 1/2 \div 1/3$ (M) – коефіцієнт плавності переходу; τ (TT) – час переносу заряду (Transit Time). Типові значення струму насичення I_S складають $10^{-2} \div 10^{-8}$ А – для германієвих і $10^{-6} \div 10^{-12}$ А – для кремнієвих діодів. Опір R_S малопотужних діодів, які працюють з невеликими за значеннями напругою і струмом, складає $\approx 0,1 \div 0,2$ Ом.

Опір $p-n$ переходу. Опір характеризує роботу діода на постійному і на змінному струмі. Оскільки вольт-амперна характеристика $p-n$ переходу є нелінійною функцією, то опір на постійному струмі R_0 буде відмінним від опору на змінному струмі R_d .

Опір на змінному струмі називається *диференціальним* (чи *динамічним*). Якщо здиференціювати рівняння (6.1), то дістанемо значення диференціального опору в заданій точці вольт-амперної характеристики:

$$G_d(v) = R_d^{-1}(v) = \frac{di(v)}{dv} = \frac{I_S}{n \cdot \phi_T} e^{\frac{v}{n \cdot \phi_T}} \approx \frac{I_{пр}}{n \cdot \phi_T} \text{ або } R_d \approx \frac{n \cdot \phi_T}{I_{пр}} [\text{Ом}], \quad (6.5)$$

де G_d – *диференціальна* провідність $p-n$ переходу в заданій точці характеристики. Опір на постійному струмі R_0 визначається відношенням напруги до струму в заданій точці (v_0, i_0) вольт-амперної характеристики.

Нагадуємо, що наведена вище модель – це модель ідеального діода. Вона задовольняє багатьом задачам при аналізі електронних схем при невеликих за значенням струмах і напругах.

Але модель не враховує деякі фізичні процеси, які мають місце у напівпровідникових структурах (генерації та рекомбінації носіїв заряду в приконтантній області, вплив заряду інжекттованих носіїв та електричного поля, створюваного цими зарядами, явище електричного пробоя при зворотній напрузі тощо). Наприклад, явище електричного пробоя є головним для деяких типів діодів (стабілітрони, тунельні діоди). Дійсні параметри моделі визначають *вимірюваннями* для конкретного діода.

Далі наведемо аналіз амплітудного детектора в середовищі Mathcad.

Амплітудний детектор з відкритим входом

На рис. 6.2 наведено схему амплітудного детектора з відкритим входом. Розглянемо моделювання кола за допомогою диференціальних рівнянь [25].

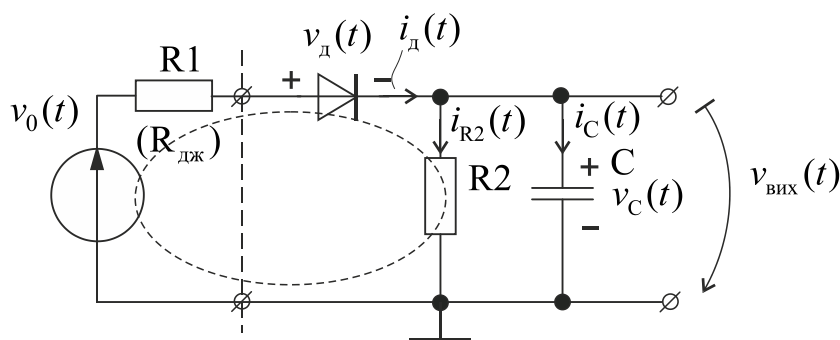


Рисунок 6.2 – Амплітудний детектор з відкритим входом

На низьких і середніх частотах ємністю $p-n$ переходу C_d можна знехтувати, і схема моделі діода стає резистивною. Впливом R_s і R_b поки також можна знехтувати. При цьому вважатимемо, що напруга на діоді $v_d(t)$ – це напруга $p-n$ переходу, а струм $i_d(t)$ – це струм $p-n$ переходу.

Розглянемо задачу детальніше. Для кола, зображеного на рис. 6.2, змінної стану є $v_C(t)$. Струм через ємнісний елемент C за першим законом Кірхгофа для вузла, який включає R_2 , C і діод VD (як нелінійний резистивний елемент), що має характеристику $i_d(v_d)$, дорівнює:

$$i_C(t) = i_d(v_d) - \frac{v_C(t)}{R_2}.$$

Тоді, враховуючи компонентне рівняння $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$, дістанемо:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_d(v_d) - \frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2}. \quad (6.6)$$

Але в рівнянні стану (6.6) напруга на діоді $v_d(t)$ є залишковою змінною, яку потрібно виразити через змінні стану і незалежні джерела.

Наступне незалежне рівняння одержимо за другим законом Кірхгофа для головного контуру:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d). \quad (6.7)$$

Останнє рівняння однозначно визначає $v_d(t)$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$, але в неявному вигляді, що не дозволяє виключити цю змінну з правої частини рівняння.

Процедуру знаходження $v_d(t)$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$ можна реалізувати чисельно. Однак, якщо так робити, то при інтегруванні рівняння (6.6) процедуру чисельного розв'язку нелінійного рівняння (6.7) потрібно виконувати на кожному кроці інтегрування при розрахунках правої частини диференційного рівняння.

Отже, диференційне рівняння, що описує коло, має вигляд:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d \left[v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d) \right],$$

де права частина не може бути виражена в явному вигляді через $v_C(t)$ і $v_0(t)$. Тобто рівняння не може бути розв'язано Mathcad [19] з використанням стандартних процедур. Тому потрібні деякі перетворення елементів схеми.

Але, якщо R_1 відсутній, то $v_d(t)$ можна визначити в явному вигляді $v_d(t) = v_0(t) - v_C(t)$. Тоді одержимо рівняння стану:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d [v_0(t) - v_C(t)], \quad (6.8)$$

яке матиме розв'язок з використанням стандартної процедури чисельного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь `odesolve(x,b[,число кроків])`.

Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях

При аналізі нелінійних кіл досить часто потрібно перетворити ділянку кола з декількома елементами, серед яких можуть бути як лінійні, так і нелінійні елементи, в один елемент з еквівалентною характеристикою.

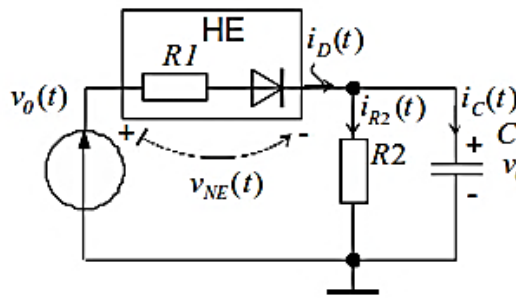
Досить часто виникає задача апроксимації нелінійних характеристик компонентів кола. Так в схемі на рис. 6.2 є ділянка у вигляді послідовно включених резистора R_1 і діода, яку потрібно перетворити в один нелінійний елемент NE з характеристикою типу $i(v_{NE})$. Якщо елементи включені послідовно, то залежність напруги від струму отримати легко.

Так залежність $v_d(i_d)$ знайдемо з (6.1). Тоді напругу на NE отримаємо додаванням:

$$v_{NE}(i_d) = \varphi_T \cdot \ln[(i_d/I_S) + 1] + R_1 \cdot i_d. \quad (6.9)$$

Але для складання диференціального рівняння на основі рівняння для струмів за першим законом Кірхгофа потрібна зворотна характеристика $i(v_{NE})$, яку аналітично в явному вигляді за виразом (6.6) отримати не можна. Тому побудуємо її по точкам за виразом $v_{NE}(i)$: спочатку визначимо значення напруги v_i при заданому струмі i_i (рис. 6.3), потім за вузлові точки виберемо точки з координатами (i_i, v_i) та будуємо через ці точки функцію $i(v_{NE})$ з використанням певного виду інтерполяції (рис. 6.4). Графіки інтерполуючих функцій з нанесеними вузловими точками наведено на рис. 6.5.

Модельовання амплітудного детектора з відкритим входом
(використання моделі комбінованого нелінійного елемента резистор-діод)



$$TOL := 10^{-6}$$

$$R1 := 100 \quad \text{- вихідний опір джерела змінної напруги}$$

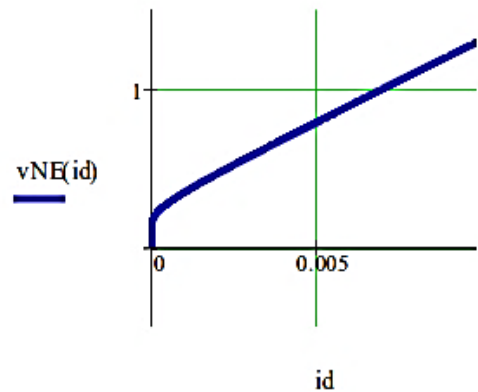
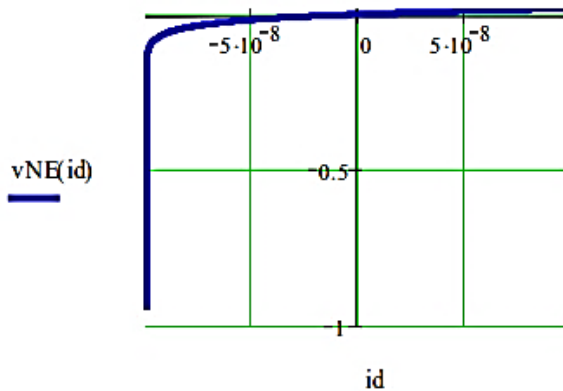
$$R2 := 100000 \quad C := 0.1 \times 10^{-6}$$

$$I_s := 1 \cdot 10^{-7}$$

$$I_d(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad \text{- вольт-амперна характеристика діода}$$

вольт-амперна характеристика комбінованого нелінійного елемента резистор-діод:

$$v_d(i_d) := 0.026 \ln\left(\frac{i_d}{I_s} + 1\right) \Rightarrow v_{NE}(i_d) := 0.026 \ln\left(\frac{i_d}{I_s} + 1\right) + R1 \cdot i_d$$



Для складання диференціального рівняння потрібна зворотна характеристика – залежність струму через нелінійний елемент від напруги

Вектори x і y задають вузлові точки характеристики струм-напруга комбінованого нелінійного елемента

$$y1 := \begin{pmatrix} -9.999999999999999 \cdot 10^{-8} \\ -9.999999999999999 \cdot 10^{-8} \\ -5.9 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 5 \cdot 10^{-4} \\ 10 \cdot 10^{-3} \\ 20 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

- вибираємо точки для струму

$$y := \text{sort}(y1)$$

$$x := v_{NE}(y)$$

- розраховуємо точки для напруги

$$x = \begin{pmatrix} -0.955 \\ -0.359 \\ -0.023 \\ 0 \\ 0.271 \\ 1.299 \\ 2.317 \end{pmatrix}$$

`sort(v)` - Returns a vector with the values from v sorted in ascending order.

Рисунок 6.3 – Перетворення послідовно включених резистор-діод в один нелінійний елемент

Поліноміальна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$n := \text{length}(y) - 1$ $n = 6$ - ступень полінома

$i := 0..n$ $j := 0..n$

Формування матриці XI :

$XI_{j,i} := (x_j)^i$ $XI_{j,0} := 1$ $a := XI^{-1} \cdot y$ - розрахунок коефіцієнтів поліному

$k := n..0$ $P(x) := \sum_k a_k \cdot x^k$ - визначення поліному

$V_{\max} := x_n$ $V_{\max} = 2.317$

$xi := -4, -3.999.. V_{\max} + 0.1$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.767 \times 10^{-5} \\ 3.914 \times 10^{-3} \\ 0.01 \\ -2.196 \times 10^{-3} \\ -6.923 \times 10^{-3} \\ 2.549 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Сплайнова інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$IS := \text{cspline}(x, y)$ $IS := \text{pspline}(x, y)$ $IS := \text{lspline}(x, y)$

$V := -4, -3.999.. V_{\max} + 0.1$ $SPL(V) := \text{interp}(IS, x, y, V)$

Кусково-лінійна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$\text{fit}(s) := \text{linterp}(x, y, s)$

Рисунок 6.4 – Поліноміальна, сплайнова та кусково-лінійна інтерполяція складної нелінійності

Поліноміальна інтерполяція має певні недоліки. По-перше, поліном на границях різко розбігається. Але найголовніше, в межах ділянки вольт-амперної характеристики, де функція має злам або різкий перехід (від ділянки, де функція майже не змінюється, до ділянки, де швидко наростає), степеневий поліном дає значні коливання інтерполяційної кривої. Все це дає значні похибки при подальших обчисленнях під час розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь.

Кращі результати дає інтерполяція сплайнами. Але в межах робочої точки, де функція має злам або різкий перегин, вона також дає небажані коливання інтерполяційної кривої. Осциляції потім дають похибку моделювання динамічного режиму АД. Але осциляції можна зменшити правильним вибором вузлових точок.

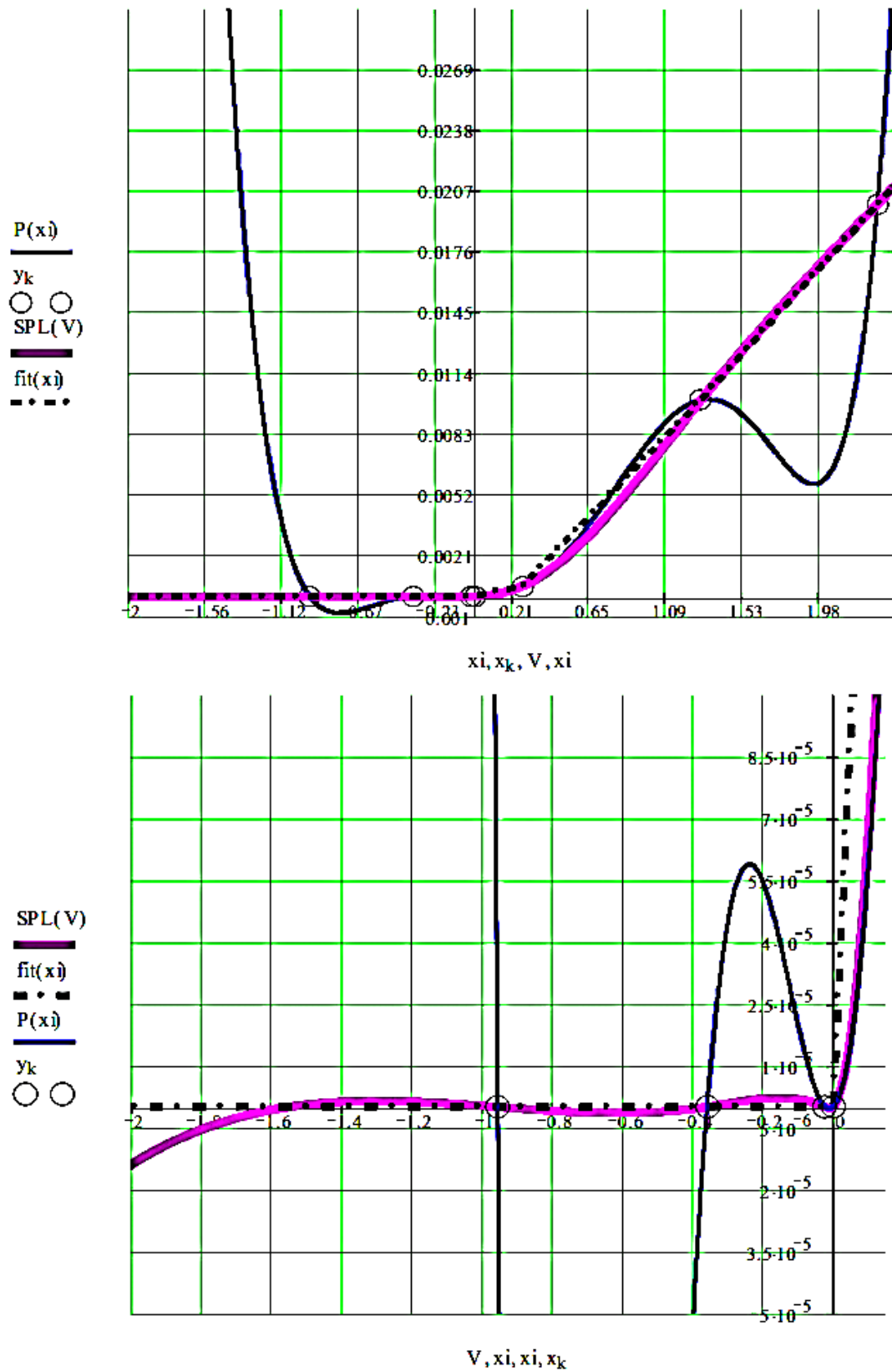


Рисунок 6.5 – Осциляції інтерполяційної кривої, якщо функція має злам або різкий перегин

$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц

$V_0 := 1$ - амплітуда, В

$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$ - період, сек.

$TA := 3 \cdot T$ - інтервал аналізу, сек

Given

Розв'язок

Диференціальне рівняння (нелінійне)
відносно напруги на ємності:

$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = P(v_0(t) - vc1(t))$ - поліноміальна інтерполяція

$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = \text{interp}(IS, x, y, v_0(t) - vc1(t))$ - інтерполяція сплайнами

$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = \text{fit}(v_0(t) - vc1(t))$ - кусково-лінійна інтерполяція

$vc1(0) = 0$ - початкові умови

$vc1 := \text{odesolve}(t, TA, 1000)$ - розв'язок відносно напруги на ємності

$id(t) := P(v_0(t) - vc1(t))$ $id(t) := \text{interp}(IS, x, y, (v_0(t) - vc1(t)))$

$id(t) := \text{fit}(v_0(t) - vc1(t))$ - струм через діод

$vd(t) := 0.026 \ln\left(\frac{id(t)}{Is} + 1\right)$

$t := 0, 0.001 \cdot TA \dots TA$

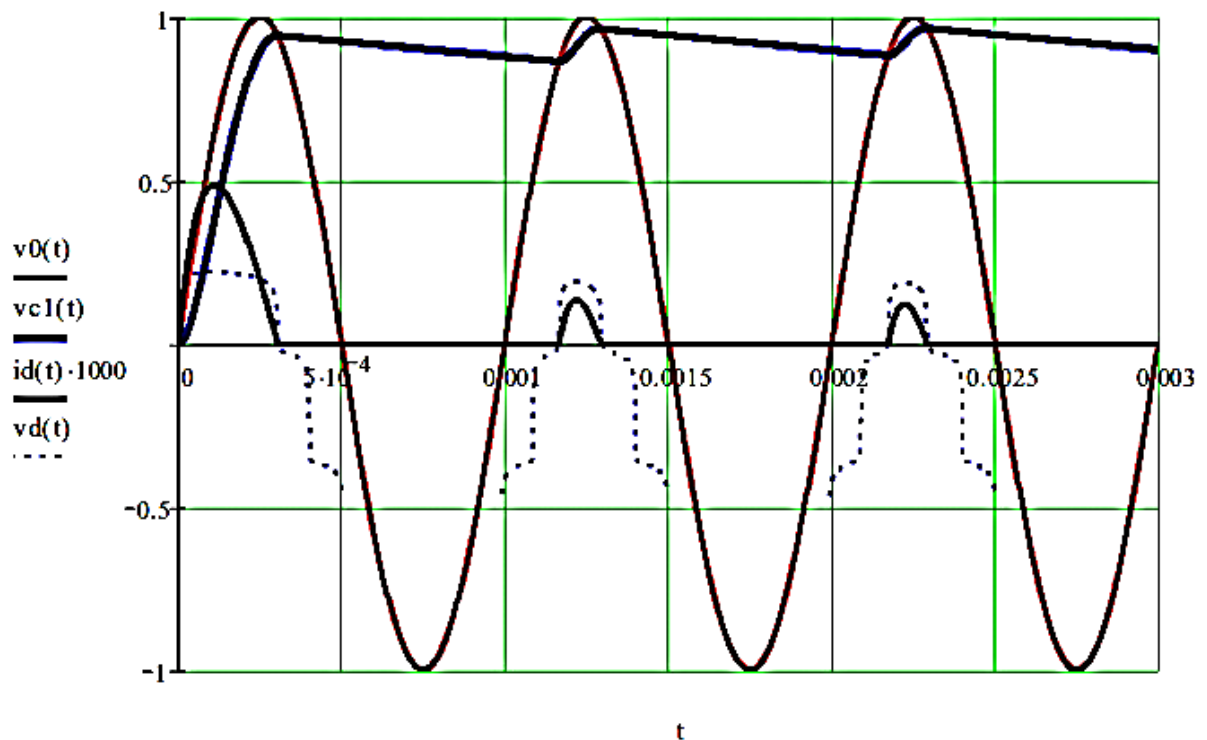


Рисунок 6.6 – Моделювання динамічних процесів в АД
з використанням інтерполяції нелінійної характеристики:

$v_0(t)$ – вхідна напруга; $vc1(t)$ – вихідна напруга;

$vd(t)$ – напруга на діоді; $id(t)$ – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Кусково-лінійна інтерполяція, як відомо, при заданій кількості вузлів дає більшу похибку наближення функції, але перевагою є те, що вона не дає небажаних осциляцій в межах ділянки, де вольт-амперна характеристика має різкий перегин. Тому в нашому випадку вона краща.

Складання системи диференціальних рівнянь стану (точний метод)

Складемо систему диференціальних рівнянь дещо по-іншому.

Так струм через конденсатор C (рис. 6.1) та напруга на діоді дорівнюють:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2}, \quad v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d[v_d(t)].$$

Здиференціюємо останнє рівняння та одержимо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_C(t)}{dt} - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt}.$$

Звідси дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(t)}{dt} &= \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt}, \\ \frac{dv_d(t)}{dt} \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right] &= \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right]. \end{aligned}$$

Отже, одержимо нормальну систему рівнянь першого порядку у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \left[i_d[v_d(t)] - v_C(t)/R_2 \right]; \\ \frac{dv_d(t)}{dt} = \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right]^{-1} \cdot \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] \right\}; \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} v_C(0) = 0; \\ v_d(0) = 0, \end{cases}$$

де друга система задає початкові умови.

Розв'язок системи рівнянь потребує задання першої похідної від вхідної напруги $\text{Diff}v_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_d(v_d) = \frac{di_d}{dv_d}$ – диференціальної (динамічної) провідності $p-n$ переходу в аналітичному вигляді. Все це можна знайти в символьному вигляді в середовищі Mathcad, якщо відомі аналітичні вирази $v_0(t)$ і $i_d(v_d)$.

Конденсатор C – це елемент, який накопичує енергію. Напруга на конденсаторі не може змінюватися стрибком. Тому $v_C(t)$ використовується як незалежна змінна стану. Початкова напруга на конденсаторі дорівнює $v_C(0) = v_C(0_+) = v_C(0_-)$.

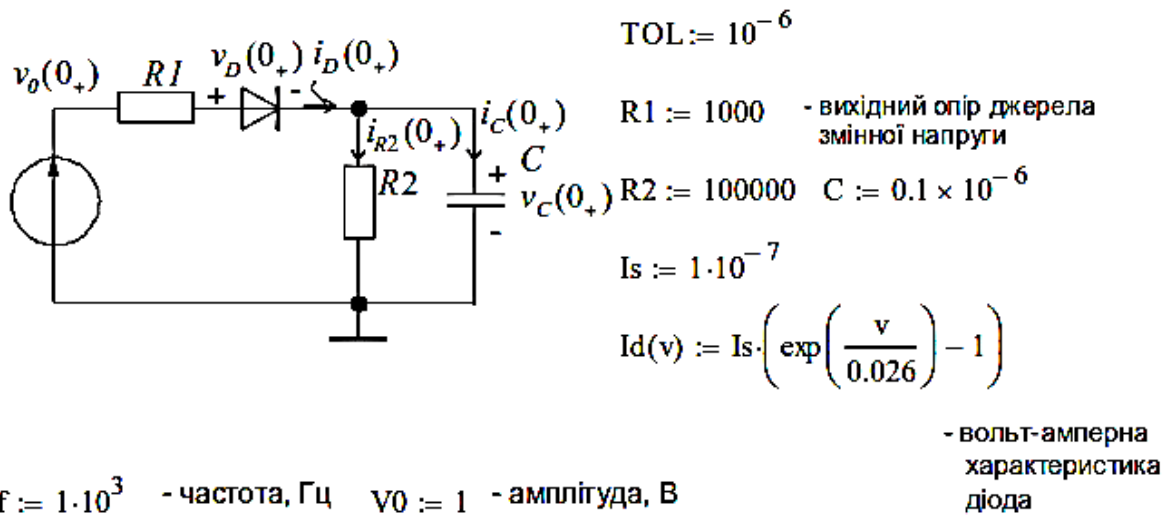
Напруга на діоді $v_d(t)$ не є змінної стану в прямому сенсі, але використання її похідної $\frac{dv_d(t)}{dt}$ дозволяє скласти систему диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші.

При цьому $v_d(0_+)$ відноситься до *залежних* початкових умов (якщо не брати до уваги ємність $p-n$ переходу). Напруга дорівнює:

$$v_d(0_+) = v_0(0_+) - v_C(0_+) - R_1 \cdot i_d(v_d(0_+)).$$

Отже, $v_d(0_+)$ визначається з розв'язку нелінійного рівняння. Але, якщо в момент часу $t = 0$ відбувається підключення до джерела напруги $v_0(t) = V_0 \sin(2\pi f t)$, яка дорівнює $v_0(0_+) = 0$, та ще $v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$, то струм через діод у момент часу $t = 0_+$ не тече. Тому вибираємо $v_d(0_+) = 0$ В.

Аналіз нелінійного діодного кола в момент часу $t = 0$



Given

$$v_{d0} = v_0(0) - v_{c0} - R1 \cdot I_d(v_{d0})$$

$$v_{d0} := \text{Find}(v_{d0}) \text{ float}, 3 \rightarrow 0$$

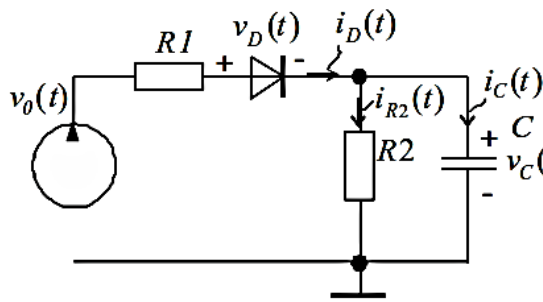
$$v_{d0} = 0$$

Рисунок 6.7 – Розрахунок початкових умов

Фрагменти документів Mathcad з прикладом аналізу реакції АД з відкритим входом на підключення до джерела синусоїдальної напруги наведено на рис. 6.8 і рис. 6.9.

Бачимо (наступний фрагмент на рис. 6.10), що використаний підхід дозволяє набагато точніше описати напругу на діоді при від'ємній полярності вхідного сигналу, а також, що головніше, точніше описати напругу та струм через діод на ділянці "відсікання".

Моделювання амплітудного детектора з відкритим виходом (з врахуванням вихідного опору джерела змінної напруги)

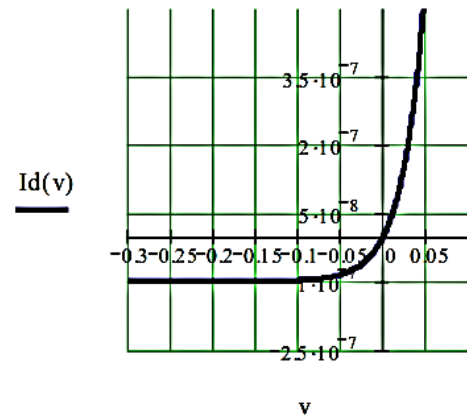
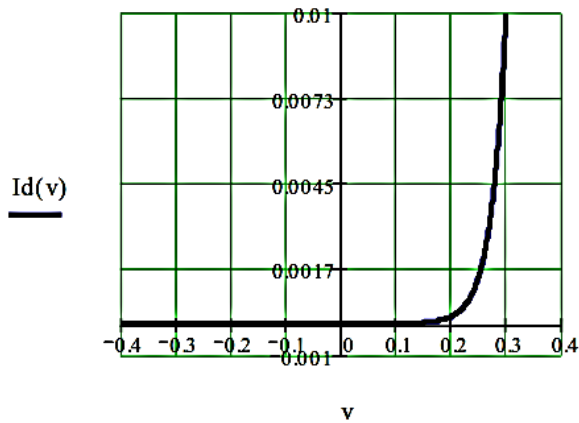


$R1 := 1000$ - вихідний опір джерела змінної напруги

$R2 := 100000$ $C := 0.1 \times 10^{-6}$

$I_s := 1 \cdot 10^{-7}$ $\phi t := 0.026$ $n := 1$

$I_d(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{n \cdot \phi t}\right) - 1 \right)$ - вольт-амперна характеристика діода



$$G_d(v) := \frac{d}{dv} I_d(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.846210^6 \cdot \exp(38.462v)$$

- диференціальна провідність діода

$$R_{dd}(v) := \frac{1}{G_d(v)} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{2.60 \cdot 10^5}{\exp(38.5v)^1}$$

- диференціальний опір діода

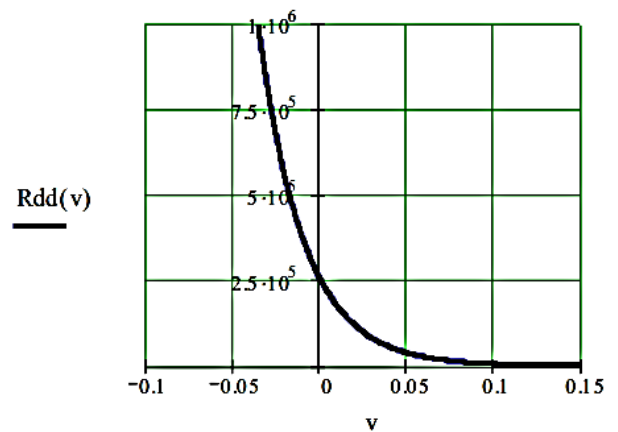
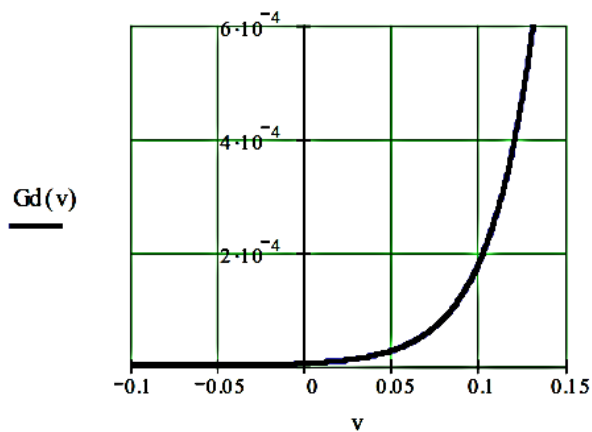


Рисунок 6.8 – Моделювання АД з відкритим виходом

$$f := 1 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} \quad V_0 := 1 \quad \text{- амплітуда, В} \quad T := \frac{1}{f} \quad T = 1 \times 10^{-3}$$

$$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \text{- вхідна напруга} \quad \text{- період, сек.}$$

$$\text{DifVQ}(t) := \frac{d}{dt} V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi \quad T_A := 6 \cdot T \quad \text{- інтервал аналізу, сек}$$

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов для змінних } V_C(t), V_D(t)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R_1 \cdot G_d(x_1)} \cdot \left[\text{DifVQ}(t) - \left(\frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix} \quad \text{- символічний вектор правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, T_A, 10000, D)$ - Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рисунок 6.9 – Моделювання АД з відкритим входом (продовження)

У прикладі (рис. 6.9) використана стандартна функція чисельного розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в формі Коші $\text{Rkadapt}(x, t_1, t_2, n, D)$.

Функція $\text{Rkadapt}(x, t_1, t_2, n, D)$ повертає матрицю розв'язків задачі Коші за методом Рунге-Кутта системи із звичайних диференціальних рівнянь, праві частини яких у вигляді перших похідних від шуканих функцій записані в символічному векторі D з початковими умовами, які задані у векторі x, при розв'язку на інтервалі від t_1 до t_2 при кількості точок розв'язків n.

Матриця розв'язків, що створюється, має ряд стовбців, кількість яких на 1 більша за кількість рівнянь. Перший стовбець – це значення аргументу розв'язків (тобто змінної часу t) на рівних інтервалах, другі стовбці – значення шуканих змінних.

Вектори розв'язків для змінних $V_C(t)$, $V_D(t)$:

$n := 0..9999$ $vc_n := Z_{n,1}$ $vd_n := Z_{n,2}$ $tn := Z_{n,0}$ - час
 $v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot tn)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vd_n)$ - струм через діод

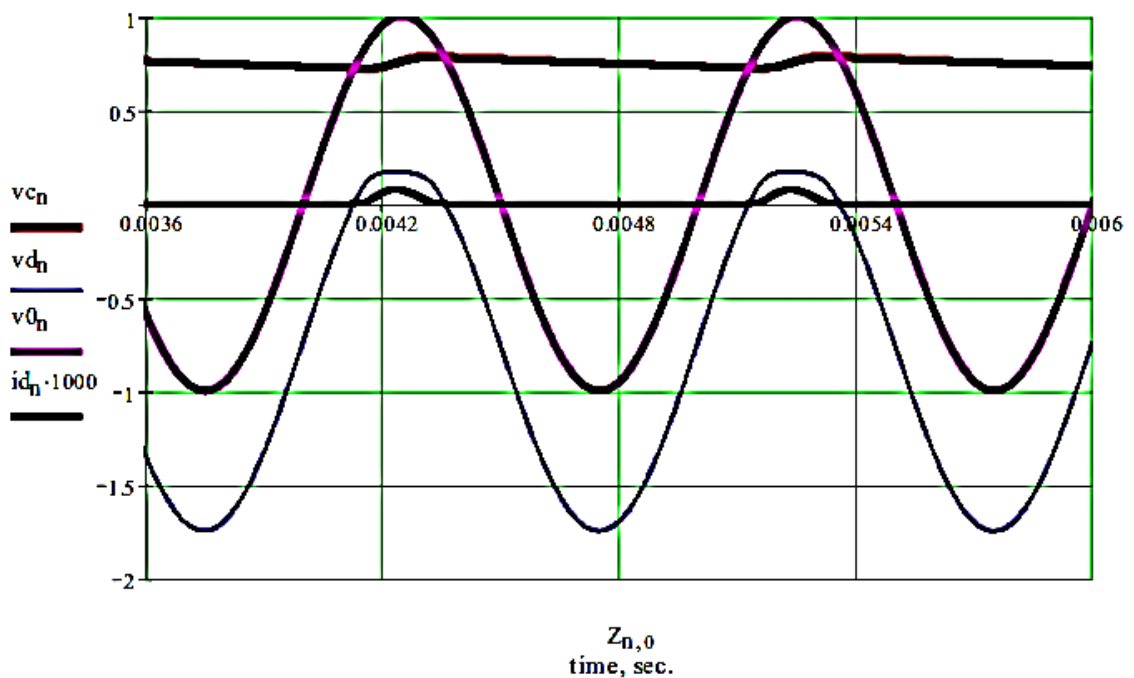
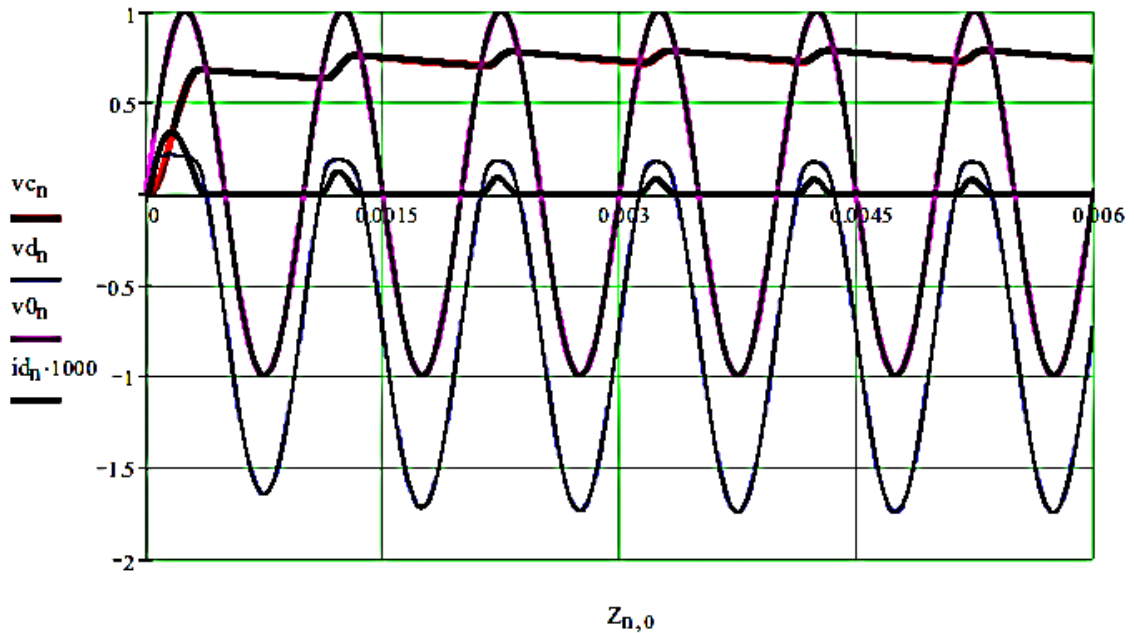


Рисунок 6.10 – Динамічні процеси в АД з відкритим входом при підключенні до джерела синусоїдальної напруги ($f = 1$ кГц): vc – напруга на конденсаторі C ; vd – напруга на діоді; $v0$ – вхідна напруга; id – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу

Проведемо аналіз амплітудного детектора з урахуванням R_d – нелінійного опору та C_d – нелінійної ємності $p-n$ переходу. Об'ємний опір матеріалу напівпровідника R_s можна включити до складу R_1 (внутрішній опір джерела напруги $R_{дж}$).

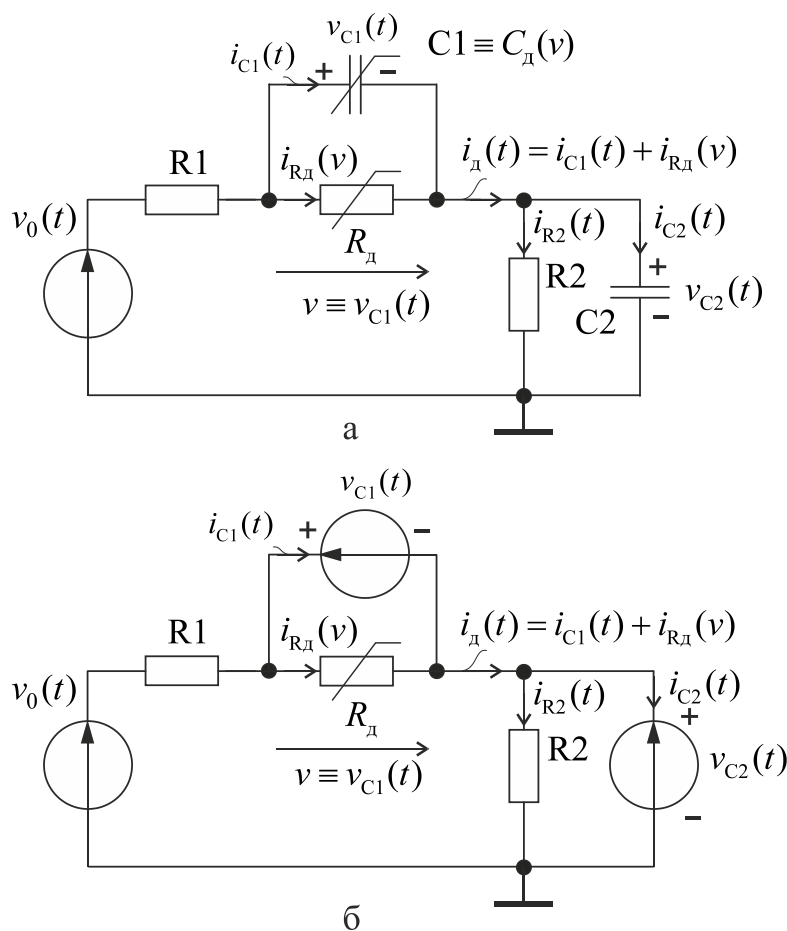


Рисунок 6.11 – Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу: а – схема заміщення амплітудного детектора; б – схема заміщення, складена за методом еквівалентних джерел

Згідно з теоремою компенсації замінимо ємнісні елементи кола (рис. 6.11,а) еквівалентними джерелами напруг. Одержимо еквівалентне резистивне коло (рис. 6.11,б), яке складається лише з лінійних та нелінійних резисторів, за заданих величин незалежних та залежних джерел. У такому колі треба виразити струми джерел, що замінюють ємнісні елементи, через напруги всіх джерел кола.

Складемо рівняння для струмів:

$$i_{R1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] = i_{C1}(t) + i_d[v_{C1}(t)];$$

$$i_{C2}(t) = i_{R1}(t) - i_{R2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}.$$

Звідси одержимо:

$$\begin{cases} i_{C1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)]; \\ i_{C2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}. \end{cases}$$

Струм через конденсатор C_2 визначається звичайним компонентним рівнянням лінійного ємнісного елемента $i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$, де C_2 – параметр (ємність) конденсатора, яка є сталою величиною, не залежить від напруги на елементі:

$$Q(t) = C \cdot v(t), \quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

Струм через ємність $p-n$ переходу визначається так:

$$i_{C1}(t) = \frac{dQ_{C1}}{dt} = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}} \cdot \frac{dv_{C1}}{dt} = C_d(v_{C1}) \cdot \frac{dv_{C1}}{dt},$$

де Q_{C1} – заряд, накопичений у $p-n$ переході, який розглядаємо, як нелінійний конденсатор. Отже, $C_1(v_{C1}) = C_d(v_{C1}) = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}}$ – це диференціальна (динамічна) ємність $p-n$ переходу, залежить від напруги v_{C1} на $p-n$ переході.

Зробивши заміну, одержимо систему рівнянь стану. Отже, нормальна система рівнянь стану першого порядку у формі Коші матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1(v_{C1})} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)] \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2} \right\}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{C1}(0) = 0; \\ v_{C2}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

де $C_1(v_{C1}) = C_{\text{бар}} + C_{\text{диф}} = \frac{C_{60}}{(1 - v_{C1}/\varphi_K)^m} + G_d(v_{C1}) \cdot \tau$ – нелінійна диференціальна

ємність $p-n$ переходу (вважаємо, що для реальної схеми виконується

режим $v_{C1} \leq FC \cdot \varphi_K$); $G_d(v_{C1}) = \frac{I_s}{n \cdot \varphi_T} \cdot e^{\frac{v_{C1}}{n \cdot \varphi_T}}$ – диференціальна провідність

діода; τ - час (Transit Time) переносу заряду.

