

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису
УДК 517.95

До захисту допущено
Завідувач кафедри ММСА
Оксана ТИМОЩУК
« » 2022 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 124 Системний аналіз
на тему: «Дифузійні рівняння з дробовими похідними: чисельні методи
розв'язування задачі Коші та застосування»

Виконала:
студентка II курсу, групи КА-11мп
Собко Тетяна Олександрівна

Керівник:
професор кафедри ММСА,
доктор фіз.-мат. наук,
Бондаренко В.Г.

Рецензент:
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського
Лось Валерій Миколайович



Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент

Київ 2022

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз» («Системний аналіз і управління»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ММСА
Оксана ТИМОЩУК
«___» _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Собко Тетяні Олександрівні

- 1. Тема дисертації:** «Дифузійні рівняння з дробовими похідними: чисельні методи розв'язування задачі Коші та застосування» науковий керівник дисертації Бондаренко Віктор Григорович, професор, доктор фізико-математичних наук, затверджено наказом по університету №4046-с від «03» листопада 2022 р.
- 2. Термін подання студентом дисертації:** 12.12.2022.
- 3. Об'єкт дослідження:** диференційні рівняння з дробовими похідними, що описують процеси суб- і супердифузії.
- 4. Предмет дослідження:** метод кінцевих різниць у порівнянні з більш поширеним методом декомпозиції для вирішення диференційних рівнянь дробового порядку.
- 5. Перелік завдань, які потрібно зробити:**
 - 1) огляд застосувань та актуальності дробового числення;
 - 2) побудова методу кінцевих різниць для обраних задач Коші;
 - 3) побудова методу декомпозиції для обраних задач Коші;
 - 4) аналіз та порівняння результатів побудованих вищезгаданими методами.
- 6. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо):** презентація.

7. Орієнтовний перелік публікацій: Бондаренко В.Г., Собко Т.О. «Дифузійні рівняння з дробовими похідними: чисельні методи розв’язування задачі Коші та застосування», науково-практична конференція «Системні науки та інформатика», КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, 2022.

8. Дата видачі завдання: 01.09.2022

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми МД	01.09.2022-07.09.2022	виконано
2	Ознайомлення зі структурою МД згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»	08.09.2022-14.09.2022	виконано
3	Ознайомлення з ДСТУ 3008-2015 та стандартами ЄСПД	15.09.2022-21.09.2022	виконано
4	Проведення дослідження за темою МД під керівництвом керівника	22.09.2022-28.09.2022	виконано
5	Завершення роботи над першим варіантом частини МД	29.09.2022-05.10.2022	виконано
6	Проведення роботи над експериментальною частиною МД	06.10.2022-12.10.2022	виконано
7	Проведення роботи над програмним продуктом	13.10.2022-02.11.2022	виконано
8	Оформлення МД та аналіз отриманих результатів	03.11.2022-13.11.2022	виконано

Студент

Керівник

Тетяна СОБКО

Віктор БОНДАРЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 130 с., 21 табл., 14 рис., 1 дод., 33 джерел.

ДИФУЗІЙНІ РІВНЯННЯ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ: ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

У даній магістерській дисертації буде розглянуто дослідження застосувань, математичного моделювання та розв'язування диференціальних рівнянь з дробовими похідними, що описують процес аномальної дифузії, що має широке застосування у різних сферах від мікроскопічного світу до світу тварин та людей. Багато англомовних джерел, в яких дослідники з усіх куточків світу аналізують методи розв'язання рівнянь з дробовими похідними, стверджують, що метод кінцевих різниць є дуже неефективним для вирішення рівнянь такого типу, в даному дослідженні буде перевірена ця теорія і метод буде порівняний з більш вживаним в разі аномальної дифузії, який також називаються напіваналітичним, а саме методом декомпозиції з використанням натурального перетворення і будуть сформувані висновки та запропоноване деяке вдосконалення методу кінцевих різниць, в якому знаходитиметься ефективне розбиття для досліджуваного рівняння.

Об'єкт дослідження: диференціальні рівняння з дробовими похідними, що описують процеси суб- і супердифузії.

Предмет дослідження: метод кінцевих різниць у порівнянні з більш поширеним методом декомпозиції для вирішення диференціальних рівнянь дробового порядку.

Мета роботи: проаналізувати вади методу кінцевих різниць та спробувати знайти спосіб покращення цього методу для знаходження ефективного розбиття, а також розглянути деякі застосування та

проаналізувати відмінності двох методів у ході розв'язання рівнянь аномальної дифузії.

Методи дослідження: чисельні експерименти з порівнянням результатів, що втілені за допомогою мови програмування Python та її характерних бібліотек.

ABSTRACT

Master's degree: 130 pages, 21 tables, 14 figures, 1 appendices, 33 sources.

DIFFUSION EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES: NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM AND APPLICATIONS

In this master's thesis, the study of applications, mathematical modeling and solving of differential equations with fractional derivatives describing the process of anomalous diffusion, which has wide application in various fields from the microscopic world to the animal and human world, will be considered. Many English-language sources, in which researchers from all over the world analyze methods for solving fractional differential equations, claim that the finite difference method is very inefficient for solving equations of this type, this research will test this theory and compare the method with a more widely used one in the case of anomalous diffusion, which is also called semi-analytical, namely, the decomposition method using the natural transformation, and conclusions will be drawn and some improvement of the finite difference method will be proposed, in which the effective partition for the equation under study will be found.

Research object: differential equations with fractional derivatives describing the processes of sub- and superdiffusion.

The subject of the study: the method of finite differences in comparison with the more common method of decomposition for solving differential equations of fractional order.

The purpose of the work: to analyze the shortcomings of the finite difference method and to try to find a way to improve this method for finding the effective partition, as well as to consider some applications and analyze the

differences between the two methods in the course of solving the anomalous diffusion equations.

Research methods: numerical experiments with the comparison of results implemented using the Python programming language and its characteristic libraries.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	11
ВСТУП	12
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ І ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ.....	13
1.1 Актуальність дробового обчислення зокрема похідних	13
1.2 Класифікація та огляд рівнянь математичної фізики	15
1.3 Математична модель дифузійного рівняння з дробовими похідними	20
1.3.1 Приклади використання дифузійних рівнянь з дробовими похідними та огляд деяких відомих результатів	29
1.3.2 Основні проблеми розв'язування дифузійних рівнянь з дробовими похідними	35
Висновки до розділу	35
РОЗДІЛ 2 ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ	37
2.1 Основні форми дробових інтегро-диференціальних операторів та їх властивості.....	37
2.1.1 Визначення дробових інтегралів та похідних Рімана-Ліувілля ..	38
2.1.2 Визначення дробових похідних Капуто	43
2.2 Інші види обчислення дробових похідних	45
2.2.1 Дробова похідна Маршо.....	45
2.2.2 Дробові похідні та інтеграли періодичних функцій за Вейлом ..	46
2.2.3 Дробові похідні та інтеграли за Гадамардом	48

2.3 Дробова похідна Капуто для задачі Коші.....	50
2.4 Застосування чисельних методів в задачах з дробовими похідними	53
2.4.1 Різницевий розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння дробового порядку	53
2.4.2 Перша початково-крайова задача для рівняння дифузії дробового порядку методом кінцевих різниць.....	58
2.4.3 Різницева схема для рівняння дифузії	61
2.4.4 Метод декомпозиції для диференціальних рівнянь з дробовою похідною	65
Висновки до розділу	69
РОЗДІЛ 3 ФОРМУЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ, АНАЛІЗ ТА ВІДМІННОСТІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	71
3.1 Архітектура методу скінченних різниць	71
3.1.1 Позначення	72
3.1.2 Алгоритмізація методів	73
3.2 Дослідження та аналіз результатів, отриманих у результаті чисельних експериментів	80
Висновки до розділу	89
РОЗДІЛ 4 РОЗРОБКА ВЛАСНОГО СТАРТАП ПРОЕКТУ	91
4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок	92
4.2 Опис ідеї стартап-проекту.....	93
4.3 Технологічний аудит ідеї проекту.....	95
4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту.....	98

4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту	108
4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	111
4.7 Висновки до розділу 4	113
ВИСНОВКИ.....	115
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	117
ДОДАТОК А ЛІСТИНГ ПРОГРАМНОГО МОДУЛЮ	121

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ДЧ – дробове числення

ВСТУП

Диференціальні рівняння з використанням дробових похідних зазвичай описують процеси руху газу в технологічних об'єктах і в його транспортних системах. У сучасному світі можна вказати вхідну інформацію (з точки зору точності і кількості), завдяки якій математичне моделювання може забезпечити вирішення прикладних завдань. Однак існує ряд випадків, коли моделі необхідно штучно задати деякі параметри, щоб забезпечити і встановити фізичну відповідність математичної моделі фізичному процесу.

Одним з розглянутих випадків, який буде підлягати постановці деяких параметрів, буде побудова математичної моделі процесу фільтрації газу в підземних шарах зберігання, так як вимірювання тиску в кожній точці в конкретний час залежать від його значення в попередні часові проміжки. Одним з основних підходів до вирішення цієї задачі є використання похідних дробових порядків.

Дробові інтегродиференційні оператори мають досить громіздкий вигляд і можуть записуватися в різних формах, також слід зазначити, що такі оператори не завжди збігаються. Але, незважаючи на це, дробово-інтегральна диференціація використовується при вирішенні багатьох складних прикладних завдань фізики, біології, теорії управління і т. д., які не можуть бути вирішені звичайними методами, а тому дробові похідні і їх застосування - це те, що в даний час привертає увагу великою кількістю досліджень (див. книги [1], [2], [3], [4], [5], [6] і посилання на наукові джерела в них).