Моделювання амплітудного детектора з відкритим входом (з врахуванням ємності $p-n$ переходу)

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 1000 \quad \text{- вихідний опір джерела змінної напруги} & I_s &:= 1 \cdot 10^{-7} & m &:= 0.5 & n &:= 1 \\
 R2 &:= 100000 & C2 &:= 0.1 \times 10^{-6} & \phi_k &:= 0.4 & \phi_t &:= 0.026 \\
 & & FC &:= 0.5 \quad \text{- коефіцієнт не лінійності бар'єрної ємності прямозміщеного переходу} \\
 & & C0 &:= 10 \cdot 10^{-12} & \tau &:= 10 \cdot 10^{-12} \\
 Id(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{\phi_t}\right) - 1 \right) \quad \text{- вольт-амперна характеристика діода}
 \end{aligned}$$

Ємність $p-n$ переходу :

бар'єрна ємність закритого переходу :

$$Cdb(v) := \begin{cases} \frac{C0}{\left(1 - \frac{v}{\phi_k}\right)^m} & \text{if } v \leq FC \cdot \phi_k \\ \left[\frac{C0}{(1 - FC)^{(1+m)}} \cdot \left[1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\phi_k} \right] \right] & \text{if } v > FC \cdot \phi_k \end{cases}$$

$$Gd(v) := \frac{I_s}{n \cdot \phi_t} \cdot \exp\left(\frac{v}{n \cdot \phi_t}\right) \quad \text{- диференціальна провідність діода} \quad Cdd(v) := Gd(v) \cdot \tau \quad \text{- дифузійна ємність}$$

Нелінійна диференціальна ємність діода : $Cd(v) := Cdb(v) + Cdd(v)$

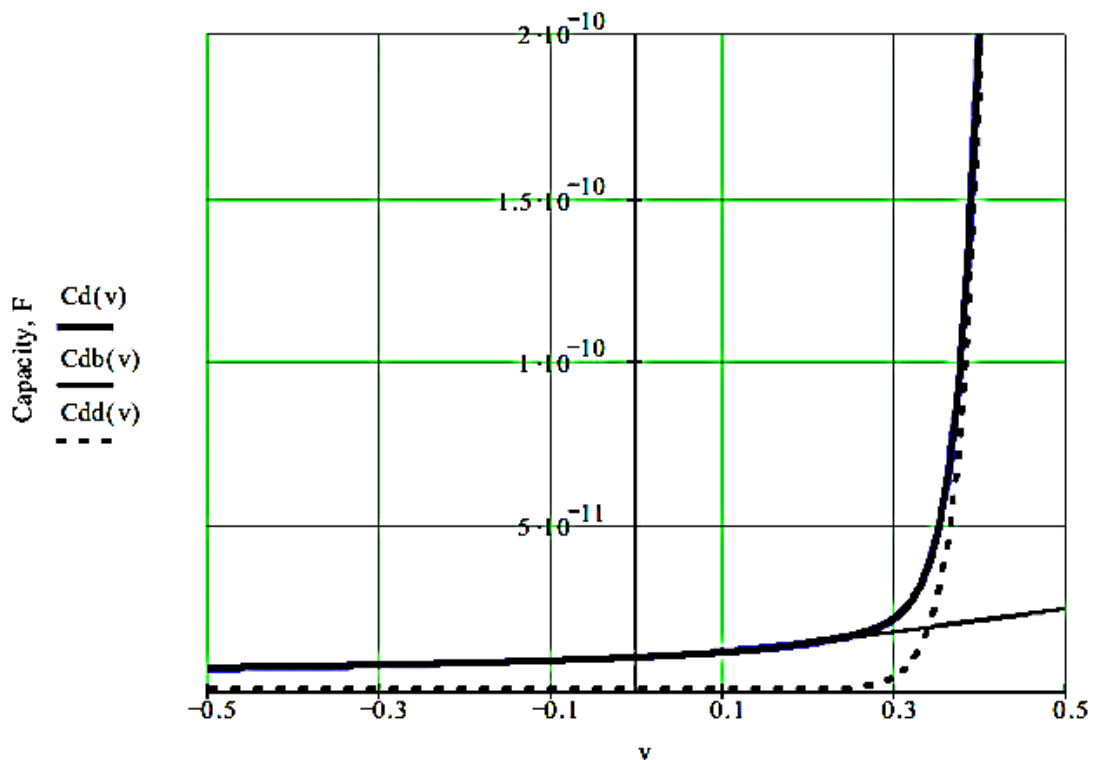


Рисунок 6.12 – Нелінійна диференціальна ємність $p-n$ переходу

$f := 1 \cdot 10^4$ - частота, Гц $V_0 := 1$ - амплітуда, В $v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов змінних $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$ $T := \frac{1}{f}$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{x_0}{\phi k}}} + \frac{I_s \cdot \tau}{\phi t} \cdot \exp\left(\frac{x_0}{\phi t}\right) \right)^{-1} \cdot \left[-Id(x_0) + \frac{1}{R_1} \cdot (v_0(t) - x_0 - x_1) \right] \\ \frac{1}{C_2} \cdot \left[\frac{-x_1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \cdot (v_0(t) - x_0 - x_1) \right] \end{bmatrix} \quad T = 1 \times 10^{-4}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 100000, D)$

$n := 0..99999$ $vc1_n := Z_{n,1}$ $vc2_n := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час

$v0_n := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vc1_n)$ - струм через діод

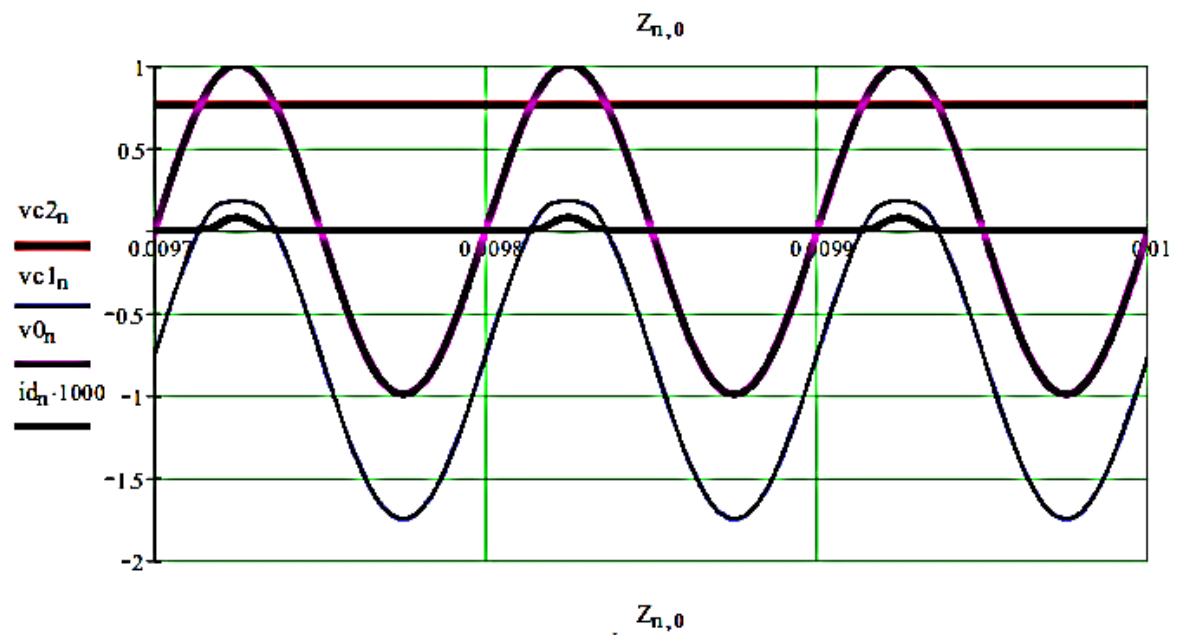
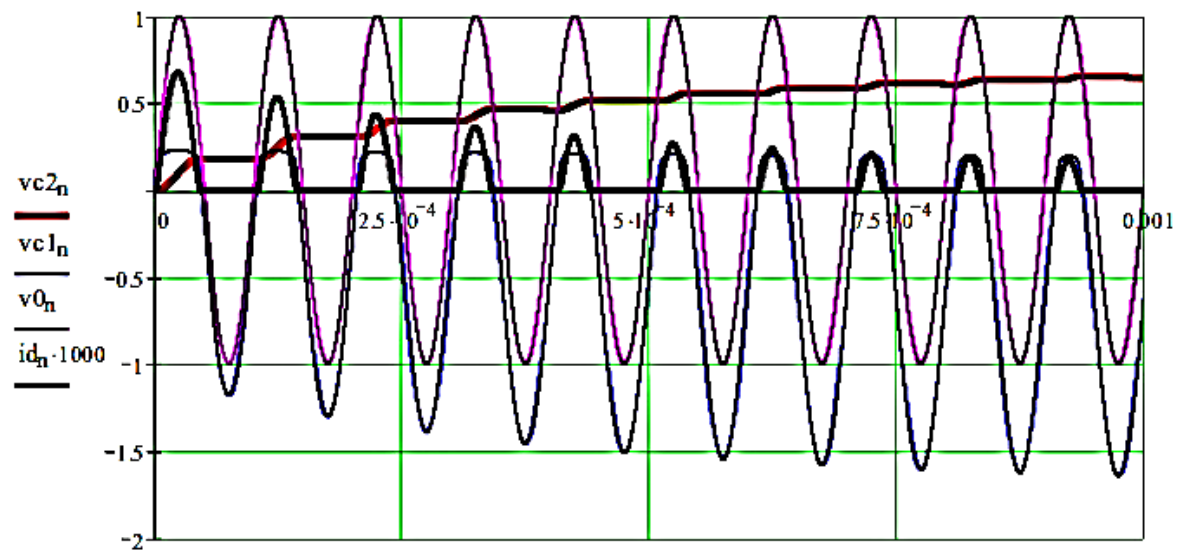


Рис. 6.13 – Динамічні процеси в АД з відкритим входом за умови врахування ємності р – n переходу ($f = 10$ кГц)

Амплітудний детектор із закритим входом. Система нелінійних диференційних рівнянь – математична модель детектору

Дещо інакше відбуваються перехідні процеси в амплітудному детекторі з закритим входом (рис. 6.14).

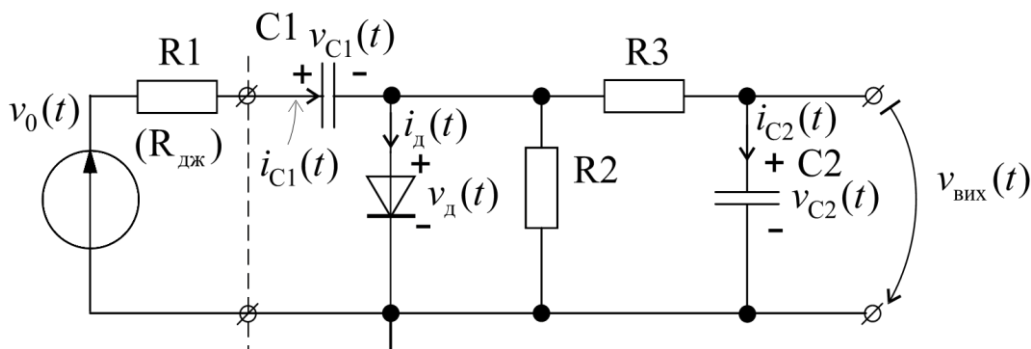


Рисунок 6.14 – Амплітудний детектор із закритим входом

Складемо систему диференційних рівнянь нелінійного кола.

Струм через конденсатор C1 дорівнює:

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Струм через конденсатор C2 дорівнює:

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Напруга на діоді:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_{C1}(t) - R_1 \cdot \left\{ i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3} \right\}.$$

Здиференціюємо останнє рівняння, одержимо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_{C1}(t)}{dt} - R_1 \cdot \left[\frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt} \right].$$

Звідси дістанемо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_1} \right\} -$$

$$-R_1 \cdot \left\{ \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2} \right] \right\}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(t)}{dt} \cdot \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right] = \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_1} \right\} + \\ + \frac{R_1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2} \right]. \end{aligned}$$

Отже, дістанемо систему рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} \left\{ i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3} \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2}; \\ \frac{dv_d(t)}{dt} = A^{-1} \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{i_d[v_d(t)]}{C_1} - \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \left[\frac{R_1}{R_3^2 C_2} - \frac{1}{R_3 C_1} \right] [v_d(t) - v_{C2}(t)] \right\}, \\ A = \left[1 + R_1 \frac{di_d}{dv_d} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right], \end{cases} \quad (6.12)$$

для якої потрібно задати початкові умови, наприклад:
$$\begin{cases} v_{C1}(0) = 0; \\ v_{C2}(0) = 0; \\ v_d(0) = 0. \end{cases}$$

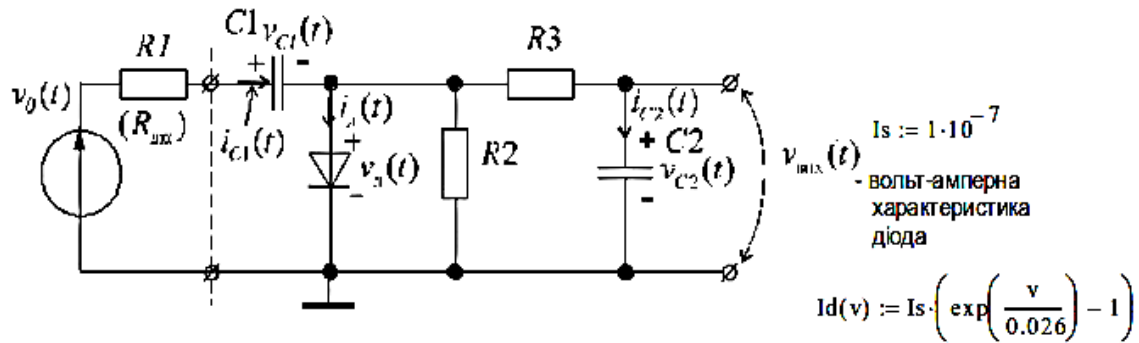
Як бачимо, розв'язок системи рівнянь потребує задання похідної від вхідної напруги $Difv_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_d(v_d) = \frac{di_d}{dv_d}$ – диференціальної (динамічної) провідності діода.

Документ Mathcad з прикладом аналізу реакції амплітудного детектора з закритим входом на підключення до джерела синусної напруги наведено на рис. 6.15. На рис. 6.16 наведено результати моделювання.

Також бачимо, що струм через діод тече лише протягом дуже малої частки кожного періоду. Вихідна напруга, що формується на конденсаторі C2, має від'ємну полярність.

Моделювання амплітудного детектора із закритим входом
(з урахуванням вихідного опору джерела змінної напруги)

TOL := 10^{-6}



$R1 := 1000$ - вихідний опір джерела змінної напруги

$R2 := 1000000$ $R3 := 100000$ $C1 := 0.1 \times 10^{-6}$ $C2 := 0.1 \times 10^{-6}$

$Gd(v) := \frac{d}{dv} I_d(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.846210^{-6} \cdot \exp(38.462v)$ - диференціальна провідність діода

$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц $v_0 := 1$ - амплітуда, В $T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$

$v_0(t) := v_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$\text{Difv0}(t) := \frac{d}{dt} v_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cos(2000\pi \cdot t) \cdot \pi$

Розв'язок

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C1} \cdot \left[I_d(x_2) + \frac{x_2}{R2} + \frac{1}{R3} \cdot (x_2 - x_1) \right] \\ \frac{1}{R3 \cdot C2} \cdot (x_2 - x_1) \\ \frac{1}{\left(1 + R1 \cdot Gd(x_2) + \frac{R1}{R2} + \frac{R1}{R3} \right)} \cdot \left[\text{Difv0}(t) - \frac{1}{C1} \cdot I_d(x_2) - \frac{x_2}{R2 \cdot C1} + \left(\frac{R1}{R3^2 \cdot C2} - \frac{1}{R3 \cdot C1} \right) \cdot (x_2 - x_1) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.05, 10000, D)$ - Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

Рисунок 6.15 – Математична модель АД із закритим входом у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок

Вектори розв'язків для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$:

$n := 0..9999$ $t_n := Z_{n,0}$ $vc1_n := Z_{n,1}$ $vc2_n := Z_{n,2}$ $vd_n := Z_{n,3}$
 $v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vd_n)$ - струм через діод

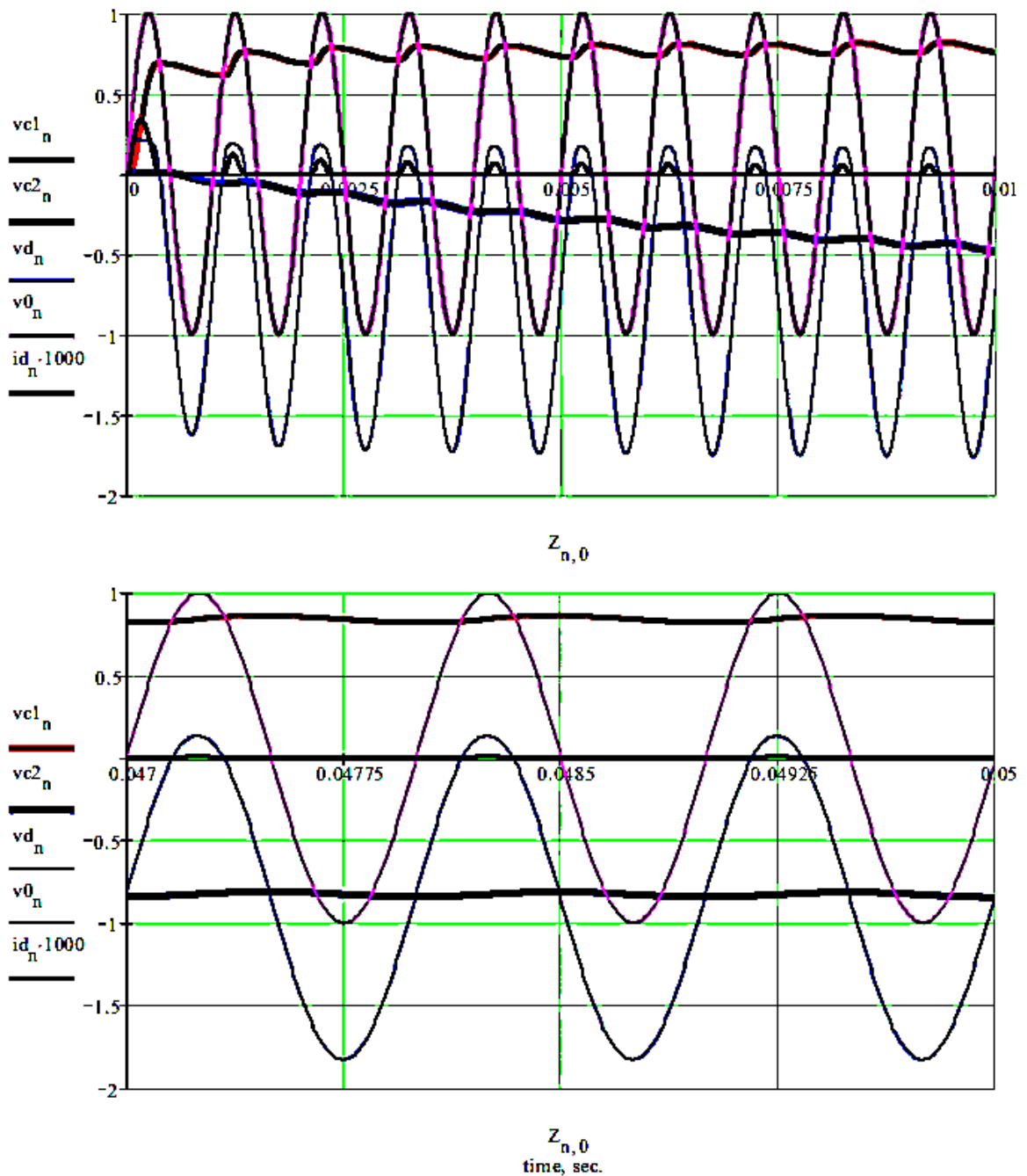


Рисунок 6.16 – Динамічні процеси в АД із закритим входом при підключенні до джерела синусоїдальної напруги: $vc1$ – напруга на $C1$; $vc2$ – напруга на $C2$; vd – напруга на діоді; $v0$ – вхідна напруга; id – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Недоліком наведених вище схем амплітудних детекторів є значна нелінійність характеристики перетворення при вимірюванні малих напруг.

Для лінеаризації характеристики у вольтметрах змінного струму широко використовується так звана схема Андерсона, яка реалізує метод взаємно-зворотних перетворень [26].

Динамічна модель широкосмугового амплітудного детектору за методом взаємно-зворотних перетворень. Схема Андерсона

Такий перетворювач складається з передвключеного нелінійного перетворювача, суматора, підсилювача некомпенсації та ідентичного за параметрами іншого нелінійного перетворювача, включеного в коло зворотного зв'язку.

Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона на подвійних пікових детекторах наведена на рис. 6.17.

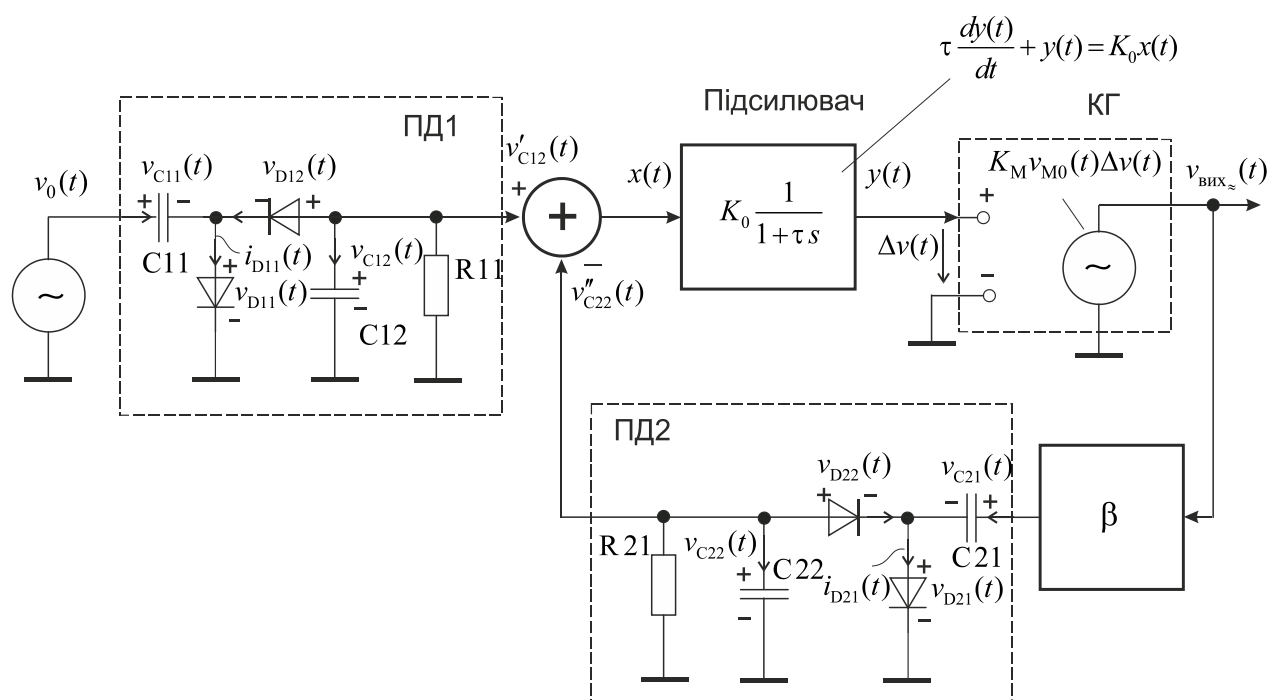


Рисунок 6.17 – Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона

На рисунку зазначені:

ПД1 – передвключений подвійний піковий детектор, який має діоди VD11, VD12, конденсатори C11, C12, та резистор R11, що враховує опір навантаження;

ПД2 – зворотний нелінійний перетворювач, що також є подвійним піковим детектором, і має діоди VD21, VD22, конденсатори C21, C22 та резистор R21, що враховує опір навантаження;

$$H(s) = K_0 \frac{1}{1 + \tau s} \text{ – передатна функція підсилювача некомпенсації, модель}$$

якого має вигляд динамічної ланки першого порядку;

КГ – генератор гармонічної напруги, керований напругою;

β – подільник напруги з коефіцієнтом $\beta < 1$.

У промислових зразках вольтметрів змінної напруги вихідна напруга КГ має невелику фіксовану частоту, зазвичай 10÷100 кГц. Вхідна напруга перетворювача має частотний діапазон до декілька одиниць ГГц.

При достатньо великому коефіцієнті петльового підсилення та за умови, що передатні характеристики детекторів ПД1 і ПД2 ідентичні, передатна характеристика перетворювача стає лінійною.

Вхідна напруга високої частоти перетворюється у низькочастотну гармонічну напругу, яка за амплітудним значенням більше у $1/\beta$ разів. Потім ця напруга перетворюється у постійну напругу. Перетворювач у постійну напругу може бути побудований за прецизійною схемою на базі операційних підсилювачів.

Завдяки взаємній компенсації похибок детекторів ПД1 і ПД2 межа вимірювання може бути знижена до 10 мВ.

$$\begin{aligned}
 C11 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C12 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C21 &:= 0.1 \times 10^{-6} & C22 &:= 0.1 \times 10^{-6} \\
 R11 &:= 10 \cdot 10^6 & R21 &:= 10 \cdot 10^6 \\
 I_s &:= 1 \cdot 10^{-7} \\
 Id1(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) & Id2(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \\
 K0 &:= 1000 & \beta &:= \frac{1}{10} \\
 \tau &:= 200 \quad \text{- стала часу підсилювача} & T_A &:= 0.25 \quad \text{- інтервал аналізу, сек.} \\
 V0 &:= 0.3 \quad \text{- амплітудне значення} & N &:= 100000 \\
 & \quad \text{вхідної змінної напруги} \\
 f1 &:= 10 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} & f2 &:= 0.5 \cdot 10^3 & KM &:= 50 \\
 v0(t) &:= V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) & vM(t) &:= 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t) \quad \text{- напруга модулятора}
 \end{aligned}$$

Рисунок 6.18 – Параметри схемної моделі перетворювача за структурою Андерсона (амплітуда вхідної напруги 0,3В)

Математична модель перетворювача у вигляді символьного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку для змінних стану $v_{C11}(t)$, $v_{C12}(t)$, $v_{C21}(t)$, $v_{C22}(t)$, $v_Y(t)$ (де $v_Y(t)$ – вихідна напруга підсилювача) в нормальній формі наведена на рис. 7.19.

Динамічні процеси в ПД1 наведено на рис. 6.20.

Динамічні процеси в ПД2 та встановлення вихідної напруги перетворювача за схемою Андерсона наведено на рис. 6.21.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов змінних стану}$$

$$v_{C11}(t), v_{C12}(t), v_{C21}(t), v_{C22}(t), v_Y(t)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C11} \cdot (Id1(v0(t) - x_0) - Id2(x_0 + x_1 - v0(t))) \\ \frac{1}{C12} \cdot \left(-Id2(x_0 + x_1 - v0(t)) - \frac{x_1}{R11} \right) \\ \frac{1}{C21} \cdot [Id1(KM \cdot vM(t) \cdot x_4 \cdot \beta - x_2) - Id2[-(KM \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3]] \\ \frac{1}{C22} \cdot \left[-Id2[-(KM \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3] - \frac{x_3}{R21} \right] \\ \frac{1}{\tau} \cdot [K0 \cdot (x_1 - x_3) - x_4] \end{bmatrix}$$

$Z := Rkadapt(x, 0, TA, N, D)$ - розв'язок системи **нелінійних** диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

$Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D)$ - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Вектори розв'язків для змінних стану:

$$\begin{aligned} n &:= 0..N-1 & t_n &:= Z_{n,0} & vc11_n &:= Z_{n,1} & vc12_n &:= Z_{n,2} & vc21_n &:= Z_{n,3} & vc22_n &:= Z_{n,4} \\ v0_n &:= V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t_n) & & & vd11_n &:= v0_n - vc11_n & id11_n &:= Id1(vd11_n) \\ vOut_n &:= KM \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t_n) \cdot Z_{n,5} & & & vd21_n &:= vOut_n \cdot \beta - vc21_n & id21_n &:= Id1(vd21_n) \end{aligned}$$

Рисунок 6.19 – Математична модель перетворювача за структурою Андерсона у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференційних рівнянь першого порядку та її розв'язок

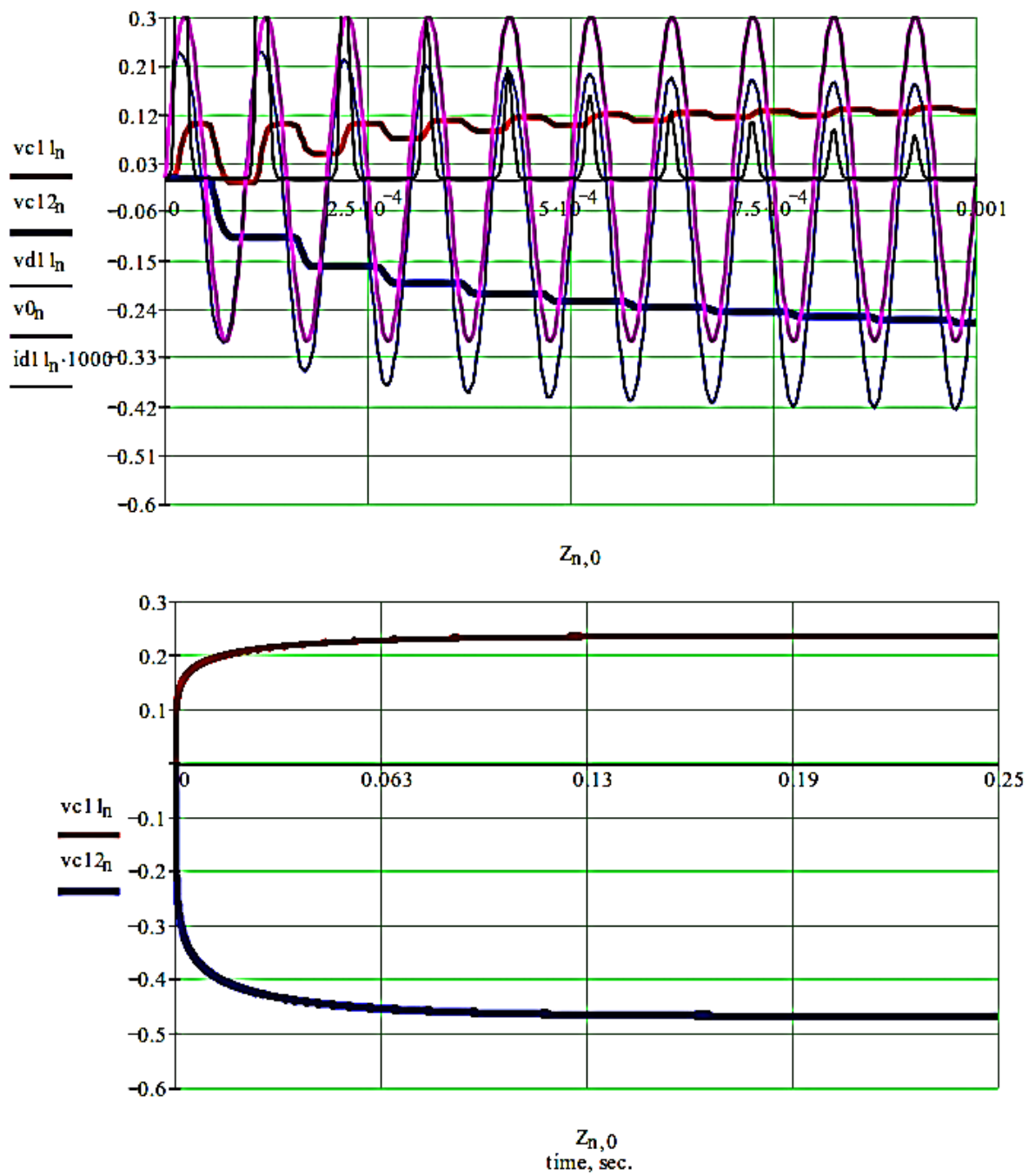


Рисунок 6.20 – Динамічні процеси в ПДІ (амплітуда вхідної напруги перетворювача 0,3В)

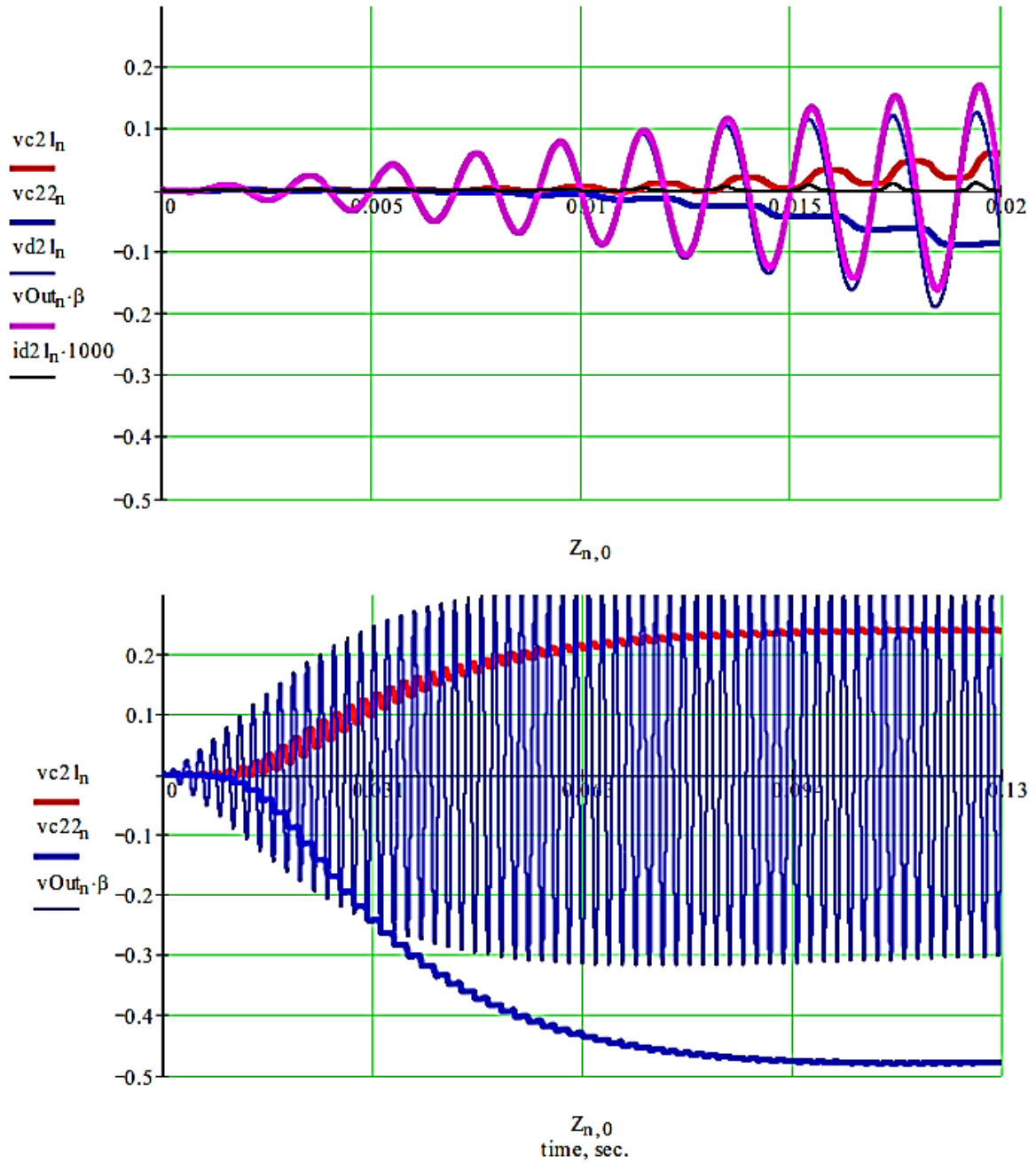


Рисунок 6.21 – Динамічні процеси в ПД2 та встановлення напруги на виході β -ланки (амплітуда входньої напруги перетворювача 0,3В)

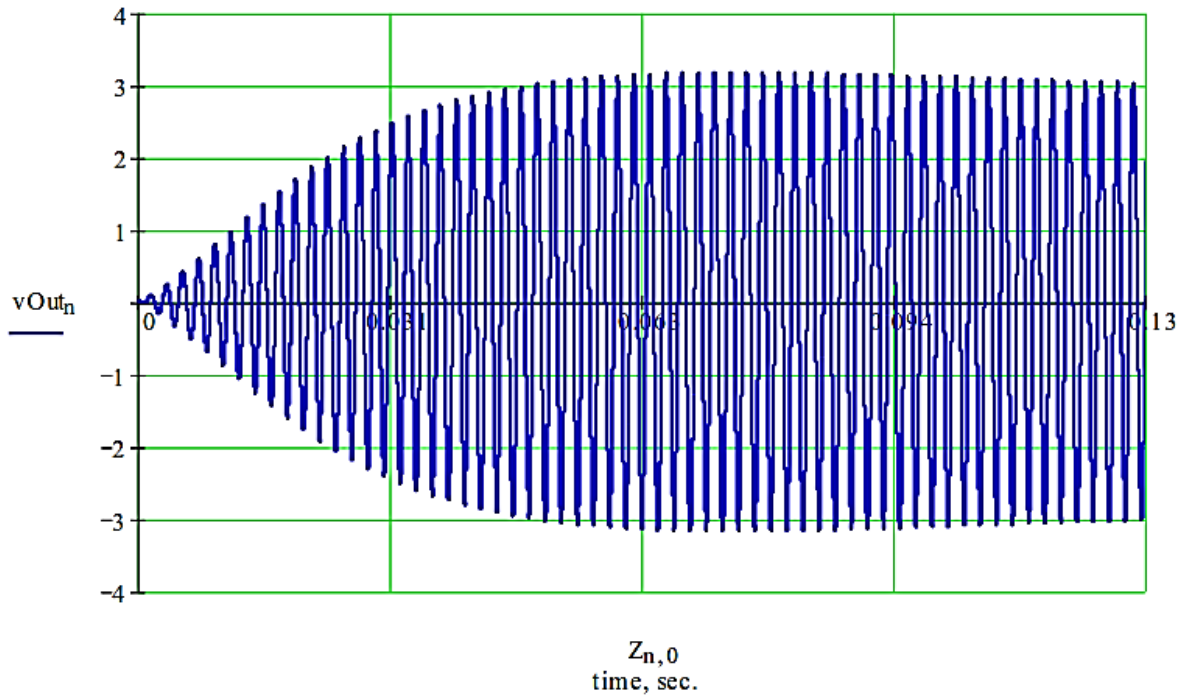


Рисунок 6.22 – Вихідна змінна напруга перетворювача $v_{Out}(t)$ низької частоти f_2 (амплітуда вихідної напруги 3В)

Порівняння вхідної та вихідної напруг перетворювача в усталеному режимі

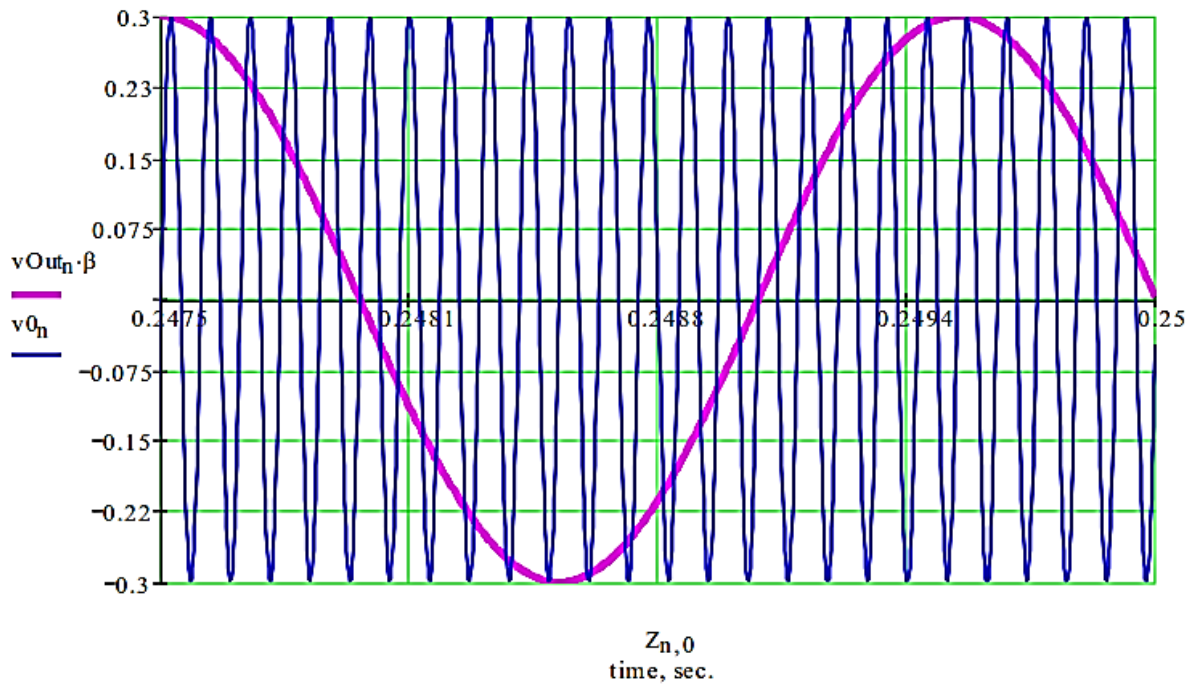


Рисунок 6.23 – Порівняння вхідної напруги $v_0(t)$ високої частоти f_1 та напруги зворотного зв'язку $v_{Out}(t)\beta$ (низька частота f_2) в усталеному режимі

Моделювання амплітудного детектору

на операційному підсилювачі з від'ємним зворотним зв'язком

На рис. 6.24 наведено схему амплітудного детектора на операційному підсилювачі, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком (схема – "ідеальний діод").

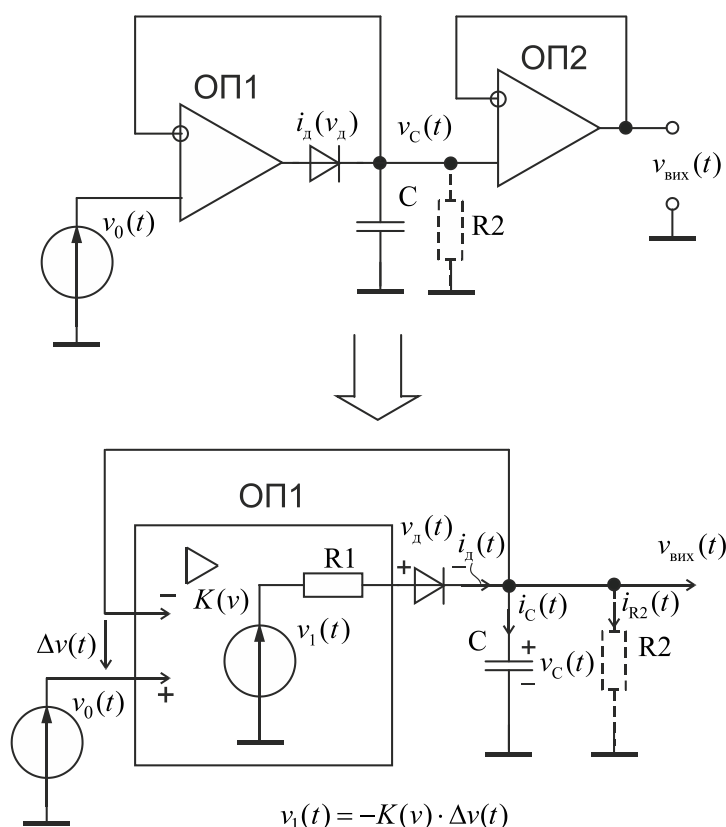


Рисунок 6.24 – АД на операційному підсилювачі (схема – "ідеальний діод")

Документ Mathcad з аналізом, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком, наведено на рис. 6.25. Математична модель АД за схемою "ідеальний діод" надана у вигляді символьного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Застосуємо модель операційного підсилювача у вигляді безінерційної ланки з нелінійною амплітудною характеристикою на зразок насичення:

$$K(v) = K_0 \cdot \text{th}(a \cdot v) = K_0 \frac{e^{a \cdot v} - e^{-a \cdot v}}{e^{a \cdot v} + e^{-a \cdot v}}, \quad \text{де } \text{th}(a \cdot v) \in [-1; +1] \quad (6.13)$$

$R1 := 1000$ - вихідний опір
операційного
підсилювача

$R2 := 100000$ $C := 0.1 \times 10^{-6}$ $Is := 1 \cdot 10^{-7}$

$$Id(v) := Is \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad Gd(v) := \frac{d}{dv} Id(v) \text{ float}, 5 \rightarrow 3.8462 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(38.462 \cdot v)$$

- диференціальна
провідність діода

$K0 := 10$ $a := 1000$

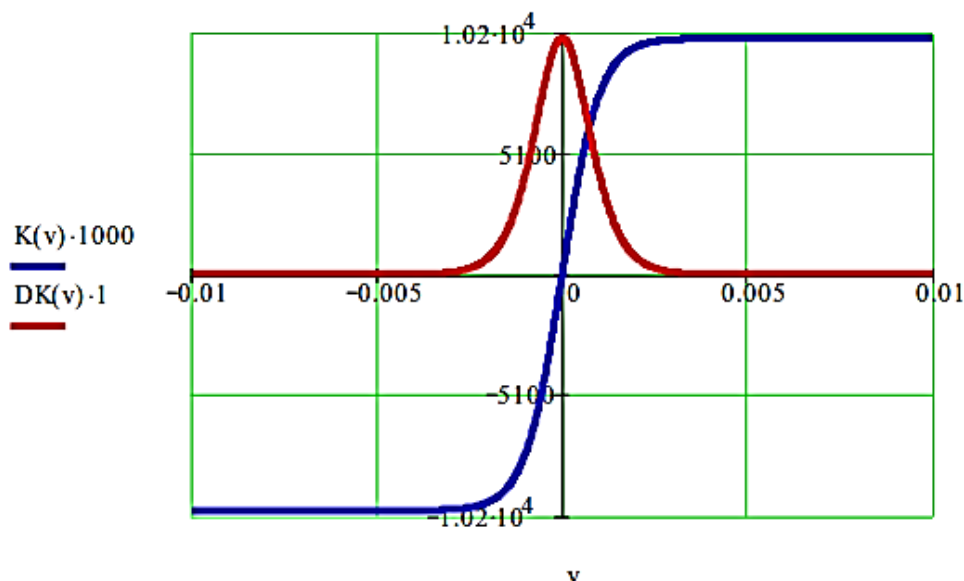
Модель операційного підсилювача

$K(v) := K0 \cdot \tanh(v \cdot a)$

- модель амплітудної характеристики операційного підсилювача
у вигляді нелінійності на зразок насичення.

$$DK(v) := \frac{d}{dv} K(v) \text{ float}, 3 \rightarrow 1.00 \cdot 10^4 - 1.00 \cdot 10^4 \cdot \tanh(1.00 \cdot 10^3 \cdot v)^2$$

- динамічний коефіцієнт
підсилення



$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц $V0 := 1$ - амплітуда, В

$v0(t) := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$
- період, сек.

$$DV0(t) := \frac{d}{dt} V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi$$

$TA := 8 \cdot T$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор початкових умов для змінних $V_C(t)$, $V_D(t)$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot Id(x_1) - \frac{1}{R2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R1 \cdot Gd(x_1)} \left[DK(x_0 - v0(t)) \cdot DV0(t) - \frac{DK(x_0 - v0(t)) + 1}{C} \cdot \left(Id(x_1) - \frac{1}{R2} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := Rkadapt(x, 0, TA, 100000, D)$

- Розв'язок системи нелінійних диференціальних
рівнянь

Рисунок 6.25 – Математична модель АД у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок: $K(v)$ – нелінійна амплітудна характеристика підсилювача (масштаб $\times 50$); $DK(v)$ – динамічний коефіцієнт підсилення як похідна від $K(v)$

$n := 0..99999$ $vc_n := Z_{n,1}$ $vd_n := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час
 $v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vd_n)$ - струм через діод

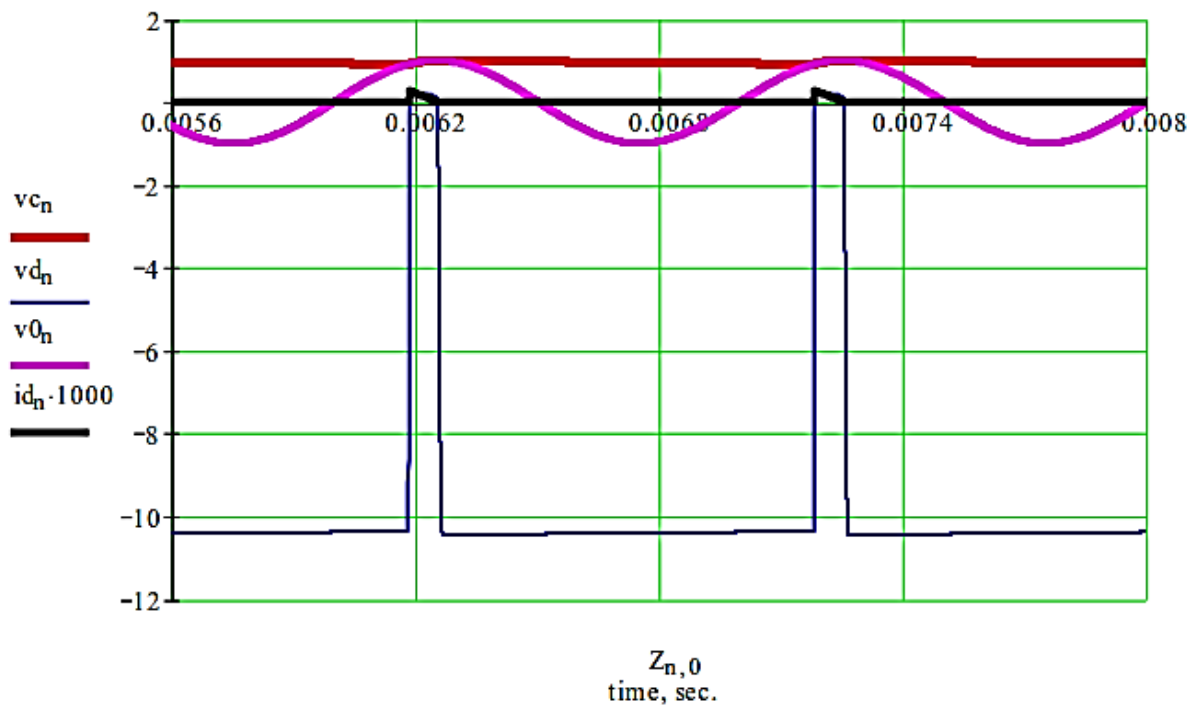
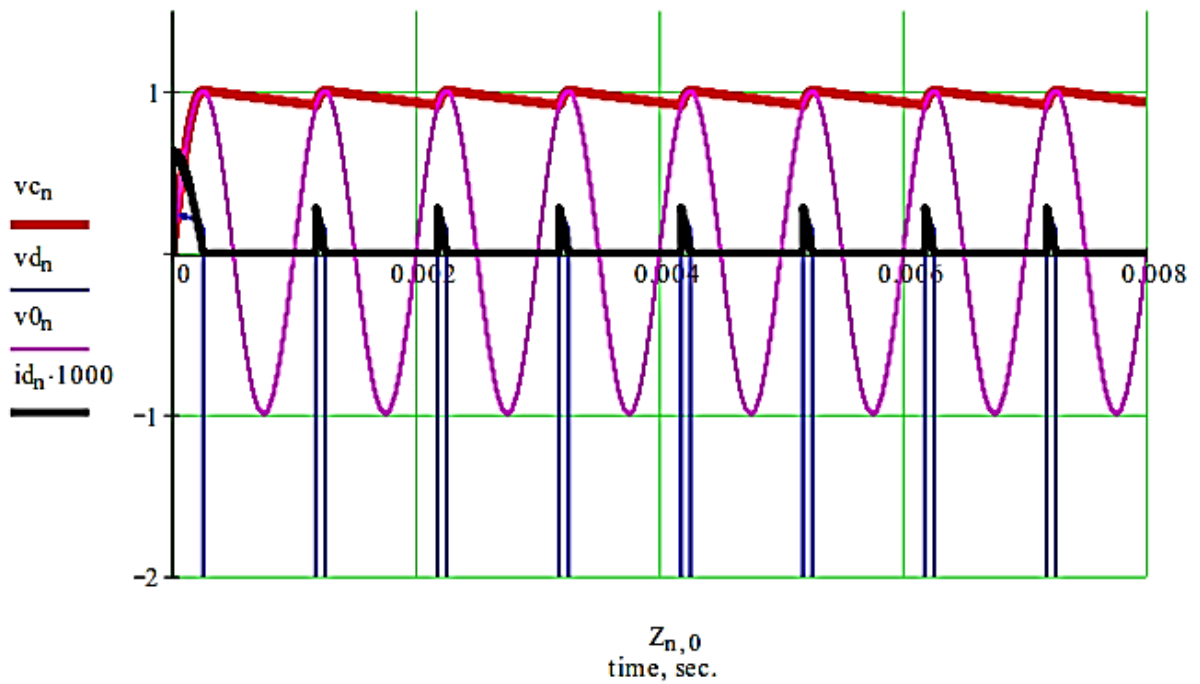


Рисунок 6.26 – Моделювання АД (схема – "ідеальний діод"), коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком: vc – напруга на конденсаторі C ; vd – напруга на діоді; $v0$ – вхідна напруга; id – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

На рис. 6.26 наведено результати моделювання. Бачимо, що вихідна напруга АД практично не залежить від падіння напруги на відкритому діоді.

Контрольні запитання і завдання

1. *Наведіть модель діода в режимі великого сигналу. Як визначається нелінійна ємність діода, як залежить ємність від напруги? Як визначається опір $p-n$ переходу з нелінійною вольт-амперною характеристикою на змінному та постійному струмі?*

2. *Які стандартні процедури і функції існують для чисельного розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь в системах комп'ютерної математики? Пояснить склад матриці розв'язків. Чи є відмінності у розв'язку систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь?*

3. *Модель амплітудного детектору з відкритим входом – система нелінійних диференціальних рівнянь. Що називають нормальною системою рівнянь стану у формі Коші, змінними стану? Пояснить сутність методу складання системи. Як враховується нелінійність опору, ємності діода?*

4. *Модель амплітудного детектору з закритим входом – система нелінійних диференціальних рівнянь. Пояснить сутність методу складання системи. Як враховується нелінійність моделі діоду?*

5. *Пояснить принцип роботи амплітудного детектору за структурою Андерсона та його переваги, принцип складання системи нелінійних диференціальних рівнянь.*

6. *Як враховується нелінійність моделі операційного підсилювача під час моделювання амплітудного детектору за схемою типу "ідеальний діод" (на операційному підсилювачі з від'ємним зворотним зв'язком)?*

Лекція 18. Дослідження динаміки лінійного перетворювача середньоквадратичних значень змінної напруги

Широкопasmові вимірювальні перетворювачі середньоквадратичних значень змінної напруги на термоелементах. Лінеаризація характеристики за методом взаємно-зворотних перетворень. Модель перетворювача у статичному режимі. Похибка нелінійності від статизму системи та шляхи її зменшення. Структурна модель перетворювача у динамічному режимі та час встановлення вихідної напруги. Система нелінійних диференціальних рівнянь – математична модель перетворювача у динамічному режимі. Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь. Зменшення часу встановлення вихідної напруги. Заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах. Операція "ковзного" інтегрування. Контрольні запитання і завдання.

Середньоквадратичне значення (СКЗ) змінної напруги дорівнює

$$v_{\text{скз}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_x^2(t) dt},$$

де T – час вимірювань або період сигналу.

Для реалізації вимірювань у вольтметрах використовуються перетворювачі змінної напруги у постійну напругу за СКЗ, яка потім вимірюється. Такі перетворювачі є нелінійними колами та обов'язково у своєму складі мають інерційні елементи.

Середньоквадратичне (ефективне, діюче) значення змінної напруги дорівнює постійній напрузі при тій самій потужності, що виділяється на тому самому навантаженні. Становить особливий інтерес при вимірюванні шумів і сигналів з широким спектром.

У широкопasmових вольтметрах для реалізації прецизійних вимірювань застосовують термоелектричні перетворювачі (ТП). Найпоширеніші – вакуумні, плівкові та напівпровідникові ТП з нагрівальним елементом у вигляді резистора й різними давачами температури: терморпарою, напівпровідниковим діодом, транзистором; диференціальні багатоелементні ТП типу ДТПС тощо. Нагрівальний елемент і давач температури мають тепловий зв'язок, тому в ТП вихідна напруга постійного струму залежить від потужності вхідної напруги змінного струму.

Розглянемо термоперетворювачі типу ТВБ (термоперетворювач вакуумний безконтактний). Технічні характеристики ТВБ-4: номінальний вхідний струм нагрівального елемента – 10 мА; допустиме значення вхідного струму – 15 мА; номінальне значення термоелектрорушійної сили (термо-ЕРС) – $E_{\text{ЕРС}} = 12 \div 16$ мВ; опір нагрівального елемента (нагрівника) – $r_{\text{н}} = 40 \div 60$ Ом; вихідний опір термопари – $r_{\text{вих}} = 15 \div 20$ Ом; стала часу, що характеризує інерційні властивості ТВБ-4, приблизно дорівнює $\tau = 1 \div 1,5$ с.

Переваги таких перетворювачів наступні: мала частотна похибка в діапазоні частот до десятків та сотень мегагерц, висока квадратичність характеристики, незалежність похибки від форми кривої вхідної напруги.

Але при звичайному включенні таких ТП в схемі вольтметрів шкала матиме квадратичний характер.

Тому використовують диференціальне включення ТП, що реалізує метод взаємно-зворотних перетворень [27].

Лінеаризація характеристики за методом взаємно-зворотних перетворень

Схему лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги (ЛПСКЗН), побудовану за методом взаємно-зворотних перетворень, наведено на рис. 6.27.

Статичний режим

Розглянемо статичний режим роботи ЛПСКЗН за інформативним параметром вхідної напруги та визначимо нелінійність характеристики перетворення.

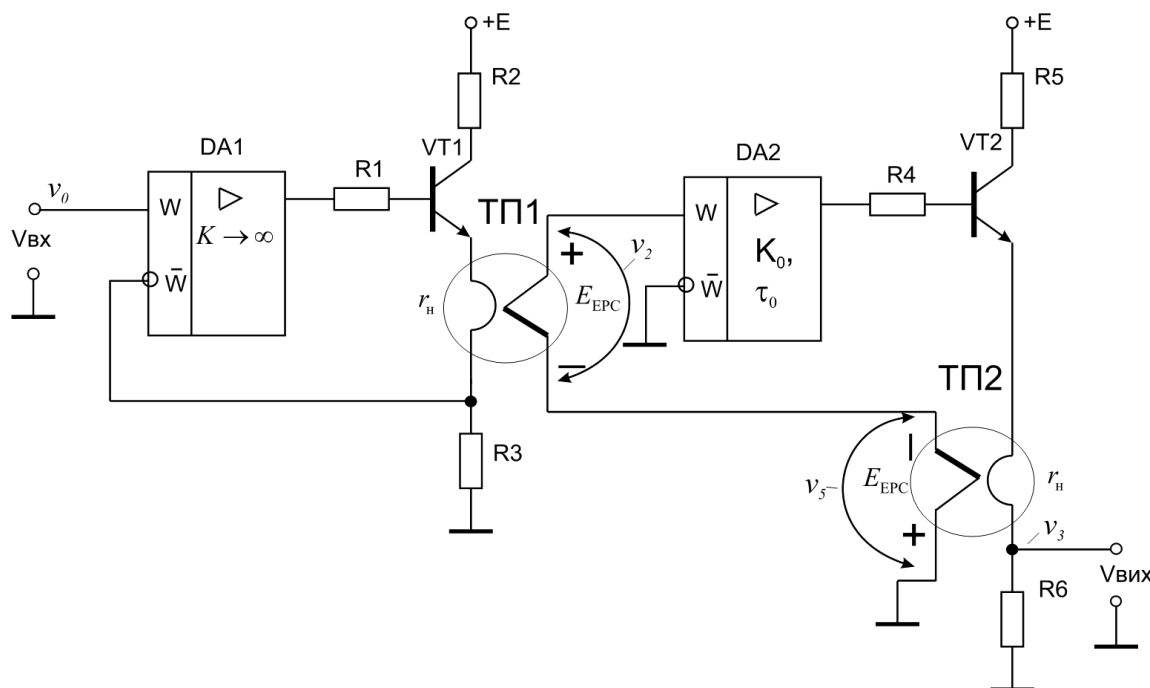


Рисунок 6.27 – Лінійний перетворювач СКЗ змінної напруги

Термо-ЕРС окремого ТП визначається таким чином:

$$E_{\text{ЕРС}} = \alpha_{\text{Т}} \cdot i_{\text{нСКЗ}} v_{\text{нСКЗ}} = \frac{\alpha_{\text{Т}}}{r_{\text{н}}} \cdot v_{\text{нСКЗ}}^2 = \alpha_{\text{Т}} \cdot r_{\text{н}} i_{\text{нСКЗ}}^2,$$

де $\alpha_{\text{Т}}$ – коефіцієнт, який враховує ефективність перетворення тепла у вихідну напругу; $r_{\text{н}}$ – опір нагрівника; $i_{\text{нСКЗ}} = v_{\text{нСКЗ}} / r_{\text{н}}$ – струм (середньоквадратичне значення) через нагрівник ТП; $v_{\text{нСКЗ}}$ – середньоквадратичне значення змінної напруги безпосередньо на опорі нагрівника ТП.

У схемі на рис. 6.27 струм через нагрівник ТП1 не залежить від значення його опору $r_{\text{н1}}$ (режим заданого струму). Враховуючи те, що $v_{\text{R3}}(t) = v_{\text{ВХ}}(t)$, струм $i_{\text{нТП1}}(t)$ можна визначити наступним чином $i_{\text{нТП1}}(t) = i_{\text{R3}}(t) = \frac{v_{\text{ВХ}}(t)}{R_3}$.

Отже, вибираючи $R_3 = 100$ Ом, одержимо при $v_{\text{ВХСКЗ}} = 1$ В струм через нагрівник $i_{\text{нСКЗ,ТП1}} = 10$ мА. Якщо при $i_{\text{нСКЗ,ТП1}} = 10$ мА вихідна термо-ЕРС $E_{\text{ЕРС}} = 16$ мВ, то функція перетворення для ТП1 за середньоквадратичним

значенням вхідної напруги буде $v_2 = E_{\text{ЕРС}_{\text{ТП1}}} = k_1 \cdot v_{\text{ВХСКЗ}}^2$, де $0,016 \text{ В}$
 $= k_1 \cdot v_{\text{ВХСКЗ}}^2 = k_1 \cdot (1\text{В})^2$, відповідно $k_1 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right)$.

Аналогічно для ТП2 $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}}(t) = \frac{v_{\text{ВХ}}(t)}{R_6}$. Якщо, також вибираємо $R_6 = 100 \text{ Ом}$, то отримаємо те, що при вихідній напрузі $v_{\text{ВХ}} = 1 \text{ В}$ (напруга постійного струму), струм через нагрівник $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}} = 10 \text{ мА}$. При $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}} = 10 \text{ мА}$ вихідна термо-ЕРС $E_{\text{ЕРС}} = 16 \text{ мВ}$. Отже, функція перетворення для ТП2 в складі схеми буде $v_5 = E_{\text{ЕРС}_{\text{ТП2}}} = k_2 \cdot v_{\text{ВХ}}^2$, де $0,016 \text{ В} = k_2 \cdot v_{\text{ВХ}}^2 = k_2 \cdot (1\text{В})^2$ і відповідно $k_2 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right)$.

Характеристика перетворення ЛПСКЗН за схемою рис. 6.27 у статичному режимі визначена в документі Mathcad на рис. 6.28:

$$v_{\text{ВХ}} = F(v_{\text{ВХСКЗ}}) = \frac{1}{2Kk_2} [-1 + \sqrt{1 + 4K^2k_1k_2v_{\text{ВХСКЗ}}^2}],$$

де K – коефіцієнт підсилення підсилювача на постійному струмі (для наочності в документі на рис. 6.28 коефіцієнт обрано невеликим $K = 100$).

При збільшенні K характеристика наближається до лінійній:

$$v_{\text{ВХ}} = F(v_{\text{ВХСКЗ}}) = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \cdot v_{\text{ВХСКЗ}}. \quad (6.14)$$

У наступному документі Mathcad (рис. 6.29) наведено приклад, як можна ще зменшити похибку нелінійності від статизму системи (при тому самому невеликому $K = 100$).

Метод полягає в тому, що в прямий канал підсилення введена додаткова нелінійність типу $\sqrt{}$. В результаті глибина від'ємного зворотного зв'язку не залежить від рівня перетворюваного сигналу.

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

Given

TOL := 10⁻⁶

$$v_2 = k_1 \cdot v^2 \quad v_5 = k_2 \cdot v_3^2 \quad (v_2 - v_5) \cdot K = v_3$$

$$\left[(\text{Find}(v_2, v_5, v_3))^{(0)} \right] \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{k_1 \cdot v^2}{K \cdot k_1 \cdot v^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \\ \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{bmatrix}$$

$$v_3 := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v_3 \rightarrow \frac{(k_2 \cdot k_1 \cdot v^2)^{\frac{1}{2}}}{k_2} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k_1 := 0.016 \quad k_2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k_2} \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k_2 \cdot k_1 \cdot x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F_0(x) := \frac{(k_2 \cdot k_1 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}}}{k_2}$$

- ідеальна лінеарізована характеристика перетворення

$$\Delta F(x) := F(x) - F_0(x)$$

- похибка від нелінійності

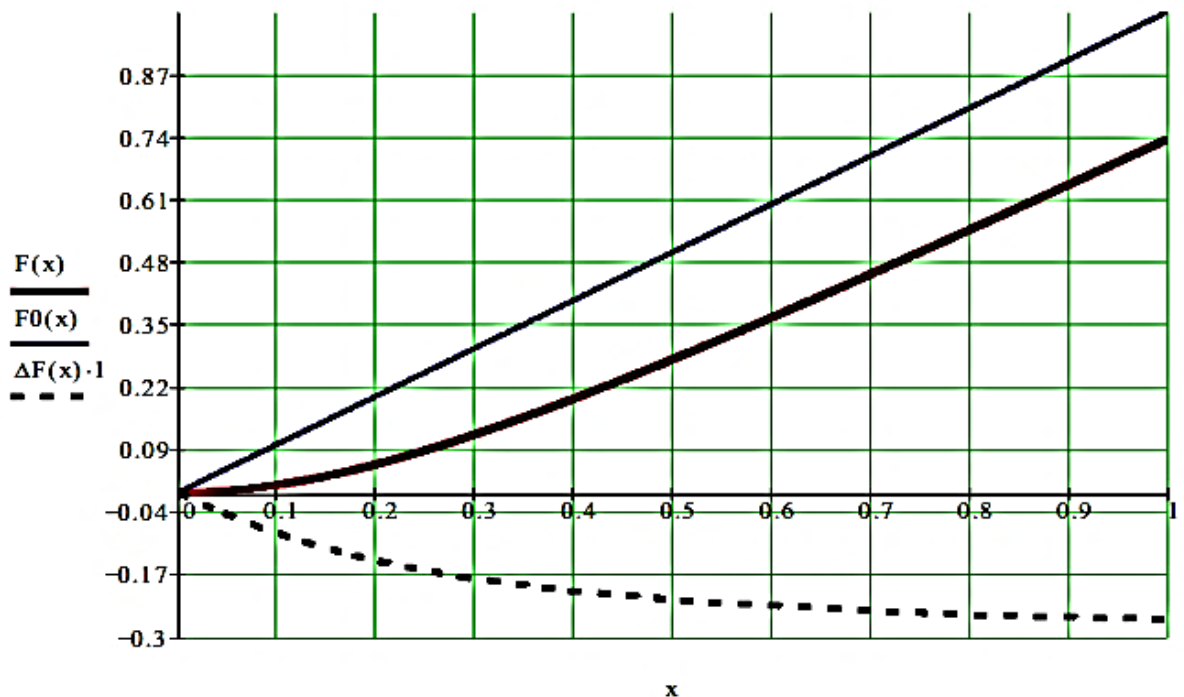


Рисунок 6.28 – Статична характеристика ЛПСКЗН

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

Given

$$v_2 = k_1 \cdot v^2 \quad v_5 = k_2 \cdot v_3^2 \quad \sqrt{v_2 - v_5} \cdot K = v_3 \quad \text{- введення нелінійності типу } \sqrt{\quad} \text{ в канал підсилення}$$

$$v_3 := \text{Find}(v_2, v_5, v_3)_2$$

$$v_3 \rightarrow \left[k_1 \cdot \frac{v^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v_3 \rightarrow \left(k_1 \cdot \frac{v^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k_1 := 0.016 \quad k_2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \left[k_1 \cdot \frac{x^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F_0(x) := \left(k_1 \cdot \frac{x^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- ідеальна лінеарізована характеристика перетворення}$$

$$\Delta F(x) := F(x) - F_0(x) \quad \text{- похибка від нелінійності}$$

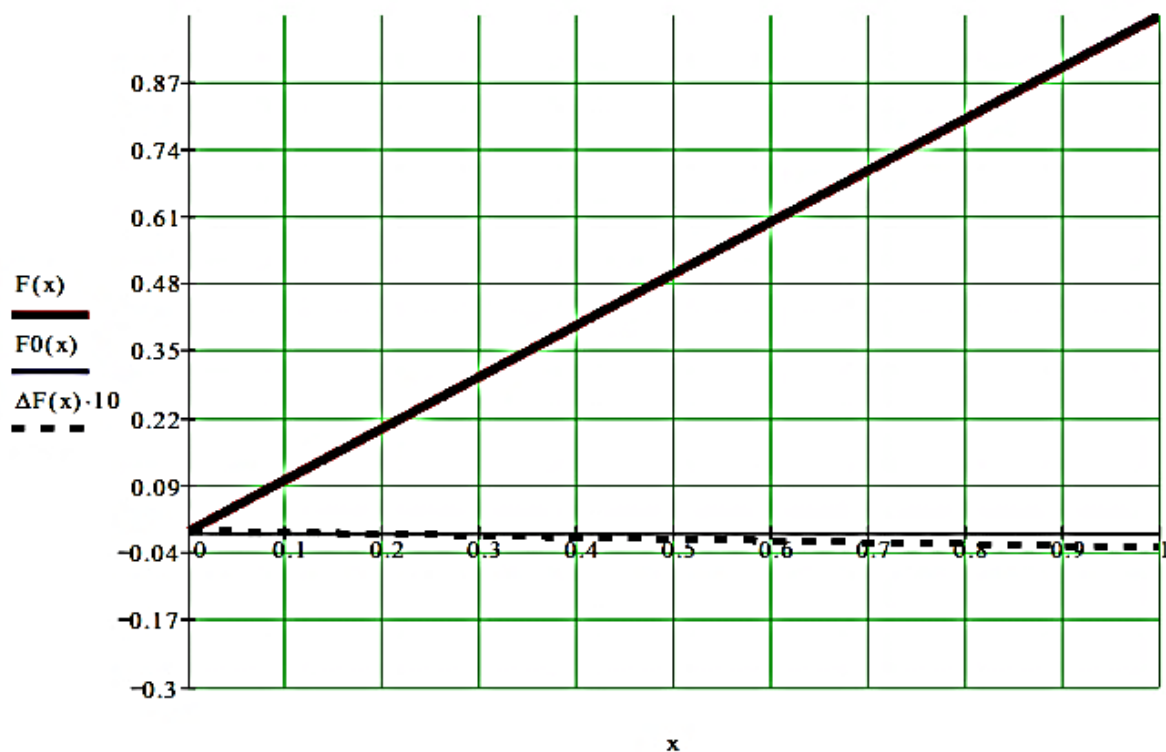


Рисунок 6.29 – Зменшення похибки нелінійності від статизму системи

Динамічний режим

Якщо розглядати окремий ТВБ в динамічному режимі, то час встановлення вихідної напруги дуже значний, що визначається великим за значенням τ .

Метод взаємно-зворотних перетворень дозволяє суттєво зменшити час встановлення вихідної напруги із заданою точністю. Отже, розглянемо роботу схеми в динаміці.

Динамічну модель окремого ТВБ можна представити в спрощеному вигляді, як на рис. 6.30. Модель включає нелінійну квадратичну безінерційну частину (НЧ) та лінійну інерційну частину (ЛЧ), що має вигляд інерційної ланки першого порядку

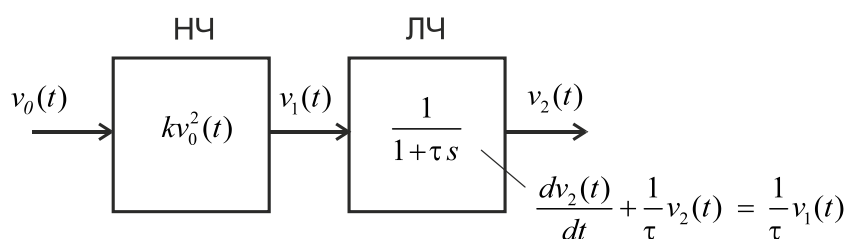


Рисунок 6.30 – Динамічна модель ТВБ

Динамічну модель всього ЛПСКЗН у вигляді структурної схеми наведено на рис. 6.31.

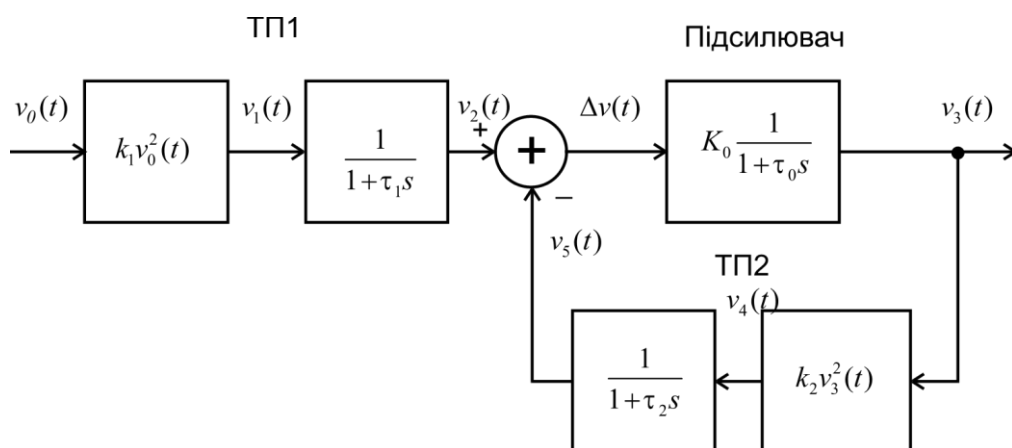


Рисунок 6.31 – Динамічна модель ЛПСКЗН за схемою рис. 6.27

Як бачимо, ЛПСКЗН включає нелінійну ланку в зворотному зв'язку, вплив якої відокремити не можна. Тому неможна аналізувати таку схему операторним методом, як для лінійних систем.

Опишемо роботу схеми системою диференційних рівнянь першого порядку за методом змінних стану. Модель підсилювача у прямому колі (рис. 6.27) має вигляд:

$$H(s) = K_0 \frac{1}{1 + \tau_0 s}.$$

Тому диференційне рівняння, що описує підсилювач, буде наступним:

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} \Delta v_{2,5}(t) - \frac{1}{\tau_0} v_3(t),$$

де $\Delta v_{2,5}(t) = v_2(t) - v_5(t)$ – вхідна напруга підсилювача; $v_3(t)$ – вихідна напруга підсилювача.

Диференційне рівняння, яке описує напругу на виході ТП1:

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} v_1(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \quad v_1(t) = k_1 v_0^2(t).$$

Диференційне рівняння, яке описує напругу на виході ТП2:

$$\frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} v_4(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \quad v_4(t) = k_2 v_3^2(t).$$

Отже, нормальна система диференційних рівнянь першого порядку в формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} k_1 v_0^2(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \\ \frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} k_2 v_3^2(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} [v_2(t) - v_5(t)] - \frac{1}{\tau_0} v_3(t). \end{cases} \quad \begin{cases} v_2(0) = 0; \\ v_5(0) = 0; \\ v_3(0) = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Система містить одне *нелінійне* диференціальне рівняння відносно змінних стану. Початкові умови для змінних стану $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ приймаємо нульовими. Після розв'язку цієї системи відносно змінних $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ можна визначити вихідну напругу перетворювача $v_3(t)$, а також усі інші процеси в схемі.

Фрагмент документа Mathcad з прикладом розв'язку системи наведено на рис. 6.32. На рис. 6.33 наведено зображення процесів у ЛПСКЗН в динамічному режимі (далі по тексту – "динаміка") при підключенні до джерела постійної напруги, якщо стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с.

Отже, якщо ТП1 і ТП2 ідентичні за параметрами, то встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН відбувається набагато раніше, ніж встановлення термо-ЕРС окремих термоперетворювачів.

На рис. 6.34 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги низької частоти $f = 10$ Гц (стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с). Бачимо, що на низьких частотах виникають пульсації термо-ЕРС із-за недостатньої інерційності ТП, які підсилюються та виникають на виході ЛПСКЗН.

Дослідження динаміки лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги за методом взаємно-зворотних перетворень

$$v_0(t) := 0.707 \cdot \Phi(t) \quad - \text{вхідна напруга ЛПСКЗН, В} \quad \text{TOL} := 10^{-6}$$

Параметри підсилювача:

Параметри ТП1 і ТП2:

$$\begin{aligned} K_0 &:= 10000 & f_s &:= 1.592 & - \text{частота зрізу АЧХ підсилювача, Гц} & \tau_1 &:= 1.5 & k_1 &:= 0.016 \\ \tau_0 &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_s} & \tau_0 &= 0.1 & - \text{стала часу підсилювача, сек} & \tau_2 &:= 1.5 & k_2 &:= 0.016 \end{aligned}$$

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор початкових умов для змінних $V_2(t), V_5(t), V_3(t)$

- Розв'язок нормальної системи (в формі Коші) *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку, складеної за методом змінних стану.

$$\begin{aligned} \frac{dv_2(t)}{dt} \\ \frac{dv_5(t)}{dt} \\ \frac{dv_3(t)}{dt} \end{aligned} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} \cdot v_0(t)^2 - \frac{1}{\tau_1} \cdot x_0 \\ \frac{k_2}{\tau_2} \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau_2} \cdot x_1 \\ \frac{K_0}{\tau_0} \cdot (x_0 - x_1) - \frac{1}{\tau_0} \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

- символічний вектор правих частин системи *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку.

$$T := 10 \quad - \text{інтервал аналізу, сек.}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, T, 10000, D) \quad - \text{Розв'язок системи } \textit{нелінійних диференціальних рівнянь} \text{ за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком}$$

$\text{Rkadapt}(v, x_1, x_2, \text{npoints}, D)$ - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval $[x_1, x_2]$ using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рисунок 6.32 – Математична модель ЛПСКЗН (за методом взаємно-зворотних перетворень) у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи *нелінійних диференціальних рівнянь* та її розв'язок

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$n := 0..9999$ $v2_n := Z_{n,1}$ $v5_n := Z_{n,2}$ $v3_n := Z_{n,3}$

$\Delta v_n := v2_n - v5_n$ - напруга некомпенсації $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача

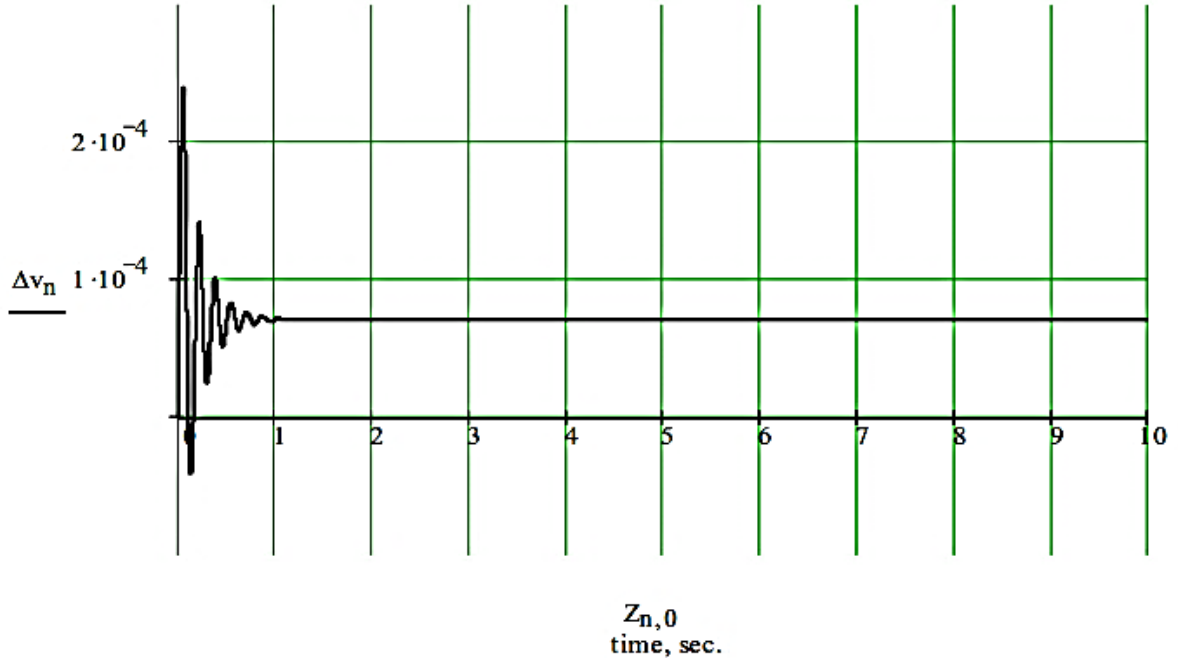
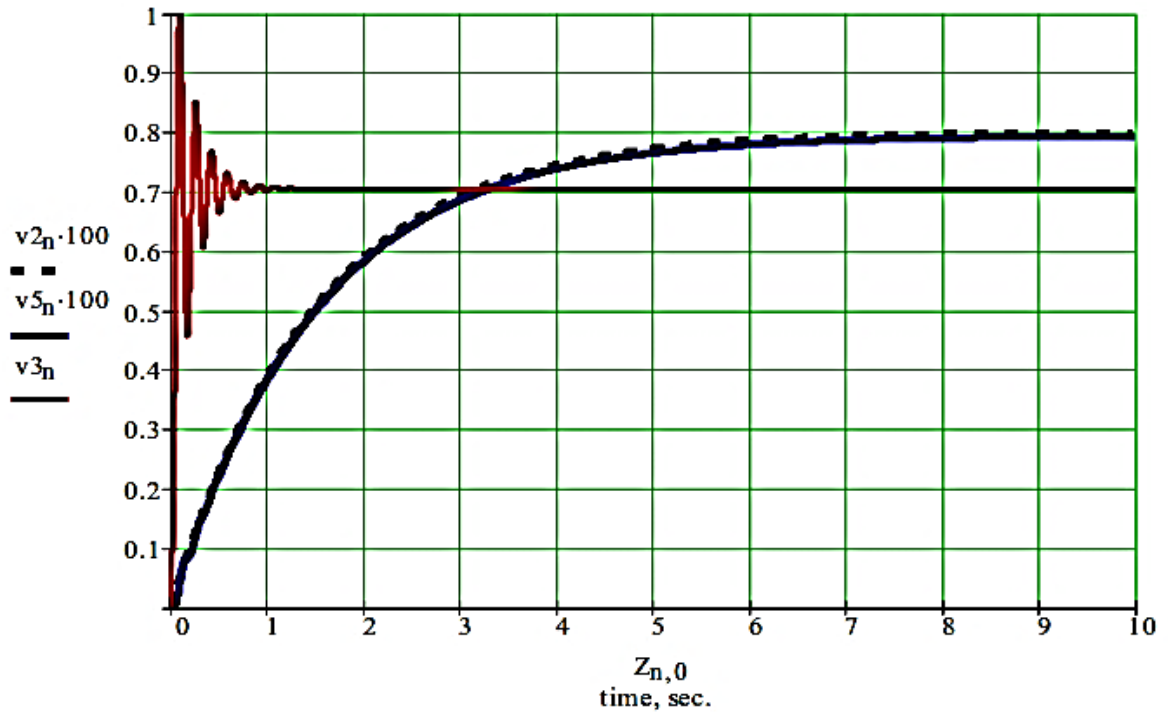