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ І ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Актуальність дробового обчислення зокрема похідних

Дробове числення (ДЧ) виникло в 1695 році, майже одночасно зі звичайним обчисленням. Однак ДЧ привернуло недостатню кількість уваги і залишилося чисто математичними вправами, незважаючи на внесок важливих математиків, фізиків та інженерів (рис.1.1).

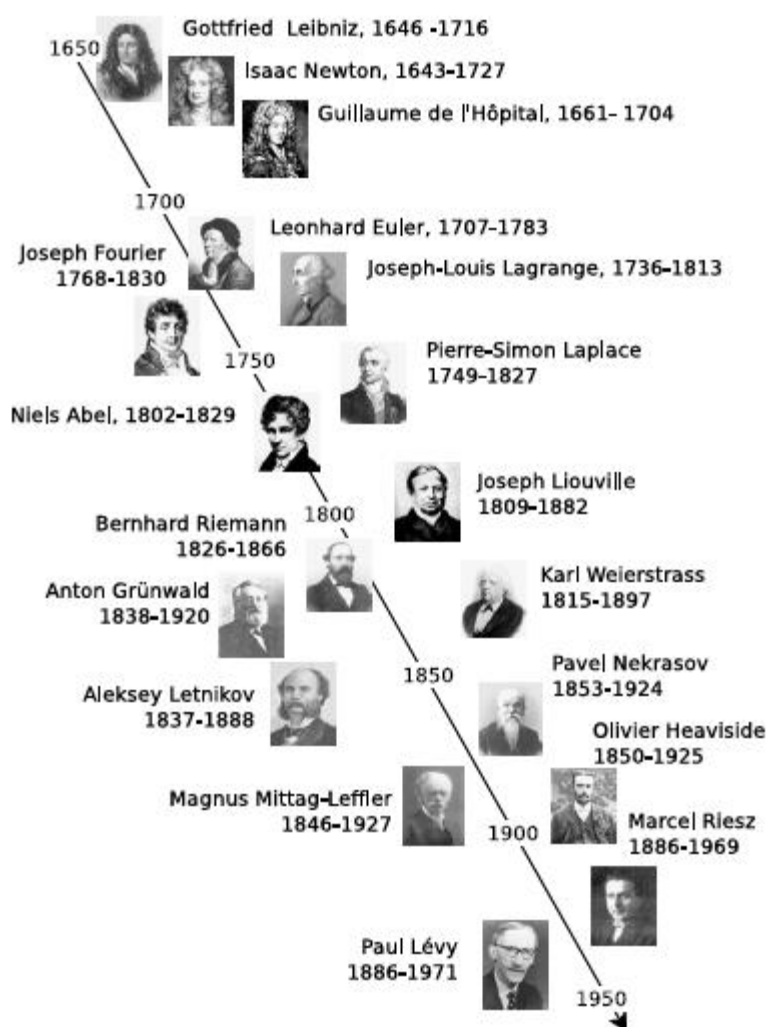


Рисунок 1.1 Історія ДЧ 1650-1950 рр

ДЧ швидко розвивалося протягом останніх кількох десятиліть, як у математиці так і в прикладних науках, сьогодні таке числення визнане

чудовим інструментом для опису складних систем, явищ, пов'язаних із ефектами довготривалої пам'яті та нелокальністю.

Є величезна кількість опублікованих наукових праць і книг, присвячених цій тематиці, і в даний час проводиться кілька спеціалізованих конференцій і семінарів, які організовуються щороку.

Популярність ДЧ у всіх галузях науки пояснюється її успішністю застосування в математичних моделях, а саме у вигляді операторів ДЧ і дробових інтегральних та диференціальних рівняннях. Зараз ми маємо змогу спостерігати значний прогрес як щодо теоретичних аспектів, так і щодо застосування ДЧ в таких областях як фізика, інженерія, біологія, медицина, економіка чи фінанси. Популярність ДЧ привернула увагу багатьох дослідників з усього світу і існує попит на роботи, що охоплюють усі галузі науки в систематичному і строгому порядку.

Протягом останніх десятиліть прикладні науки звернули увагу на ДЧ і перевірили, що воно є потужним інструментом для опису багатьох природних і штучних явищ, як наприклад ефекти пам'яті довготривалої дії, якими нехтує класичне обчислення цілих чисел. Це спонукало до величезного розвитку, в теоретичному, чисельному та прикладному аспектах, а також появі безлічі моделей і нових пропозицій.

Фізична інтерпретація диференціальних рівнянь з дробовими похідними вважається ключовим фактором, у зв'язку з яким багато дослідників приділяють увагу їх вивченню. Показано, що перехід до похідної дробового порядку в часі дозволяє враховувати вплив системної пам'яті. Це дає можливість отримати принципово нові результати, глибше зрозуміти відомі результати, створити нові адекватні моделі досліджуваних явищ.

Насправді кількість літератури, присвяченої ДЧ та її застосуванням, величезна, але читачі стикаються з високою неоднорідністю і, в деяких випадках, з оманливою та неточною інформацією. Ця магістрська робота

має намір заповнити цю прогалину та надати читачам зрозумілий й систематичний розгляд основних аспектів і застосувань ДЧ. Надихнувшись цими ідеями, дана робота пропонує дослідження власних та інших важливих результатів у галузях дослідження ДЧ.

Також одним з найважливіших та актуальних прикладів застосування є дослідження поведінки в'язкопружних матеріалів під впливом стресових факторів, а саме такими факторами можуть бути зміна температури, або фізична деформація.

1.2 Класифікація та огляд рівнянь математичної фізики

Багато проблем механіки, фізики і техніки призводять до вивчення диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, званих рівняннями математичної фізики.

Диференційні рівняння математичної фізики, які ми будемо розглядати, є лінійними рівняннями другого порядку. Рівняння називається лінійним, якщо воно першого ступеня щодо шуканої функції і всіх її похідних і не містить їх добутків, тобто якщо це рівняння можна записати у вигляді рівняння

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F(x; y), \quad (1.1)$$

де A, B, C, D, E, G, F – константи або задані функції незалежних змінних x та y .

Загальноприйнята класифікація рівняння (1.1) виглядає наступним чином. Приналежність рівняння до того чи іншого типу визначається коефіцієнтами на старших похідних.

Позначимо $\Delta = AC - B^2$ – дискримінант рівняння. Залежно від знака функції Δ рівняння (1.1) належить в цій області до одного з наступних видів:

- $\Delta < 0$ – гіперболічний тип;
- $\Delta = 0$ – параболічний тип;
- $\Delta > 0$ – еліптичний тип;
- Δ не зберігає постійного знака – змішаного типу.

Зауваження. У рівнянні (1.1) незалежними змінними є координати x та y . У багатьох задачах однією з двох незалежних змінних є час, а рівняння (1.1) можна записати через x і t (див. таблиця 1)

Таблиця 1. Найважливіші лінійні диференціальні рівняння математичної фізики

Тип	Фізичний сенс	Одновимірне рівняння	Багатовимірне рівняння	Додаткові (крайові) умови
Гіперболічний	Хвилі (струни, мембрани, потік рідини) ослаблені хвилі	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + F(r, t)$	Граничні умови; початкові умови для u і $\frac{\partial u}{\partial t}$

Продовження таблиці 1

Параболічний	Рівняння теплопровідності, дифузії	$\frac{\partial u}{\partial t}$ $= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $+ F(x, t)$	$\frac{\partial u}{\partial t}$ $= a^2 \nabla^2 u$ $+ F(r, t)$	Граничні умови; Початкова умова для u
Еліптичний	Статичний випадок	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x)$	$\nabla^2 u = F(r)$	Лише граничні умови

∇^2 – оператор Лапласа.

Наприклад, в декартових координатах

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Диференційні рівняння з частинними похідними, як правило, мають незліченну кількість розв'язків. Тому якщо фізичний процес описується за допомогою диференціального рівняння з частинними похідними, то потрібні деякі додаткові умови, що дозволяють однозначно охарактеризувати цей процес. Ці додаткові дані складаються з граничних і вихідних умов.

Граничні умови полягають в тому, що вказуються значення невідомої функції u на кінцях інтервалу зміни координат (в задачі лінійної

теплопровідності це кінці стрижня, в задачах на коливання струни - кінці струни і т.д.).

Умови, які відносяться до початкового моменту часу, називаються початковими умовами.

В якому випадку встановлюються граничні умови? Для того щоб краще зрозуміти це, необхідно розглянути поняття стаціонарних і нестаціонарних процесів.

Нестаціонарні задачі - це ті, розв'язок яких залежить не тільки від просторових координат (x, y, z) , але і від часу t . Ці завдання пов'язані з процесами, що відбуваються в часі. Наприклад, це процеси поширення тепла, дифузійні процеси, коливальні (хвильові) процеси, процеси поширення електричних хвиль і ряд інших.

Основними диференціальними рівняннями математичної фізики, що описують нестаціонарні процеси, є рівняння теплопровідності.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

і хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

Рівняння (1.2) — параболічне рівняння, а рівняння (1.3) — гіперболічне рівняння. Постановка задач для рівнянь цих типів характеризується наявністю як граничних, так і вихідних умов.

Початкові умови полягають у встановленні в момент часу $t = 0$ значень шуканої функції u і її похідної (в гіперболічному випадку) або тільки значень самої функції (в параболічному випадку).