Рисунок 6.33 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела постійної напруги, якщо $K_0 = 10000$; $\tau_0 = 0,1$ с : $v2$ – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); $v5$ – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$); $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; Δv – напруга некомпенсації

$VRMS := 0.707$ $V0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$ $f := 10$ $v0(t) := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$n := 0..9999$ $v2_n := Z_{n,1}$ $v5_n := Z_{n,2}$ $v3_n := Z_{n,3}$ $\Delta v_n := v2_n - v5_n$

$t_n := Z_{n,0}$ $v0_n := V0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача

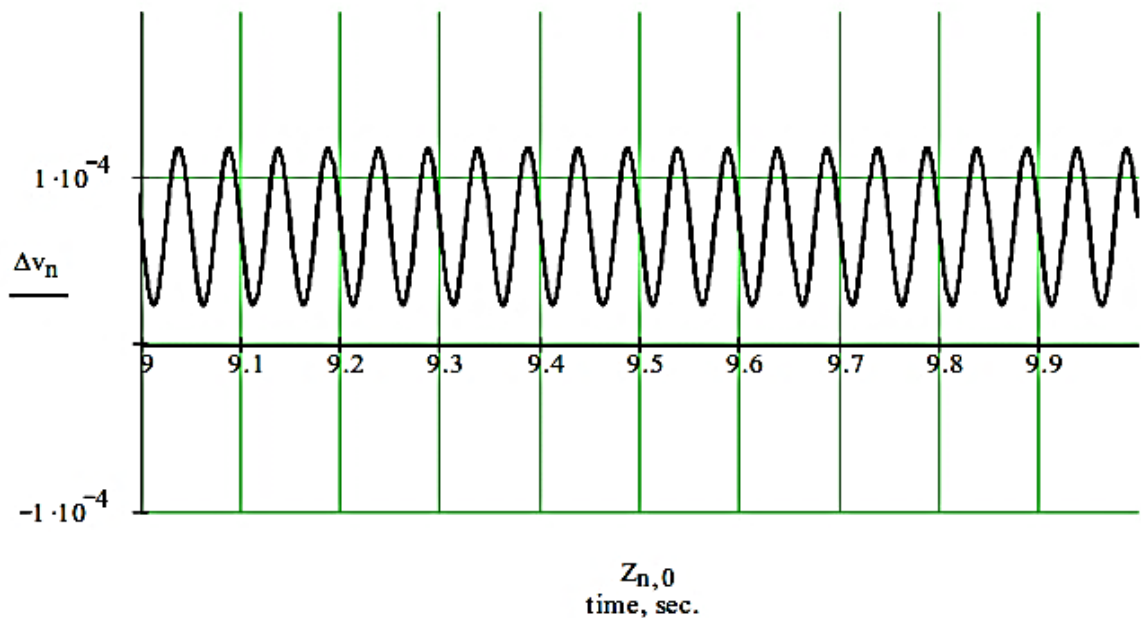
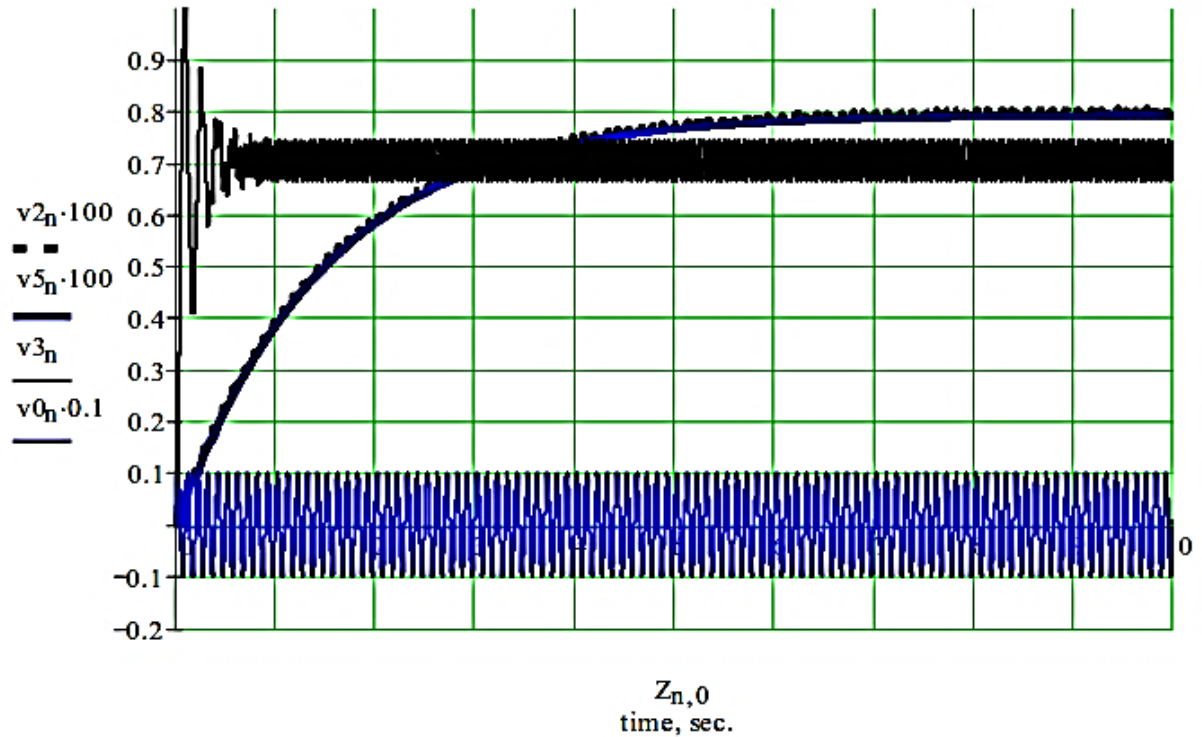


Рисунок 6.34 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц ($\tau_0 = 0,1$ с): $v2$ – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); $v5$ – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$); $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; $v0$ – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$); Δv – напруга некомпенсації

$VRMS := 0.707$ $V0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$ $f := 10$ $\tau_0 = 1$ - стала часу підсилювача

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$n := 0..9999$ $v2_n := Z_{n,1}$ $v5_n := Z_{n,2}$ $v3_n := Z_{n,3}$ $\Delta v_n := v2_n - v5_n$

$t_n := Z_{n,0}$ $v0_n := V0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$ - вхідна напруга

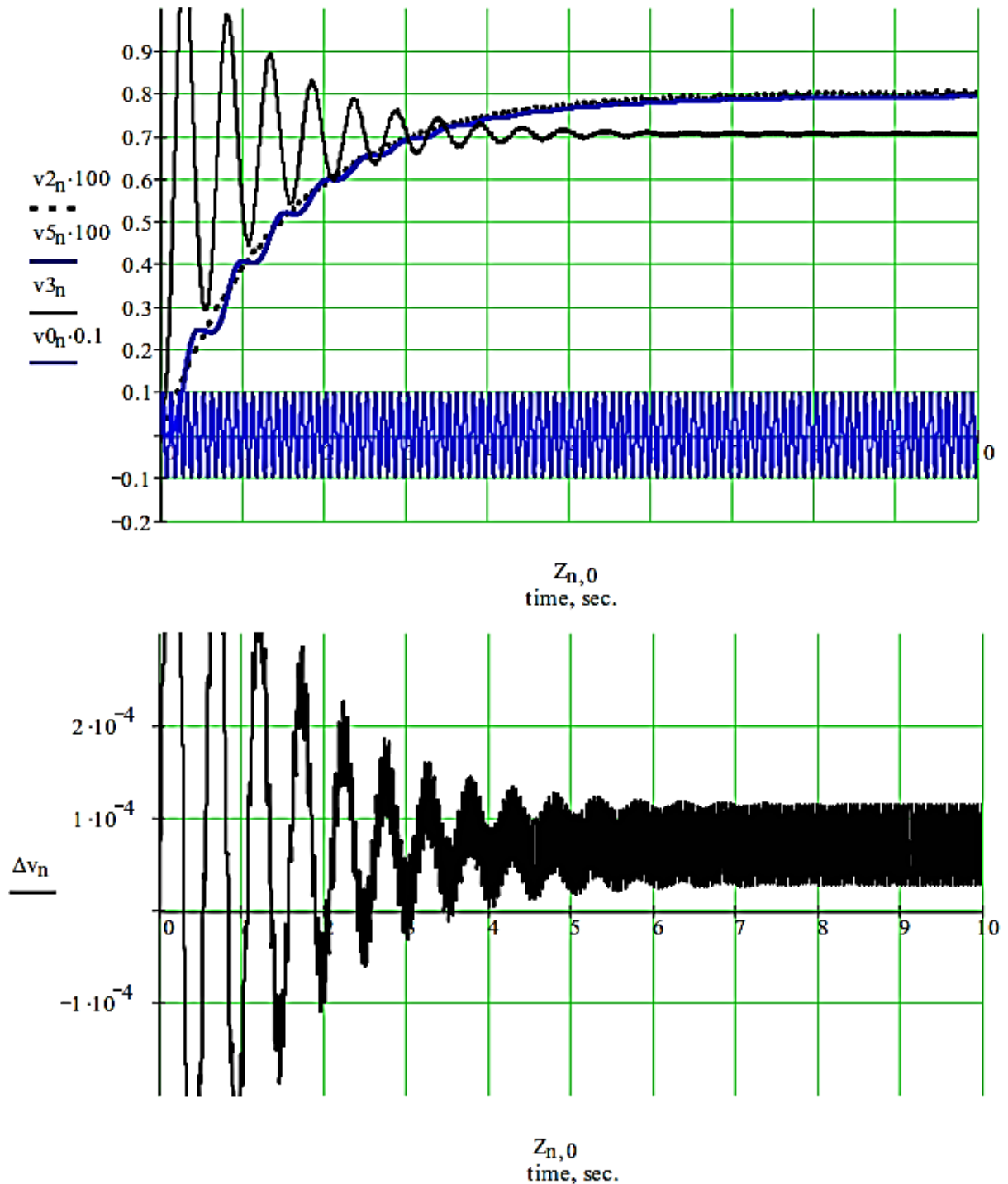


Рисунок 6.35 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц ($\tau_0 = 1$ с): $v2$ – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); $v5$ – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$); $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; $v0$ – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$); Δv – напруга некомпенсації

На рис. 6.35 наведено динаміку ЛПСКЗН при $f = 10$ Гц, якщо сталу часу підсилювача збільшити до $\tau_0 = 1$ с. Бачимо, що рівень напруги низькочастотних пульсацій на виході ЛПСКЗН зменшений, але це досягнуто за рахунок значного збільшення часу встановлення вихідної напруги.

Заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах

Розглянемо приклад заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах. Метод полягає у введенні додаткового каналу перетворення (рис. 6.36) на базі ТПЗ, на який подається сигнал, що має зсув за фазою на 90° відносно вхідного сигналу перетворювача, та в додаванні вихідних термо-ЕРС ТП1 і ТПЗ.

Метод не знижує швидкодії самого лінійного перетворювача, але фазообертач "вносить" власний вплив у встановлення вихідного сигналу ЛПСКЗН.

На рис. 6.37 наведено математичну модель ЛПСКЗН у вигляді символного вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних, що описує схему в даному випадку. На рис. 6.38 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц (стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с). Для наочності введена деяка неідентичність термоперетворювачів за сталою часу.

Бачимо, що напруга пульсацій у цьому випадку суттєво зменшується, в порівнянні з тим, що наведено на рис. 6.34, при тій же швидкодії встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН (стала часу $\tau_0 = 0,1$ с). За повної ідентичності ТП1 і ТПЗ можна досягти повного заглушення пульсації термо-ЕРС (взаємно віднімаються) в різницевій напрузі некомпенсації, що подається на вхід підсилювача.

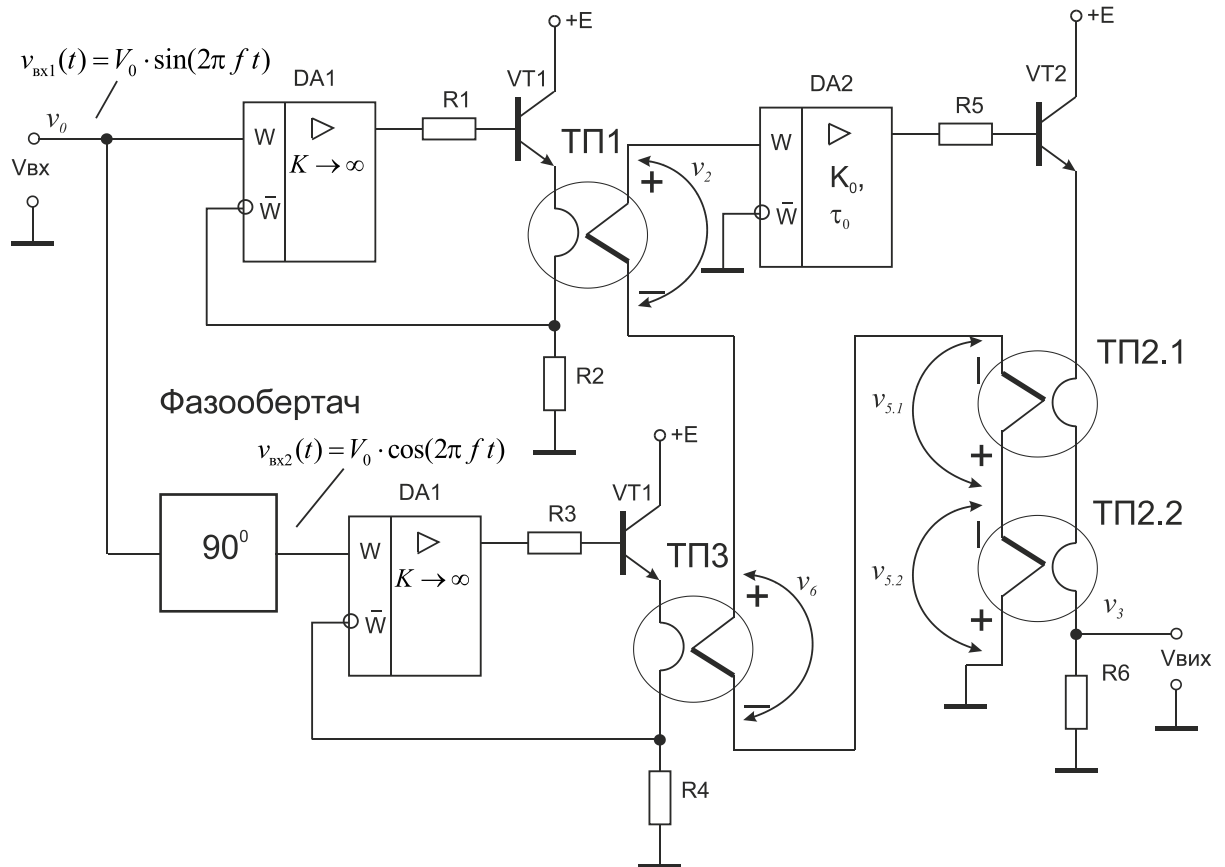


Рисунок 6.36 – Введення додаткового каналу корекції пульсацій термо-ЕРС на низьких частотах

Дослідження корекції пульсації на низьких частотах

$$\begin{aligned} \text{VRMS} &:= 0.707 & V_0 &:= \text{VRMS} \cdot \sqrt{2} & f &:= 10 & v_0(t) &:= V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) & \text{TOL} &:= 10^{-6} \\ & & & & & & & & & \text{- вхідна напруга} \\ \phi &:= 0 & z_k(t) &:= V_0 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{180} \cdot \phi\right) & & & & & & \text{- компенсуюча напруга} \end{aligned}$$

Параметри підсилювача:

$$\begin{aligned} K_0 &:= 10000 & f_s &:= 1.5917 & & \text{- частота зрізу АЧХ} \\ & & & & & \text{підсилювача, Гц} \\ \tau_0 &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_s} & \tau_0 &= 0.1 & & \text{- стала часу підсилювача, сек.} \end{aligned}$$

Параметри ТП1 і ТП2.1, ТП2.2:

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= 1.5 & k_1 &:= 0.016 \\ \tau_2 &:= 1.5 & k_2 &:= 0.016 \end{aligned}$$

Параметри ТП3 у
корегуючому каналі:

$$\tau_3 := 1.4 \quad k_3 := 0.016$$

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов для змінних} \\ V_2(t), V_5(t), V_3(t), V_6(t)$$

- Розв'язок нормальної системи
(в формі Коші) *нелінійних*
диференціальних рівнянь
першого порядку, складеної
за методом змінних стану.

$$\begin{aligned} \frac{dv_2(t)}{dt} \\ \frac{dv_5(t)}{dt} \\ \frac{dv_3(t)}{dt} \\ \frac{dv_6(t)}{dt} \end{aligned} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} \cdot v_0(t)^2 - \frac{1}{\tau_1} \cdot x_0 \\ \frac{k_2}{\tau_2} \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau_2} \cdot x_1 \\ \frac{K_0}{\tau_0} \cdot (x_0 - 2 \cdot x_1 + x_3) - \frac{1}{\tau_0} \cdot x_2 \\ \frac{k_3}{\tau_3} \cdot z_k(t)^2 - \frac{1}{\tau_3} \cdot x_3 \end{bmatrix} \quad \text{- символічний вектор правих} \\ \text{частин системи } \textit{нелінійних} \\ \text{диференціальних рівнянь} \\ \text{першого порядку.}$$

$$T := 5 \quad \text{- інтервал аналізу, сек.}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, T, 10000, D) \quad \text{- Розв'язок системи } \textit{нелінійних} \text{ диференціальних} \\ \text{рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком}$$

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рисунок 6.37 – Математична модель ЛПСКЗН (у вигляді символічного вектору $D(t, x)$ правих частин системи *нелінійних* диференціальних рівнянь) у випадку додаткового каналу корекції напруги пульсацій та її розв'язок

$VRMS = 0.707$ $V0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$, $V_6(t)$:

$n := 0..9999$ $v2_n := Z_{n,1}$ $v5_n := Z_{n,2}$ $v3_n := Z_{n,3}$ $v6_n := Z_{n,4}$

$v26_n := v6_n + v2_n$ $t_n := Z_{n,0}$ $v0_n := V0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$ $\Delta v_n := v2_n + v6_n - 2 \cdot v5_n$
- напруга некомпенсації

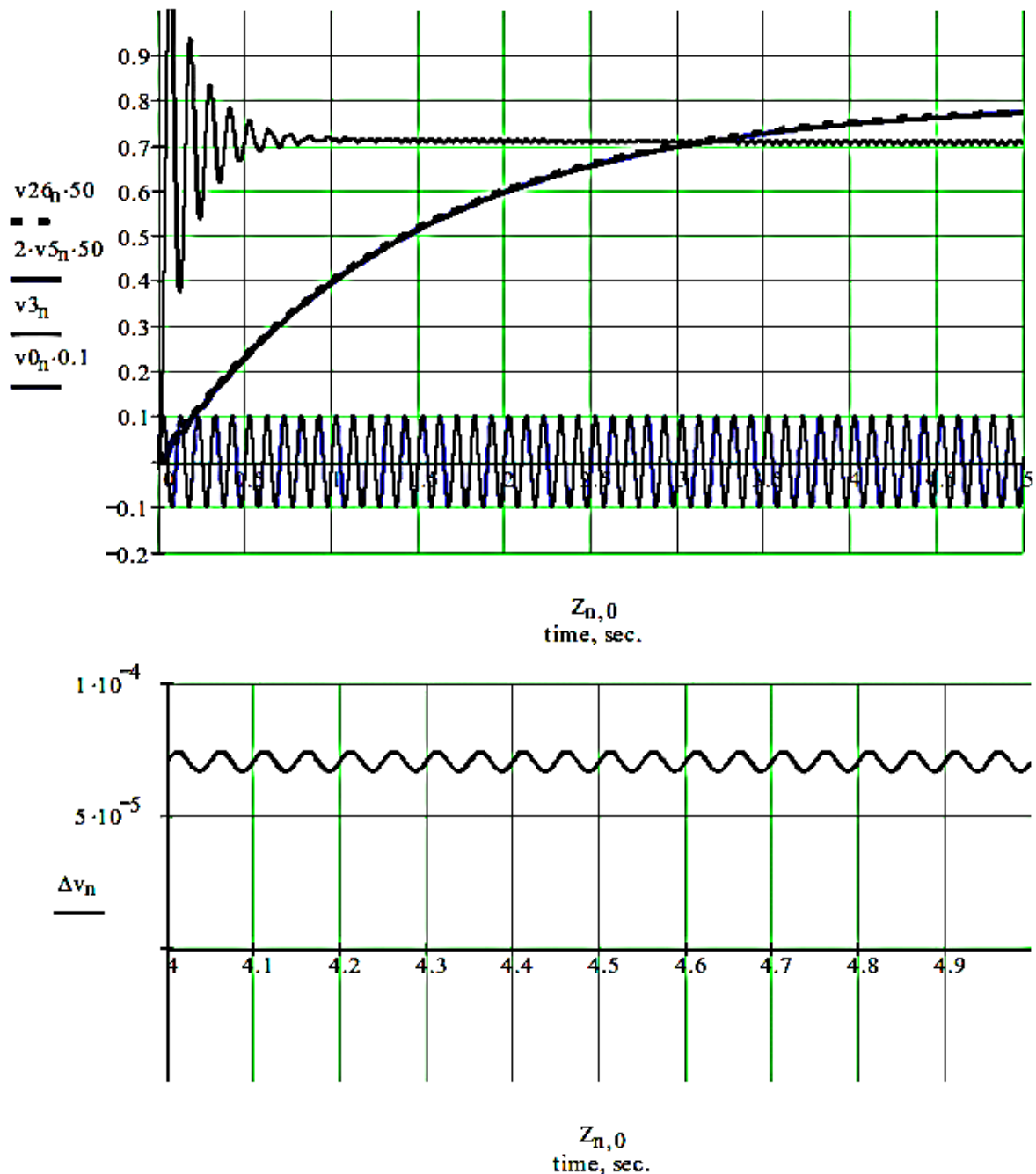


Рисунок 6.38 – Динаміка ЛПСКЗН з корекцією пульсацій при підключенні до джерела синусоїдальної напруги $f = 10$ Гц (стала часу $\tau_0 = 0,1$ с): $v26$ – вихідна напруга ТП1+ТП3 (масштаб $\times 50$); $2 \cdot v5$ – вихідна напруга 2-х ТП2 (масштаб $\times 50$); $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; $v0$ – вхідна напруга ЛПСКЗН (масштаб $\times 0,1$); Δv – напруга некомпенсації

Висновки

1. Для суттєвого зменшення часу встановлення потрібно брати ТВБ з однаковими постійними часу та зменшувати постійну часу підсилювача.
2. Для зменшування похибки від нелінійності, а також від некомпенсації потрібно вибирати великий коефіцієнт підсилювача, але це призводить до зменшення стійкості системи з замкнутим зворотним зв'язком і, в наслідок цього, виникненню коливального характеру перехідного процесу встановлення вихідної напруги.
3. При підключенні до джерела напруги низької частоти виникають пульсації на виході перетворювача, обумовлені його недостатньою інерційністю. Щоб зменшити рівень пульсацій, потрібно збільшувати постійну часу підсилювача. Однак це веде до небажаного суттєвого збільшення часу встановлення вихідної напруги. Тому використовують деякі спеціальні методи, спрямовані на зменшення напруги пульсацій на низьких частотах. Проте на високих частотах зазначена проблема не з'являється взагалі.

Операція "ковзного" інтегрування

Розглянемо ще раз ЛПСКЗН (рис. 6.27), математичну модель якого у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь було наведено на рис. 6.32. Але тепер вихідна напруга ЛПСКЗН $v_3(t)$ вимірюється вольтметром інтегруючого типу, що виконує операцію «ковзного» інтегрування, або проходить через ланку «ковзного» інтегрування.

Основна особливість цифрових інтегруючих вольтметрів, які вимірюють середнє значення напруги за час інтегрування T_{int} , полягає у їхній здатності заглушувати завади – як випадкові, так і періодичні. Якщо вважати, що інтегральні відліки вхідної величини $x(t)$ за інтервал T_{int} одержуємо *неперервне* в часі (а не циклічно, що є характерним для цифрових

вольтметрів), то моделлю вихідної величини $y(t)$ може бути наступний інтеграл згортки, який ще називають "ковзний" інтеграл:

$$y(t) = \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\delta}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{t-T_{\text{int}}}^t x(\tau) d\tau, \quad (6.16)$$

де для довільного t залежність $h_{\delta}(t - \tau)$ від τ має вигляд, зображений на рис. 6.39.

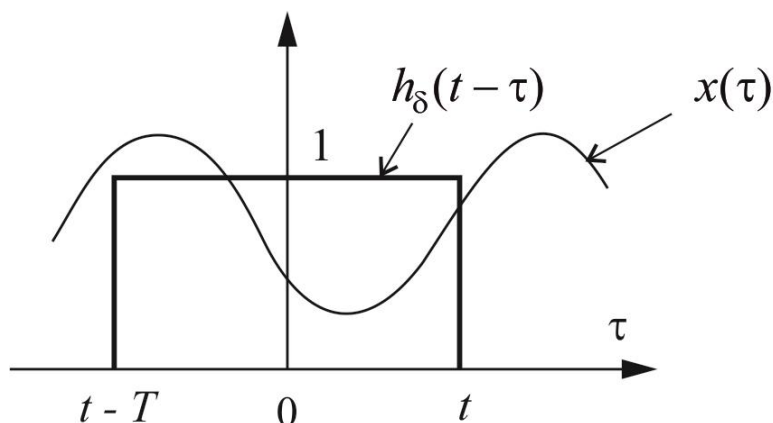


Рисунок 6.39 – Функції $h_{\delta}(t - \tau)$ і $x(\tau)$ для інтегратора з кінцевим часом інтегрування

Використання згортки є особливо ефективним при дослідженні систем, якщо їх імпульсні характеристики фінітні у часі. Такі системи не можна описати звичайними диференціальними рівняннями.

Нормована за амплітудою імпульсна характеристика ланки, що реалізує операцію "ковзного" інтегрування, матиме вигляд:

$$h_{\delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_{\text{int}}}, & 0 < t \leq T_{\text{int}}; \\ 0, & t < 0; t > T_{\text{int}}. \end{cases}$$

Фрагмент документа Mathcad із використанням операції "ковзного" інтегрування, що ілюструє ефект згладжування пульсацій вихідної напруги ЛПСКЗН $v_3(t)$ (частота вхідної напруги $f = 10$ Гц, стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с), наведено на рис. 6.40.

Системна функція, як перетворення Лапласа від $h_{\delta}(t)$, матиме вигляд:

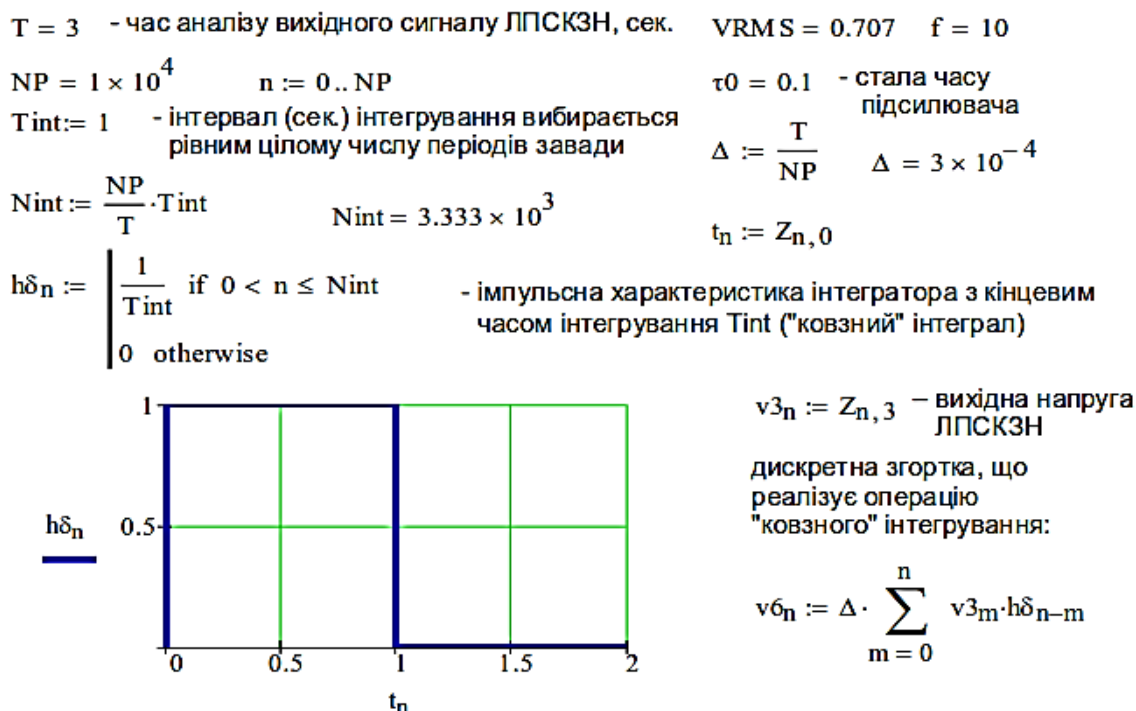
$$H(s) = \frac{1 - e^{-s \cdot T_{\text{int}}}}{s \cdot T_{\text{int}}} .$$

Звідси, зробивши заміну $s = j\omega$, дістанемо:

$$H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_{\text{int}}}}{j\omega \cdot T_{\text{int}}} .$$

Логарифмічну амплітудно-частотну характеристики ланки, що реалізує операцію "ковзного" інтегрування, наведено на рис. 6.41. Отже, при часі інтегрування, кратному періоду завади, її заглушення прямує до нескінченності. Однак навіть при незначних відхиленнях частоти завади від її номінального значення коефіцієнт заглушення різко зменшується.

Тому при прецизійних вимірюваннях застосовуються спеціальні заходи для спостереження за часом інтегрування.



Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$$v2_n := Z_{n,1} \quad v5_n := Z_{n,2} \quad v3_n := Z_{n,3} \quad v0_n := V_0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$$

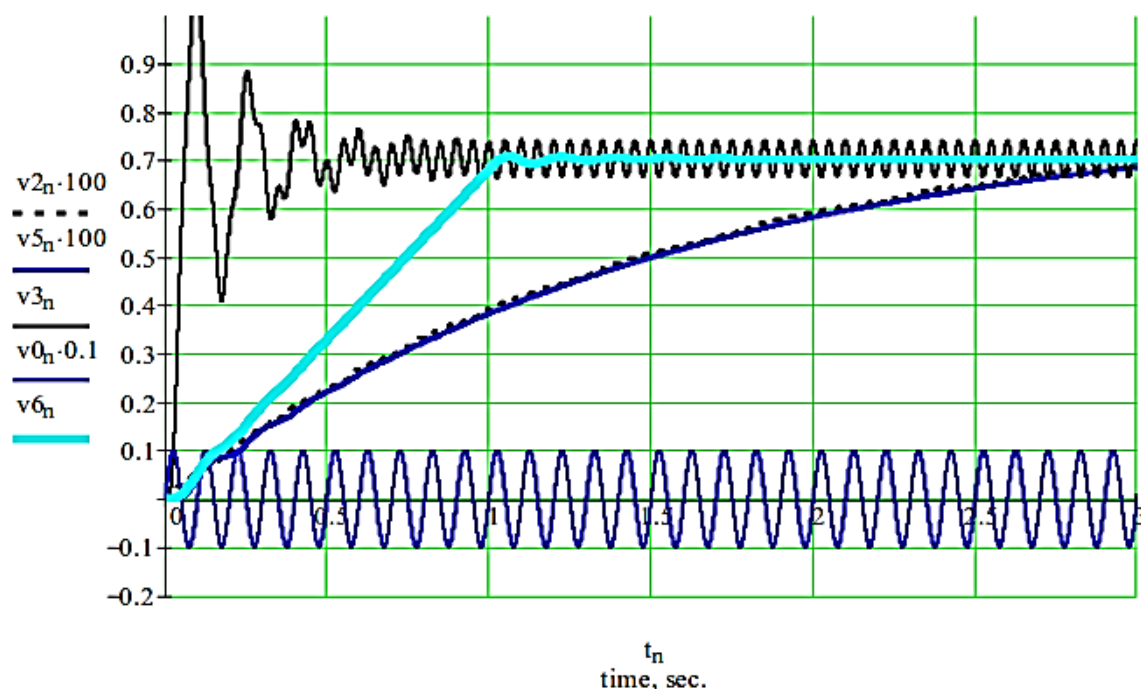


Рисунок 6.40 – Ефект згладжування пульсацій при вимірюванні вихідної напруги ЛПСКЗН вольтметром інтегруючого типу (підключення ЛПСКЗН до синусоїдальної напруги $f = 10$ Гц, стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с):

$v2$ – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); $v5$ – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$);
 $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; $v0$ – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$); $v6$ – вихідна напруга ланки "ковзкого" інтегрування

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика ланки "ковзного" інтегрування

$$H(s) := \frac{1 - e^{-s \cdot T_{\text{int}}}}{T_{\text{ints}}} \quad \text{- системна функція інтегратора з кінцевим часом інтегрування ("ковзний інтеграл")}$$

B0 := BodePlot(H, 0.1, 10)

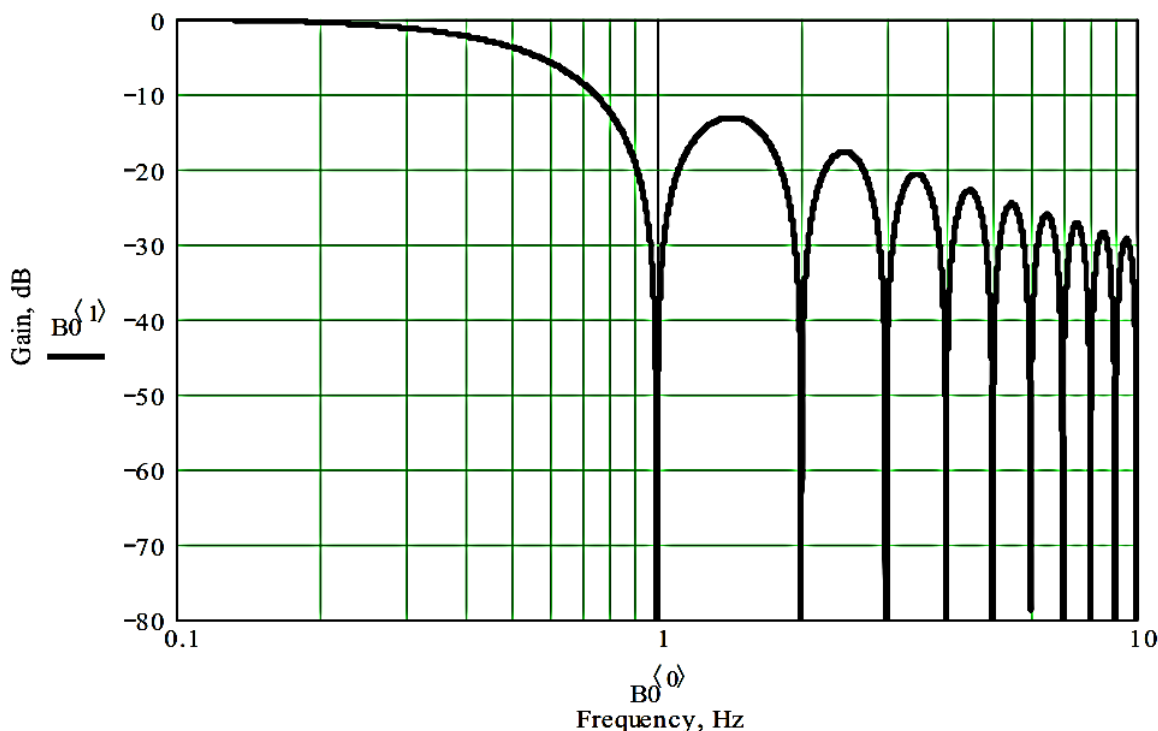


Рисунок 6.41 – Ефект нескінченного заглушення пульсацій на частотах, кратних $1/T_{\text{int}}$

Контрольні запитання і завдання

1. Складіть модель лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги на термоперетворювачі за методом взаємно-зворотних перетворень у статичному режимі. Наведіть приклад зменшення похибки нелінійності від статизму?
2. Складіть динамічну модель лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги на термоперетворювачі за методом взаємно-зворотних перетворень у вигляді структурної схеми.
3. Складіть за структурної схемою в динамічному режимі модель лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги на термоперетворювачі за

методом взаємно-зворотних перетворень у вигляді системи нелінійних диференційних рівнянь.

4. Поясніть сутність складання системи диференційних рівнянь. Що називають нормальною системою рівнянь стану у формі Коші, змінними стану? Як враховується нелінійність моделі термоперетворювача та інерційні ланки перетворення? Які переваги має метод аналізу за допомогою розв'язку систем диференційних рівнянь? Чи можна використати інші методи аналізу? Якщо неможна, то чому?

5. Які стандартні процедури існують для чисельного розв'язку систем нелінійних диференційних рівнянь у системах комп'ютерної математики? Поясніть складові розв'язку системи у вигляді матриці. Чи є відмінності у розв'язку систем лінійних та нелінійних диференційних рівнянь та які?

6. Наведіть визначення нормальної система диференційних рівнянь першого порядку в формі Коші. Наведіть приклади відомих систем комп'ютерної математики, придатних для рішення подібних задач.

7. Наведіть приклади реалізації методів зменшення похибки із-за пульсацій на низьких та інфранизьких частотах. Наведіть моделювання цих методів за допомогою систем диференційних рівнянь.

8. Поясніть суть методу ковзного інтегрування. Чому такі системи не можна описати звичайними диференційними рівняннями? Поясніть моделювання операції ковзного інтегрування з метою зменшення похибки із-за пульсацій. Які особливості результату? Поясніть ефект нескінченного заглушення пульсацій на частотах, кратних $1/T_{\text{int}}$.

ТЕМА 7. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕРМОПАРИ

Лекція 19. Визначення параметрів динамічної моделі термopари

Задача ідентифікації динамічних характеристик термopар. Модель першого порядку. Методи визначення параметрів моделі. Випробувальні сигнали, види сигналів. Динамічна модель n -го порядку. Застосування високочастотного струму, модульованого ступінчастою імпульсною функцією. Застосування синусоїдального струму інфранизької частоти. Метод визначення амплітудо-фазочастотних характеристик термopари за другою гармонікою випробувального сигналу. Визначення порядку динамічної моделі термopари за видом АФЧХ. Контрольні запитання і завдання.

Для зменшення динамічної похибки вимірювання температури термopарою, необхідно знати динамічні моделі реальних термopар. У якості динамічної моделі термopари запропоновано використовувати модель у вигляді послідовно включених аперіодичних ланок першого порядку, електрично розв'язаних одна відносно одної.

Модель першого порядку

В простих випадках, наприклад попереднього аналізу, для опису динамічних властивостей термopари використовують модель у вигляді аперіодичної ланки першого порядку, передавальна функція якої

$$W(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)}. \quad (7.1)$$

Передавальна функція характеризується двома параметрами: K – статичний коефіцієнт перетворення, який визначає точність вимірювання температури в статичному режимі і є номінальною характеристикою термopари; τ – стала часу термopари, яка і визначає динамічні властивості ланки.

1. Ступінчаста зміна температури. При ідентифікації найчастіше використовується перехідна характеристика термopари (рис. 7.1). Сталу часу отримують із реакції термopари на ступінчасту зміну температури (рис. 7.1). Вхідна дія має вид

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Стала часу ланки першого порядку характеризує час, який потрібен ланці, щоб вихідне значення досягло 63,2 % від усталеного, коли ланка буде перебувати в рівновазі. Тобто, в момент часу $t = 0$ температура об'єкту вимірювання миттєво змінюється від значення θ_1 до θ_2 і так залишається незмінною нескінченно довго.

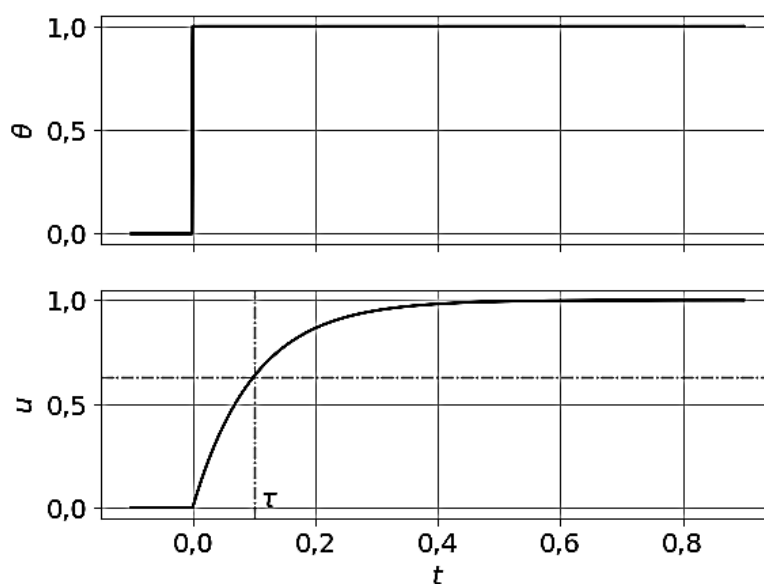


Рисунок 7.1 – Реакція термопари на ступінчасту зміну температури

Якщо термопару вважати аперіодичною ланкою першого порядку, то в цьому випадку процес вимірювання буде описуватися звичайним диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K\theta(t), \quad u(0) = u_0, \quad (7.2)$$

де $u(t)$ – вихід термопари, функція термо-ЕРС в часовій області; $\theta(t)$ – вхід термопари, функція температури в часовій області; K – коефіцієнт перетворення температури в термо-ЕРС, становить номінальну статичну характеристику термопари. Цей коефіцієнт є нелінійною функцією температури $K = f(\theta)$ і описується поліноміальними моделями; u_0 – термо-ЕРС термопари в стані спокою до початку зміни температури.