Таким чином, для рівняння параболічного типу задається одна початкова умова (тобто умова при $t = 0$)

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (1.4)$$

а для хвильового рівняння - дві:

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y, z) = \psi(x, y, z). \quad (1.6)$$

Якщо процес відбувається в необмеженій області (область називається необмеженою, якщо хоча б одна з координат її точок може бути довільно великою, наприклад, нескінченний стрижень, нескінченний рядок і т. д.), то задаються тільки початкові умови (задача Коші).

Якщо завдання ставиться на кінцевий інтервал, то необхідно вказати як початкові, так і граничні умови.

Для опису стаціонарних процесів зазвичай використовують рівняння еліптичного типу. Час t не входить в ці рівняння. Це рівняння стаціонарного температурного поля, електростатичного поля і т.д. Для задач такого типу задаються тільки граничні умови, тобто вказується поведінка невідомої функції по контуру області (див. Табл. 1).

У розглянутих в даній роботі проблемах математичної фізики саме фізичні міркування припускають, які додаткові умови слід ставити в тій чи іншій задачі, щоб отримати її єдине рішення, що відповідає характеру досліджуваного процесу.

1.3 Математична модель дифузійного рівняння з дробовими похідними

Рівняння в дробових похідних описують еволюцію деякої фізичної системи з втратами, а дробовий показник похідної вказує на частку станів системи, які зберігаються протягом усього часу еволюції. Ці системи з «залишковою» пам'яттю займають проміжне положення між системами з повною пам'яттю, з одного боку, і марківськими системами, з другого.

Дробове числення - це область математичного аналізу, в якій вивчаються і застосовуються дробові похідні та інтеграли будь-якого дійсного порядку. Одним із застосувань цієї теорії є теорія дробових диференціальних рівнянь. Операція диференціювання дробового порядку - це поєднання операцій диференціювання та інтегрування.

Зауваження. В геометричному сенсі дробова похідна показує, у скільки разів зменшується рухома фізична величина в порівнянні зі стаціонарною. Наприклад, при $n = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2}$ відрізок, що рухається зі швидкістю $V/c \approx 0.55$ зменшується в розмірах вдвічі. А у фізичному сенсі дробова похідна показує, у скільки разів рухома фізична величина якісно відрізняється від стаціонарної. Відрізок з прикладу вже не є відрізком, але ще не є точкою.

Диференційні рівняння з дробовими похідними використовуються для опису різних варіантів аномальної дифузії по фракталах. Суб- і супердифузія входять в клас аномальних дифузійних процесів. Аномальна дифузія виникає в таких областях, як турбулентна дифузія в плазмі, міграція вологи в ґрунті, рух радону і природного газу в геологічних середовищах, транспорт заряду в аморфних напівпровідниках, дифузія в пористих

матеріалах, «ковзна» дифузія по твердій поверхні і т.д. Такою дифузією описується рух бактерій, політ альбатроса, рух грошових знаків і т.д.

Субдифузія протікає набагато повільніше, ніж класична дифузія. Субдифузія - це випадкове блукання, при якому швидкість росту кореня середнього квадратного відхилення частинок з плином часу не залишається постійною, як при звичайній дифузії, а монотонно зменшується. Цей процес реалізується, наприклад, в тому випадку, коли дифузор захоплюється пастками (дефектами, адсорбційними або хімічно активними центрами), переходить в бічні, тупикові шляхи і на деякий час або назавжди віддаляється від процесу міграції. Ефекти уповільнення можливі і при наявності в системі статичного розладу, динамічного розладу, в'язкоеластичності і т.д.

При субдифузії, коли значення дробової похідної менше за 1, наявність пасток призводить до розбіжності середньої тривалості очікування стрибків, завдяки чому вони набувають дискретний характер в просторі, відбувається уповільнення процесу перенесення і в кінцевому підсумку міграція перестає залежати від часу. Відомі два класи субдифузійних процесів: стаціонарні і нестаціонарні. При стаціонарній субдифузії рухливість частинок не змінюється. Уповільнення дифузії є наслідком негативних кореляцій швидкостей, які обумовлені або наявністю просторових обмежень, або взаємодіями з навколишнім середовищем (адсорбція, хімічні реакції і т.д.). Нестаціонарна субдифузія – результат спаду з плином часу моторики частинок, обумовлена наявністю процесів захоплення дифузійних молекул пастками. Випадкова бар'єрна модель, що описує стаціонарну субдифузію, і модель випадкового трепінгу, що описує нестаціонарну субдифузію, дають однакову функцію розподілу для відповідних значень параметрів.

Типовим прикладом субдифузії є процес дифузії радону у фрактально-пористому середовищі, який протікає повільніше, ніж

звичайний режим дифузії, тому що ґрунт має складну топологію каналів між порами. Канали згинаються, сильно відступають, а в деяких випадках можуть розриватися, тому процес передачі радону сповільнюється. Цей режим характеризується дробовим показником, який додається в рівняння дифузії як порядок дробової похідної за часом. Вона відповідає пропорції каналів, відкритих для потоку речовини. Такий процес називається нелокальним за часом, а фрактальне середовище, в якому він відбувається, називається середовищем пам'яті. Окрім субдифузії (затримка дифузії, дифузія по фракталах), можлива і супердифузія (прискорена, фрактальна дифузія).

Супердифузія здійснюється зі швидкостями, що значно перевищують класичну дифузію. Цей режим спостерігається, якщо в системі є полегшені шляхи (наприклад, тріщини) або є процеси випадкової або спрямованої адвекції (захоплення дифузанта потоками рідини). Прикладами супердифузії є турбулентні середовища (газ, рідина, плазма, хаотичні структури, детерміновані карти, фінансові ринки, рух корму для худоби і т.д.).

У супердифузії частинка в дискретні моменти часу робить стрибки довільної довжини, що характеризуються розбіжним коренем середньоквадратичного відхилення; міграція прискорюється з часом і може стати нескінченно великою; послідовні положення блукаючої частинки утворюють кластерну структуру, що представляє фрактальну множину, розмірність якої пов'язана з показником потужності. Оскільки фрактал утворюється в результаті ієрархічної побудови, то поведінка стохастичної системи визначається не тільки зміщенням частинки в прямому просторі, але і набагато більш повільною еволюцією скупчень її послідовних положень.

Кінетика субдифузії описується розв'язками диференціальних рівнянь з дробовими похідними по часовій змінній.

Рівняння для 2-го закону Фіка, засноване на дробовій похідній за часом, має вигляд

$$\frac{d^\gamma C}{dt^\gamma} = D \frac{d^2 C}{dx^2}$$

Це інтегрорізнцеве рівняння для вирівнювання концентрації в субдифузії при $0 < \gamma < 1$ описує випадковий процес, який сповільнюється в часі - дифузію над фракталами. Дробова похідна в часі виникає при обліку нелокальності з плином часу (наприклад, при міграції в розгалужених фрактальних структурах, в пористих тілах - за рахунок прилипання дифузійних молекул до стінок пор, адсорбції).

Кінетика супердифузії описується розв'язками диференціальних рівнянь з дробовими похідними по координаті:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial x^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} (1 + \beta) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} (1 - \beta) \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha}, \quad -1 \leq \beta \leq 1,$$

де $C(x, t)$ характеризує концентрацію дифузанта;

$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ – оператор диференціювання дробового порядку α по x ;

$D > 0$ – константа розмірності $L^\alpha T^{-1}$ (узагальнений коефіцієнт дифузії);

β – коефіцієнт асиметрії, що характеризує напрямок переносу речовини при $\alpha \rightarrow 1$;

x і t – просторова та часова змінні.

В загальному вигляді рівняння дифузії визначається таким чином:

$$\frac{\partial^\gamma C(x, t)}{\partial t^\gamma} = D_f D_x^\alpha C(x, t),$$

де D_t^γ – частинна похідна по часу;

$$D_x^\alpha = \frac{1}{2}(1 + \beta) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}(1 - \beta) \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha}, \quad 0 < \gamma \leq 2, \quad 1 \leq \alpha \leq 2,$$

$-1 \leq \beta \leq 1$ - частинна похідна по координаті;

D_f – константний коефіцієнт дифузії.

В наведених рівняннях α – дробовий порядок диференціювання по просторовій координаті; β – коефіцієнт асиметрії (скошеності), що характеризується напрямком переносу речовини при $\alpha \rightarrow 1$; $\alpha = 2$ – класична дифузія, $1 < \alpha < 2$ – супердифузія; γ – дробовий порядок диференціювання по часовій змінній, $\gamma = 1$ – класична дифузія, $0 < \gamma < 1$ – субдифузія, $1 < \gamma < 2$ – супердифузія; $\gamma = 2$ – хвильове рівняння.

При $\gamma < 1$ швидкість плинності процесу на початку більше швидкості класичної дифузії, але з часом спостерігається сповільнення, що характерне для субдифузії. При $\gamma > 1$ швидкість процесу вища ніж в класичному випадку, і процес з часом прискорюється. В цьому випадку з'являються хвильові властивості розв'язку.