Рівняння в операторній формі:

$$\tau(pU(p) - u(0)) + U(p) = K/p.$$

Прийmemo $u_0 = 0$, тобто, температура змінюється від нуля до якогось усталеного значення. Оскільки $u_0 = 0$, то

$$\tau pU(p) + U(p) = K/p$$

$$U(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{\tau p + 1}$$

Реакція термопары на ступінчасту зміну температури буде наступна:

$$u(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (7.3)$$

Якщо ж температура мала якесь постійне значення, то відповідно на виході термопары існувало певне значення термо-ЕРС u_0 . В результаті отримаємо наступне рівняння:

$$u(t) = K[1 - e^{-\alpha t}] + u(0)(1 - e^{-\alpha t})$$

2. Лінійна зміна температури. Стала часу буде дорівнювати часу затримки відгуку термопары. Нехай температура лінійно наростає від одного сталого значення до нескінченності $\theta(t) = \beta t$. Тоді диференціальне рівняння термопары буде виду:

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K\beta t, \quad u(0) = u_0,$$

де β - коефіцієнт пропорційності та має розмірність [град/с]. В операторній формі:

$$\tau(pU(p) - u(0)) + U(p) = \frac{K\beta}{p^2}$$

Прийmemo $u_0 = 0$. Тоді

$$U(p) = \frac{K\beta}{p^2(\tau p + 1)}$$

$$u(t) = K\beta \left(t + \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right) \quad (7.4)$$

Щоб отримати значення температури за значенням термо-ЕРС потрібно використати номінальну статичну характеристику термопары. Для спрощення будемо вважати, що існує коефіцієнт $(K\beta)^{-1}$, який дозволяє

оцінити з певною похибкою значення температури за значенням термо-ЕРС за наступним рівнянням:

$$\theta(t) = (K\beta)^{-1}u(t).$$

На рис. 7.2 зображено графік залежності дійсної та вимірної температури, у відносних одиницях, від часу. Як видно з даного графіку, часове запізнення значень термопари після виходу на усталений режим дорівнює сталій часу термопари. Як видно з рис. 7.2 похибка вимірювання температури $\Delta\theta$ пропорційна до сталої часу термопари. Тому при вимірах температури коротких теплових імпульсів дуже важливим є ідентифікація моделі термопари.

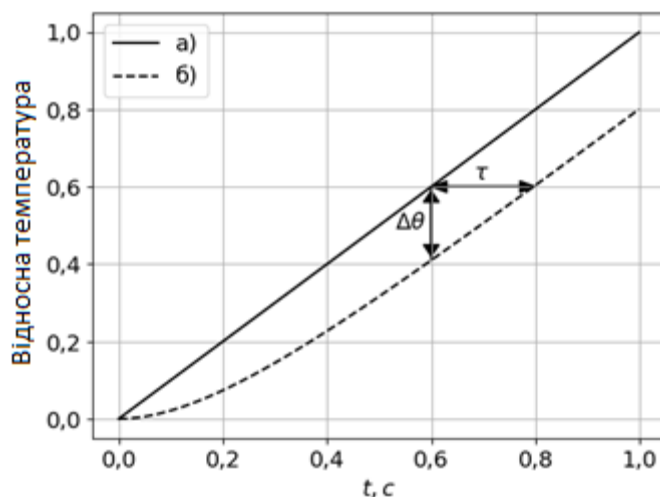


Рисунок 7.2 – Графік залежності дійсної а) та вимірної б) температури, у відносних одиницях, від часу. τ – стала часу термопари; $\Delta\theta$ – похибка вимірювання температури в усталеному режимі

Рівняння для лінійного форми вхідного температурного сигналу з урахуванням того, що $u_0 \neq 0$.

$$u(t) = K \left(t + \tau \left(e^{\frac{-t}{\tau}} - 1 \right) + \frac{u_0}{K} e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

3. Зміна температури середовища описується кусково-лінійним законом:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t > 0 \wedge t < t_0 \\ \theta_0, & t \geq t_0 \end{cases}.$$

$$u(t) = \frac{K\theta_0}{t_0} \left[(t-\tau) [\sigma(t) - \sigma(t-t_0)] + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\sigma(t) - \tau e^{\frac{t_0}{\tau}} \sigma(t-t_0) \right] + t_0 \sigma(t-t_0) \right]. \quad (7.5)$$

На рис. 7.3 зображено графік зміни температури в часі θ_r за кусково-лінійним законом та графік реакції моделі термopари першого порядку на цю зміну θ_m .

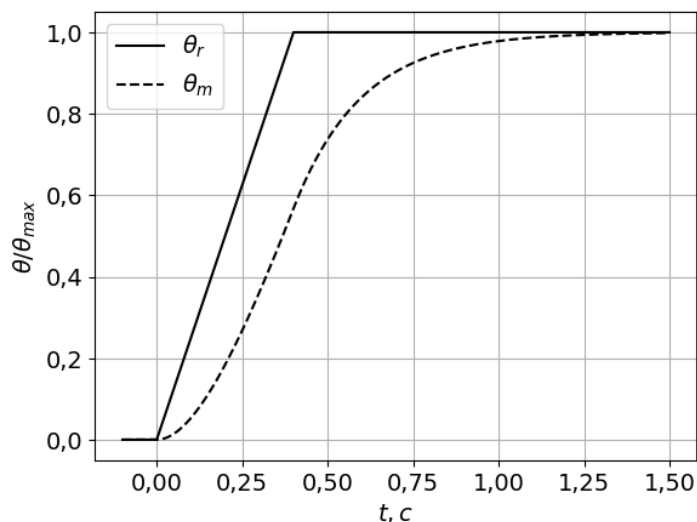


Рисунок 7.3 – Реакція термopари першого порядку на зміну температури за кусково-лінійним законом: θ_r – температура середовища вимірювання. θ_m – температура розрахована за значенням моделі термopари

4. Температура середовища змінюється за синусоїдальним законом:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sin(2\pi f t), & t > 0 \wedge t < t_0 \end{cases}$$

На рис. 7.4 зображено графік зміни температури в часі θ_r за синусоїдальним законом та графік реакції моделі термopари першого порядку на цю зміну θ_m .

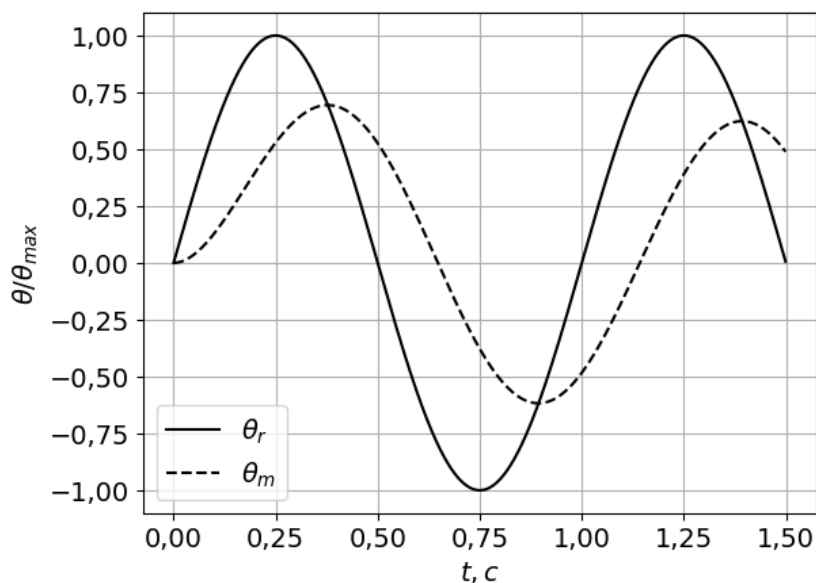


Рисунок 7.4 – Реакція термопари першого порядку на змiну температури за синусоїдальним законом: θ_r – температура середовища вимірювання; θ_m – температура розрахована за значенням моделі термопари

Модель n-го порядку

Динамічні вимірювання імпульсів температури пов'язано із використанням термопари у перехідному режимі, коли вхідна величина та термо-ЕРС термопари змінюються в часі. Перехідну характеристику такої системи можна описати експоненційним рядом:

$$h(t) = 1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-b\frac{t}{\tau_2}} + \dots$$

де $k_1, k_2, \dots$ – коефіцієнти моделі; $\tau_1, \tau_2, \dots$ – сталі часу термопари. Але зі збільшенням кількості членів ряду, збільшується кількість невідомих, які потрібно визначити, що в свою чергу, ускладнює процес сходження алгоритму апроксимації. Також ускладняє відновлення вхідної величини. Тому, потрібно обмежити кількість невідомих, якщо збільшення порядку не веде до підвищення точності ідентифікації моделі термопари, відповідно, до підвищення точності вимірів.

В якості динамічної моделі термопари приймемо аперіодичну ланку n -го порядку. У випадку термопари, рівняння має тільки дійсні корені, тому можна його записати у вигляді:

$$H(p) = \frac{1}{p(\tau_n p + 1)(\tau_{n-1} p + 1) \cdots (\tau_1 p + 1)},$$

$$H(p) = \frac{abc \cdots}{p(p+a)(p+b)(p+c) \cdots},$$

де $a = 1/\tau_1$; $b = 1/\tau_2$.

Таблиця 1

Моделі перехідної характеристики термопари

$\mathcal{L}_p^{-1}$ (часова форма)	$\mathcal{L}_p$ (операторна форма)
$h(t) = 1 - e^{-at}$	$H(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$h(t) = 1 + \frac{be^{-at}}{(a-b)} + \frac{ae^{-bt}}{(b-a)}$	$H(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$h(t) = 1 - \frac{bce^{-at}}{(a-b)(a-c)} - \frac{ace^{-bt}}{(b-a)(b-c)} - \frac{abe^{-ct}}{(c-a)(c-b)}$	$H(p) = \frac{abc}{p(p+a)(p+b)(p+c)}$

Застосування високочастотного сигналу, модульованого ступінчастою імпульсною функцією

У якості випробувального сигналу для ідентифікації моделі термопари розглянемо застосування високочастотного сигналу, модульованого ступінчастою імпульсною функцією.

Для стаціонарного теплового потоку в ізотропному однорідному середовищі, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, теплообмін між твердим тілом та середовищем при переході питомого теплового потоку q_s через поверхню термопари S описується законом Ньютона [28]:

$$q_s = \alpha S(\theta - \theta_c),$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, [Дж/(с м² К)]; $\theta - \theta_c$ – різниця температур термопар та середовища. З цього рівняння випливає, що температура термопар θ пропорційна питомій потужності тепла

$$q = \alpha S(\theta - \theta_c),$$

$$\theta = \theta_c + \frac{q}{\alpha S},$$

де q – тепловий потік, [Вт].

Тепловий обмін між термопарою, через яку пропускають постійний струм, та зовнішнім середовищем, при досягненні термодинамічної рівноваги між ними, можна визначити із законів Джоуля для потужності струму та закону Ньютона для теплопередачі.

При протіканні струму через термопару в об'ємі останньої виділяється тепло. Кількість тепла, яка виділяється, пропорційна квадрату струму та часу дії струму

$$Q_{дж} = RI^2T,$$

де R – сумарний опір провідника; T – тривалість дії електричного струму.

Миттєве значення потужності змінного електричного струму визначається за формулою:

$$p = q$$

$$\frac{U^2}{R} = \alpha S(\theta - \theta_c) \quad \theta = \theta_c + \frac{1}{\alpha SR} U^2$$

Дане рівняння описує перетворення електричної енергії в теплову в стаціонарному режимі теплообміну. Потужність створена струмом пропорційна тепловому потоку через поверхню термопар.

Термопара складається з двох різнорідних металевих проводів з'єднаних з різними фізико-хімічними властивостями. Така структура термопар сприяє виникненню додаткових явищ крім явища Джоуля, які створюють або поглинають тепло. Ці явища називають термоелектричними, оскільки вони залежать від значення температури та її розподілу. До цих явищ відносяться ефекти Зеєбека, Пельтьє та Томсона.

Для позбавлення ефектів Пельтьє та Томсона використовується гармонічний змінний струм. Миттєве значення потужності змінного електричного струму визначається за формулою:

$$p(t)=u(t)i(t)=U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi)$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} (\cos(\omega t - \omega t + \phi) - \cos(\omega t + \omega t - \phi)) = \frac{U_m I_m}{2} (\cos(\phi) - \cos(2\omega t))$$

$$p(t)=UI(\cos(\phi) - \cos(2\omega t - \phi))$$

де p – миттєва потужність, u – миттєва напруга, i – миттєвий струм, U_m – амплітуда напруги, I_m – амплітуда струму, U – діюче значення напруги, I – діюче значення струму, ϕ – зсув фаз між напругою та струмом. Миттєве значення потужності на активному опорі:

$$p(t)=UI(1 - \cos(2\omega t))$$

Енергія високочастотного змінного струму на опорі термопар:

$$Q = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T UI(1 - \cos(2\omega t)) dt$$

$$Q = \int_0^T UI(1 - \cos(2\omega t)) dt$$

$$Q = UI \left(T - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T) \right),$$

де T – тривалість дії електричного струму. Якщо $\omega \rightarrow \infty$, то, за рахунок інерційних властивостей термопар, дія імпульсу високочастотного змінного струму еквівалентна включенню ступінчастого джерела постійної потужності UI :

$$\theta = \theta_c + \frac{1}{\alpha S} UI \cdot T.$$

Температура термопар θ буде змінюватися до встановлення нової рівноваги теплового обміну між термопарою та зовнішнім середовищем (термодинамічної рівноваги).

Примітка. До встановлення термодинамічної рівноваги між термопарою та навколишнім середовищем, потужність електричного струму, який проходить через термопару, витрачається на збільшення внутрішньої енергії та на тепловий потік, який

виникає між термопарою та навколишнім середовищем. Тепловий потік через поверхню термопари, при проходженні через термопару електричного струму, пропорційний різниці температур термопари та навколишнього середовища та площі поверхні охолодження.

Застосування сигналу інфранизької частоти. Визначення амплітудо-фазочастотних характеристик за другою гармонікою випробувального сигналу

Якщо відома динамічна характеристика в операторній формі, то вхідна вимірювана температура знаходиться за формулою

$$\theta_{\text{вх}}(p) = \frac{E_{\text{вих}}(p)}{W(p)},$$

де $W(p)$ – передавальна функція; $E_{\text{вих}}(p)$ – електрорушійна сила термопари (вихідний сигнал термоперетворювача); $\theta_{\text{вх}}(p)$ – вхідна температура в операторній формі.

Розглянемо визначення амплітудо-фазочастотних характеристик термопари. Для цього спай термопари розігрівається синусоїдальним струмом інфранизької частоти ω . Завдяки розігріву підвідних провідників, збільшується їх температура, яка пропорційна потужності, що в них виділяється через наявність електричного опору, яка в свою чергу пропорційна квадрату струму, який проходить через провідник. Таким чином ЕРС термопари буде мати в своєму складі постійну складову і другу гармоніку з частотою 2ω

$$E(t) = ki(t) = kI_m^2 \sin^2(\omega t) = k \frac{I_m^2}{2} (1 - \cos(2\omega t))$$

АЧХ термопари, в цьому випадку, буде визначатися як відношення амплітуди змінної складової ЕРС термопари на подвійній частоті вхідного струму до квадрату амплітуди вхідного струму подвійної частоти.

$$A(2\omega) = \frac{E_m(2\omega)}{I_m^2(2\omega)}.$$

Спрощена структурна модель процесів, які відбуваються в реальній термопарі при пропусканні через неї електричного струму може бути представлена на рис. 7.5.

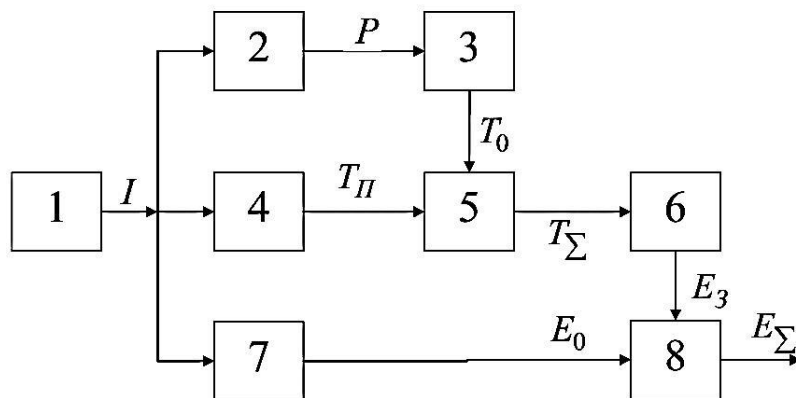


Рисунок 7.5 – Спрощена структурна модель процесів, які відбуваються в термопарі при пропусканні через неї електричного струму

На рисунку 7.5 позначено: 1 – джерело струму; 2 – перетворювач струму в потужність; 3 – перетворювач потужності в температуру Джоуля; 4 – перетворювач струму в температуру Пельт'є; 5 – суматор Температур; 6 – перетворювач температури в ЕРС Зеебека; 7 – перетворювач струму в напругу на резисторах; 8 – суматор ЕРС Зеебека і напруги на резисторах.

I – струм через термопару; P – активна потужність, що виділяється на еквівалентному опорі провідників біля спаю термопар

$$P = I^2 R.$$

T_0 – температура, що має місце на спаї термопар в наслідок дії ефекту Джоуля

$$T_0 = k_D R,$$

де k_D – коефіцієнт пропорційності залежить від теплообмінних процесів;

T_{II} – температура спаю, яка має місце внаслідок дії ефекту Пельт'є згідно якого кількість тепла Q_{II} пропорційна струмові, що проходить через спай

$$Q_{II} = k_{II} I t,$$

де k_{II} – коефіцієнт Пельт'є; t - час;

E_3 – ЕРС Зеєбека, яка пропорційна різниці температур гарячого і холодного спаю термопар

$$E_3 = k_3(T_{\Gamma} - T_X),$$

де k_3 – коефіцієнт пропорційності;

T_{Γ}, T_X – температура гарячого та холодного спаїв термопар;

T_{Σ} – сумарна температура спаю;

E_0 – електрорушійна сила, яка виділяється на повному опорі спаю та підвідних проводах

$$E_0 = I \cdot z$$

де z – повний опір спаю та підвідних проводів термопар.

Динамічна модель термопар n -го порядку

Еквівалентну електричну модель динамічної схеми термопар можна представити у вигляді декількох послідовно включених аперіодичних ланок першого порядку, розв'язаних ідеальними повторювачами напруги (рис. 7.6). Кількість ланок та значення сталих часу не відомо.

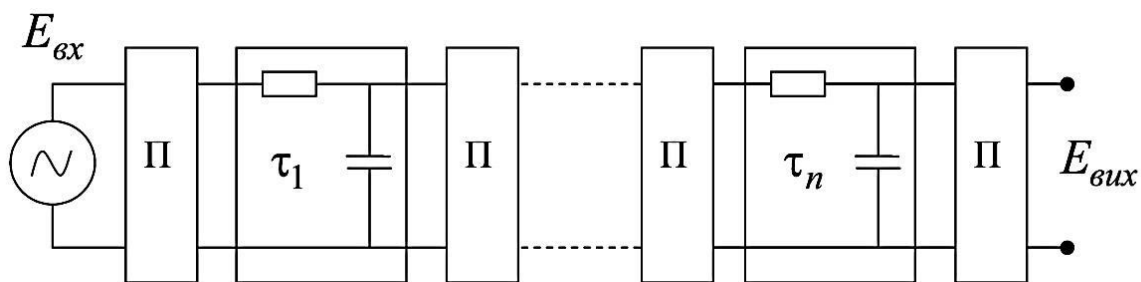


Рисунок 7.6 – Еквівалентна електрична модель динамічної схеми термопар

АФЧХ такої моделі в комплексній формі є добуток комплексних коефіцієнтів передачі кожної ланки.

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + j\omega\tau_i}.$$

Модуль коефіцієнта передачі моделі є добутком модулів окремих ланок

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_i)^2}},$$

де ω - частота, τ_i - стала часу. Фазовий зсув дорівнює сумі фазових зсувів окремих ланок

$$\varphi_{\Sigma} = -\sum_{i=1}^n \operatorname{arctg}(\omega \tau_i).$$

При дослідженні реальної термопари невідомими є як значення кожної сталої часу τ_i так і їх кількість. Рівняння має n змінних. Вони можуть бути знайдені або шляхом складання та розв'язання системи з n рівнянь або з масиву даних АЧХ, ФЧХ за методом найменших квадратів. Кількість актуальних сталих часу, які необхідно враховувати, залежить від їхньої питомої ваги в формулах $A(\omega)$, φ_{Σ} . Кількість сталих часу, які необхідно враховувати для досягнення заданої точності знаходиться методом поступових наближень. А саме, спочатку передбачається наявність однієї сталої часу, потім двох, трьох і т. д. до того випадку, коли врахування наступної сталої часу не буде суттєво впливати на значення попередньо знайдених.

У першому наближенні, для встановлення кількості сталих часу, можна скористатись графіками АФЧХ термопари. Фаза інерційної ланки із однією сталою часу не перевищує 90° і тому АФЧХ знаходиться у першому квадранті. Фаза інерційної лаки із двома сталими часу на перевищує 180° і тому АФЧХ проходить через перший та другий квадранти і т.д. За графіком АФЧХ можна наближено встановити модель термопари, яку в подальшому, можна використовувати для апроксимації експериментальних даних. Приклади графіків АФЧХ моделей термопари із різною кількістю сталих часу зображено на рис. 7.7.

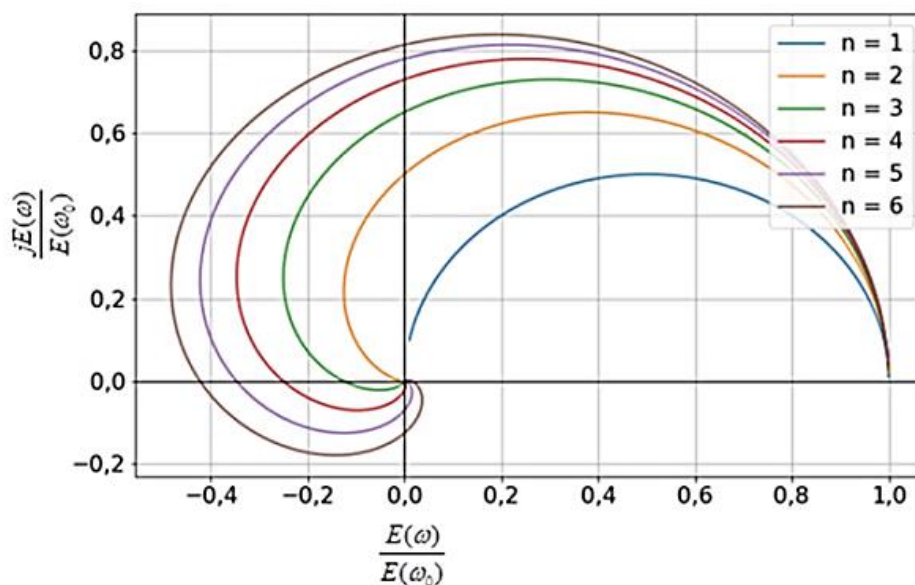


Рисунок 7.7 – Графіки АФЧХ моделей терморпар із різною кількістю сталих часу на частотах від 0 до ∞ : а) – загальний масштаб; б) – збільшений масштаб; n – кількість сталих часу

На практиці [29], оскільки значення ЕРС Зеєбека E_z , яка представлена другою гармонікою, лежить в мілівольтовому діапазоні, а ЕРС E_0 , яка представлена першою гармонікою, лежить у вольтовому діапазоні, то при знаходженні E_z в сумарній ЕРС E_Σ необхідно, із метою покращення подальшого спектрального аналізу, подавити набагато більшу складову E_0 (рис. 7.8).

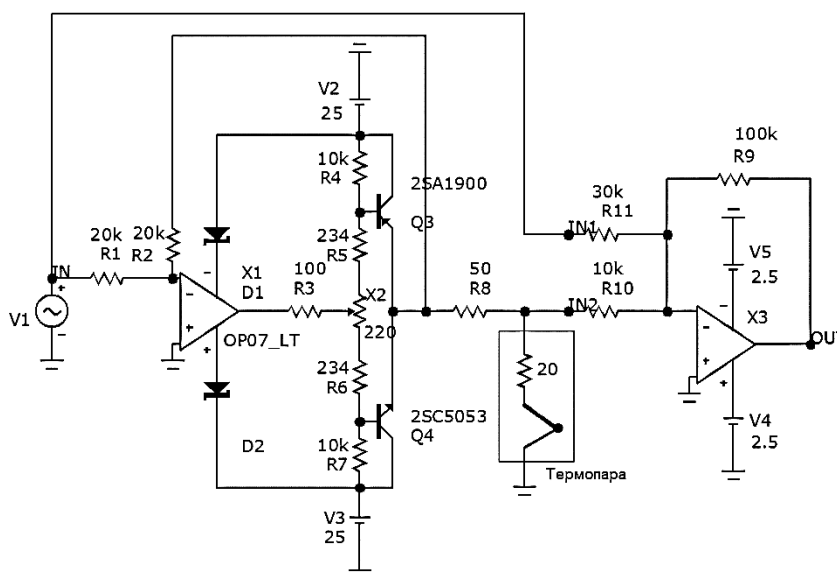


Рисунок 7.8 – Подавлення першої гармоніки ЕРС E_0

Для отримання АФЧХ частотний діапазон вхідного сигналу складає від 0,01 до 30 Гц. Для установаження перехідних процесів після початку генерації сигналу вибірка на відповідній частоті починалась тільки через 10 с. Було отримано 20 цілих періодів вхідного та різницевого сигналів, які потім записувались у файли для подальшого аналізу. Вхідні сигнали на всіх частотах були піднесені до квадрату, як математичний аналог роботи термопар. Використавши бібліотеку **SciPy**, були виконані швидкі перетворення Фур'є вихідних сигналів та квадратів вхідних сигналів. Потім були виділені комплексні значення других гармонік квадратів вхідних сигналів та вихідних сигналів. Масив комплексних значень другої гармоніки вихідного сигналу був поділений на масив комплексних значень другої гармоніки квадратів вхідного сигналу та приведений до найбільшого значення. На основі отриманих даних був побудований годограф АФЧХ двох термопар (рис. 7.9) [29].

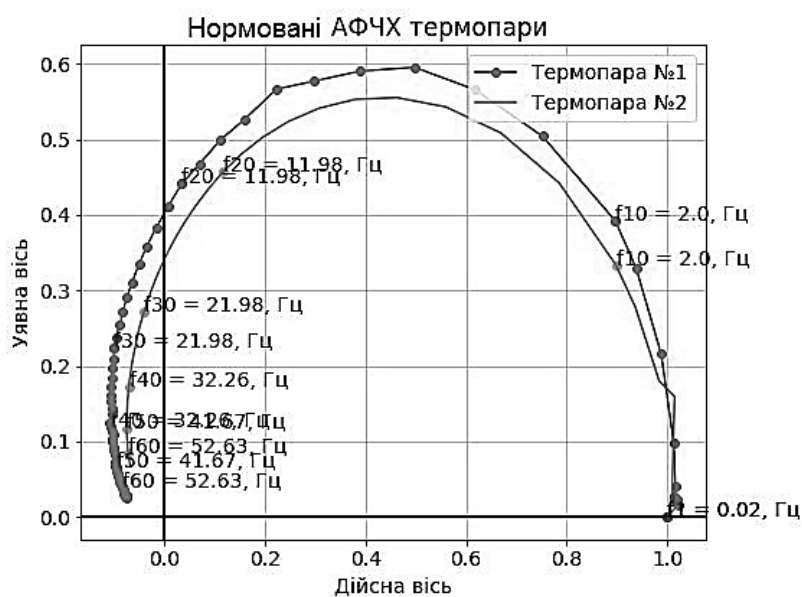


Рисунок 7.9 – Експериментально отримані значення АФЧХ двох термопар

Як бачимо, термопары містять не менше двох сталих часу. Встановивши, порядок моделі термопары можна перейти до апроксимації АЧХ термопары.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому виміри швидкопротекаючих процесів за допомогою інерційних пристроїв звуться динамічними вимірами? Яка основна ознака динамічних вимірів? Які процеси слід вважати швидкопротекаючими? Наведіть приклади.

2. Наведіть визначення задачі ідентифікації. Наведіть приклад динамічних характеристик які використовуються при ідентифікації. Які типи випробувальних сигналів?

3. Наведіть приклад, як визначити постійну часу динамічної моделі першого порядку при ступінчастому, лінійному, синусоїдальному випробувальному сигналі?

4. Яка особливість динамічних вимірів швидкопротекаючих високотемпературних процесів за допомогою термоперетворювачів? Який порядок, специфіка динамічної моделі термопари відносно інформативного параметру температурного процесу?

5. Який процес найбільш придатний у якості випробувального сигналу? Пояснить, як за допомогою сигналу інфранизької частоти можна ідентифікувати модель? Наведіть динамічні моделі n -порядку, які використовуються під час ідентифікації.

Лекція 20. Похибки математичної моделі перехідної та амплітудно-частотної характеристик термопар

Рівняння похибок моделі перехідної характеристики термопар. Алгебраїчний метод визначення відносної похибки від похибок складових. Вплив похибок термо-ЕРС термопар на похибку визначення сталих часу. Рівняння похибок моделі амплітудно-частотної характеристики термопар. Похибки визначення сталих часу від похибок вимірювань амплітудно-частотної характеристики термопар. Контрольні запитання і завдання.

Розглянемо відносні похибки математичних моделей перехідної та амплітудно-частотної характеристик для двох сталих часу.

Рівняння похибок моделі ПХ термопар

Як зазначалось, загальна модель перехідної характеристики термопар описується рівнянням.

$$E(t) = E_0 \left(1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right); \quad (7.6)$$

$$A(t) = 1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

де $A(t) = \frac{E(t)}{E_0}$.

Використаємо алгебраїчний метод визначення відносної похибки функції на основі відносних похибок аргументів шляхом розкладу складного виразу на елементарні функції, відносні похибки яких відомі [2]:

$$\delta(A) = \delta \left(1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}} \left[\delta(1) + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta \left(k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \delta \left(k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right].$$

Врахувавши, що $\delta(1) = 0$, перша складова похибки:

$$\begin{aligned}\delta\left(k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) &\approx \delta(k_1) + \delta\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \approx \delta(k_1) - \frac{t}{\tau_1} \delta\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \approx \\ &\approx \delta(k_1) - \frac{t}{\tau_1} [-[\delta(t) - \delta(\tau_1)]] = \delta(k_1) + \frac{t}{\tau_1} [\delta(t) - \delta(\tau_1)].\end{aligned}$$

Враховуючи другу складову похибки, знаходимо

$$\begin{aligned}\delta(A) &\approx A' \times \left[k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\delta(k_1) + \frac{t}{\tau_1} [\delta(t) - \delta(\tau_1)] \right) + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(\delta(k_2) + \frac{t}{\tau_2} [\delta(t) - \delta(\tau_2)] \right) \right] = \\ &= A' \times \left[k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(k_1) + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{t}{\tau_1} \delta(t) - k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{t}{\tau_1} \delta(\tau_1) + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \delta(k_2) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(t) - k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) \right] = \\ &= A' \times \left[k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{t}{\tau_1} \delta(t) + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(t) + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(k_1) - k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{t}{\tau_1} \delta(\tau_1) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \delta(k_2) - k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) \right] = \\ &= A' \times \left[\left(k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{t}{\tau_1} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \right) \delta(t) + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\delta(k_1) - \frac{t}{\tau_1} \delta(\tau_1) \right) + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(\delta(k_2) - \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) \right) \right], \\ \text{де } A' &= \frac{1}{1 + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}.\end{aligned}$$

Розширена модель перехідної характеристики термопари дозволяє скоротити кількість невідомих, тим самим зменшивши кількість джерел впливу на загальну похибку. Для цього потрібно розкрити коефіцієнти при експонентах k_1 та k_2 . Була розглянута форма перехідної характеристики із оберненими значеннями сталих часу $a=1/\tau_1$, $b=1/\tau_2$.

$$A = 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} + \frac{a}{b-a} e^{-bt}; \quad A = 1 + \frac{\frac{1}{\tau_2}}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\frac{1}{\tau_1}}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}} e^{-\frac{t}{\tau_2}};$$

$$A=1+\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad k_1=\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}, \quad k_2=\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}.$$

Похибка коефіцієнту k_1 виражаються рівнянням:

$$\begin{aligned} \delta(k_1) &= \delta\left(\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\right) \approx \delta(\tau_1) - \delta(\tau_2 - \tau_1) \approx \delta(\tau_1) - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} [\tau_1 \delta(\tau_1) + \tau_2 \delta(\tau_2)] = \\ &= \delta(\tau_1) - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \delta(\tau_2) = \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right) \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \delta(\tau_2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Похибка коефіцієнту k_2 виражається аналогічно

$$\delta(k_2) \approx \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\right) \delta(\tau_2) - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \delta(\tau_1). \quad (7.8)$$

Підставивши вирази для коефіцієнтів та похибок коефіцієнтів при експонентах у рівняння похибки термо-ЕРС отримаємо розширене рівняння похибки перехідної характеристики.

$$\begin{aligned} \delta(A) &\approx \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}} \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{t}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{t}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \delta(t) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \delta(\tau_2) - \frac{t}{\tau_1} \delta(\tau_1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left[\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \delta(\tau_2) - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \delta(\tau_1) - \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Виконаймо перетворення:

$$\begin{aligned} &\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \delta(\tau_2) - \frac{t}{\tau_1} \delta(\tau_1) \right] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left[\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \delta(\tau_2) - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \delta(\tau_1) - \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_2) - \frac{t}{\tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_1) + \\
 &+ \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \delta(\tau_2) - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) = \\
 &= \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) \delta(\tau_1) - \frac{t}{\tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \delta(\tau_1) + \\
 &+ \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \delta(\tau_2) - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \frac{t}{\tau_2} \delta(\tau_2) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_2) = \\
 &= \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) - \frac{t}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_1) + \\
 &+ \left[\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) - \frac{t}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \delta(\tau_2).
 \end{aligned}$$

Остаточно, відносна похибка значень моделі перехідної характеристики у залежності від відносних похибок вимірювання часу та визначення сталих часу наступна:

$$\begin{aligned}
 \delta(A) \approx & \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}} \times \left\{ \left(\frac{t}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{t}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \delta(t) + \right. \\
 & + \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) - \frac{t}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \delta(\tau_1) + \\
 & \left. + \left[\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) - \frac{t}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \delta(\tau_2) \right\}. \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Замінивши коефіцієнти впливу при похибках отримали результуючий вираз рівняння похибки.

$$B = \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}}; \quad C = \frac{t}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{t}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}};$$

$$D = \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) - \frac{t}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$E = \left[\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) - \frac{t}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 \tau_1} \right)} \right] \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\delta(A) \approx B [C\delta(t) + D\delta(\tau_1) - E\delta(\tau_2)].$$

Що стосується ідентифікації динамічних характеристик термодатчиків, потрібно знати вплив похибок вимірювання часу та термо-ЕРС термодатчиків на похибки визначення сталих часу.

Визначимо вплив похибок термо-ЕРС термодатчиків на похибки визначення сталих часу.

Прийmemo, що вплив похибки вимірювання часу на похибку термо-ЕРС незначний і ним можна знехтувати. Для визначення похибок сталих часу складеmo систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{B_1} \delta(A_1) \approx D_1 \delta(\tau_1) - E_1 \delta(\tau_2); \\ \frac{1}{B_2} \delta(A_2) \approx D_2 \delta(\tau_1) - E_2 \delta(\tau_2). \end{cases}$$

Перетворивши рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{B_1} \delta(A_1) \approx D_1 \delta(\tau_1) - E_1 \delta(\tau_2); \quad \delta(\tau_2) \approx \frac{D_1}{E_1} \delta(\tau_1) - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1);$$

$$D_2 \delta(\tau_1) \approx E_2 \delta(\tau_2) + \frac{1}{B_2} \delta(A_2); \quad \delta(\tau_1) \approx \frac{E_2}{D_2} \delta(\tau_2) + \frac{1}{D_2 B_2} \delta(A_2).$$

Похибка другої сталої часу:

$$\delta(\tau_2) \approx \frac{D_1}{E_1} \left[\frac{E_2}{D_2} \delta(\tau_2) + \frac{1}{D_2 B_2} \delta(A_2) \right] - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1) =$$

$$= \frac{D_1 E_2}{D_2 E_1} \delta(\tau_2) + \frac{D_1}{E_1 D_2 B_2} \delta(A_2) - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1);$$

$$\begin{aligned}
 \delta(\tau_2) - \frac{D_1 E_2}{D_2 E_1} \delta(\tau_2) &\approx \frac{D_1}{E_1 D_2 B_2} \delta(A_2) - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1); \\
 \left[1 - \frac{D_1 E_2}{D_2 E_1} \right] \delta(\tau_2) &\approx \frac{D_1}{E_1 D_2 B_2} \delta(A_2) - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1); \\
 \frac{D_2 E_1 - D_1 E_2}{D_2 E_1} \delta(\tau_2) &\approx \frac{D_1}{E_1 D_2 B_2} \delta(A_2) - \frac{1}{E_1 B_1} \delta(A_1); \\
 \delta(\tau_2) &\approx \frac{D_1}{B_2} \frac{1}{D_2 E_1 - D_1 E_2} \delta(A_2) - \frac{D_2}{B_1} \frac{1}{D_2 E_1 - D_1 E_2} \delta(A_1).
 \end{aligned}$$

Похибка першої сталої часу:

$$\delta(\tau_1) \approx \left[\frac{E_1}{B_2 (D_2 E_1 - D_1 E_2)} \right] \delta(A_2) - \frac{E_2}{B_1 (D_2 E_1 - D_1 E_2)} \delta(A_1).$$

Таким чином, знехтувавши похибкою вимірювання часу та взявши дві точки на перехідній характеристиці, отримано залежність похибок визначення сталих часу від похибок вимірювань термо-ЕРС термопар.

$$\begin{cases} \delta(\tau_1) \approx \left[\frac{E_1}{B_2 (D_2 E_1 - D_1 E_2)} \right] \delta(A_2) - \frac{E_2}{B_1 (D_2 E_1 - D_1 E_2)} \delta(A_1); \\ \delta(\tau_2) \approx \frac{D_1}{B_2} \frac{1}{D_2 E_1 - D_1 E_2} \delta(A_2) - \frac{D_2}{B_1} \frac{1}{D_2 E_1 - D_1 E_2} \delta(A_1). \end{cases} \quad (7.10)$$

Рівняння похибок моделі АЧХ термопар

АЧХ термопар (модель другого порядку):

$$K(\omega, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau_1)^2} \sqrt{1 + (\omega \tau_2)^2}}. \quad (7.11)$$

Знайдемо похибку $K(\omega, \tau_1, \tau_2)$, застосовуючи алгебраїчний метод.

$$\begin{aligned}
 \delta(K) &= \delta \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau_1)^2} \sqrt{1 + (\omega \tau_2)^2}} \right] \approx \delta(1) - \delta \left[\sqrt{1 + (\omega \tau_1)^2} \sqrt{1 + (\omega \tau_2)^2} \right] \approx \\
 &\approx 0 - \delta \left[\sqrt{1 + (\omega \tau_1)^2} \right] - \delta \left[\sqrt{1 + (\omega \tau_2)^2} \right] \approx -\frac{1}{2} \delta \left[1 + (\omega \tau_1)^2 \right] - \frac{1}{2} \delta \left[1 + (\omega \tau_2)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Якщо для першої складовій похибки

$$\begin{aligned} & \delta[1 + (\omega\tau_1)^2] \approx \\ & \approx \frac{1}{1 + (\omega\tau_1)^2} \left[1\delta(1) + (\omega\tau_1)^2 \delta((\omega\tau_1)^2) \right] = \frac{1}{1 + (\omega\tau_1)^2} \left[(\omega\tau_1)^2 \delta((\omega\tau_1)^2) \right] \approx \\ & \approx \frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} 2\delta(\omega\tau_1) \approx \frac{2(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} [\delta(\omega) + \delta(\tau_1)], \end{aligned}$$

то для $\delta(K)$ одержимо:

$$\begin{aligned} \delta(K) & \approx -\frac{1}{2} \frac{2(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} [\delta(\omega) + \delta(\tau_1)] - \frac{1}{2} \frac{2(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} [\delta(\omega) + \delta(\tau_2)] = \\ & = -\frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} \delta(\omega) - \frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} \delta(\tau_1) - \frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \delta(\omega) - \frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \delta(\tau_2) = \\ & = -\left[\frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} + \frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \right] \delta(\omega) - \frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} \delta(\tau_1) - \frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \delta(\tau_2); \\ \delta(K) & \approx -\frac{\omega^2 [\tau_1^2 + 2\omega^2 (\tau_1\tau_2)^2 + \tau_2^2]}{[1 + (\omega\tau_1)^2][1 + (\omega\tau_2)^2]} \delta(\omega) - \\ & -\frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2} \delta(\tau_1) - \frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \delta(\tau_2). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Замінивши коефіцієнти впливу при похибках та знехтувавши похибкою вимірювання частоти $\delta(\omega)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \delta(K) \approx C\delta(\tau_1) + D\delta(\tau_2), \\ \text{де} \quad & C = -\frac{(\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau_1)^2}; \quad D = -\frac{(\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_2)^2}. \end{aligned}$$

Взявши дві точки на АЧХ отримано:

$$\begin{cases} \delta(K_1) \approx C_1\delta(\tau_1) + D_1\delta(\tau_2); \\ \delta(K_2) \approx C_2\delta(\tau_1) + D_2\delta(\tau_2). \end{cases}$$

Перетворивши рівняння, отримаємо

$$\delta(\tau_1) \approx \frac{1}{C_1} \delta(K_1) - \frac{D_1}{C_1} \delta(\tau_2); \quad \delta(\tau_2) \approx \frac{1}{D_2} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2} \delta(\tau_1).$$

Розкриємо коефіцієнти при похибках для визначення $\delta(\tau_2)$:

$$\delta(\tau_2) \approx \frac{1}{D_2} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2} \left[\frac{1}{C_1} \delta(K_1) - \frac{D_1}{C_1} \delta(\tau_2) \right];$$

$$\delta(\tau_2) - \frac{C_2 D_1}{D_2 C_1} \delta(\tau_2) \approx \frac{1}{D_2} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2 C_1} \delta(K_1);$$

$$\left[1 - \frac{C_2 D_1}{D_2 C_1} \right] \delta(\tau_2) \approx \frac{1}{D_1} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2 C_1} \delta(K_1);$$

$$\delta(\tau_2) \approx \frac{D_2 C_1}{D_2 C_1 - C_2 D_1} \left[\frac{1}{D_1} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2 C_1} \delta(K_1) \right];$$

Розкриємо коефіцієнти при похибках для визначення $\delta(\tau_1)$:

$$\begin{aligned} \delta(\tau_1) &\approx \frac{1}{C_1} \delta(K_1) - \frac{D_1}{C_1} \left[\frac{D_2 C_1}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \left[\frac{1}{D_1} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2 C_1} \delta(K_1) \right] \right] = \\ &= \frac{1}{C_1} \delta(K_1) + \frac{D_1}{C_1} \frac{C_2}{D_2 C_1} \frac{D_2 C_1}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \delta(K_1) - \frac{D_1}{C_1} \frac{D_2 C_1}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \frac{1}{D_1} \delta(K_2) = \\ &= \frac{1}{C_1} \delta(K_1) + \frac{D_1 C_2}{C_1} \frac{1}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \delta(K_1) - \frac{D_2}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \delta(K_2) = \\ &= \left[\frac{D_2 C_1 - D_1 C_2 + D_1 C_2}{C_1 (D_2 C_1 - D_1 C_2)} \right] \delta(K_1) - \frac{D_2}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \delta(K_2) = \\ &= \left[\frac{D_2}{(D_2 C_1 - D_1 C_2)} \right] \delta(K_1) - \frac{D_2}{D_2 C_1 - D_1 C_2} \delta(K_2) = \\ &= \frac{D_2}{D_2 C_1 - D_1 C_2} [\delta(K_1) - \delta(K_2)]. \end{aligned}$$

Отже, знехтувавши похибкою вимірювання частоти та взявши дві точки на АЧХ, одержимо значення похибок визначення сталих часу від похибок вимірювань АЧХ термопари:

$$\begin{cases} \delta(\tau_1) \approx \frac{D_2}{D_2 C_1 - D_1 C_2} [\delta(K_1) - \delta(K_2)]; \\ \delta(\tau_2) \approx \frac{D_2 C_1}{D_2 C_1 - C_2 D_1} \left[\frac{1}{D_1} \delta(K_2) - \frac{C_2}{D_2 C_1} \delta(K_1) \right]. \end{cases} \quad (7.13)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть модель перехідної характеристики терморпарі другого порядку. Поясніть сутність алгебраїчного методу визначення відносної похибки перехідної характеристики від похибок складових під час вимірів.
2. Застосовуючи алгебраїчний метод знайдіть залежність похибок визначення сталих часу від похибок вимірювань термо-ЕРС терморпарі.
3. Наведіть модель терморпарі у вигляді АЧХ (модель другого порядку). Наведіть рівняння похибок моделі АЧХ терморпарі.
4. Застосовуючи алгебраїчний метод, знайдіть похибку визначення сталих часу від похибок вимірювань АЧХ терморпарі.