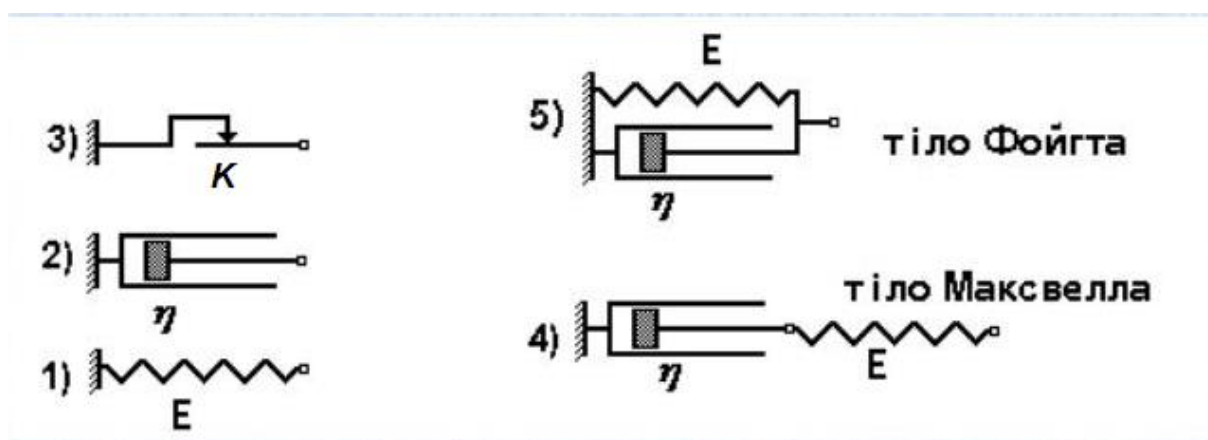
Коефіцієнт α характеризує неоднорідність, гетерогенність середовища, в якому відбувається транспортування речовини, коефіцієнт β – неізотропність або несиметричність цього середовища. Навіть невелике відхилення параметру α ($1 < \alpha \leq 2$) від значення $\alpha = 2$ (класична дифузія) різко зменшує концентрацію частинок.

Порядки дробових похідних визначаються фрактальною розмірністю d_f . При цьому параметр γ відповідає за відхилення концентрації

радіонукліда з часом, а параметр α – за флуктуації концентрації радіонукліда в просторі.

Також системами з дробовими похідними у рівняннях з частинними похідними може бути наприклад описана складна схема поведінки в'язкопружного матеріалу.

Для прикладу розглянемо біологічну сферу науки, в ній такі структури як (легенева тканина, м'язи, судини, шкіра та ін.) - це в'язкопружні системи. Саме слово в'язкопружність вказує на те, що їх поведінка вивчається на моделях, що містять пружні (E) і в'язкі елементи, а в деяких випадках до них додаються елементи зовнішнього тертя (K), основні механічні моделі тканин можна побачити на рис.1.2.



- 1) пружний елемент;
- 2) в'язкий елемент;
- 3) елемент внутрішнього тертя;
- 4) послідовне з'єднання в'язкого та пружного елементів;
- 5) паралельне з'єднання в'язкого та пружного елементів.

Рисунок 1.2 Механічні моделі тканин

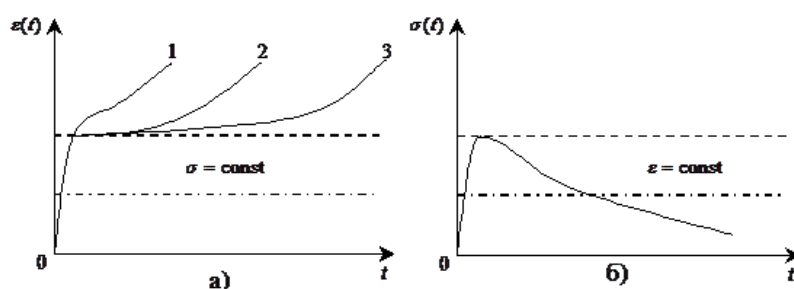
Пружний елемент - ідеальна пружина, для якої виконується закон Гука. В'язкий елемент може бути представлений у вигляді циліндра, який заповнений в'язкою рідиною з дірковим поршнем. Щоб витягнути поршень,

необхідно прикласти деяку зовнішню силу, яка компенсує в'язкі сили тертя, що виникають при протіканні рідини через шпарину.

Наведемо формули для напруження, що створюється цими елементами під дією зовнішніх сил:

- $s_n = E\varepsilon$ – для пружного елемента;
- $s_t = h \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ – для в'язкого елемента;
- $s_t \sim KFn$ – для елемента зовнішнього тертя при силі нормального тиску F_n і коефіцієнту тертя K .

Для відтворення механічних властивостей біологічних тканин використовуються моделі, що складаються з цих елементів. Найпростішими моделями є тіло Максвелла і тіло Фойгта, що представляють собою послідовне і паралельне з'єднання пружних і в'язких елементів (див. рис. 1.2). Ці моделі дозволяють відтворювати такі динамічні властивості тканин, як повзучість і повернення до початкового стану після стресового навантаження. З динамікою біологічних тканин можна ознайомитись на рис.1.3.



а) повзучість – зміна деформації тіла за умови постійного напруження s ($s_1 > s_2 > s_3$);

б) релаксація напруження – зменшення s в умовах постійної деформації.

Рисунок 1.3 Динаміка біологічних тканин

Повзучість - це явище зміни розмірів зразка з плином часу в умовах постійної напруги. Якщо в біологічних тканинах швидко створюється певне

напруження, а потім підтримується постійне, то з часом зразок поступово подовжується до розриву тканин, навіть якщо постійна напруга менш важлива, ніж межа міцності матеріалу. Динаміка повзучості показана на рис.1.3а. Зміна розмірів відбувається швидше, якщо більша напруга, що витримується в зразку (порівняйте криві 1, 2 і 3, для яких $s_1 > s_2 > s_3$).

Стрессова релаксація - це явище зменшення з часом кількості напруги в зразку при збереженні постійної кількості деформації. Якщо швидко розтягнути зразок і, зберігши отриману постійну деформацію, виміряти в ньому напругу протягом деякого часу, то буде помітно його зниження з часом (рис. 1.3б). Пунктирні лінії на обох рис.1.3 відтворюють поведінку чисто пружних тіл. Розслаблення стресу і повзучість є суто динамічними процесами - час їх існування вимірюється секундами або хвилинами. Наприклад, для м'язів час зниження напруги на 40% становить близько 10 секунд.

Ці процеси легко пояснити механічними моделями, показаними на рис.1.2 (п. 4). Спочатку пружний елемент деформується під дією зовнішніх сил, а потім починається «потік» в'язкого елемента, змінюються його розміри, що викликає зміну як довжини, так і натягу. Використовуючи модель Максвелла, легко отримати експоненціальний закон розслаблення стресу

$$s(t) = s_0 e^{-t/\alpha}$$

де α – константа часу релаксації;

$s_0 = E\epsilon$ – початкове напруження.

Експоненціальним законом можна також імплементувати явище повзучості

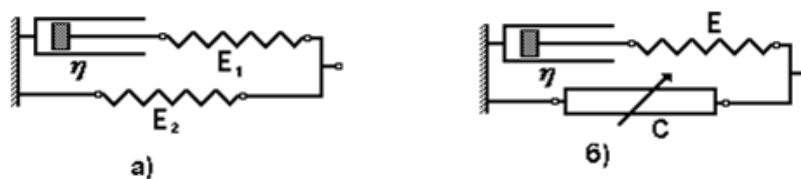
$$\epsilon(t) = \epsilon_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

де $e_0 = \sigma_0/E$ – початкова деформація;

t – час процесу повзучості, що дорівнює відношенню коефіцієнта в'язкості і модуля Юнга.

Формулу $t = \eta/E$ легко отримати з міркувань розмірності.

Справедливо, що розмірність η є $\text{Па} \times \text{с}$, а розмірність E дорівнює $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$. Отже, єдина комбінація величин η і E , що має розмірність часу $[t] = \text{с}$, це їх відношення η/E . З прикладами механічних моделей біологічних тканин можна ознайомитись на рис.1.4.



а) трьохелементна модель для дослідження механічних властивостей в'язкопружних тканин;

б) трьохелементна модель м'язів, що включає скорочувальний елемент C .

Рисунок 1.4 Приклади механічних моделей біологічних тканин

Модель Фойга дозволяє пояснити поступове збільшення з часом напруги в зразку, якщо до тіла прикладається сила, яка змінюється стрибкоподібним чином. Динаміка експоненціального зниження напруги або деформації відрізняється від експерименту. Кращих результатів можна досягти, якщо розглядати моделі, що включають в себе кілька пружних і в'язких елементів. Приклад однієї з таких моделей наведено на рис.1.4. На цьому ж рисунку представлена одна з найпростіших моделей м'язів, до складу якої входить скоротливий елемент C , що представляє собою механіко-хімічний перетворювач, що перетворює енергію хімічних реакцій в механічну енергію. Ця механічна енергія витрачається на створення напруги і виконання роботи по скороченню м'язів.

Наявність в'язкоеластичних елементів, з'єднаних зі скоротливими елементами, забезпечують ті гнучкі функціональні властивості, які притаманні цілому комплексу фізіологічних систем (наприклад, серцево-судинної, м'язової і ряду інших) для виконання покладених на них функцій в умовах зміни як властивостей самої системи, так і зовнішніх навантажень. Це явище притаманне адаптивним системам. Таким чином, зміна тону судин в'язком'язового типу дозволяє реалізувати таке явище, як відкладення крові, при якому значне збільшення обсягу судини можливо тільки при повному розслабленні стінки судини і зниженні його еластичності. Навпаки, при необхідності вигнання крові з депо зменшується обсяг судин, відбувається зняття стресу при інших розмірах судин, в цьому випадку також підвищується модуль об'ємної еластичності судин (їх тонус), детальніше з цією тематикою можна ознайомитись у [7].

1.3.1 Приклади використання дифузійних рівнянь з дробовими похідними та огляд деяких відомих результатів

В'язкоеластичність

Як вже раніше було сказано в'язкопружність представляється областю найбільш широких застосувань дробових диференціальних і інтегральних операторів. Зв'язки між напруженням і деформацією для твердих тіл(закон Гука)

$$\sigma(t) = E\epsilon(t)$$

і для ньютонівських рідин

$$\sigma(t) = \eta d(t)dt,$$

де E і η є константами.