ДОДАТКИ

Додаток А. Метрологічне забезпечення вимірювальних каналів з мостовими схемами

Вимірювальні канали неелектричних фізичних величин складаються, як правило, з послідовно включених перетворювачів неелектричних фізичних величин (ПНФВ) в електричні величини, масштабних перетворювачів електричних величин та аналого-цифрових перетворювачів.

Велика кількість ПНФВ за принципом дії передбачають перетворення неелектричної фізичної величини (НФВ) в приріст опору постійному або змінному струмові [30]. Оскільки в більшості випадків приріст опору не великий порівняно з початковим опором чутливого елемента для перетворення приросту опору використовують мостові схеми [31].

Мостові схеми можуть працювати в режимі повного, або неповного зрівноваження .

При неповному зрівноваженні вихідна напруга ΔU симетричного чотириплечого моста з однаковими резисторами R , при зміні опору тільки одного плеча, становить:

$$\Delta U = \frac{U \Delta R}{4R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta R}{2R}} \quad (\text{A.1})$$

де ΔR – приріст опору одного плеча, R – початкове значення опору, U – напруга живлення моста.

При малих відносних змінах опору $\Delta R / R \ll 1$ відносна зміна вихідної напруги $\Delta U / U$ практично пропорційна відносній зміні опору $\Delta R / R$.

Абсолютне значення приросту опору може бути знайдено за відносним приростом вихідної напруги.

$$\Delta R = 4R \frac{\Delta U}{U} \cdot \frac{1}{1 - 2 \frac{\Delta U}{U}} \quad (\text{A.2})$$

Найкращий спосіб метрологічної атестації вимірювального каналу передбачає знаходження залежності вихідного сигналу вимірювального каналу від значень багатозначної міри фізичної величини.

В метрологічній практиці широко застосовується метод поелементної атестації частин вимірювального каналу, а саме, атестації ПНФВ за допомогою міри фізичної величини та електричної частини вимірювального каналу з подальшим оцінюванням сукупної похибки.

Для атестації електричної частини вимірювального каналу необхідно створювати імітатор вихідної напруги ПНФВ з найбільш адекватними параметрами до реального ПНФВ.

Імітатор повинен створювати таку саму напругу, мати адекватний вихідний опір, аналогічну несиметричну або симетричну схему підключення, однакові рівні початкової напруги відносно спільної точки при симетричному виході.

Якщо реальний ПНФВ побудований на основі мостової схеми, то імітатор доцільно будувати також у вигляді мостової схеми.

Пропонується створити імітатор мостової схеми таким чином, щоб вихідна напруга створювалась не шляхом зміни опору одного або декількох плечей моста, а шляхом включення послідовно з опором одного плеча мостової схеми додаткової регульованої напруги, яка матиме функцію тестової величини, тобто еквівалента міри неелектричної фізичної величини.

Оскільки реальні джерела напруги мають ненульовий вихідний опір, то його наявність створить додатковий розбаланс моста. Для усунення додаткового розбалансу, необхідно включити такий самий опір в суміжне плече моста.

Для створення тестової напруги найбільш доцільно використати цифро аналоговий перетворювач (ЦАП). При малих значеннях вихідної напруги моста тестову напругу від ЦАП доцільно подавати через подільник напруги, щоб для її створення була задіяна максимальна кількість розрядів ЦАП.

Вихідна напруга рівноплечого збалансованого моста дорівнює нулю та не залежить від напруги його живлення і становить половину тестової

напруги, включеної послідовно з опором одного з пліч, якщо вихідний опір джерела тестової напруги нульовий.

Ця властивість мостової схеми дає можливість створити імітатор ПНФВ з найбільш адекватними параметрами, за умови забезпечення напруги живлення моста, вихідного опору та приросту вихідної напруги таких самих, як у реального ПНФВ. Зрозуміло, що вимірювач вихідної напруги повинен мати диференційний вхід.

З наведених вище міркувань, на рис. А.1 запропонована принципова схема одного з варіантів імітатора ПНФВ.

Паралельне з'єднання резисторів з однаковими значеннями опору зумовлено міркуваннями уніфікації та найбільшої імовірності ідентичності їх властивостей.

На рис. А.2 наведена еквівалентна схема імітатора, яка враховує опори джерел напруги e_1 та e_2 .

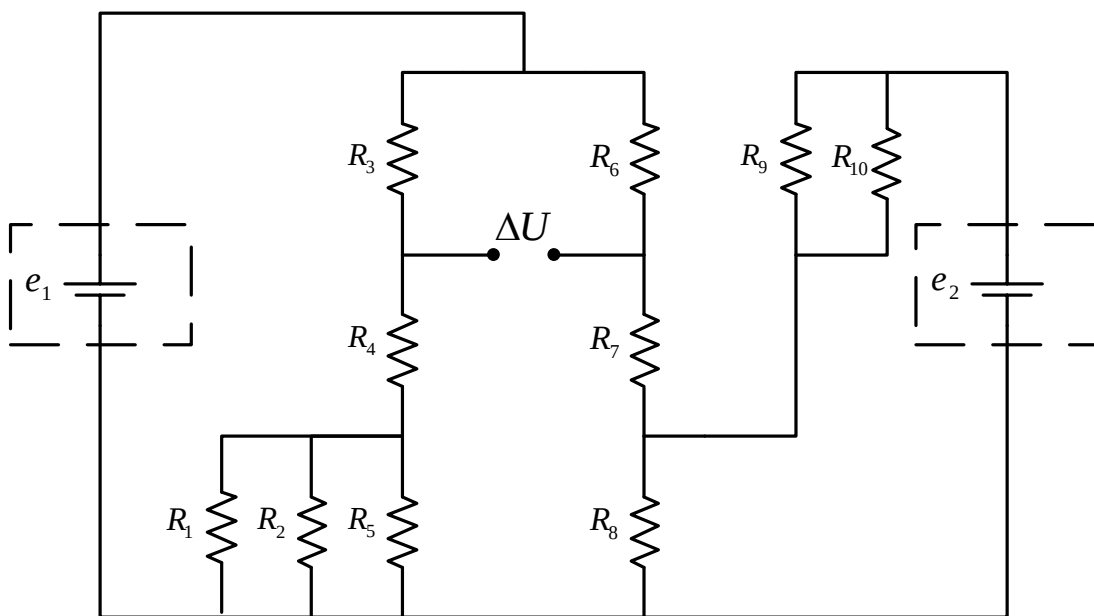


Рис. А.1. Принципова схема імітатора ПНФВ з мостовою схемою.

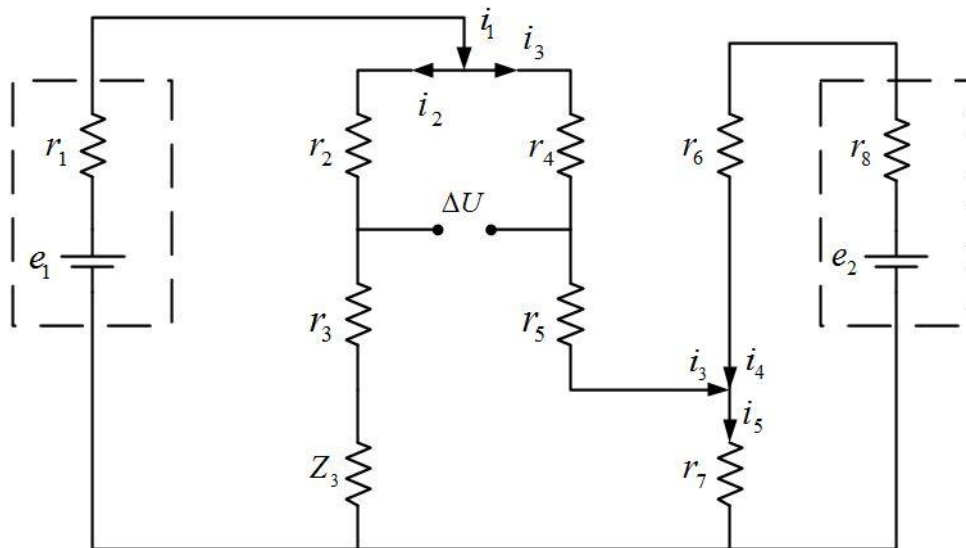


Рис. А.2. Еквівалентна схема імітатора ПНФВ з мостовою схемою.

На еквівалентній схемі (рис. А.2) прийняті такі позначення:

r_1, r_8 – вихідні опори джерел напруги e_1 і e_2 відповідно;

e_1 – ЕРС джерело живлення мостової схеми;

r_6 – верхнє плече подільника напруги;

r_7 – нижнє плече подільника напруги, на якому виділяється напруга, що створює вихідну напругу ΔU ;

r_2, r_3, r_4, r_5 – резистори чотириплечого моста;

z_3 – симетричний опір, значення якого рівне опору паралельно з'єднаннях резистора r_7 з послідовно з'єднаними резисторами r_6 і r_8

e_2 – ЕРС цифро-аналогового перетворювача, що створює вихідну напругу ΔU вихідна напруга імітатора ПНФВ.

Застосовуючи рівняння Кірхгофа для напруг і струмів отримаємо матричне рівняння для еквівалентної схеми рис. А.2

$$\begin{bmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ -e_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

де r_1 – вихідний опір джерела напруги e_1 ;

$$z_5 = r_2 + r_3 + z_3;$$

$$z_3 = \frac{r_7 \cdot (r_6 + r_8)}{r_7 + r_6 + r_8};$$

$$z_4 = r_4 + r_5;$$

$$z_6 = r_6 + r_8;$$

r_6 – верхнє плече подільника напруги;

r_7 – нижнє плече подільника напруги;

$r_2 = r_3 = r_4 = r_5$ – резистори основної схеми моста.

Вихідна напруга

$$\Delta U = i_2 r_2 - i_3 r_4. \quad (\text{A.4})$$

В свою чергу за правилом Крамера з рівняння (A.3) отримаємо струми i_2 та i_3

$$i_2 = \det 2 / \det C \quad (\text{A.5})$$

$$i_3 = \det 3 / \det C \quad (\text{A.6})$$

де $\det C$ – визначник системи (A.3);

$\det 2$ – визначник системи, в якому другий стовпчик замінений матрицею стовпчиком правої частини системи (A.3);

$\det 3$ – визначник системи, в якому третій стовпчик замінений матрицею стовпчиком правої частини системи (A.3).

$$\det 2 = \begin{vmatrix} r_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & -e_2 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -e_2 r_1 r_7 - e_1 r_7 z_4 - e_1 r_7 z_6 - e_1 z_4 z_6 \quad (\text{A.7})$$

$$\det 3 = \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & 0 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & -e_2 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_2 r_1 r_7 - e_1 r_7 z_5 + e_2 r_7 z_5 - e_1 z_5 z_6 \quad (\text{A.8})$$

$$\det C = \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -r_1 r_7 z_4 - r_1 r_7 z_5 - r_1 r_7 z_6 - r_1 z_4 z_6 - \quad (\text{A.9})$$

$$-r_1 z_5 z_6 - r_7 z_4 z_5 - r_7 z_5 z_6 - z_4 z_5 z_6$$

Після підстановки виразів: (A.5), (A.6), (A.7), (A.8), (A.9) в (A.4) отримаємо залежність вихідної напруги ΔU від ЕРС e_1 та e_2

$$\Delta U = \frac{1}{\det C} \left(r_2 \cdot (-e_2 \cdot r_1 \cdot r_7 - e_1 \cdot r_7 \cdot z_4 - e_1 \cdot r_7 \cdot z_6 - e_1 \cdot z_4 \cdot z_6) - \right. \\ \left. - r_4 \cdot (e_2 \cdot r_1 \cdot r_7 - e_1 \cdot r_7 \cdot z_5 + e_2 \cdot r_7 \cdot z_5 - e_1 \cdot z_5 \cdot z_6) \right) \quad (\text{A.10})$$

Якщо для імітатора ПНФВ задано необхідне значення ЕРС вихідної напруги ΔU , то необхідне значення ЕРС аналого-цифрового перетворювача знаходиться за формулою (A.11).

$$e_2 = - \frac{\det C \cdot \Delta U + e_1 \cdot (r_2 \cdot r_7 \cdot z_4 + r_2 \cdot r_7 \cdot z_6 - r_4 \cdot r_7 \cdot z_5 + r_2 \cdot z_4 \cdot z_6 - r_4 \cdot z_5 \cdot z_6)}{r_2 \cdot (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_4 + r_4 \cdot z_5)} \quad (\text{A.11})$$

Виділивши мультиплікативну пропорційну ΔU і адитивну, пропорційну e_1 складові залежності $e_2(\Delta U)$ отримаємо:

$$e_2 = -\frac{\det C \cdot \Delta U}{r_7(r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_4 z_5)} - e_1 \frac{r_2 r_1 z_4 + r_2 r_7 z_6 - r_4 r_7 z_5 + r_2 z_4 z_6 - r_4 z_5 z_6}{r_7(r_1 r_2 + r_1 r_4 + r_4 z_5)} \quad (\text{A.12})$$

Якщо $r_2 = r_4$.

Вихідна напруга дорівнює

$$\Delta U = -\frac{r_4}{\det C} \cdot (2 \cdot e_2 \cdot r_1 \cdot r_7 + e_1 \cdot r_7 \cdot z_4 - e_1 \cdot r_7 \cdot z_5 + e_1 \cdot r_7 \cdot z_6 + e_2 \cdot r_7 \cdot z_5 + e_1 \cdot z_4 \cdot z_6 - e_1 \cdot z_5 \cdot z_6) \quad (\text{A.13})$$

Необхідна ЕРС від ЦАП e_2 при заданій вихідній напрузі ΔU буде

$$e_2 = -\frac{\det C \cdot \Delta U + e_1 \cdot r_4 \cdot (r_7 \cdot z_4 - r_7 z_5 + r_7 z_6 + z_4 \cdot z_6 - z_5 \cdot z_6)}{r_4 \cdot r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} \quad (\text{A.14})$$

Враховуючи те, що серійні ЦАП створюють максимальну напругу в вольтовому діапазоні $(\pm 2.5; \pm 5; \pm 10)$ В для відтворення вихідних напруг імітатора ПНФВ мостового типу в мілівольтовому діапазоні $(1 \div 100)$ мВ доцільно необхідну ЕРС e_2 подавати до мостової схеми через відповідний подільник напруги (на еквівалентній схемі рис. А.2 резистори (r_6, r_7)) для того, щоб при створенні ЕРС e_2 була задіяна максимальна кількість розрядів ЦАП.

Для подальшого аналізу представимо формулу (А.14) у вигляді

мультиплікативної і адитивної складових

$$e_2 = -\frac{\det C}{r_4 \cdot r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} \cdot \Delta U - e_1 \cdot \frac{r_7 \cdot z_4 - r_7 \cdot z_5 + r_7 \cdot z_6 + z_4 \cdot z_6 - z_5 \cdot z_6}{r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} \quad (\text{A.15})$$

При вказаних нижче значеннях резисторів

$$\left. \begin{aligned} r_7 : r_6 &= 1:50 \\ r_1 &= 2 \\ r_2 &= r_4 = 4700 \\ r_7 &= 47 \\ z_4 &= 9400 \\ z_5 &= 9446,07919967 \\ z_6 &= 2352 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.16})$$

Отримаємо:

$$\det C = \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,1414960555512663914 \cdot 10^{11} \quad (\text{A.17})$$

Коефіцієнт мультиплікативної складової дорівнює

$$-\frac{\det C}{r_4 \cdot r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} = +102,5855319149 \quad (\text{A.18})$$

Коефіцієнт адитивної складової

$$-\frac{r_7 \cdot z_4 - r_7 \cdot z_5 + r_7 \cdot z_6 + z_4 \cdot z_6 - z_5 \cdot z_6}{r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} = +1,8762590467 \cdot 10^{-11} \quad (\text{A.19})$$

Чисельний вираз для встановлення e_2 в залежності від ΔU має вигляд:

$$e_2 = 102,5855319149 \cdot \Delta U + e_1 \cdot 1,8762590467 \cdot 10^{-11} \quad (\text{A.20})$$

Для значення резистора r_7 в десять разів меншого, ніж в (A.16)

$$\left. \begin{aligned} r_7 : r_6 &= 1:500 \\ r_1 &= 2 \\ r_2 &= r_4 = 4700 \\ r_7 &= 4,7 \\ z_4 &= 9400 \\ z_5 &= 9404,690626724 \\ z_6 &= 2352 \end{aligned} \right] \quad (\text{A.21})$$

Отримаємо:

$$\det C = \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,0853454270966829621 \cdot 10^{11} \quad (\text{A.22})$$

Коефіцієнт мультиплікативної складової

$$-\frac{\det C}{r_4 \cdot r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} = +1,0033514894 \cdot 10^3 \quad (\text{A.23})$$

Коефіцієнт адитивної складової:

$$\frac{r_7 \cdot z_4 - r_7 z_5 + r_7 \cdot z_6 + z_4 \cdot z_6 - z_5 \cdot z_6}{r_7 \cdot (2 \cdot r_1 + z_5)} = +1,0109142561 \cdot 10^{-11} \quad (\text{A.24})$$

Чисельний вираз для встановлення значення e_2 в залежності від заданого ΔU має вигляд:

$$e_2 = 1,0033514894 \cdot 10^3 \cdot \Delta U + e_1 \cdot 1,0109142561 \cdot 10^{-11} \quad (\text{A.25})$$

Як видно із формул (A.20) і (A.25), адитивна складова ЕРС e_2 є незрівнянно меншою від мультиплікативної і по суті є похибкою обчислень, тому що в симетричній мостовій схемі (при відсутності розбалансу моста) вихідна напруга теоретично не залежить від напруги живлення мостової схеми. Мінімізація залежності вихідної напруги від напруги живлення мостової схеми імітатора ПНФВ є однією з переваг запропонованої схеми імітатора порівняно з мостовою схемою, в якій вихідна напруга створюється зміною опору одного з резисторів моста.

Іншими перевагами є також наступні:

1. Симетричний (диференційний) вихідний сигнал створюється джерелами ЕРС, які мають спільну точку.
2. Залежність вихідної напруги ΔU і тестової e_2 є лінійною.

3. Для створення малих напруг ΔU завдяки подільнику (r_6, r_7) задіяна велика кількість розрядів АЦП e_2 , тобто має місце велика роздільна здатність.

4. Розбаланс моста, зумовлений несиметричністю його резисторів може бути скомпенсований ЕРС джерела тестового сигналу e_2 .

Корекція похибки вихідного сигналу імітатора ПНФ за мостовою схемою, зумовленою відмінністю значень опорів резисторів принципової схеми від розрахункових

Ця похибка може бути спричинена, як при виготовленні імітатора, так і в процесі роботи внаслідок впливу зовнішніх факторів, та через старіння елементів схеми.

Приріст вихідної напруги моста ΔU_r зумовлений приростом тільки одного резистора визначається формулою (А.1), зміною значення будь яких резисторів, а також змінною ЕРС e_1 згідно формули (А.10).

Корекція приросту ΔU_r , тобто досягнення нульового значення ($\Delta U_r = 0$) може бути здійснена зміною опору одного з пліч моста, або зміною значення електрорушійної сили e_2 .

Другий спосіб дає перевагу, тому що ΔU в різних ПНФВ може бути дуже малим. Навіть при малих відношеннях $\Delta r / r$ плечей моста приріст ΔU_r може бути таким, що перевищує необхідне значення вихідної напруги ΔU і для створення корегуючої напруги, рівної ΔU_r може не вистачити динамічного діапазону ЦАП e_2 . В цьому випадку необхідно переходити на інший коефіцієнт ділення подільника напруги для e_2 , або застосувати попереднє балансування моста зміною опорів схеми.

Для врахування цих особливостей проектування і роботи імітатора ПНФВ на мостових схемах створимо рівняння похибок вихідної напруги

ΔU , як функції похибок елементів, від яких залежить ΔU_r . Для цього скористуємося рівнянням (A.10), а також вихідними виразами (A.4 - A.9)

$$\Delta U = \frac{r_2 \cdot \det 2 - r_4 \cdot \det 3}{\det C}. \quad (\text{A.26})$$

Формула (A.26) за своєю структурою є часткою

$$\Delta U_r = \frac{A}{B}. \quad (\text{A.27})$$

Відносна похибка частки дорівнює

$$\delta_{\Delta U} = \frac{\delta A - \delta B}{1 + \delta B}. \quad (\text{A.28})$$

де δA і δB – відносні похибки чисельника і знаменника виразу (A.27)

В свою чергу A є сумою.

Відносна похибка суми дорівнює

$$\delta A = \frac{1}{A} (r_2 \cdot \det 2 \cdot \delta(r_2 \cdot \det 2) - r_4 \det 3 \cdot \delta(r_4 \cdot \det 3)) \quad (\text{A.29})$$

В свою чергу похибка добутку двох співмножників дорівнює:

$$\delta(r_2 \det 2) = \delta r_2 + \delta \det 2 + \delta r_2 \cdot \delta \det 2 \quad (\text{A.30})$$

$$\delta(r_4 \cdot \det 3) = \delta r_4 + \delta \det 3 + \delta r_4 \cdot \delta \det 3 \quad (\text{A.31})$$

Загалом, враховуючи (A.26) - (A.31), отримаємо:

Відносна похибка визначника

$$\delta \det = \frac{\Delta \det}{\det}. \quad (\text{A.32})$$

$\Delta \det$ – абсолютна похибка визначника, зумовлена похибками його елементів.

Процедура знаходження $\Delta \det$ детально описана в [32]

$$\Delta \det = \sum_{k=1}^n B^k$$

де B^k – сума визначників k -го порядку похибки.

При не великих похибках елементів визначника враховується, як правило, визначники похибки першого порядку малості.

Їх кількість дорівнює порядку визначника. Абсолютна похибка першого порядку малості дорівнює сумі n визначників, в яких елементи стовпчиків номінальних значень замінені стовпчиками похибок елементів визначників з розташуванням стовпчиків похибок по одному в кожному визначнику, які беруться з визначника матриці похибок.

Визначник матриці похибок визначника системи має вигляд:

$$\det C(\Delta) = \begin{vmatrix} \Delta r_1 & \Delta z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta z_5 & \Delta z_4 & 0 & \Delta r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta z_6 & -\Delta r_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Таким чином, абсолютна похибка першого порядку малості визначника системи (A.9) буде:

$$\begin{aligned} \Delta \det C = & \begin{vmatrix} \Delta r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & \Delta z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & \Delta z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta z_6 & -r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} r_1 & z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_5 & z_4 & 0 & -\Delta r_7 \\ 0 & 0 & 0 & -z_6 & -\Delta r_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

При необхідності врахування похибок всіх порядків малості, а не тільки першого, слід скористатися можливостями математичних пакетів, наприклад Mathcad, представивши елементи визначників в вигляді суми номінального значення і його абсолютної похибки

Вирази визначників $\det C, \det 2, \det 3$ з урахуванням номінальних значень елементів та їх абсолютних похибок в вигляді добутку номінальних значень та їх відносних похибок представлені формулами (A.35), (A.36), (A.37). Зауважимо, що в (A.36) та (A.37) відносна похибка елемента e_2 не врахована через її вплив на вихідну напругу з коефіцієнтом практично одиниця, що є очевидним з (A.25).

Результат підрахунку в Mathcad для кожного з визначників представляє собою упорядковану суму, в якій перша група доданків в вигляді добутків номінальних значень неповторюваних елементів визначника є його номінальним значенням (представлено чорним кольором). Друга група доданків в вигляді добутків номінальних значень неповторюваних елементів на їх відносні похибки представляє собою абсолютну похибку визначника першого порядку малості (представлено голубим кольором). Третя група доданків в вигляді добутків номінальних значень неповторюваних елементів на дві неповторювані відносні похибки двох елементів представляє собою абсолютну похибку визначника другого порядку малості (представлено фіолетовим кольором). Четверта група доданків в вигляді добутків неповторюваних елементів на три неповторювані відносні похибки трьох елементів є абсолютною похибкою визначника третього порядку малості (представлено зеленим кольором).

Отримані в аналітичному вигляді вирази номінальних значень та абсолютних похибок різного порядку малості в автоматизованому режимі є дуже продуктивними для подальшого аналізу і оптимізації.

$\det C =$

$r1 + r1 \cdot \delta r1$	$z5 + z5 \cdot \delta z5$	0	0	0
0	$-z5 - z5 \cdot \delta z5$	$z4 + z4 \cdot \delta z4$	0	$r7 + r7 \cdot \delta r7$
0	0	0	$-z6 - z6 \cdot \delta z6$	$-r7 - r7 \cdot \delta r7$
1	-1	-1	0	0
0	0	1	1	-1

 $\det C =$

$$\begin{aligned}
 & -r1 \cdot r7 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot z5 - r1 \cdot r7 \cdot z6 - r1 \cdot z4 \cdot z6 - r1 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r7 \cdot z4 \cdot z5 - r7 \cdot z5 \cdot z6 - z4 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 z5 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z5 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z6 - r1 \cdot r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - r1 \cdot r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - r1 \cdot \delta r1 \cdot z4 \cdot z6 - r1 \cdot \delta r1 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r7 \cdot \delta r7 \cdot z4 \cdot z5 - r7 \cdot \delta r7 \cdot z5 \cdot z6 - r1 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z6 - r1 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - r1 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z5 - r7 \cdot \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 - \\
 & -r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - \delta z4 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -\delta z6 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot z5 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot z6 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta z4 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta z5 \cdot z5 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta z6 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z6 - r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z5 - r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 - \\
 & -r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - r1 \cdot \delta z4 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta z4 \cdot \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 - r7 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -\delta z4 \cdot \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \delta z4 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - \\
 & -r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z4 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -r1 \cdot \delta r1 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot \delta z5 \cdot z4 \cdot z5 - \\
 & -r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - \delta z4 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z5 \cdot z6 .
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

det 2 =

$r1 + r1 \cdot \delta r1$	$e1 + e1 \cdot \delta e1$	0	0	0
0	0	$z4 + z4 \cdot \delta z4$	0	$r7 + r7 \cdot \delta r7$
0	$-e2 - e2 \cdot \delta e2$	0	$-z6 - z6 \cdot \delta z6$	$-r7 - r7 \cdot \delta r7$
1	0	-1	0	0
0	0	1	1	-1

det 2 =

$$\begin{aligned}
 & -e2 \cdot r1 \cdot r7 - e1 \cdot r7 \cdot z4 - e1 \cdot r7 \cdot z6 - e1 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 - e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta e2 - e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot z4 - \\
 & -e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot z6 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z4 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z6 - e1 \cdot r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - \\
 & -e1 \cdot r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - e1 \cdot \delta e1 \cdot z4 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta e2 - e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 - e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 - \\
 & -e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot z4 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot z6 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta z4 \cdot z4 - \\
 & -e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta z6 \cdot z6 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - \\
 & -e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z4 \cdot z4 \cdot z6 - e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z4 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 - \\
 & -e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z4 \cdot z4 - \\
 & -e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z6 \cdot z6 - e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z4 \cdot \delta z6 \cdot z4 \cdot z6 .
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

det 3 =

$r1 + r1 \cdot \delta r1$	$z5 + z5 \cdot \delta z5$	$e1 + e1 \cdot \delta e1$	0	0
0	$-z5 - z5 \cdot \delta z5$	0	0	$r7 + r7 \cdot \delta r7$
0	0	$-e2 - e2 \cdot \delta e2$	$-z6 - z6 \cdot \delta z6$	$-r7 - r7 \cdot \delta r7$
1	-1	0	0	0
0	0	0	1	-1

$$\begin{aligned}
 \det 3 = & e2 \cdot r1 \cdot r7 - e1 \cdot r7 \cdot z5 + e2 \cdot r7 \cdot z5 - e1 \cdot z5 \cdot z6 + \\
 & + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta e2 + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r7 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot z5 + \\
 & + e2 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot z5 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z5 + e2 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot z5 - e1 \cdot r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 + \\
 & + e2 \cdot r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - e1 \cdot \delta e1 \cdot z5 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 + \\
 & + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta e2 + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r1 \cdot \delta r7 + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 - \quad (A.37) \\
 & - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot z5 + e2 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 \cdot z5 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta z5 \cdot z5 + \\
 & + e2 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot \delta z5 \cdot z5 - e1 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 + e2 \cdot r7 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - \\
 & - e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z5 \cdot z5 \cdot z6 - e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 - e1 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 + \\
 & + e2 \cdot r1 \cdot r7 \cdot \delta r \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 - e1 \cdot r7 \cdot \delta e1 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 + \\
 & + e2 \cdot r7 \cdot \delta e2 \cdot \delta r7 \cdot \delta z5 \cdot z5 - e1 \cdot \delta e1 \cdot \delta z5 \cdot \delta z6 \cdot z5 \cdot z6 .
 \end{aligned}$$

Рівняння перетворення вимірювальних каналів

Рівняння перетворення вимірювальних каналів (ВК) вимірювальної системи створюються за допомогою контрольно-повірочної апаратури (КПА). КПА створює електричні сигнали відповідно до діапазонів перетворювачів неелектричних фізичних величин (ПНФВ). Внаслідок цього є можливість створювати тестові величини, необхідні для складання додаткових рівнянь.

Апріорі в межах задекларованої точності електронна складова вимірювальних каналів є лінійною, відповідно з адитивною і мультиплікативною похибками.

$$y = kx + b = k_o(1 + \gamma) + b_1 \quad (A.38)$$

де k – коефіцієнт перетворення;

k_o – номінальне значення коефіцієнта перетворення;

γ – мультиплікативна похибка;

b – адитивна похибка в масштабі вихідної величини.

В зв'язку з застосуванням в принципових схемах активних і пасивних елементів не високої точності необхідно визначити значення реального коефіцієнта k_p і адитивної складової b_p в формулі (A.38), а потім підставити їх

в формулу для знаходження вимірюваної величини y , отримавши значення вихідної величини y^* , знайти значення вимірюваної величини x^* з формули (A.39).

$$y^* = k_p x^* + b_p \quad (\text{A.39})$$

де y^* – значення вихідної величини каналу;

x^* – є невідоме значення вимірюваної величини.

Для знаходження k_p і b_p при відомих x і y достатньо скласти два рівняння

$$y_1 = k_p x_1 + b_p \quad (\text{A.40})$$

$$y_2 = k_p x_2 + b_p \quad (\text{A.41})$$

З них отримаємо реальні значення k_p і b_p

$$k_p = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (\text{A.42})$$

$$b_p = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1. \quad (\text{A.43})$$

або

$$b_p = y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2. \quad (\text{A.44})$$

З формул (A.39), (A.42), (A.43) отримаємо значення вимірювальної величини x^*

$$x^* = \frac{y^* - b_p}{k_p} = \frac{y^* - \left[y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 \right]}{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}. \quad (\text{A.45})$$

зробивши перетворення в (A.45), отримаємо:

$$x^* = \frac{y^*(x_1 - x_2) + y_1 x_2 - y_2 x_1}{y_1 - y_2}. \quad (\text{A.46})$$

Якщо зразкову (тестову) величину x_2 прирівняти нулю,

$$x_2 = 0, \quad (\text{A.47})$$

отримаємо:

$$x^* = \frac{y^* x_1 - y_2 x_2}{y_1 - y_2}. \quad (\text{A.48})$$

При швидких змінах k_p і b_p доцільно знаходити їх значення перед кожним вимірюванням, при повільних – знаходити, перед серією вимірювань, користуючись формулою

$$x^* = \frac{y^* - b_p}{k_p}, \quad (\text{A.49})$$

використовуючи попередньо отриманими за формулами (A.42) і (A.43) значеннями k_p і b_p , збереженими в пам'яті пристрою, при обробці результатів вимірювань.

Значення k_p і b_p можна отримувати, як перед вимірюваннями вхідної величини x^* , так і після її вимірювання, знаходячи її значення за формулою (A.49).

Розташування тестових величин x_1 і x_2 відносно вимірюваної величини x^* може бути більш оптимальним після знаходження її місця розташування, виходячи з критерію мінімізації похибок при обчисленні за формулою (A.46).

Додаток Б. Програма автоматизованого аналізу вимірювальних пристроїв (ПААВП)

Дане програмне забезпечення дозволяє реалізувати в автоматичному режимі положення, викладені в попередніх розділах: складання матричної моделі на основі ρ -методу, обчислення визначників матричної моделі похибок на основі методу траєкторій.

Опис програми ПААВП

Програма ПААВП дозволяє розраховувати визначники систем рівнянь вимірювальних кіл в символьному вигляді.

Програма проводить графічну побудову вимірювальних кіл та аналіз їх характеристик, автоматичну генерацію систем рівнянь в матричній формі та її подальший розрахунок.

Програма дозволяє створювати, редагувати, аналізувати та зберігати моделі (графічні, матричні та вихідні рівняння) вимірювальних кіл.

ПААВП написаний на мові C# з графічним інтерфейсом на мові XAML. Для запуску програми додатково повинно бути встановлене середовище виконання .NET 4 Framework.

ПААВП не потребує встановлення і запускається з будь-якого носія.

Головне вікно ПААВП

На рис. Б.1 зображено головне вікно програми. Основними елементами вікна є:

- панель інструментів;
- вікно вводу матричної моделі;
- вікно підстановки значень змінних моделі;
- вікна виводу результатів розрахунку.

Головне вікно програми призначене для введення матричної моделі вимірювальних кіл власноруч користувачем або на основі автоматичного розрахунку графічної моделі кола.

Панель інструментів головного вікна

Складається з піктограм команд, які керують процесом створення, збереження, редагування та аналізу матричної моделі. В таблиці Б.1 наведено перелік команд та короткий опис їх функцій.

Програма працює в двох основних режимах:

1. режим матричної моделі – розмір матриці та її елементи вводяться користувачем;
2. режим структурної схеми – на основі створеної структурної схеми генерується матрична модель, яку користувач може змінити тільки змінивши структурну схему.

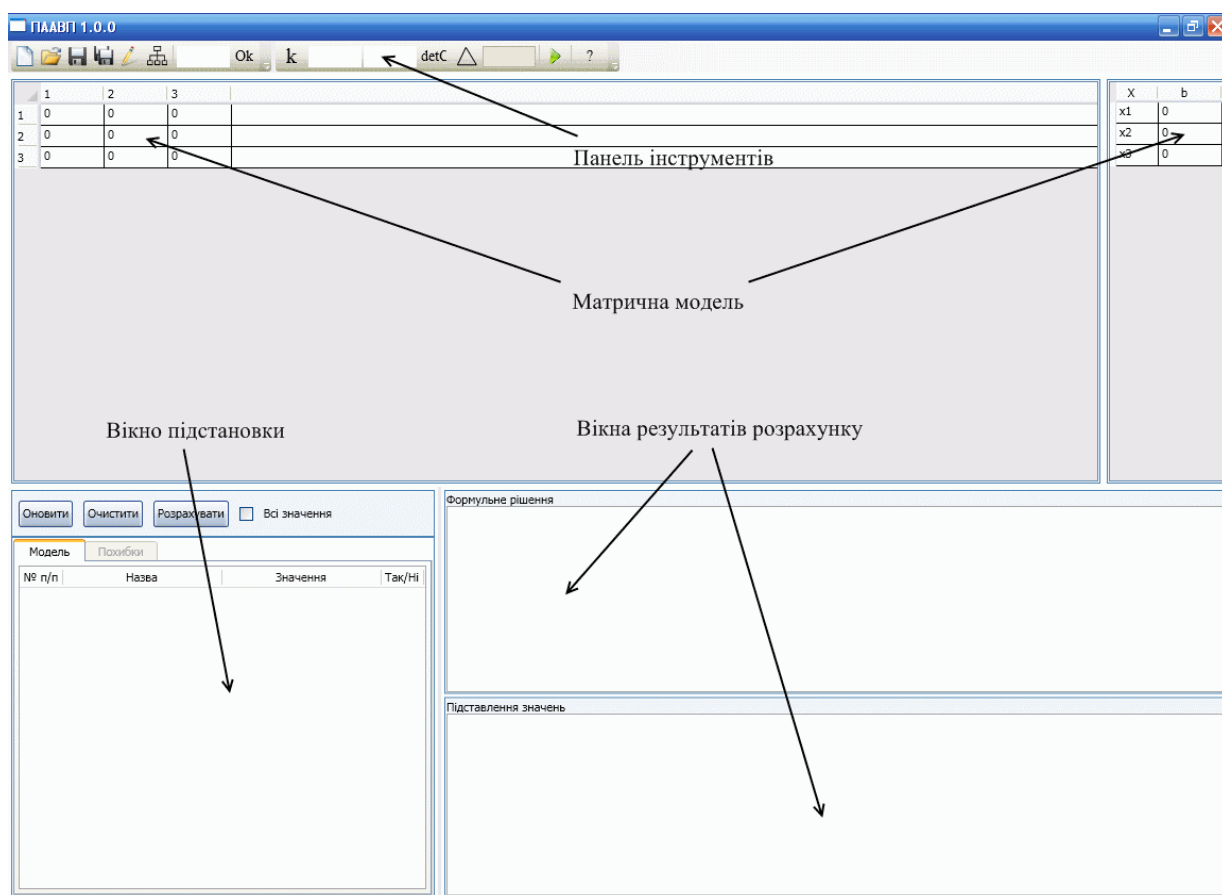


Рис. Б.1. Головне вікно програми ПААВП

Таблиця Б.1

Команди панелі інструментів

	Створення нової моделі
	Відкрити збережену модель
	Збереження матричної моделі
	Повне збереження. Збереження графічної і матричної моделі
	Редагування матричної моделі
	Виклик вікна побудови структурної схеми
Ok	Підтвердження нового розміру матриці
k	Розрахунок повного коефіцієнту передачі
detC	Розрахунок визначника матриці коефіцієнтів
Δ	Розрахунок детермінованої моделі похибок
	Запуск розрахунку
?	Відомості про програму

Можливий перехід між режимами. Команда  викликає вікно редактора структурних схем, тим самим програма переходить в режим структурної схеми. Команда редагування  переводить програму в режим матричної моделі. Дана команда стає активною при наявності структурної схеми.

Команда створення нової моделі видаляє попередню (графічну і матричну), значення підстановки та результати розрахунку.

Команда відкрити завантажує матричну модель і структурну схему (за наявності). В залежності від наявності структурної схеми програма переводиться в один з двох режимів.

Збереження матричної моделі включає в себе збереження значень підстановки та результатів розрахунку. Повне збереження – зберігаються матрична модель (файл з розширенням .md) з підставленими значеннями та результатами, і структурна схема (файл з розширенням .bs) в вибраному каталозі.

Команда редагування доступна при наявності структурної схеми. Вона дозволяє редагувати матричну модель, але видаляє структурну схему.

Для зміни розміру матриці потрібно ввести значення в поле зображене на рис. Б.2 і натиснути н піктограму «Ok» (команда доступна в режимі введення матричної моделі).

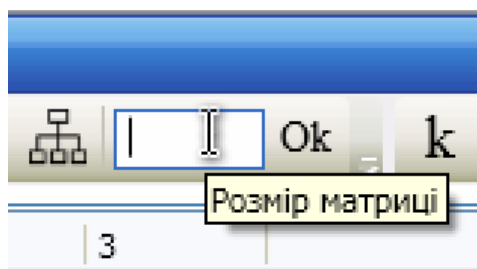


Рис. Б.2. Поле для введення розміру матриці і піктограма підтвердження введення

Для розрахунку довільного коефіцієнту передачі потрібно ввести номери вихідного і вхідного сигналів в поля, зображені на рис. Б.3.

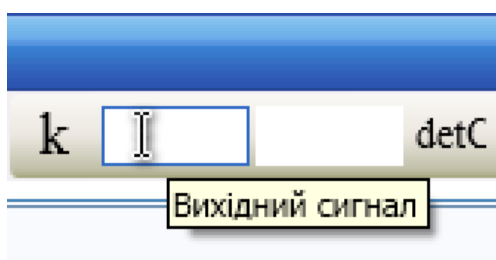


Рис. Б.3. Поля введення вихідного і вхідного сигналів для розрахунку коефіцієнту передачі

Команда розрахунку детермінованої моделі похибок активує поле введення порядку похибки (рис. Б.4).