Ці функції задовольняють дробовим диференціальним рівнянням:

$$D^\alpha \sigma(t) = \frac{\Gamma(1 - \alpha)t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - 2\alpha)} \sigma(t)$$

$$D^\alpha \epsilon(t) = \Gamma(1 + \alpha) t^{-\alpha} \epsilon(t)$$

Хвильове рівняння дифузії

Рівняння

$$D_t^\beta - A(x, t, D)u = F_0(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0; T],$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля D_t^β і рівняння

$${}^c D_t^\beta u - A(x, t, D)u = F_0(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0; T]$$

з регуляризованою дробовою похідною ${}^c D_t^\beta$ (похідною Капуто-Джрбашяна) та деякими еліптичним диференціальним оператором $A(x, t, D)$ описують процес так званої аномальної дифузії (субдифузії при $\beta \in (0, 1)$ та супердифузії при $\beta \in (1, 2)$)

Зокрема, рівняння

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad \alpha \in (0, 2)$$

є узагальненням хвильового рівняння та рівняння дифузії і тому широко використовується у математичних моделях, які описують хімічні та фізичні процеси у фрактальному середовищі, а також пояснюють певні біологічні, економічні та соціальні явища.

Модель фільтрації газу в пористому середовищі

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [8-10] .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^j}{\partial z} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_\alpha \right)$$

В останньому рівнянні $l=2$ для газу та $l=1$ для нестисливої рідини; $\alpha \in (0,2]$ – степінь дробової похідної; $k=k(x,y,z,t)$, $m=m(x,y,z)$ та $h=h(x,y,z)$ коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; μ – динамічна в'язкість речовини, p_{at} – атмосферний тиск, q – густина відбору, χ – коефіцієнт стисливості газу.

Рух газу в трубопроводах з використанням дробових похідних порядку α за часом, описується системою

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \omega(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x} + a\omega - bp &= \Theta(x, t) \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(x, t) &= \Psi(x, t) \end{aligned}$$

Якщо $k=0$, то отримуємо похідну Рімана-Ліувіля, а при $k=1$ – Капуто.

Ігрові задачі в конфліктних умовах для систем рівнянь з фрактальними похідними Капутто і Рімана-Ліувіля

В n - вимірному евклідовому просторі R^n розглядається процес $z(t)$, $z(t) \in R^n$ у вигляді моделі динамічної гри з двома гравцями, які протидіють один одному через свої керування $u \in U$, $v \in V$, деяка функція $\varphi(u, v)$, $\varphi : U \times V \rightarrow R^n$ описує блок керування, а еволюція гри задана системою диференціальних рівнянь дробового порядку α , $m - 1 < \alpha \leq m$

$$D^\alpha(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} z^{(k)}(0+)) = Az(t) + \varphi(u, v)$$

З початковими умовами:

$$z^{(k)}(0+) = c_k, k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$$

де A - квадратна матриця порядку n .

Окрім еволюції процесу в просторі R^n задана деяка множина M^* , яку в задачах переслідування-зустрічі називають термінальною. З геометричних представлень динаміки зближення двох конфліктно-керованих процесів в R^n множина M^* вибрана у вигляді:

$$M^* = M_0 + M,$$

де M_0 -лінійний підпростір, а M -деякий компакт із ортогонального доповнення L до M_0 в R^n .

Перший гравець вибирає керування $u(t) \in U$ і має за мету вивести траєкторію процесу $z(t)$ на термінальну множину M^* за мінімальний час, а другий - керування $v(t) \in V$ вибирає таким чином, щоб не допустити "зустрічі" з термінальною множиною, або максимально "відкласти зустріч".

Математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою

Ця модель описується диференціальним рівнянням у частинних похідних із дробовим порядком

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D_x^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

і відповідними граничними умовами 3-го роду

$$D^\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = \beta(U_P - U_R)$$

та початковою умовою

$$U|_{t=0} = U_0,$$

де u – вологовміст, кг/кг; t – час, с;

D^α – коефіцієнти вологопровідності ($D^\alpha = [D_x^\alpha; D_y^\alpha]$), $\frac{m^2}{c}$;

n – зовнішня нормаль;

β – коефіцієнт вологообміну, m^2/c ;

U_p – вологовміст на поверхні;

U_R – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури t_c та відносної вологості зовнішнього середовища;

U_0 – початковий розподіл вологості; α – дробовий порядок похідної (що характеризує долю каналів відкритих для протікання).

Дробово похідні моделі дифузії в магнітно-резонансній томографії[11]

Традиційна дифузійна тензорна візуалізація відображає структуру мозку шляхом підгонки моделі дифузії до величини електричного сигналу, отриманого при магнітно-резонансній томографії (МРТ).

Дробова дифузійна тензорна візуалізація використовує моделі аномальної дифузії, щоб отримати кращу відповідність реальним даним МРТ, які можуть демонструвати аномальну дифузію як у часі, так і в просторі, тому такі моделі мають великі перспективи для покращення томографії мозку.

Аномальна дифузія іонів хлориду в бетонних конструкціях[12]

Залізобетонні (ЗБ) конструкції в прибережних районах можуть страждати від корозії арматури, а проникнення хлоридів є основним фактором, який впливає на довговічність бетонних конструкцій. Дифузію хлоридів можна описати традиційними моделями за допомогою рівняння дифузії, яке відповідає закону Фіка за умови, що бетон є однорідним і пористим матеріалом. Однак бетонний матеріал насправді не є однорідним і стабільним; було виявлено, що фактичний процес дифузії хлоридів не задовольняє традиційну модель дифузії, а підлягає характеристикам аномальної дифузії, оскільки частинки дифундують повільніше, ніж

звичайна дифузія, і її часові характеристики не можуть бути точно відображені за традиційною моделлю.

1.3.2 Основні проблеми розв'язування дифузійних рівнянь з дробовими похідними

Однією з постійних проблем із дифузійними моделями дробового порядку є побудова ефективних чисельних схем просторової та часової дискретизації. Дотепер більшість моделей покладалися на метод скінченних різниць нижчого порядку для дискретизації як дробового порядку похідної за просторовою так і за часовою координатою. У той час як метод кінцевих різниць є простим і зрозумілим для вирішення диференціальних рівнянь цілого порядку, його привабливість зменшується для диференціала дробового порядку рівнянь, оскільки це призводить до систем лінійних рівнянь, визначених великими повними матрицями. Альтернативний метод скінченних різниць існує, але єдине представлення та порівняння цих методів досі було відсутнім. У цій магістрській дисертації як раз буде проведене порівняння чисельної дискретизації методом кінцевих різниць і загальновикористовуваним методом для розв'язування таких рівнянь – з використанням функцій Мітаг-Лефлера.

Висновки до розділу

Даний розділ був присвячений ознайомленню з дослідженням предметної області, адже дуже важливо зрозуміти, в яких випадках

доцільно використовувати дробові похідні і які відомі процеси описують досліджувані рівняння з дробовими похідними.

Було висвітлено актуальність рівнянь дробового порядку на сьогоднішній день. В тому числі була представлена загальна класифікація рівнянь математичної фізики, зокрема, розглянута класифікація рівнянь другого порядку.

Далі більш детально були розглянуто загальні відомості про суб- та супердифузію, були наведені рівняння аномальної дифузії з дробовими похідними, які є об'єктом дослідження даної роботи, і приклади використання дифузійних рівнянь з дробовими похідними в якості математичних моделей, що описують відомі процеси в таких науках як фізика, інженерія, біологія, медицина, економіка чи фінанси. І насамкінець, були розглянуті проблеми, з якими зіштовхуються дослідники під час вивчення та реалізації розв'язку подібного роду систем або рівнянь.

РОЗДІЛ 2 ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Математичний апарат інтегродиференціації дробового порядку дає можливість описувати процеси в системах, для яких істотне значення має розгляд нелокальних властивостей у часі і просторі. Трактуювання похідних дробового порядку як способу обліку ефектів пам'яті (нелокальність в часі) і просторових кореляцій (нелокальність в координатах) зумовило їх широке застосування в природознавстві.

2.1 Основні форми дробових інтегро-диференціальних операторів та їх властивості

У математичних трактатах, пов'язаних з ДЧ, фракційні інтеграли і похідні Рімана-Ліувіля є найбільш широко дослідженими і використовуваними формами дробових інтегро-диференціальних операторів. Поглиблене дослідження цих операторів, їх властивостей, додатків та різних узагальнень було представлено в [2]. У цьому розділі коротко обговорюються їх визначення і деякі з основних властивостей.

2.1.1 Визначення дробових інтегралів та похідних Рімана-Ліувілля

У спробі інтерпретувати відому формулу для n -кратного визначеного інтеграла

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.1)$$

для нецілочисельних значень n основна проблема полягає в тому, як розширити домен факторіалу функції $(n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, для довільних дійсних (або навіть комплексних) значень аргументу.

Очевидно, що кандидатів на таке розширення нескінченно багато і для унікальності вирішення цієї проблеми потрібні додаткові умови. Якщо шукати рішення функціонального рівняння (яке однозначно визначає факторіальну функцію на $\mathbb{N}$)

$$f(s+1) = sf(s), \quad f(1) = 1, \quad (2.2)$$

у класі аналітичних функцій з додатковими умовами $f(s) \neq 0, s \in \mathbb{C}, f = f(s)$ логарифмічно опукла для $s > 0$, то рішення рівняння (2.1) є унікальним і збігається з гамма-функцією Ейлера (див., наприклад, [13]), визначеною збіжним інтегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} ds \quad (2.3)$$

для $\operatorname{Re}(s) > 0$ і його аналітичним продовженням для інших значень $s \in \mathbb{C}$. Це означає, що гамма-функція Ейлера є природним розширенням факторіальної функції і, таким чином, відіграє помітну роль в ДЧ.