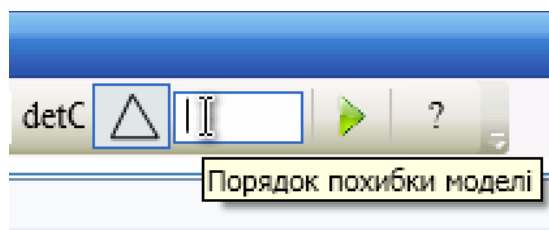


Рис. Б.4. Піктограма розрахунку детермінованої похибки моделі і поле введення порядку похибки

Вікно введення матричної моделі. Дане вікно містить (рис. Б.5):

- таблицю введення коефіцієнтів;
- таблицю невідомих і правих частин.

	1	2	3	4	5	
1	0	0	0	0	0	x1 0
2	0	0	0	0	0	x2 0
3	0	0	0	0	0	x3 0
4	0	0	0	0	0	x4 0
5	0	0	0	0	0	x5 0

Рис. Б.5. Вікно введення матричної моделі

В клітинки таблиці можна вводити числа (десятковий роздільник – кома) або вирази «-15*a4,3*x1+d(x1)*a2,1», без пробілів. ПААВП розраховує визначники числових, символьних або змішаних матриць. Програма дозволяє копіювати вміст матриць і вставляти, наприклад в Mathcad, Matlab або Excel. В порівнянні з Matlab ПААВП не потребує попереднього створення і присвоєння символьних змінних, що значно скорочує час введення.

Вікно підстановки значень змінних

Дане вікно дозволяє виконувати підстановки значень змінних матричної моделі та моделі похибок. Воно містить дві вкладки. Перша дозволяє виконувати підстановки значень змінних матричної моделі (рис. Б.6). Друга вкладка – підстановки значень змінних моделі похибок (рис. Б.7), активується при виборі команди розрахунку детермінованої моделі похибок Δ .

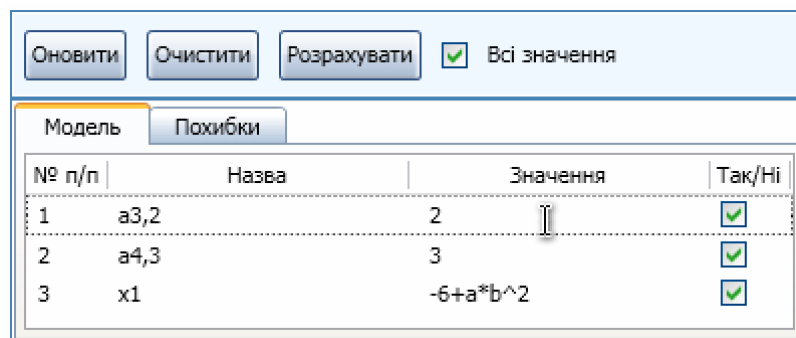


Рис. Б.6. Вкладка підстановки значень змінних матричної моделі

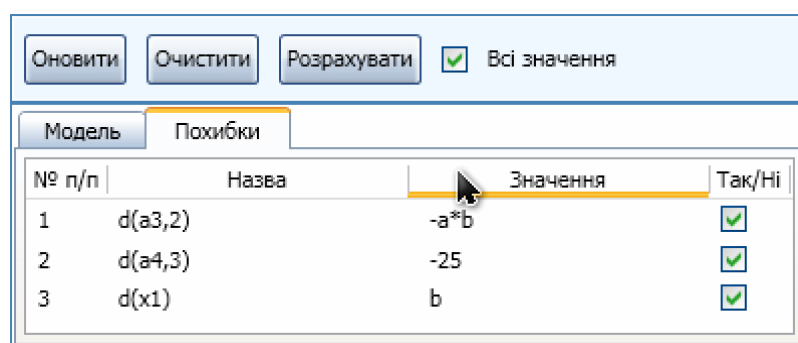


Рис.7. Вкладка підстановки значень змінних моделі похибок

В таблиці Б.2 наведено функції піктограм, які розташовані на панелі вгорі вікна.

Таблиця Б.2

Команди піктограм вікна підстановки

	Оновлює список змінних
	Очищує всі значення підстановки
	Запуск підстановку (якщо проведені символічні розрахунки)
	Вибір всіх значень підстановки

Для того щоб змінні матричної моделі або моделі похибок з'явилися в переліку вкладки «Модель/Похибки» (рис. Б.6) потрібно вибрати відповідну вкладку і натиснути на піктограму . Підстановку значень можна проводити безліч разів в разі попереднього розрахунку визначника та коефіцієнтів передач.

Вікна результатів розрахунку

В вікно «Формульних результатів» виводяться результати розрахунку в символьному вигляді в залежності від вибраних команд. Після запуску команди розрахунку  в дане вікно виводяться формульні результати, якщо введені значення підстановки і вибрані змінні для підстановки в вікно «Числові результати» виводяться результати підстановки (рис. Б.8). Отримане передаточне рівняння дозволяє отримувати значення визначників матриць на основі значень змінних без повторного розрахунку матриць.

Вікно редактора структурних схем

Редактор структурних схем дозволяє створювати, зберігати та редагувати структурну схему вимірювального пристрою і автоматично її розраховувати (рис Б.8). Таблиця Б.3 містить перелік команд панелі інструментів.

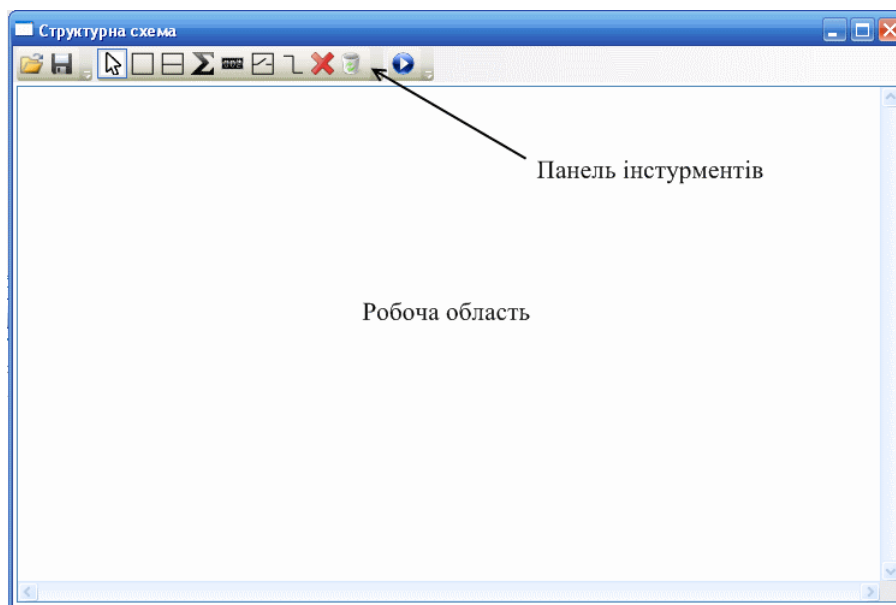


Рис. Б.8. Вікно редактора структурних схем

Таблиця Б.3

Команди панелі інструментів редактора структурних схем

	Відкрити збережену структурну схему
	Збереження структурної схеми
	Курсор – скасовує будь-які попередньо вибрані блоки
	Однонаправлений блок
	Двонаправлений блок
	Суматор
	Реверсивний лічильник
	Перемикач
	З'єднання
	Видалити елемент
	Очистити схему
	Запуск розрахунку

Даний редактор містить бібліотеку блоків і зв'язків між ними для побудови структурної схеми вимірювального пристрою. Для вставлення елементу бібліотеки в робочу область вікна потрібно лівою клав'яшею миші (ЛКМ) вибрати піктограму з відповідним елементом і потім перевести курсор миші в робочу область і натиснути ЛКМ. Кожен елемент бібліотеки має вікно редагування, яке викликається з контекстного меню при натисненні правою клав'яшею миші (ПКМ) на відповідний елемент в робочому вікні, і вибору команди «Змінити вміст» (рис. Б.9).

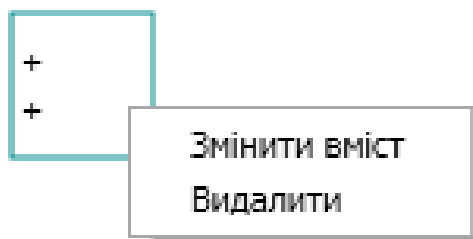


Рис. Б.9. Контекстне меню редагування елементів бібліотеки

Варто зазначити, що всі команди продовжують виконуватись при кожному натисканні ЛКМ доки активна відповідна піктограма на панелі інструментів (стосується піктограм блоків, з'єднання та видалення елементів).

Елементи бібліотеки видаляються вибором відповідної команди панелі інструментів або контекстного меню. Якщо використовується панель інструментів для видалення елементу, то потрібно вибрати піктограму  і потім натиснути ЛКМ на потрібні елементі для видалення. Повне очищення робочої області настає при виборі піктограми .

В усіх вікнах редагування вмісту непотрібно використовувати пробіл! Для позначення коефіцієнтів перетворення блоків ,  потрібно використовувати букви алфавіту, які вибираються користувачем довільно. Потім вказуються: номер вихідного сигналу, розділювач – кома, номер вхідного сигналу. Наприклад, a10,1.

Блоки панелі інструментів моделюють перетворюючі елементи вимірювального пристрою. До них належать:

Однонаправлений блок – перетворення відбуваються в одному напрямку прямому або зворотному. Напрямок перетворення встановлюється користувачем і вказується під час введення коефіцієнту перетворення (рис. Б.10): пряме перетворення – a3,2, зворотне перетворення – a2,3. Напрямок перетворення впливає на заповнення матриці коефіцієнтів системи рівнянь. Зворотній зв'язок позначається знаком мінус перед коефіцієнтом і впливає на знак коефіцієнту перетворення в матриці коефіцієнтів.

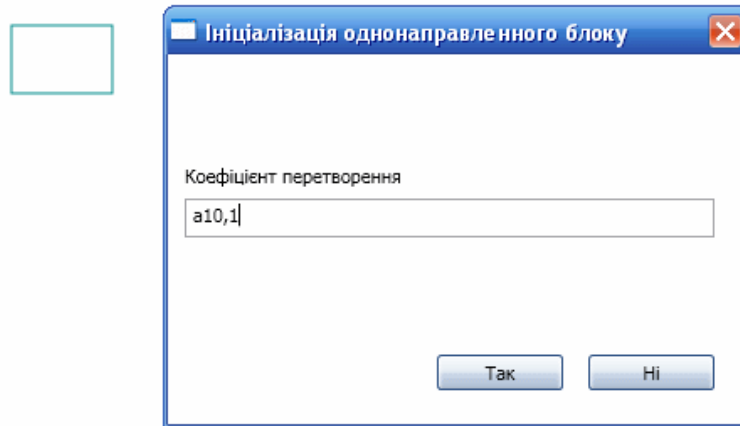


Рис. Б.10. Вікно введення коефіцієнту перетворення однонаправленого блоку

Двонаправлений блок – перетворення можуть відбуватись в обох напрямках, а також можуть передаватись два сигнали (рис. Б.11). Знаки мають таке ж значення як і в однонаправленому блоці.

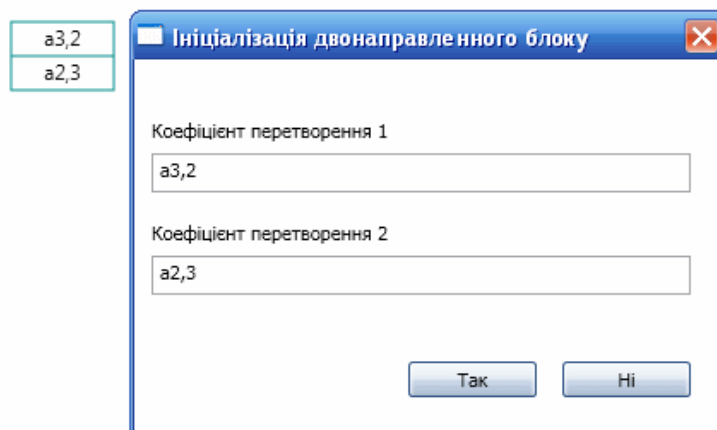


Рис. Б.11. Вікно введення коефіцієнтів перетворення двонаправленого блоку

Суматор – підсумовує вхідні сигнали. В вікні ініціалізації суматора за допомогою символів « $\leftarrow$ » і « $\rightarrow$ » вказуються кількість вхідних сигналів і операції над ними (рис. Б.12). В таблицю коефіцієнтів системи рівнянь суматор записується одиницею зі знаком.

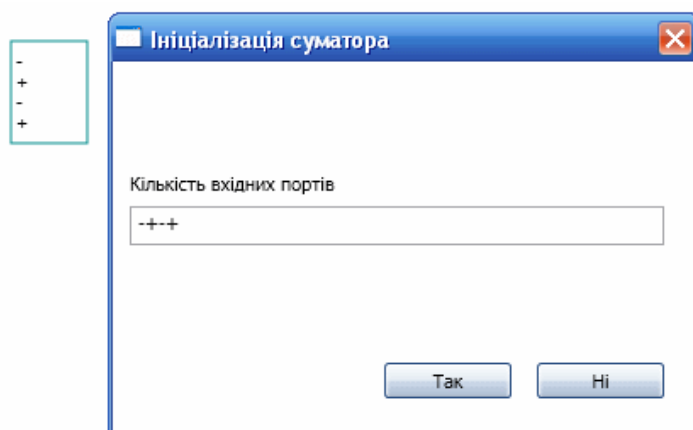


Рис. Б.12. Вікно ініціалізації суматора.

Реверсивний лічильник – виконує роль суматора, але в таблицю коефіцієнтів системи рівнянь вводяться коефіцієнти перетворення зі знаком (рис Б.13).

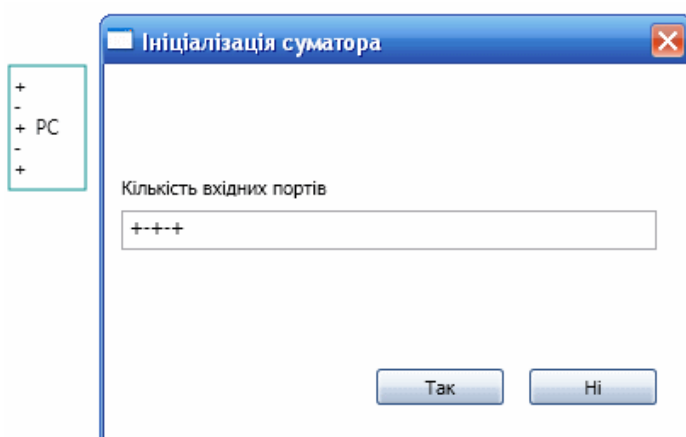


Рис. Б.13. Вікно ініціалізації реверсивного лічильника.

Перемикач – виконує функцію перемикання каналів передачі. В вікні ініціалізації вказується кількість вхідних і вихідних сигналів (рис. Б.14). Кількість сигналів на одній стороні блоку повинна дорівнювати одиниці, а на іншому боці – за вибором користувача. Якщо обидві сторони будуть містити більше одного сигналу буде виведено вікно сигналізації помилки і ініціалізація ні відбудеться (рис. Б.15).

З'єднання моделюють канали передачі сигналів між блоками. В вікні ініціалізації сигналу потрібно вказати: номер сигналу і визначити вхідний це сигнал чи ні (рис. Б.16). Знак «>» біля номеру сигналу вказує на те, що цій

сигнал – вхідний. Вхідні сигнали використовуються для заповнення матриці правих частин системи рівнянь.

Всі блоки повинні бути з'єднані і кожне з'єднання повинно бути приєднане як мінімум до одного блоку. Дана програма дозволяє створювати розгалуження сигналів (рис. Б.17).

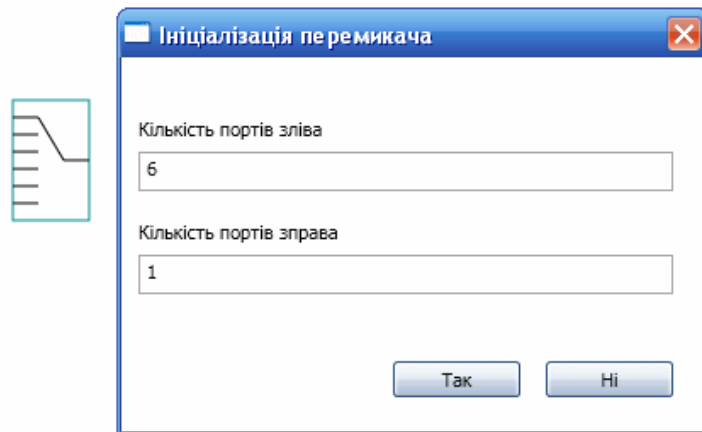


Рис. Б.14. Вікно ініціалізації перемикача

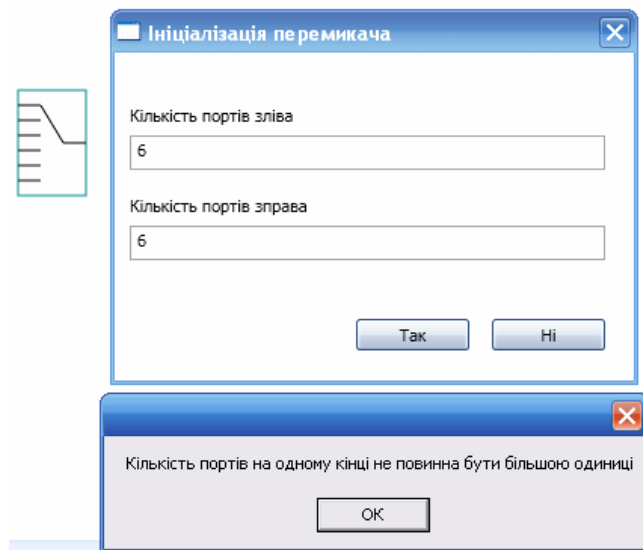


Рис. Б.15. Вікно помилки ініціалізації перемикача

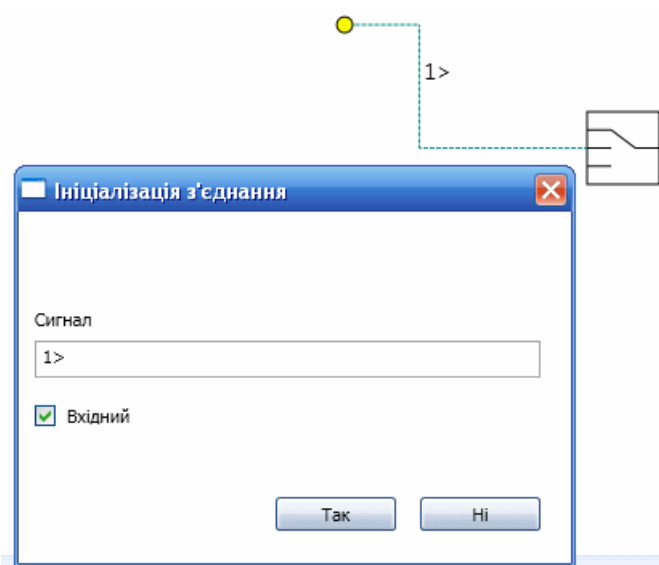


Рис. Б.16. Вікно ініціалізації з'єднання

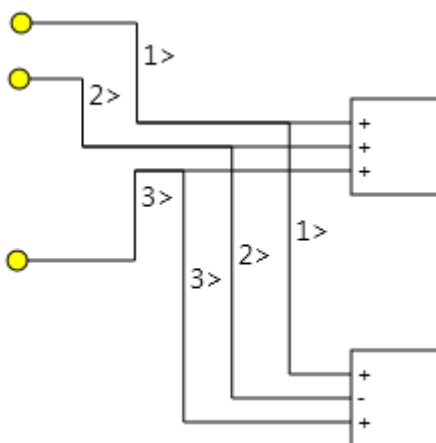


Рис. Б.17. Приклад розгалуження каналів передачі сигналів

Розрахунок структурної схеми виконується при натисненні на піктограму  і вікно редактора закривається. Програма працює в режимі структурної схеми. При неправильному введенні параметрів структурної схеми будуть видані сповіщення про відповідні помилки.

Приклад аналізу

Проаналізуємо вольтметра ефективних значень з адитивною корекцією похибок і часовим розділенням каналів. Структурна схема і матрична модель зображені на рис. Б.18 – рис. Б.19.

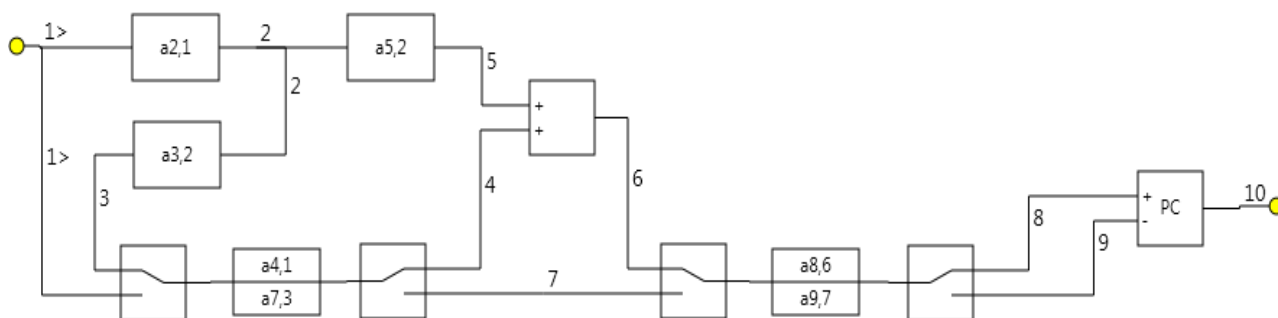


Рис. Б.18. Структурна схема

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		x	b
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		x1	x1
2	-a2,1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		x2	0
3	0	-a3,2	1	0	0	0	0	0	0	0		x3	0
4	-a4,1	0	0	1	0	0	0	0	0	0		x4	0
5	0	-a5,2	0	0	1	0	0	0	0	0		x5	0
6	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0		x6	0
7	0	0	-a7,3	0	0	0	1	0	0	0		x7	0
8	0	0	0	0	0	-a8,6	0	1	0	0		x8	0
9	0	0	0	0	0	0	-a9,7	0	1	0		x9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-p10,8	p10,9	1		x10	0

Рис. Б.19. Матрична модель

Результати, отримані ПААВП

Визначник системи:

$$\det(C)=1$$

Повний коефіцієнт передачі:

$$k(10/1)=-a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{7,3} \cdot a_{9,7} \cdot a_{10,9}+a_{2,1} \cdot a_{5,2} \cdot a_{8,6} \cdot a_{10,8}+a_{4,1} \cdot a_{8,6} \cdot a_{10,8}$$

Застосовані алгоритми розрахунку матричних рівнянь в символьному вигляді дозволяють отримати результати швидше ніж в Mathcad і MATLAB. Відсутність вимоги попереднього створення символьних змінних (як в MATLAB), можливість виконання підстановок значень змінних в результат розрахунку та наявність графічного редактора схем скорочує час на створення та аналіз моделей.

Додаток В. Практична реалізація динамічних вимірів швидкопротікаючих високотемпературних процесів

Визначення сталих часу термопар з використанням імпульсів лазерного променя

В найпростішому випадку вимірювання температури, рівняння теплової рівноваги термоперетворювача, враховуючи тільки конвективний теплообмін, можна записати:

$$\tau \frac{d\theta_u}{dt} + \theta_u = \theta_\infty, \quad (\text{B.1})$$

де θ_∞ – температура середовища; θ_u – температура чутливого елемента термоперетворювача; τ – стала часу термоперетворювача. Сталу часу в свою чергу можна записати у вигляді фізичних параметрів чутливого елемента термоперетворювача:

$$\tau = \frac{\rho V c}{k S} \quad (\text{B.2})$$

де ρ – густина; V – об'єм; c – питома теплоємність; k – коефіцієнт конвективного теплообміну і S – контактна площа поверхні чутливого елемента. Оскільки чутливий елемент термопарних термоперетворювачів в більшості випадків утворений із сплавів різних металів, точні фізичні параметри яких невідомі, то із рівняння (B.2) не можливо визначити сталу часу термоперетворювача. Також неможливо визначити сталу часу використовуючи рівняння (B.1), оскільки дійсна температура середовища θ_∞ залишається невідомою. Також, як зазначалось вище, термопара містить декілька сталих часу.

Серед динамічних характеристик, таких як диференційні рівняння, амплітудо- і фазочастотних, перехідних та імпульсно-перехідних характеристик, найбільш придатними при експериментальних випробувань термоперетворювачів є передавальна функція:

$$W(p) = \frac{E(p)}{\theta(p)},$$

де представлено: $W(p)$ – передавальна функція термоперетворювача; $E(p)$ – вихідний сигнал, термоелектрорушійна сила (термо-ЕРС); $\theta(p)$ – вхідний сигнал, температура. Оскільки процес теплообміну термоперетворювача можна описати диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами, то передавальна функція являє собою дрібно-раціональну функцію змінної p :

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

при умові, що показники поліномів чисельника і знаменника задовольняють нерівність $m < n$.

Знайдемо перехідну характеристику термоперетворювача. Згідно з цим методом експериментально встановлюють зміну вихідного сигналу термоперетворювача (термо-ЕРС) в часі при ступінчатій зміні вхідного сигналу – температури. Отримана залежність термо-ЕРС від часу є перехідною функцією термоперетворювача.

Апроксимація отриманої перехідної характеристики проводиться з використанням методу найменших квадратів, як найбільш універсального і гнучкого підходу у випадку сильно зашумлених сигналів. Апроксимуюча функція підібрана виходячи із суті фізичного процесу та простоти математичних розрахунків. Реакцію термоперетворювача на одиничний стрибок можна описати сумою експонент:

$$E(t) = c_0 - \sum_{i=1}^n c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad (\text{B.3})$$

де c_i і τ_i – невідомі коефіцієнти, які знаходяться з використанням методу найменших квадратів; $c_0 = E_0$ – значення термо-ЕРС термоперетворювача в усталеному режимі.

Використовуючи перетворення Лапласа знаходимо операторну форму вхідного впливу і перехідної характеристики:

$$\theta(p) = \frac{\theta_0}{p}; \quad E(p) = \frac{c_0}{p} - \sum_{i=1}^n \frac{c_i \tau_i}{\tau_i p + 1}. \quad (\text{B.4})$$

Виконавши серію перетворень, з урахуванням початкових умов, отримаємо передавальну функцію термоперетворювача на основі експериментальної перехідної характеристики:

$$W(p) = \frac{k}{\prod_{i=1}^n (\tau_i p + 1)}, \quad (\text{B.5})$$

де $k = \frac{c_0}{\theta_0} = \frac{E_0}{\theta_0}$.

Для підтвердження теоретичних розрахунків був створений експериментальний стенд (рис. В.1, рис. В.2).

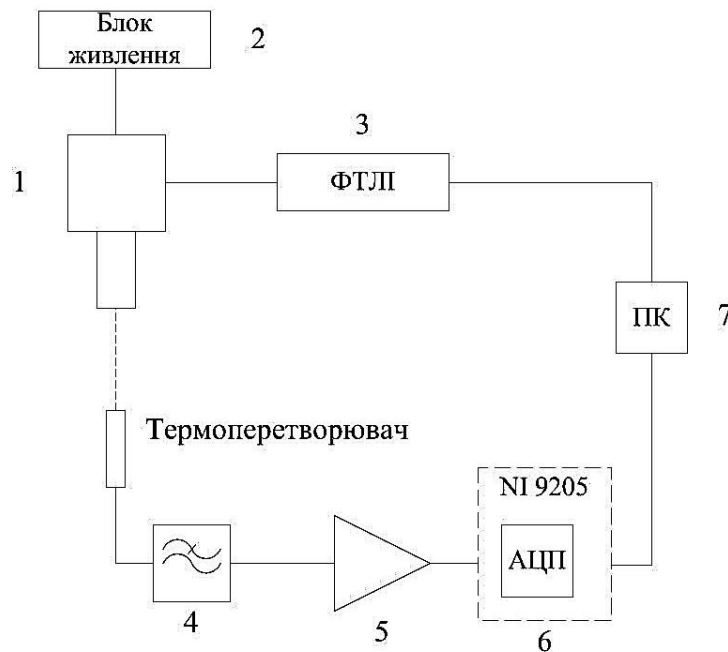


Рис. В.1 – Схема експериментального стенду [33]: 1 – генератор оптичного випромінювання; 2 – блок живлення; 3 – формувач тривалості лазерного імпульсу; 4 – фільтр нижніх частот; 5 – підсилювач; 6 – модуль збору даних NI-9205; 7 – ПК



Рис. В.2 – Експериментальний стенд [33]

Для вимірювання температури використовувалась термопара фірми NANMAC модель e20, спай якої створений шляхом шліфування з наступним поліруванням робочої поверхні термопари (рис. В.3).

E6-20 Series

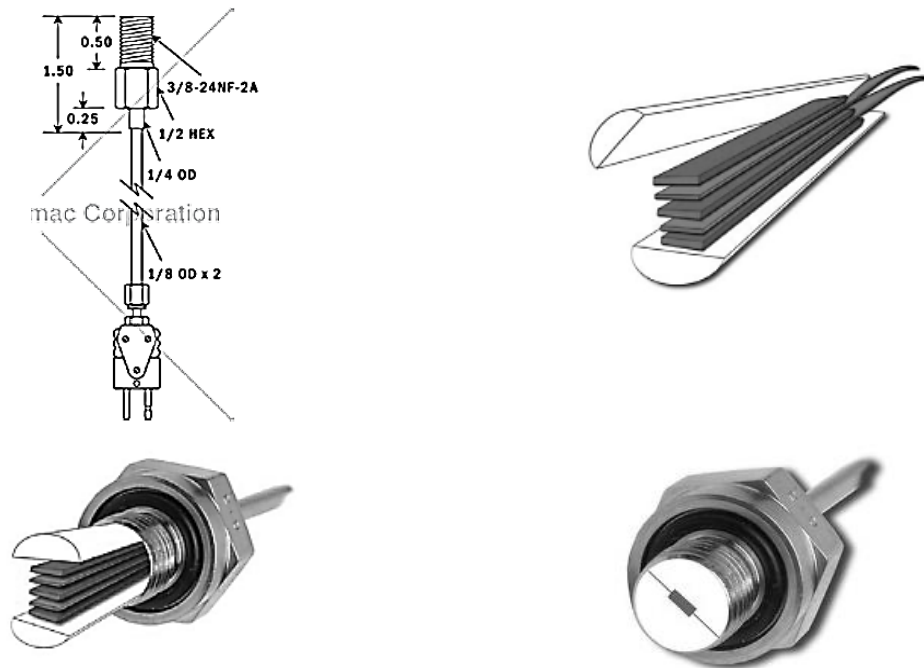


Рис. В.3 – Габаритні розміри термопари і конструкція спаю термопари

Термопара розрахована на діапазон вимірювання температур від 0 до 2310 °С і максимального значення тиску 25000 *psi*. В технічній документації виробник не вказав динамічні характеристики термопари. Тому були проведені експериментальні дослідження для визначення динамічних характеристик створенням на спаю термопари ступінчатого тестового впливу двома способами:

1. Внутрішній розігрів спаю термопари радіоімпульсом струму через провідники термопари.
2. Зовнішнє опромінення термопари лазерним променем.

Для досліджень була використана термопара типу С (вольфрам/реній-5, вольфрам/реній-26), з діапазоном температури 0 – 2320 °С. На рис. В.4 наведено одну з реалізацій перехідної характеристики термопари у абсолютних значеннях та у нормованому вигляді (рис. В.5).

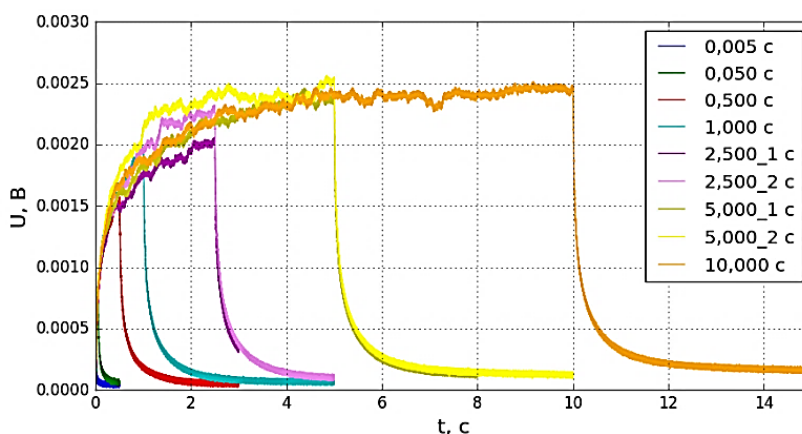


Рис. В.4. Експериментальні перехідні характеристики термопари типу С

Експерименти полягали в створенні температурного стрибка на спаю і реєстрації перехідної характеристики (термо-ЕРС). В результаті цих експериментів були отримані сімейства перехідних характеристик (рис. В.5), при різній тривалості імпульсу і постійній потужності.

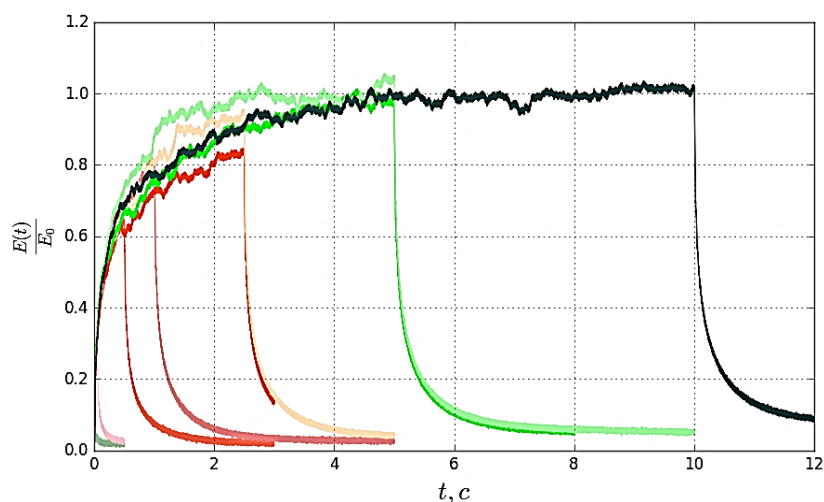


Рис. В.5 – Сімейство перехідних характеристик термопари NANMAC e20, отримані при постійному значенні потужності лазера і різному часі впливу (від 5 мс до 10 с)

Використавши методи фільтрації та нелінійної апроксимації методом найменших квадратів і прийнявши до уваги теоретичні припущення, викладені вище, були отримані моделі перехідних характеристик з різною кількістю експоненціальних доданків. В результаті модель термопари описується рівнянням

$$E(t) = E_0 \cdot \left(1 - 0,418 \cdot e^{-\frac{t}{1,630}} - 0,393 \cdot e^{-\frac{t}{0,136}} - 0,283 \cdot e^{-\frac{t}{0,012}} + 0,094 \cdot e^{-\frac{t}{0,004}} \right).$$

Отримана модель перехідної характеристики термопари, при тривалості вхідного сигналу 10 с. Підставляючи значення постійних часу в рівняння і прийнявши $k = 1$ отримаємо передавальну функцію термопари типу С:

$$W(p) = \frac{1}{(1,630p + 1)(0,136p + 1)(0,012p + 1)(0,004p + 1)}.$$

Примітка. Похибки вимірювання термопарами температури газових потоків пов'язані із розподіленістю активної частини термопари: спай, електроди та подовжувальні проводи. Ця розподіленість призводить до того, що вимірювальний мілівольтовий сигнал піддається впливу зовнішніх завад.

Визначення сталих часу термопар на основі АЧХ термопар

Сталі часу термопар визначались шляхом апроксимації рівняння АЧХ термопар методом найменших квадратів. Використовувалась функція *least_squares* із бібліотеки *SciPy*. Був використаний алгоритм «*Trust Region Reflective*» призначений для нелінійної оптимізації із обмеженнями. На шукані значення сталих часу були встановлені обмеження недопустимості від'ємних значень. Також, для перевірки правильності обраних моделей, проводилось порівняння апроксимованої та експериментально отриманої АЧХ (рис. В.6).

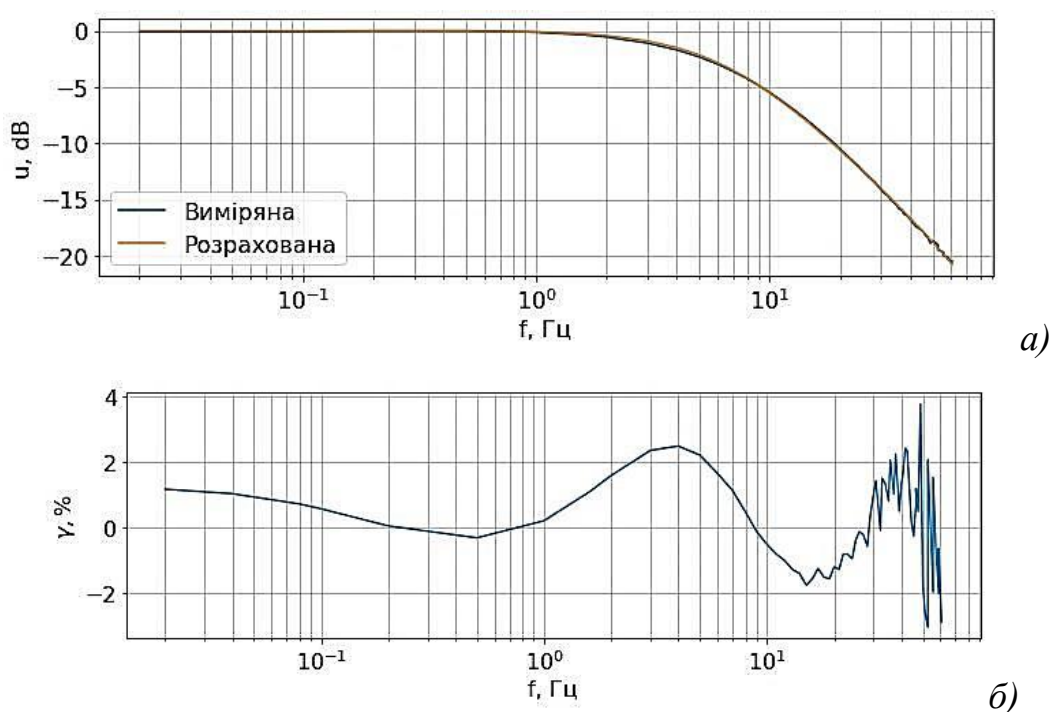


Рис. В.6 – Графіки а) – експериментальної та апроксимованої АЧХ термопар із двома сталими часу в децибелах; б) – відносна похибка апроксимованої та експериментальної АЧХ

Відносна похибка апроксимації розраховувалась за формулою:

$$\gamma_a = 100\% \cdot \left[\frac{u_a(f)}{u_e(f)} - 1 \right],$$

де $u_a(f)$ – апроксимована АЧХ термопар; $u_e(f)$ – експериментальна АЧХ термопар.

В табл. В.1 наведено результуючі значення сталих часу для моделей з однією, двома та трьома сталими часу за даними експерименту.

Таблиця В.1

Узагальнена таблиця розрахованих сталих часу термопари

Кількість сталих часу	$\tau_1, \text{с}$	$\tau_2, \text{с}$	$\tau_3, \text{с}$
одна	0,02458		
дві	0,02279	0,00158	
три	0,02279	0,00158	1,11574e-10

За табл. В.1 видно, що сталою часу τ_3 можна знехтувати та вважати адекватною модель із врахуванням двох сталих часу, що підтвердилось порівнянням експериментально отриманих та розрахованих АЧХ та їх різниці. Не врахування другої сталої часу призводить до похибки визначення першої сталої часу 8 %.

Були проведені дослідження залежності похибок моделі АЧХ від похибок задання сталої часу $\gamma(\tau_1)$ відносно знайденого значення (табл. В.1) та відношення сталих часу k , яке визначалось:

$$k = \tau_2 / \tau_1.$$

Оскільки для інфранизьких частот динамічна характеристика майже не впливає на результат вимірювання, то дослідження проводились для частот вище частоти зрізу визначеної моделі термопари (табл. В2). Результати таких досліджень для частоти $\omega = 40$ рад/с приведені на рис. В.7. Вплив другої сталої часу для $k = 0,1$ на похибку вимірювання незначний, що обумовлено малістю значення. Із збільшенням відношення k вплив другої сталої часу на похибку вимірювання зростає.

Також можна зробити висновок, що навіть незначні відхилення у значеннях сталої часу або при неврахуванні кількості останніх, призводить до значних похибок у значення ЕРС термопари за умови використання її у перехідному процесі для вимірювання коротких теплових імпульсів.