Оскільки розширена функція факторіалу вже визначена, введемо α -кратний визначений інтеграл. Нехай $(a, b) \subset \mathbb{R}$ - скінченний проміжок, $f \in L^1(a, b)$, $\alpha > 0$ ($\Gamma(\alpha) > 0$). Ліво- та право-сторонні фракційні інтеграли Рімана-Ліувілля порядку α функції f визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (a, b), \\ (I_{b-}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (a, b).\end{aligned}\quad (2.4)$$

У випадку $\alpha = 0$, обидва інтеграли набувають вигляду тотожних операторів:

$$(I_{a+}^0f)(x) = f(x), \quad (I_{b-}^0f)(x) = f(x) \quad (2.5)$$

Визначення, наведені у (2.5), обґрунтовані формулами

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} (I_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (I_{b-}^{\alpha}f)(x) = f(x), \quad (2.6)$$

що справедливо для $f \in L^1(a, b)$ в кожній точці Лебега функції f , тобто майже скрізь на $[a; b]$.

Очевидно, що ліво- і право-сторонні фракційні інтеграли Рімана-Ліувілля є лінійними операторами:

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\alpha}(c_1f_1 + c_2f_2))(x) &= c_1(I_{a+}^{\alpha}f_1)(x) + c_2(I_{a+}^{\alpha}f_2)(x), \\ (I_{b-}^{\alpha}(c_1f_1 + c_2f_2))(x) &= c_1(I_{b-}^{\alpha}f_1)(x) + c_2(I_{b-}^{\alpha}f_2)(x),\end{aligned}\quad (2.7)$$

для $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ якщо $I_{a+}^{\alpha} f_1, I_{a+}^{\alpha} f_2$ або $I_{b-}^{\alpha} f_1, I_{b-}^{\alpha} f_2$ відповідно, існують майже всюди на $[a; b]$.

Якщо $(Rf)(x) = f(a + b - x)$, то

$$RI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha} R, \quad RI_{b-}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha} R \quad (2.8)$$

Також добре відома формула бета-функції

$$B(s, t) = \int_0^1 \tau^{s-1} (1 - \tau)^{t-1} d\tau = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \quad \Re(s) > 0, \Re(t) > 0 \quad (2.9)$$

і теорема Фубіні приводить нас до важливої властивості, що інтеграли дробового порядку утворюють півгрупу.

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} = I_{a+}^{\alpha+\beta}, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} = I_{b-}^{\alpha+\beta} \quad (2.10)$$

Теорема 1. (Теорема Фубіні)

Нехай $\Omega_1 = [a; b]$, $\Omega_2 = [c; d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ і нехай $f(x, y)$ – визначена на $\Omega_1 \times \Omega_2$ вимірна функція. Якщо збігається (абсолютно) хоча б один з інтегралів

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy, \quad \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx, \quad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy,$$

то вони співпадають.

Має місце наступний частковий випадок теореми Фубіні:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx \quad (2.11)$$

у припущенні, що абсолютно збігається один з цих інтегралів.

Рівність (2.11) називається формулою Діріхле.

Доведення (2.10).

Маємо

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I_{a+}^{\beta} \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Змінимо порядок інтегрування за допомогою формули Діріхле (2.11) і після цього застосуємо заміну $t = \tau + s(x - \tau)$ у внутрішньому інтегралі, отримаємо

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{(\alpha+\beta)-1} \varphi(\tau) d\tau \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi. \end{aligned}$$

Нехай $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ і функція f задовольняє умову $I_{a+}^{n-\alpha} f \in AC^n[a; b]$, де $AC^n[a; b] = \{f: (f \in C^{n-1}[a, b]) \cap (f^{(n-1)} \in AC[a, b])\}$, $AC[a, b]$ – простір абсолютно неперервних функцій на

інтервалі $[a, b]$. Ліво і правостороння дробові похідні порядку α визначаються таким чином

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{d^n}{dx^n} (I_{a+}^{n-\alpha}f)(x), \quad x \in (a, b), \\ (D_{b-}^{\alpha}f)(x) &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (I_{b-}^{n-\alpha}f)(x), \quad x \in (a, b).\end{aligned}\quad (2.12)$$

З формули (2.12) можна зробити висновок, що при $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$(D_{a+}^nf)(x) = \frac{d^nf}{dx^n}, \quad (D_{b-}^nf)(x) = (-1)^n \frac{d^nf}{dx^n}, \quad x \in (a, b). \quad (2.13)$$

Аналогічно з формули (2.13) робимо висновок, що ліво- і правосторонні похідні Рімана-Ліувілля це лінійні оператори.

Дробові похідні Рімана-Ліувілля існують майже скрізь на інтервалі (a, b) та обчислюються формулою

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt\end{aligned}\quad (2.14)$$

Також зазначимо, що властивість півгрупи (2.10) справедлива тільки за таких умов:

- 1) $\mathbb{R}(\beta) > 0, \mathbb{R}(\alpha + \beta) > 0, f \in L^1(a, b);$
- 2) $\mathbb{R}(\beta) < 0, \mathbb{R}(\alpha) > 0, f \in I_{\alpha+}^{-\beta}(L^1);$
- 3) $\mathbb{R}(\beta) < 0, \mathbb{R}(\alpha) < 0, f \in I_{\alpha+}^{-\alpha-\beta}(L^1).$

Дробові похідні Рімана-Ліувілля формують півгрупу за таких умов, що $\alpha \in \mathbb{R}, \beta < 1$.

Правило Лейбніца

$$D^\alpha(f \cdot g) = (D^\alpha f) \cdot g + f(D^\alpha g)$$

не виконується для дробових похідних будь-якого типу. Справедливе тільки в разі $\alpha = 1$.

Замість цього введемо аналоги правила Лейбніца, які записуються в різному вигляді

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f \cdot g)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D_{a+}^{\alpha-k} f)(x) g^{(k)}(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ (D_{a+}^\alpha f \cdot g)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} (D_{a+}^{\alpha-\beta-k} f)(x) (D_{a+}^{\beta+k} g)(x) \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \ (\alpha \neq -1, -2, \dots, \beta \notin \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

де $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$ – узагальнені біноміальні коефіцієнти.

2.1.2 Визначення дробових похідних Капуто

У публікаціях щодо ДЧ, дробова похідна Рімана-Ліувілля як природне узагальнення похідних цілочисельного порядку часто згадується. Однак в застосуваннях є деякі проблеми з цими похідними включаючи нестандартне формулювання початкових умов у дробових диференціальних рівняннях з похідними Рімана-Ліувілля і той факт, що

фракційна похідна Рімана-Ліувілля від константи не дорівнює нулю.

Таким чином, регуляризована дробова похідна Рімана-Ліувілля була введена не тільки в теоретичних трактатах [14, 15], а також для моделей в'язкоеластичних матеріалів з пам'яттю [16], повзучості структурних елементів [17], сейсмографічні хвилі [18] і т.д. На сьогоднішній день цю дробову похідну зазвичай називають похідною Капуто (або Капуто-Джрбашьян).

Нехай $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in N$, $f \in AC^n[a, b]$. Тоді фракційна похідна Капуто порядку α може бути визначена як

$$({}_*D_{a+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha}(f - T_{n-1}(f, a)))(x), \quad (2.16)$$

де D_{a+}^{α} – дробова похідна Рімана-Ліувілля (2.12);

$T_{n-1}(f, a)$ – поліном Тейлора для f степеня $n - 1$ з центром в точці a . Якщо $f^{(n)} \in L^1(a, b)$, тоді можна змінити порядок диференціювання і інтегрування у (2.16) і ми отримаємо іншу форму дробової похідної Капуто

$$({}_*D_{a+}^{\alpha}f)(x) = (I_{a+}^{n-\alpha}f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (2.17)$$

При порівнянні з формулою (2.14) отримуємо співвідношення між дробовими похідними Капуто та Рімана-Ліувілля

$$({}_*D_{a+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha}f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad (2.18)$$

що справджується для $f \in AC^n[a, b]$.

2.2 Інші види обчислення дробових похідних

У цьому підрозділі ми введемо короткий огляд деяких інших понять дробових інтегралів і похідних. З великої різноманітності існуючих понять вибираємо ті, для яких є строга математична теорія, яка допускає інтерпретацію з точки зору дробового застосування деяких операторів та/або які використовуються в серйозних математичних моделях.

2.2.1 Дробова похідна Маршо

Для функції $f \in C^1[a; b]$, $-\infty < a < b < \infty$, дробова похідна Маршо

$$(\mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \quad (2.19)$$

Під $\mathbb{D}_{a+}^{\alpha} f$ розуміємо $D_{a+}^{\alpha} f$. Вираз (2.19) використовується в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, оскільки він допускає максимум принципів аргументів.

Для більш загального класу функцій f , похідна Маршо визначається за допомогою ліміту обмежених похідних Маршо,

$$(\mathbb{D}_{a+\varepsilon}^{\alpha} f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_{\varepsilon}(x),$$

де $\varepsilon > 0$,

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \text{ для } x \geq a + \varepsilon,$$

і функція ψ_ε має бути визначена окремо для $a \leq x < a + \varepsilon$.

Це визначення потрібно розуміти таким чином, що існує L^p - границя $\mathbb{D}_{a+\varepsilon}^\alpha f$, так як $\varepsilon \rightarrow 0$, маємо $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L^p(a, b)$, де $1 \leq p < \infty$ [2]. Для таких функцій границя, яка була зазначена вище називається похідною Маршо і вона збігається майже скрізь з похідною Рімана-Ліувілля.

2.2.2 Дробові похідні та інтеграли періодичних функцій за Вейлом

Нехай φ - 2π періодична функція на $\mathbb{R}$, і

$$\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}, \quad \varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \varphi(x) dx,$$

це буде рядом Фур'є. В цьому підпункті ми покладаємо

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0.$$

Ідеєю дробового числення за Вейлом є побудова фрактальних інтегралів $I_\pm^{(\alpha)}$ та похідних $D_\pm^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, в такому вигляді

$$I_\pm^{(\alpha)} \varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{(\pm ik)^\alpha} e^{ikx}$$

Що має місце завдяки визначенню φ_0 і

$$D_{\pm}^{(\alpha)} \varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k (\pm ik)^{\alpha} e^{ikx},$$

де $(\pm ik)^{\alpha} = |k|^{\alpha} \exp\left(\pm \frac{\alpha \pi i}{2} \operatorname{sign} k\right)$.

Отже, запишемо визначення інтегралів та похідних за Вейлом

$$(I_{\pm}^{(\alpha)} \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\pm}^{\alpha}(t) dt, \quad \alpha > 0,$$

$$\text{де } \Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt \mp \frac{\alpha \pi}{2}\right)}{k^{\alpha}},$$

а похідна

$$(D_{\pm}^{(\alpha)} f)(x) = \pm \frac{d}{dx} \left(I_{\pm}^{(1-\alpha)} f \right)(x).$$

На 2π - періодичних функціях з простору $L^1(0, 2\pi)$, фрактальні інтеграли за Вейлом збігаються з фрактальними інтегралами Рімана-Ліувілля на $\mathbb{R}$ (для стислості розглянемо тільки $I_{+}^{(\alpha)}$):

$$(I_{+}^{(\alpha)} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

де інтеграл умовно збігається справа, тобто

$$\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-2\pi n}^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Також це можна записати у вигляді абсолютно збіжного інтегралу:

$$(I_+^{(\alpha)}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \varphi(x-t) \left\{ t^{\alpha-1} - \left(2\pi \left[\frac{t}{2\pi} \right] \right)^{\alpha-1} \right\} dt,$$

де $[s]$ означає цілу частину від s .

Для певного класу функцій, назвемо його «хорошим», $D_\pm^{(\alpha)}$ збігається з похідною Вейла-Маршо

$$(D_\pm^{(\alpha)}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x-t) - f(x)\} \frac{d}{dt} \Psi_\pm^{1-\alpha}(t) dt.$$

За доведеннями і детальнішою інформацією див.[2].

2.2.3 Дробові похідні та інтеграли за Гадамардом

Ліво- і правосторонні фрактальні інтеграли за Гадамардом визначаються формулами [2, 4] :

$$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0,$$

$$(I_-^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{\varphi(t) dt}{t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0.$$

Також ознайомимось з дробовими похідними за Гадамардом.

Лівостороння запишеться як

$$(\mathcal{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\left(\log \frac{x}{t}\right)^\alpha} \frac{dt}{t}$$

і правостороння похідна буде представлена з очевидними модифікаціями наведеної лівосторонньої похідної.

Наведені вище оператори інтерпретуються як дробові степені оператора $x \frac{d}{dx}$. Останнє (пов'язане з поняттям регулярної сингулярності) важливе в різних застосуваннях, і це частково пояснює зростаючий інтерес до дробової похідної Гадамарда; див.[19-21]. Деякі з результатів стосуються властивостей модифікації типу Капуто похідної Гадамарда, наведеної в [22].

2.3 Дробова похідна Капуто для задачі Коші

В цьому підрозділі наведемо основні теоретичні відомості з джерела [23]. Як було зауважено у першому розділі, для реальних фізичних процесів типу одновимірної дифузії лінійне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x) \quad (2.20)$$

не завжди являє собою адекватну математичну модель. Так, з розглянутих прикладів випливає, що нелінійність в параболічному рівнянні свідчить про наявність хвильових ефектів. Процес «чистої» дифузії на мікроскопічному рівні можна уявити як випадковий рух частинки з координатою $\xi_x(t)$ з початковою умовою $\xi_x(0) = 0$: диференціальне рівняння є макроскопічним описом цього процесу.

Для моделі (2.20) із сталим коефіцієнтом a^2 задача Коші з початковою умовою $u(0, x) = x^2$ має розв'язок:

$$u(t, x) = E(\xi_x(t) - x)^2 = x^2 + 2a^2t$$

де доданок $2a^2t$ є квадратом зміщення частинки від початкової позиції.

Експериментальні дані свідчать, що для деяких фізичних явищ (наприклад, дифузія в композитах), згаданий квадрат зміщення при $t \rightarrow \infty$ має асимптотику $t^\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Математичною моделлю такої узагальненої дифузії є рівняння з дробовою (за змінною t) похідною, досліджені в [24]. Наведемо основні означення та результати з теорії рівнянь із дробовими похідними.

Дробова похідна (Капуто) функції $f(t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою

$$D^\alpha f(t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \\ m-1 < \alpha < 1, t > 0.$$

Зокрема, якщо $0 < \alpha < 1$,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

Очевидно, що похідна сталої функції дорівнює нулю. Далі розглядається тільки випадок $0 < \alpha < 1$.

Приклад. Обчислити похідну ступенової функції $f(t) = t^r$.

$$D^\alpha t^r = \frac{r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\tau^{r-1}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{(1-s)^\alpha} ds = \\ \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(r, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)} t^{r-\alpha} \quad (2.22)$$

Розв'язок задачі Коші для звичайного рівняння першого порядку

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = 1$$

є експонентою: $u(t) = e^{\lambda t}$.

Аналогічно, для задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \varphi(x)$$

розв'язок теж записується через експоненціальну функцію:

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(y) dy$$

Розв'язування рівнянь з дробовими похідними вимагає застосування (замість експоненти) деяких спеціальних функцій як суми рядів.

Визначимо функції Міттаг-Леффлера формулами:

$E_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+pk)}$, $p \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$ — функція Міттаг-Леффлера ;

$$E_{p,q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(q+pk)} \quad (2.23)$$

,де $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ — узагальнена функція Міттаг-Леффлера .

Очевидно, що $E_p(z) = E_{p,1}(z)$.

Часткові випадки: $E_1(z) = e^z$; $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$.

Приклад. Перевірити, що функція $u(t) = CE_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$ задовольняє рівнянню

$$D^{\alpha}u = \lambda u .$$

Обчислення. $D^{\alpha}u(t) = CD^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)}$.

Скориставшись лінійністю оператора D^{α} та (2.23), отримаємо:

$$D^{\alpha}u(t) = C \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^{k-1}}{\Gamma(1+\alpha(k-1))} = \lambda u(t).$$

Для розв'язування рівняння дифузії дробового порядку α ($0 < \alpha < 1$)

$$D^\alpha u(t, \mathbf{x}) = \Delta u(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^n \quad (2.24)$$

застосовується спеціальна функція Райта ϕ , що визначається формулою:

$$\phi(-\beta, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\delta - \beta k)}, \beta \in (0; 1].$$

В монографії [24] наведено наступний результат.

Теорема. Розв'язок задачі Коші для рівняння (2.24) має вид:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{R^n} P(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(0, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t d\tau \int_{R^n} Q(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

де ядра $P(t, \mathbf{x})$, $Q(t, \mathbf{x})$ виражаються через функцію Райта.

2.4 Застосування чисельних методів в задачах з дробовими похідними

2.4.1 Різницевий розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння дробового порядку

Розглянемо задачу типу Коші для рівняння дробового порядку такого виду

$$\partial_{0t}^\alpha u = f(u, t), \quad (2.25)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.26)$$

де

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = D_{0t}^{\alpha} u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}_{\tau}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

це регуляризована дробова похідна порядку α , $0 < \alpha < 1$,

$$D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u_{\tau}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

є дробовою похідною Рімана-Ліувілля порядку α , $0 < \alpha < 1$, $f(u, t)$ – задана неперервна функція від t, u .

Будемо вважати, що функція $f(u, t)$ визначена на деякому прямокутнику $D = \{0 \leq t \leq T, |u - u_0| \leq U\}$ і також задовольняє умову Ліпшиця за змінною u . Тоді, як відомо, задача типу Коші (2.25), (2.26) має єдиний розв'язок (див. [2]).

На відрізку інтегрування $0 \leq t \leq T$ введемо сітку $\overline{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$. Сіточну функцію будемо позначати через $y_j = y(t_j)$. Перед переходом до різницевої апроксимації задачі (2.25), (2.26), знайдемо дискретний аналог дробової похідної порядку α , $0 < \alpha < 1$. Розв'язок розглянутих задач, за припущенням, має потрібну по ходу доведення гладкість.

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_j} \frac{\dot{u}(\eta) d\eta}{(t_j - \eta)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\dot{u}(\eta) d\eta}{(t_j - \eta)^\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\ddot{u}(\xi) \left(\eta - t_{s-\frac{1}{2}} \right) + \dot{u} \left(t_{s-\frac{1}{2}} \right)}{(t_j - \eta)^\alpha} d\eta \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) u_{t,s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\ddot{u}(\xi) \left(\eta - t_{s-\frac{1}{2}} \right) d\eta}{(t_j - \eta)^\alpha} + O(\tau^2),
\end{aligned}$$

де ξ – деяка середня точка між η та $t_{s-\frac{1}{2}}$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{t,s} = \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau}$.