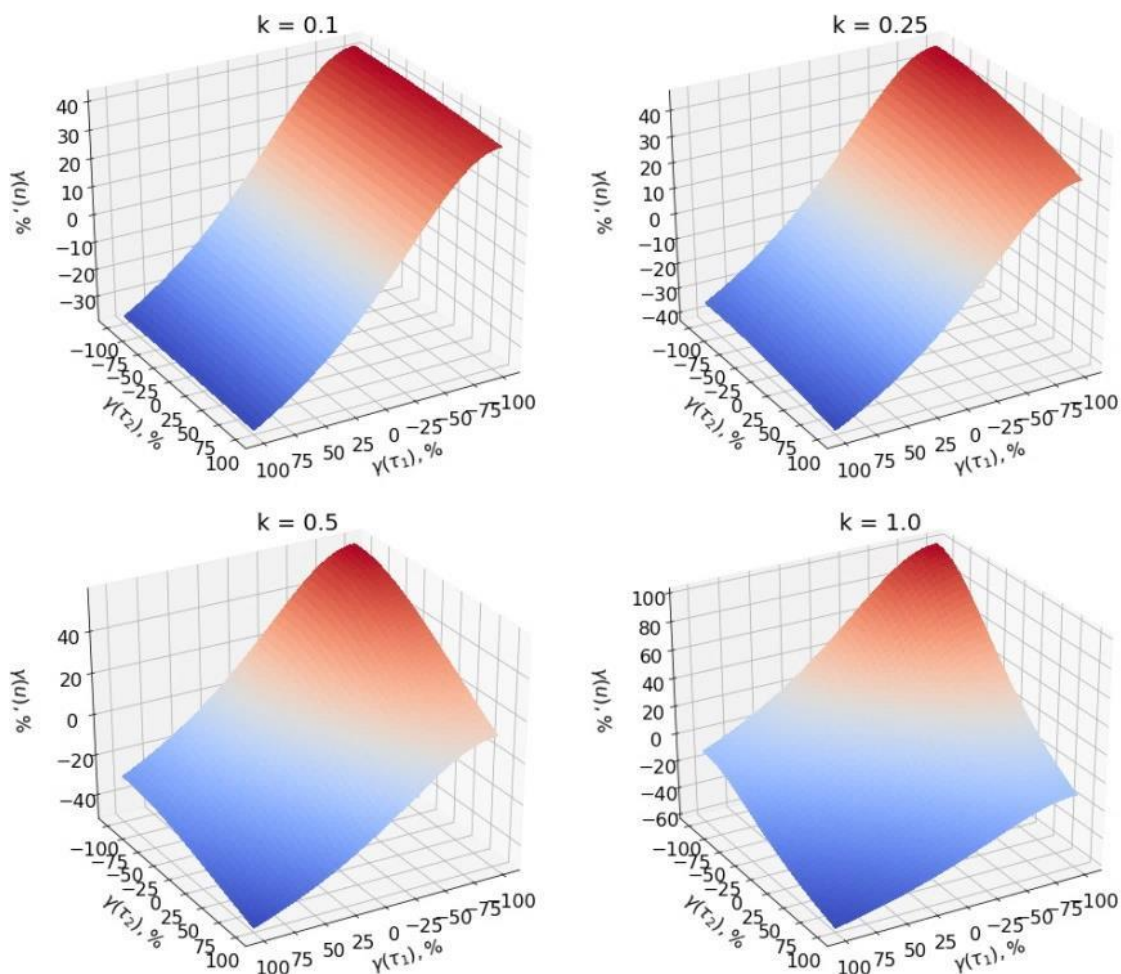


Рис. В.7 – Графіки залежності похибок моделі АЧХ від похибок $\gamma(\tau_1)$ та відношення сталих часу k для частоти $\omega = 40$ рад/с

З метою оцінки невизначеності двох розрахованих сталих часу, було проведено декілька експериментів із отримання АЧХ термопари. Вибірка становила 20 отриманих АЧХ, на основі яких були враховані двадцять вибірок сталих часу. В табл. В.2 наведені статистичні оцінки вибірки.

Таблица В.2

Статистичні значення вибірки

	τ_1	τ_2
$\bar{\tau}$, с	0.022785	0.001577
S, с	0.000045	0.000042
S, %	0.197665	2.664298

На рис. В.8 наведено гістограми розподілу значень сталих часу на основі отриманої вибірки.

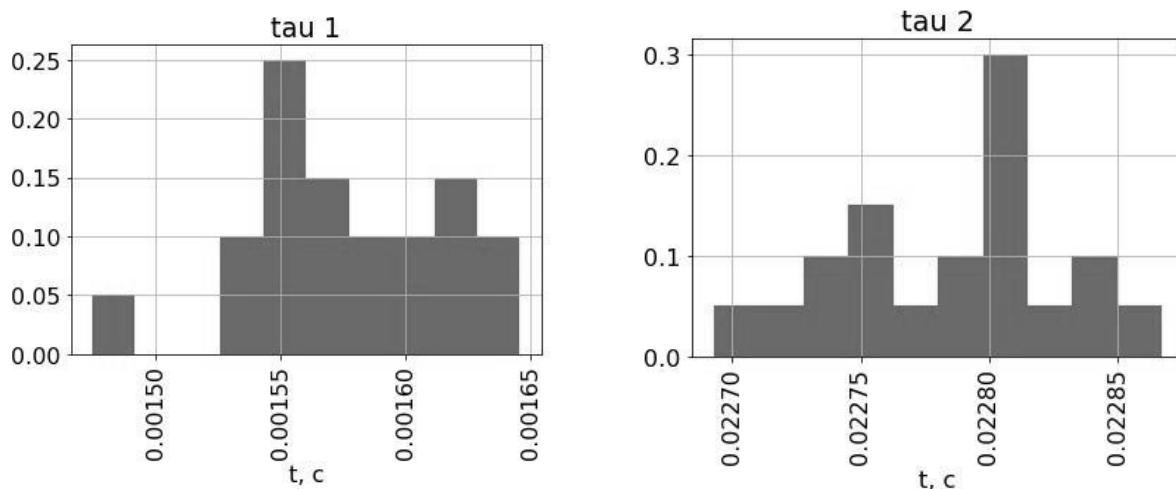


Рис. В.8 – Гістограми сталих часу отриманих на основі вибірки із 20 АЧХ

Невизначеність отриманих значень сталих часу становить $u_A(\tau_1) = 0,000009$ с та $u_A(\tau_2) = 0,000010$ с.

Спектральний склад напруги струморозігрівуючої термопару із термозалежних дротів

При визначенні динамічних характеристик термопару у вигляді АЧХ з'ясувалось, що крім очікуваної першої та другої гармонік у напрузі на затискачах термопару, присутня ще третя гармоніка. Співвідношення гармонік було наступне:

$$u_{f_1} : u_{f_2} : u_{f_3} = 1,5 : 0,008 : 0,01 . \quad (\text{В.6})$$

Перша гармоніка очевидна та виникає згідно закону Ома, як добуток струму на опір підвідних проводів термопару, опір контакту при з'єднанні проводів для отримання спаю, а також ефектами Пельтьє та Томсона. Наявність другої гармоніки пояснюється розігрівом спаю та підвідних проводів. Температура спаю згідно ефекту Джоуля пропорційна потужності, що виділяється у спаї, а при розігріві спаю – квадратом струму, що протікає через термопару. Якщо струм має синусну форму його квадрат пропорційний сумі постійної складової та косинусної складової на частоті другої гармоніки

$$i = I_m \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}.$$

Третя гармоніка може виникати у тому випадку, коли опір підвідних провідників та спаю є термозалежними.

Для пояснення причин виникнення третьої гармоніки представимо еквівалентну схему термопари, у вигляді послідовно включених опорів термопари та джерела ЕРС Зеебека (рис. В.9).

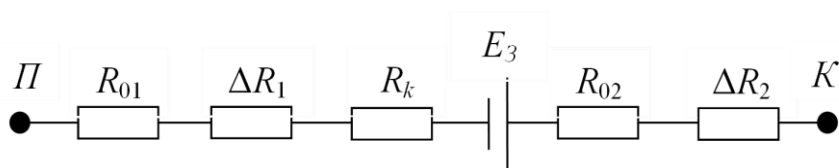


Рис. В.9 – Еквівалентна схема термопари

R_{01} , R_{02} – початковий опір контактних провідників;

ΔR_1 , ΔR_2 – приріс опорів контактних провідників від їх розігріву;

R_k – опір контакту;

E_3 – електрорушійна сила Зеебека;

Π , K – початок та кінець зображеної на рис. В.9 ланки.

Термозалежний опір, як правило, представляється виразом:

$$R(\theta) = R_0 (1 + \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3 + \dots).$$

На практиці використовують спрощену модель опору провідників, враховуючи тільки лінійну частину

$$R(\theta) = R_0 (1 + \alpha\theta).$$

Якщо прийняти таку спрощену модель, то на інфранизькій частоті, коли можна знехтувати реактивними складовими опору та пропускати через ланку струм синусної форми, напруга на затискачах буде:

$$\begin{aligned} U_{PK} = & \\ = I_m \sin(\omega t) & \left\{ R_{01} \left[1 + k_1 \alpha_1 (I_m \sin(\omega t))^2 \right] + R_{02} \left[1 + k_2 \alpha_2 (I_m \sin(\omega t))^2 \right] + R_k \right\} \pm \\ & \pm k_3 (I_m \sin(\omega t))^2, \end{aligned}$$

де $k_1 \alpha_1$ – температурний коефіцієнт опору першого проводу;

$k_2\alpha_2$ – температурний коефіцієнт опору другого проводу;

k_3 – коефіцієнт Зеєбека термопар;

R_k – опір контакту термопар.

Розкривши дужки у формулі отримаємо

$$U_{ПК} = I_m \sin(\omega t)(R_{01} + R_{02} + R_k) + I_m^3 \sin^3(\omega t)(R_{01}k_1\alpha_1 + R_{02}k_2\alpha_2) \pm \pm k_3 I_m^2 \sin^2(\omega t).$$

Враховуючи

$$\sin^2(\omega t) = 0,5(1 - \cos(2\omega t)),$$

$$\sin(\omega t)\cos(2\omega t) = 0,5(\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)),$$

$$\sin^3(\omega t) = 0,25(0,75\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)),$$

отримаємо рівняння спектрального складу напруги на ланці рис. В.19.

$$U_{ПК} = I_m \sin(\omega t) [R_{01} + R_{02} + R_k + 0,75 I_m^2 (R_{01}k_1\alpha_1 + R_{02}k_2\alpha_2)] \pm \pm k_3 I_m^2 \sin(2\omega t) - 0,25 I_m^3 (R_{01}k_1\alpha_1 + R_{02}k_2\alpha_2) \sin(3\omega t). \quad (B.7)$$

Із рівняння (B.7) видно, що напруга на затискачах термопар представлена трьома гармонічними складовими на частотах ω , 2ω , 3ω . Найбільша складова напруги має місце на частоті першої гармоніки. Набагато менша складова утворена завдяки ефекту Зеєбека із коефіцієнтом k_3 представлена другою гармонікою.

Причому, коефіцієнт Зеєбека k_3 залежність від матеріалів термопар та має найменше значення для високотемпературних термопар, типу Вольфрам-Реній та найбільше значення для низькотемпературних напівпровідникових термопар.

Третьою гармонікою представлена складова, зумовлена температурною залежністю опору проводів термопар. Наприклад, дріт із константану має практично температурно незалежний опір, платиновий та мідний дроти характеризується великою температурною залежністю, приблизно 4 % на 10°C приросту температури.

Застосування процедури спектрального аналізу дозволяє видокремити напругу другої гармоніки, яка використовується для побудови АЧХ, знаходячи відношення амплітуди другої гармоніки, яка створюється «природнім» шляхом термопари до амплітуди другої гармоніки вхідного сигналу, створеної шляхом піднесення до квадрату миттєвих значень вхідного сигналу.

Напруга третьої гармоніки при високій роздільній здатності спектроаналізатора практично не впливає на визначення АЧХ термопари через її не велику питому вагу. Як відомо, роздільна здатність спектроаналізатора обернено пропорційна часові аналізу (довжині вибірки):

$$\Delta f = 1/T_a .$$

Тому, при експериментальних дослідженнях час аналізу обирався не менше 20...100 періодів напруги на кожній частоті. Сам аналіз проводиться на середній частині вибірки, а частота дискретизації набагато перевищувала частоту сигналу.

Окрім цього, початок створення масиву миттєвих значень для подальшого спектрального аналізу співпадав із переходом через нуль сигналу на затискачах термопари та закінчувався у момент переходу через нуль напруги заданого числа періодів аналізованих сигналів. Для цього використовується спеціальний тригер переходу через нуль при наростанні сигналів.

Як було вище зазначено та експериментально підтверджено амплітуда першої гармоніки у 100-200 раз перевищує амплітуду другої гармоніки. Тому, спеціально для покращення динамічного діапазону аналізу, спеціально створена схема для подавлення першої гармоніки не шляхом фільтрації, а шляхом компенсації протифазною напругою аналоговим способом до рівня, близького до амплітуди другої гармоніки та подальшому підсиленні.

Таке налаштування експериментальної системи дозволило задіяти максимальну кількість розрядів (близько 20) двадцяти чотирьох розрядного АЦП для вимірювання миттєвих значень напруги, яка аналізується.

Для створення максимально синусного сигналу у цифро-аналоговому перетворювачі були задіяні максимально можлива кількість його розрядів у NI PXI-4461 їх 24.

При кусково-ступінчатій апроксимації синусоїди найближча вища гармоніка має номер

$$N = pn \pm 1,$$

де p – натуральний ряд чисел; n – кількість точок дискретизації на період. Якщо $p = 1$, а $n = 1000$, то найближчі гармоніки будуть мати номери 999 та 1001.

Нелінійні спотворення виникають не тільки через кусково-ступінчасту апроксимації синусоїди, але і через подальше підсилення. У наслідок чого можуть з'явитись другі, треті і т.д. гармоніки.

Тому, для проведення експериментальних досліджень створений підсилювач із глибоким зворотнім зв'язком $k\beta \gg 1000$, що має двохтактні вихідні каскади, які налаштовані на режим роботи «А», із попереднім налаштуванням зміщення вихідного сигналу до рівня менше $|\pm 5 \text{ мВ}|$, із можливістю забезпечення амплітуди вихідної напруги $\pm 10 \text{ В}$.

Виміряні нелінійні спотворення вихідної напруги $\pm 10 \text{ В}$ при струмові навантаження $\pm 0,2 \text{ А}$ та роботі на термoneзалежний опір не перевищували - 90 дБ.

Вимірювання температури коротких теплових імпульсів

Раніше було зазначено, що в якості моделі термопарі була вибрана лінійна стаціонарна система. Як відомо з теорій цифрової обробки сигналів, реакція такої системи на вхідний сигнал описується рівнянням згортки. Для цього потрібно мати інформацію про вхідний сигнал та імпульсну характеристику термопарі.

Відновлення форми вхідного імпульсу температури за значеннями термо-ЕРС та даними про імпульсну характеристику термопарі дозволить виконувати вимірювання температури коротких теплових імпульсів термопарами у перехідному режимі їх роботи. Схема відновлення зображена на рис. В.10.

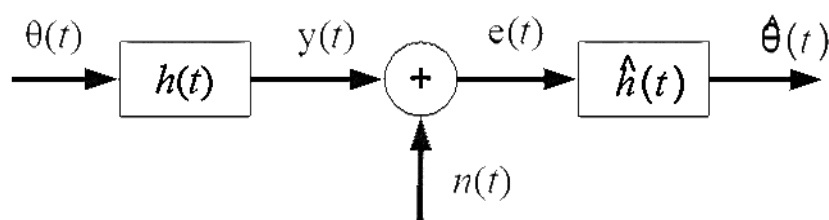


Рис. В.10 – Схема динамічного вимірювання температури термопарою

Вхідний температурний імпульс $\theta(t)$, вимірюється термопарою із імпульсною характеристикою $h(t)$. Результатом вимірювання є термо-ЕРС $e(t)$. Цей сигнал складається із інформативної частини $y(t)$, яка є реакцією термопарі на вхідну дію температури та не інформативної частини — адитивного шуму $n(t)$. Застосовуючи методи ідентифікації динамічних характеристик [33,34,35] отримується оцінка імпульсної характеристики термопарі $\hat{h}(t)$. Задача відновлення вхідного сигналу відноситься до категорії розв’язання обернених задач вимірювання. Для відновлення форми температурного імпульсу існують різні методи вирішення обернених задач. Використання кожного методу залежить від конкретної задачі вимірювання. Застосувавши алгоритм відновлення отримують оцінку вхідного температурного імпульсу $\hat{\theta}(t)$ [34].

У випадку, коли найбільша стала часу термопари набагато менша за час зміни значення температури, тобто коли термопара знаходиться в термодинамічній рівновазі з об'єктом вимірювання, відновлення форми температурного імпульсу є тривіальною задачею. Для цього використовують статичну характеристику термопари, яка є поліноміальним рівнянням. Підставляючи значення термо-ЕРС в рівняння отримують оцінку температури на вході термопари з певною статичною похибкою.

Динамічна зміна температури вносить додаткову динамічну похибку в результат вимірювання. Дана похибка виникає через теплову інерційність термопари. У випадку динамічних вимірювань термопара знаходиться в перехідному режимі і не досягає термодинамічної рівноваги. Тому для отримання оцінки значення температури потрібно використовувати динамічну модель термопари. Процес вимірювання температури, в цьому випадку, описується рівнянням згортки [36].

$$e(t) = \int_0^t \theta(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Оскільки, вихідний сигнал термопари (термо-ЕРС), представлений в дискретній формі, то будемо використовувати дискретне рівняння згортки.

$$e[i] = \sum_{k=0}^i \theta[k] h[i - k].$$

Пряма задача – знаходження реакції термопари на відомий вхідний сигнал за відомої імпульсної характеристики системи.

$$e(t) = \theta(t) * h(t). \quad (\text{B.8})$$

Для виконання оберненої задачі знаходження температури $\theta(t)$ за відомого значення термо-ЕРС $e(t)$ та імпульсної характеристики $h(t)$ термопари використаємо метод деконволюції [36]. Суть цього метода — відновлення форми вхідного сигналу, спотвореного лінійною вимірювальною системою. Для застосування даного методу потрібно мати інформацію про вплив вимірювальної системи на вхідний сигнал. Як зазначалось вище,

потрібно знати імпульсну характеристику системи в часовій області (або передавальну характеристику в області комплексної змінної). Вхідний сигнал відновлюється згорткою вихідного сигналу системи з імпульсною характеристикою фільтру, частотні характеристики якого обернені до частотних характеристик системи. Побудова фільтру, що має імпульсну характеристику, обернену до імпульсної характеристики системи, в загальному, є складним завданням, оскільки неможливо відновити частотні складові, які були повністю подавлені вимірювальною системою. Ще одним недоліком є той факт, що операція деконволюції підсилить шуми, наявні у вимірюваному сигналі.

Дослідимо використання методу деконволюції у випадку вимірювання температури термopарою. Потрібно розробити фільтр, імпульсна характеристика якого $h^{-1}(t)$ є оберненою до імпульсної характеристики термopари. Застосовуючи цей фільтр до значень термо-ЕРС можна знайти значення температури.

Рівняння (В.9) описує цю процедуру.

$$e(t) * h^{-1}(t) = \theta(t) * h(t) * h^{-1}(t) = \theta(t). \quad (\text{В.9})$$

Оскільки зворотна задача є, в загальному випадку, некоректно поставленою, то вираз $h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$ не завжди буде виконуватись. Будь-які похибки в оцінці імпульсної характеристики фільтру $h^{-1}(t)$ приведуть до значних похибок у відновленому сигналі.

В реальних вимірюваннях будь-який сигнал на виході термopари буде містити похибки, які, в загальному випадку, можна описати як шум. Тоді рівняння (В.8) міститиме адитивний шум (В.10).

$$e(t) = \theta(t) * h(t) + n(t). \quad (\text{В.10})$$

В цьому випадку $h^{-1}(t)$ фільтру повинен не тільки коригувати вплив термопари на вхідний сигнал, але також зменшити шум, який міститься в сигналі термо-ЕРС. Рівняння описує дану тезу (В.11).

$$e(t) * h^{-1}(t) = (\theta(t) * h(t) + n(t)) * h^{-1}(t) = \theta(t). \quad (\text{В.11})$$

Наявний шум в сигналі термо-ЕРС багаторазово підсилиться при виконанні зворотної згортки з імпульсною характеристикою відновлючого фільтру. Результатний сигнал буде повністю спотворений і не відповідатиме вхідному сигналу $\theta(t)$.

Застосування цього методу для відновлення імпульсу температури потребує знання імпульсної характеристики термопари із найменшою похибкою. Сигнал термо-ЕРС потрібно відфільтрувати для зменшення шуму або апроксимувати з використанням методу найменших квадратів. Також після відновлення сигналу температури його потрібно обробити для позбавлення від похибок, які виникли при використанні даної процедури.

Проведено оцінювання якості відновлення температурного сигналу шляхом розрахунку приведеної похибки (приведеної до амплітуди температурного сигналу) за формулою:

$$\delta_{\theta} = \frac{|\theta - \hat{\theta}|}{|\theta_{\text{amp}}|} 100$$

де θ – вхідний температурний сигнал, $\hat{\theta}$ – відновлений температурний сигнал, θ_{amp} – амплітуда вхідного сигналу, δ_{θ} – приведена похибка відновлення сигналу. Результати відновлення приведено на рис. В.11 - рис. В.12. Середньоквадратичне відхилення дійсного сигналу температури та відновленого у результаті відновлення становило $\sigma = 3,44e^{-13}$. Як бачимо, похибка відновлення відповідає похибці чисельного розрахунку.

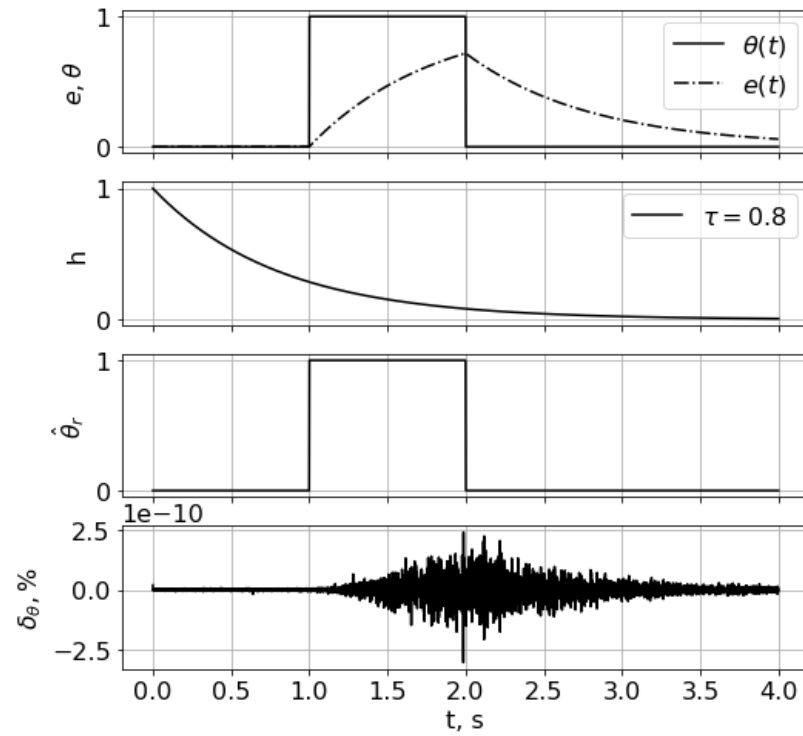


Рис. В.11 – Відновлення температурного сигналу за відомими термо-ЕРС та імпульсною характеристикою терморпарі методом деконволюції [36]

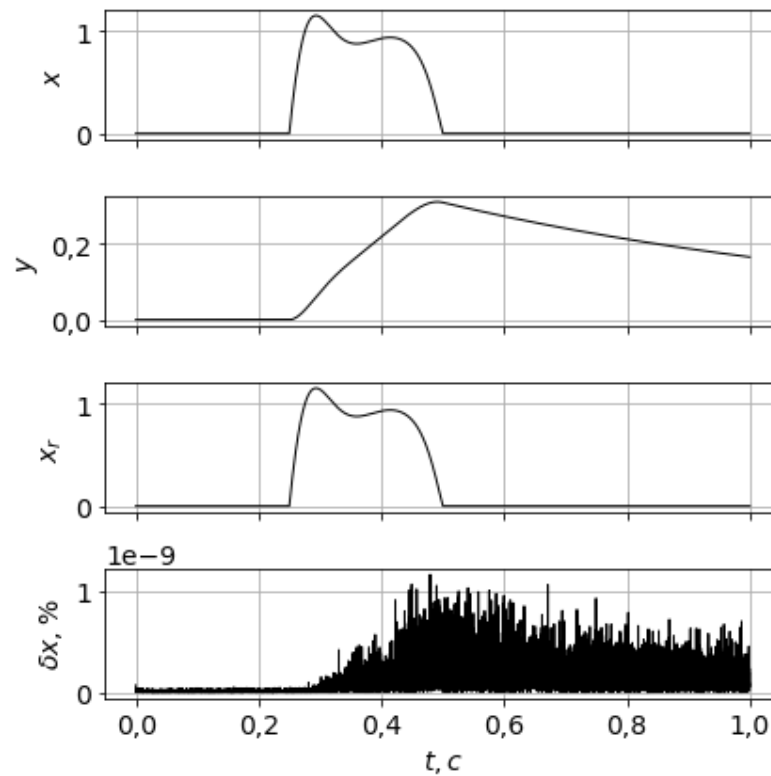


Рис. В.12 – Відновлення довільного температурного сигналу при неповному масиві термо-ЕРС [36]

Усі виміряні сигнали містять похибки, викликані тими чи іншими чинниками. Проте, якщо досить точно ідентифікувати динамічні характеристики термopар, то важливим кроком відновлення форми вхідного сигналу залишається зменшення впливу похибок вимірюваного сигналу на результат відновлення [34].

Так, відновлення сигналу температури із використанням викладеного методу, для вхідного імпульсу температури у вигляді модифікованого рівняння Гауса, показало наступне.

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

де θ_0 – амплітуда температурного імпульсу. Для зручності розрахунків приймемо $\theta_0 = 1$. Сам імпульс є частиною досить великої вибірки (рис. В.13). Для цього до і після імпульсу додано нулі для відтворення форми реального сигналу. Величина вибірки $n = 10000$ точок. Тривалість вимірювання – 3 с. Час дискретизації – 0,001 с.

Термопара описувалась імпульсною характеристикою із однією сталою часу, $\tau = 0,5$; нормалізованою відповідно до $\frac{h_0}{\tau} = 1$.

$$h(t) = \frac{h_0}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Вибірка імпульсної характеристики була рівна вибірці температурного сигналу.

Додавши до сигналу термо-ЕРС шум із нормальним законом розподілу із параметрами розподілу $m = 0$, $S = 0.001\theta_{\text{amp}}$, стандартний метод деконволюції не дозволив відновити сигнал (рис. В.13).

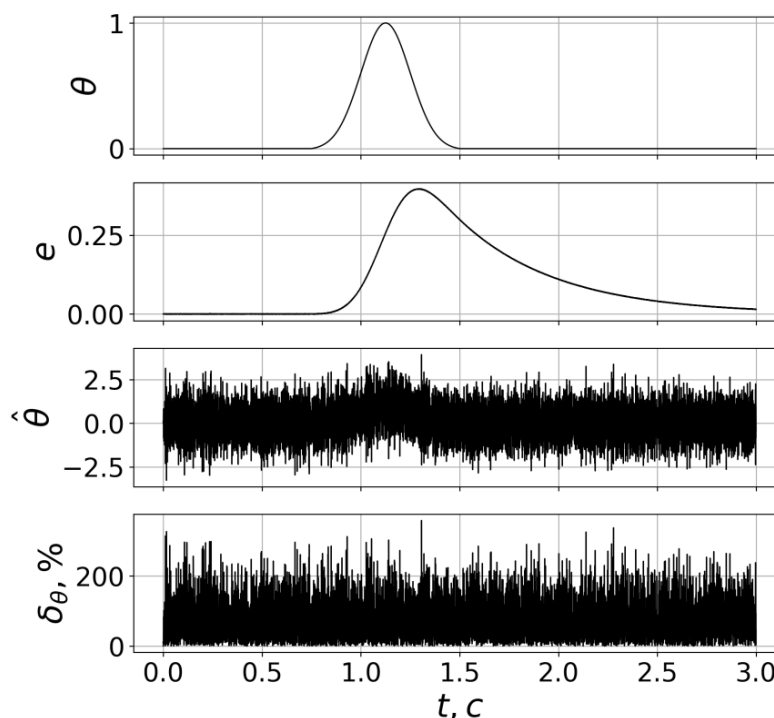


Рис. В.13 – Відновлення імпульсу температури за наявності незначного шуму в сигналі термо-ЕРС [36]

Як видно з рис. В.13 наявність навіть незначних похибок в сигналі термо-ЕРС не дозволяє відновити вхідний температурний імпульс, навіть при точно відомій імпульсній характеристиці термопари. Для рішення цієї задачі потрібно позбавитись від шуму в сигналі термо-ЕРС. Можливі два підходи до рішення задачі. Перший полягає у фільтруванні сигналу. Другий, у використанні методів апроксимації. У дослідженні використовувався перший підхід, із допомогою фільтру Савіцького-Голя [37,38]. Даний фільтр є різновидом реалізації методів згладжування сигналів. Згладжування відбувається шляхом побудови апроксимаційних поліномів для послідовних наборів сусідніх точок. Для побудови поліномів використовується метод найменших квадратів [36].

На рис. В.14 зображено результат відновлення сигналу температурного імпульсу. Після використання фільтру і проведення деконволюції, відновлений сигнал містить шум. Для збільшення відношення сигнал-шум застосуємо до відновленого сигналу фільтр Савіцького-Голя.

В результаті, приведена похибка відновлення імпульсу температури склала 5 % [36].

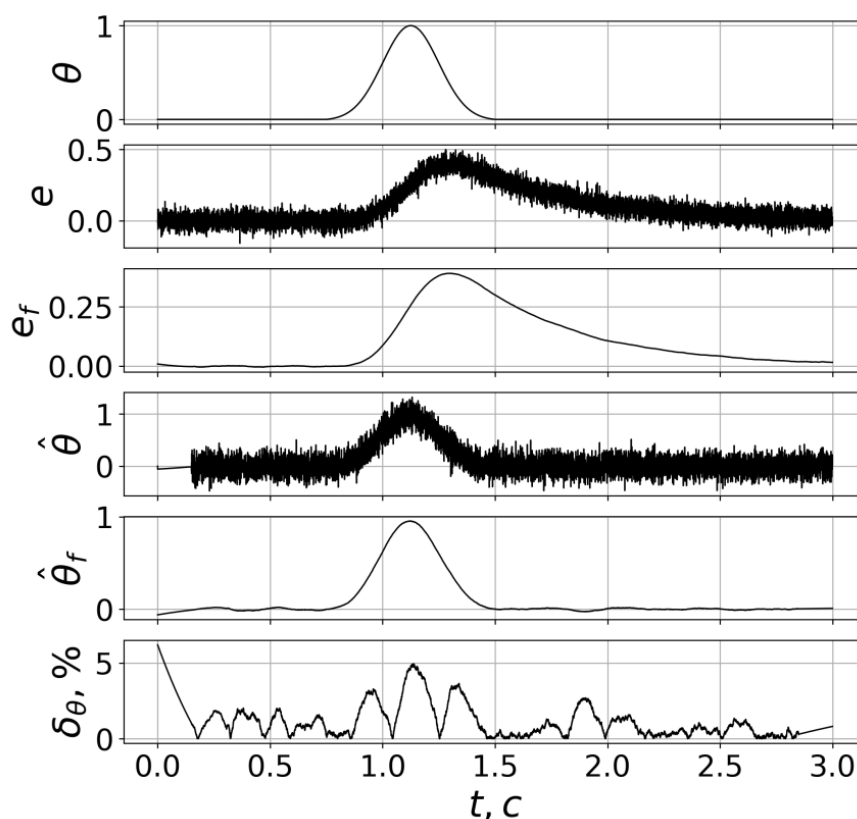


Рис. В.14 – Відновлення імпульсу температури з використанням фільтра Савіцького-Голя

Даний метод є ефективним при відомій імпульсній характеристиці термопари. Для зменшення похибки відновлення температурного імпульсу можна використовувати методи нелінійної апроксимації.

Для реалізації методу відновлення температури коротких теплових імпульсів, розроблено портативний вимірювальний пристрій, який зменшує динамічну похибку вимірювання у реальному часі та дозволяє апаратним шляхом виконати відновлення вхідного сигналу. Відновлюючий фільтр вимірювального пристрою побудований шляхом включення у зворотні кола операційних підсилювачів ланок, які відтворюють динамічну характеристику термопари (рис. В.15).

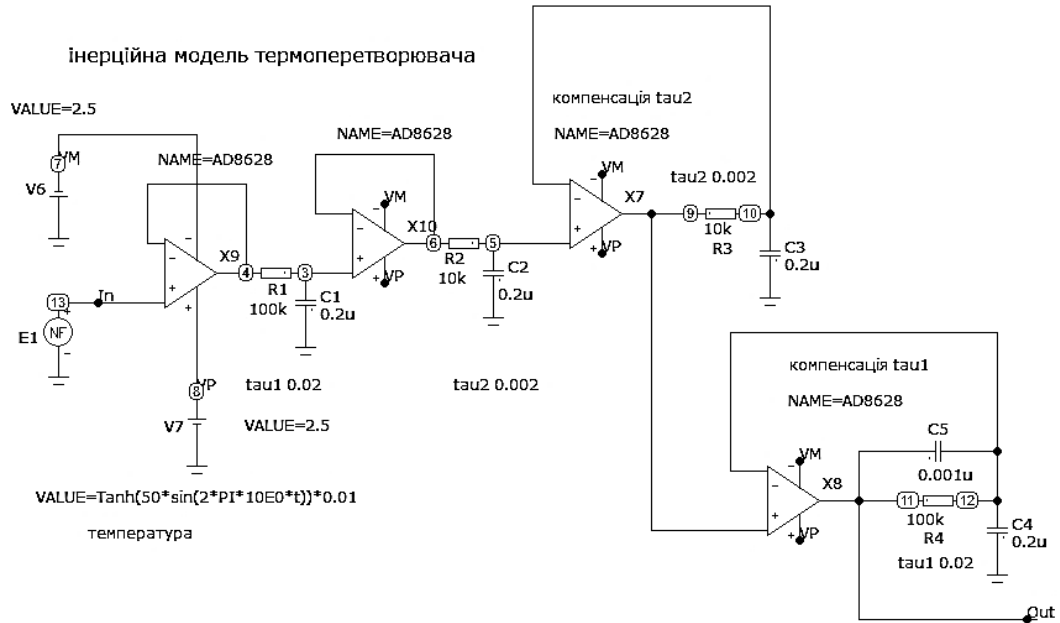


Рис. В.15 – Електрична модель портативного вимірювача температури коротких теплових імпульсів

На рис. В.16 наведено графіки відновлення моделлю портативного вимірювача входного температурного імпульсу.

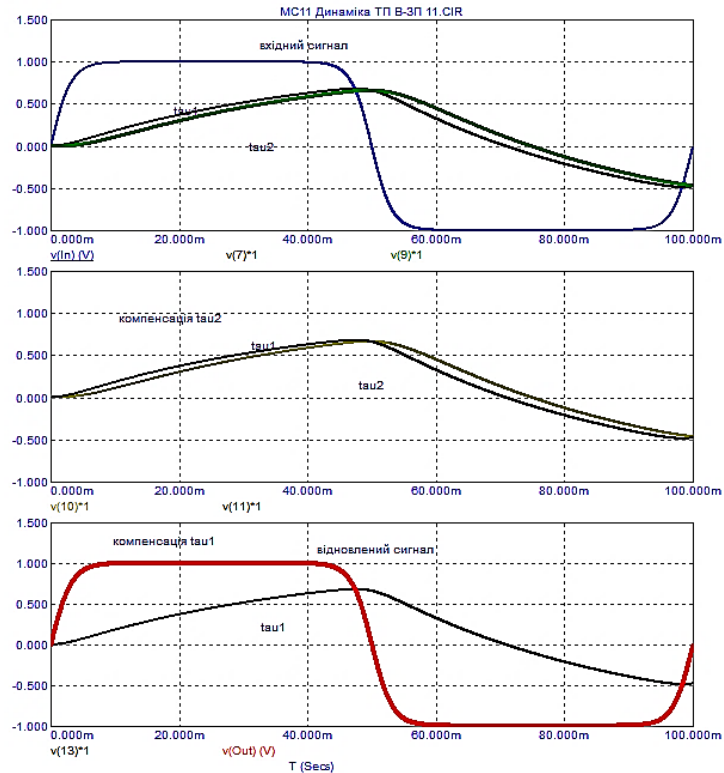


Рис. В.16 – Графіки відновлення моделлю портативного вимірювача входного температурного імпульсу

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Y.M Tuz, and A.V. Vdovychenko, «Power Measurement at Wireless Transmission of Electricity in the Frequency Range from 0.01 to 10 MHz», *Proc. International Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM) 2018 in Paris*, July 2018, pp. 8-13.
2. Пампура, В.И. Прогнозирование стабильности информационных устройств / В.И. Пампура. – К.: Техніка, 1978. – 248 с.
3. Сигорский, В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский. – К.: Техніка, 1975. – 768 с.
4. Стрижак, Т.Г. Математика. Числові системи. Многочлени. Визначники. Навчальний посібник / Т.Г. Стрижак, Ю.М. Туз, Г.Г. Барановська, І.В. Веклич. – Київ, НМК ВО, 1991. – 459 с.
5. Туз, Ю.М. Структурные методы повышения точности измерительных устройств / Ю.М. Туз. – К.: Выща шк. Головное изд., 1976. – 256 с.
6. Бова, М.Т. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці / М.Т. Бова, В.А. Гойжевський, С.М. Маєвський. – К.: Вища шк., 1972. – 220 с.
7. V.V Litvikh, V.I. Gubar, Ju.M Tuz, V.O. Rupsky, M.D. Krotov, and M.A. Seliste, «AC RMS digital voltmeter», *UK Patent GB 2180354 B, G01R 19/255*. – 1988.
8. Туз Ю.М., Кошарний М.А. Цифровий вольтметр на основі вибірок миттєвих значень. Патент на корисну модель № 102056, 12.10.2015.
9. Туз Ю.М., Кошарний М.А. Цифровий вольтметр на основі вибірок миттєвих значень. Патент на корисну модель № 102610, 10.11.2015.
10. Туз Ю.М., Гетьманський А.К. Перетворювач напруги змінного струму. Патент на корисну модель № 102055, 12.10.2015.
11. Стрижак, Т.Г. Асимптотические методы нормализации / Т.Г. Стрижак. – К.: Выща шк. Головное изд., 1984. – 254 с.

12. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
13. Туз Ю.М., Козир О.В., Порхун А.В. Спосіб визначення динамічних характеристик термоперетворювачів. Патент на корисну модель № 109832, 12.09.2016.
14. Туз Ю.М., Козир О.В., Порхун А.В. Пристрій для визначення динамічних характеристик термопар. Патент на корисну модель № 110516, 10.10.2016.
15. Туз Ю.М., Козир О.В., Червона Т.В. Спосіб визначення динамічних характеристик термоперетворювачів. Патент на корисну модель № 110515, 10.10.2016.
16. Туз Ю.М., Козир О.В., Червона Т.В. Пристрій для визначення динамічних характеристик термоперетворювачів. Патент на корисну модель № 112499, 26.12.2016.
17. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre, 1844, 2 publ. – 1861.
18. Туз, Ю.М. Автоматизация проектирования устройств измерительной техники. / Ю.М Туз, А.И. Забарный, Б.Н. Белоусов, В.И. Губарь, В.В. Литвих. – Київ, Вища школа, 1988. – 288 с.
19. Дьяконов, В.П. Mathcad 11/12/13 в математике: справочник / В.П. Дьяконов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с. – ISBN 5-93517-332-8.
20. Валенко, В.С. Полупроводниковые приборы и основы схемотехники электронных устройств / В.С. Валенко. – М.: "Додэка-XXI", 2001. – 368 с. – ISBN 5-94120-049-8.
21. Амелина, М.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-CAP. Версии 9, 10 / М.А. Амелина, С.А. Амелин. – Смоленск, Смоленский филиал НИУ МЭИ, 2013. – 618 с.

22. Micro-CAP 9. Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual. Copyright 1982-2008 by Spectrum Software 1021 South Wolfe Road Sunnyvale, CA 94088. – 916 s. – <http://www.spectrum-soft.com>

23. Antognetti P., Massobrio G., «Semiconductor Device Modeling with SPICE». – McGraw-Hill, Second Edition, 1993.

24. Зінковський, Ю.Ф. Моделювання елементної бази електронних апаратів у комп'ютерному середовищі Micro-Cap / Ю.Ф. Зінковський, А.В. Коваль. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. – 464 с. – ISBN 978-966-376-3.

25. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.

26. Туз, Ю.М. Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування) / Ю.М. Туз, К.Л. Серпілін, Л.М. Гапченко. – Київ, Техніка, 1970. – 182 с.

27. Y.M. Tuz, S. Ilchenko, and S. Lapitskii, «Research of linear converter a RMS on thermoconverter», *Actual problem of measuring technique "Measurement-98". Proceeding of Inter-national Conference*, Kyiv, AUS DAAD, 1998, 310 p.

28. Ярышев, Н.А. Теоретические основы измерения нестационарной температуры / Н.А. Ярышев. 2-е изд., перераб. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 256 с.

29. Туз, Ю.М. Особливості вимірювання температури коротких теплових імпульсів / Ю.М. Туз, О.В. Козир // *XII Міжнародна науково-технічна конференція «МЕТРОЛОГІЯ ТА ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА (МЕТРОЛОГІЯ – 2020) (СЕКЦІЯ 7. ТЕРМОМЕТРІЯ)*, 6–8 жовтня 2020 р. Харків. : тези доп. / Національний науковий центр «Інститут метрології». – Харків, 2020. – С. 106.

30. Вимірювальні перетворювачі (сенсори) : підручник / В.М. Ванько, Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О. Яцук, Ю.В. Яцук; за ред. проф. Є.С. Поліщука та проф. В.М. Манька. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. – 584 с.

31. Нестеренко А.Д. Основы расчёта электроизмерительных схем уравнивания. Типография Издательства АН УССР Киев-1960 г. – 716 с.
32. Туз Ю.М. Автоматизація аналізу вимірювальних пристроїв [Текст]: Монографія / Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир // За заг. ред. Ю.М. Туза. – К.: «Корнійчук», 2014. – 172 с.
33. Туз Ю.М. Ідентифікація динамічних характеристик термоперетворювачів / Ю.М. Туз, О.В. Козир, Т.В. Червона // Механіка гіроскопічних систем. – 2015. – № 30. С. 53-61, DOI: <https://doi.org/10.20535/0203-377130201570288>
34. Козир О.В. Вимірювання нестаціонарної температури контактним методом / О.В. Козир // Інформаційні системи, механіка та керування. – 2017. – № 17. С. 134-143. DOI: <https://doi.org/10.20535/2219-3804172017100686> <http://ismc.kpi.ua/article/view/100686>
35. Туз Ю. М. Спосіб визначення динамічних характеристик термодатчиків за допомогою радіоімпульсу струму / Ю. М. Туз, О. В. Козир, А. В. Порхун // Системи обробки інформації. – 2016. – №6. – С. 164–166.
36. Козир О.В. Відновлення форми температурного імпульсу за допомогою методу деконволюції / О.В. Козир // Механіка гіроскопічних систем. – 2017. – № 34. С. 89-97. DOI: <https://doi.org/10.20535/0203-3771342017130269> <http://mgsys.kpi.ua/article/view/130269>
37. Savitzky A. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures / A. Savitzky, M. J. Golay // *Anal. Chem.* – 1964. Vol. 36. Pp. 1627-1639.
38. Madden H. Comments on the Savitzky-Golay convolution method for least squares fit smoothing and differentiation digital data / H. Madden // *Anal. Chem.* 1978. Vol. 50. Pp. 1383-1386.