Оскільки

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\ddot{u}(\xi) \left(\eta - t_{s-\frac{1}{2}} \right) d\eta}{(t_j - \eta)^\alpha} \\
&\leq \frac{M\tau}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) = O(\tau), \quad |\ddot{u}| \leq M,
\end{aligned}$$

то

$$D_{0t_j}^\alpha u = \Delta_{0t_j}^\alpha u + O(\tau). \quad (2.27)$$

Отже, таким чином отримуємо дискретний аналог дробової похідної у такому вигляді:

$$\Delta_{0t_j}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) u_{t,s} \quad (2.28)$$

Отже, задача Коші (2.25), (2.26) може бути описана такою різницевою схемою:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} = f(y_j, t_j), \quad (2.29)$$

$$y_0 = u_0, \quad y_{t,s} = \frac{y_{s+1} - y_s}{\tau}. \quad (2.30)$$

Для обчислення похибки введемо змінну $z = y - u$. Отримуємо таку задачу Коші для z

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) z_{t,s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} z_j + \Psi_j, \quad (2.31)$$

$$z_0 = 0, \Psi_j = O(\tau)$$

де $\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}$ означає, що похідна береться в деякій проміжній точці $\xi, u_j \leq \xi \leq u_j + z_j$.

Зробимо оцінку розв'язку задачі (2.31). Щоб це реалізувати перепишемо рівняння (2.31) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} z_{j+1} = & [1 - (t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha})\tau^{\alpha-1} + \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha) f'(\xi, t)] z_j + \\ & \tau^{\alpha-1} [(t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) z_0 + (-t_{j+1}^{1-\alpha} + 2t_j^{1-\alpha} - t_{j-1}^{1-\alpha}) z_1 + \dots + (-t_3^{1-\alpha} + \\ & 2t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) z_{j+1}] + \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha) \Psi_j. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Оскільки $1 < \frac{2x^{1-\alpha}}{[(x+1)^{1-\alpha} + (x-1)^{1-\alpha}]} \leq 2^\alpha$ при $x \geq 1$, тоді $-t_{j+1}^{1-\alpha} + 2t_j^{1-\alpha} - t_{j-1}^{1-\alpha} > 0, j \geq 1$.

Припустимо, що $f(\xi, t) < -a, a > 0$. Тоді з (2.32) отримуємо таку оцінку

$$|z_{j+1}| \leq [1 - (2^{1-\alpha} - 1) - \tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha)a] \max_{0 \leq s \leq j} |z_s| + (2^{1-\alpha} - 1) \max_{0 \leq s \leq j} |z_s| + \tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha) |\Psi_j|,$$

або

$$|z_{j+1}| \leq [1 - \tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha)a] \max_{0 \leq s \leq j} |z_s| + \tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha) |\Psi_j|. \quad (2.33)$$

З нерівності (2.33) при $\tau^\alpha \leq \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)a}$ випливає оцінка

$$|z_{j+1}| \leq \Gamma(2 - \alpha) \sum_{i=0}^j \tau^\alpha \max_{0 \leq s \leq i} |\Psi_s|. \quad (2.34)$$

З (2.34) отримуємо збіжність схеми (2.29), (2.30) зі швидкістю $O(\tau^\alpha)$.

Аналогічна оцінка буде і для неявної схеми

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} = f(y_{j+1}, t_{j+1}), y_0 = u_0$$

за умови, що $f'_u(\xi, t) < 0$.

2.4.2 Перша початково-крайова задача для рівняння дифузії дробового порядку методом кінцевих різниць

Для узагальненого рівняння переносу розглянемо першу початково-крайову задачу

$$D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x, t) u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$D_{0t}^{\alpha-1} u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2.35)$$

$$k(x, t) \geq c_1 > 0, \quad q(x, t) \geq 0$$

В цій задачі Коші

$$D_{0t}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

це дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку α .

Зауваження 1. У випадку, якщо дробова похідна регуляризована $(\partial_{0t}^{\alpha} u)$, то початкові умови можуть бути задані у звичайному вигляді $u(x, 0) = u_0(x)$, а якщо дробова похідна не регуляризована, то початкова умова може мати вигляд, як у (2.35) див.[2]

Зауваження 2. У випадку, якщо коефіцієнти рівняння постійні, розв'язок задачі (2.35) знаходиться також методом розділу змінних (див.[25, 26])

Припускаючи існування розв'язку задачі (2.35), знайдемо апріорну оцінку для її розв'язку, для цього скалярно помножимо (2.35) на

$$U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

і тоді отримуємо

$$(D_{0t}^\alpha U) - ((ku_x)_x, U) + (qu, U) = (f, U), \quad (2.36)$$

де $(u, v) = \int_0^t uv dx$.

Перетворимо доданки, що входять у рівняння (2.35):

$$\begin{aligned} (D_{0t}^\alpha u, U) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_0^2, \\ ((ku_x)_x, U) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ku_x(x, t) \int_0^t \frac{u_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \\ (f, U) &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|U\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тепер підставимо (2.37) в (2.36) і отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t ku_x(x, t) \int_0^t \frac{u_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx + \int_0^t qu(x, t) U dx \leq \\ \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \varepsilon \|U\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Наступним кроком проінтегруємо (2.38) по τ від 0 до t і отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|U\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t dx \left(\int_0^t k u_x(x, \tau) \int_0^\tau \frac{u_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} d\tau \right) \\
& + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t dx \left(\int_0^t q(x, \tau) u(x, \tau) \int_0^\tau \frac{u(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} d\tau \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \|f\|_{2, Q_1}^2 + \frac{1}{2} \|U\|_{2, Q_1}^2 + \|u_0(x)\|_0^2,
\end{aligned}$$

де

$$\|u\|_{2, Q_1}^2 = \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau.$$

Припустимо, що $k_t, q_t \leq 0$, тоді невід'ємність інтегралів, що знаходяться в лівій частині доводиться майже так само як у [1], [27]. Звідки отримуємо

$$\|U\|_0^2 \leq \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int_0^t \|U\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_0^2,$$

звідки із застосуванням леми 1.1 з [28] знаходимо

$$\|U\|_0^2 \leq M(t) (\|f\|_{2, Q_1}^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (2.39)$$

Оцінка (2.39) отримана в термінах

$$U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha}.$$

Також, оскільки однорідне інтегральне рівняння Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = 0$$

має тільки тривіальний розв'язок, то з оцінки (2.39) випливає єдиність розв'язку задачі (2.35).

2.4.3 Різницева схема для рівняння дифузії

Розглянемо крайову задачу в такій області $Q_T \equiv \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u &= \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x, t)u + f(x, t), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad q(x, t) &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.40}$$

де

$$\partial_{0t}^\alpha u = D_{0t}^\alpha u - \frac{u(x, 0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}_\tau(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

це як вже було зазначено раніше – регуляризована похідна дробового порядку α , $0 < \alpha < 1$.

Визначимо сітки $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \dots, N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau : j = 0, 1, \dots, j_0\}$, $\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ з кроками $h = \frac{l}{N}$, $\tau = \frac{T}{j_0}$. Позначимо через y_i^j значення сіточної функції y у вузлі (x_i, t_j) .

Задачі Коші (2.40) поставимо у відповідність різницеву схему

$$\begin{aligned}\Delta_{0t}^\alpha y &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x),\end{aligned}\tag{2.41}$$

де

$$\Delta_{0t_j}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_t^s$$

це, як вже відомо, дискретний аналог дробової похідної порядку α , $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}\hat{y} &= y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy, \quad a_i = k\left(x_{i-\frac{1}{2}}, \bar{t}\right), \\ d_i &= q(x_i, \bar{t}), \quad \varphi = f(x, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \\ y_t^s &= \frac{y_{s+1} - y_s}{\tau}, \quad (ay_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h^2} [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})].\end{aligned}$$

Під час оцінювання порядку апроксимації будемо вважати, що $k(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t)$ мають необхідну кількість похідних, що знадобляться у процесі виведення. Тоді з урахуванням формули (2.41), знайдемо

$$\Psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) + \varphi - \Delta_{0t}^\alpha u = O(h^2 + \tau).$$

Щоб отримати оцінку для розв'язку задачі (2.41), перепишемо рівняння переносу у вигляді

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0$$

де

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\sigma\tau}{h^2} a_i, \quad B_i = \frac{\sigma\tau}{h^2} a_{i+1}, \quad C_i = \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\sigma\tau}{h^2} (a_{i+1} + a_i) + \sigma\tau d_i, \\ F_i^j &= \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} a_{i+1} y_{i+1}^j \\ &\quad + \left[\frac{2t_1^{1-\alpha} - t_2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \left(\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} (a_{i+1} + a_i) + (1-\sigma)\tau d_i \right) \right] y_i^j \\ &\quad + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} a_i y_{i-1}^j + \frac{t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} y_i^{j-1} \\ &\quad - \frac{\tau}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-2} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_t^s + \varphi_i^j \tau. \end{aligned}$$

Використовуючи принцип максимуму (див.[29] - [31]) маємо

$$\|y^{j+1}\|_c \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_c, \quad \|y\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|, \quad (2.42)$$

але це буде мати місце тільки за умови, що

$$D = |C_i| - |A_i| + |B_i| > 0.$$

В нашому випадку

$$D = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma\tau d_i \geq \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (2.43)$$

Так як $-t_{j+1}^{1-\alpha} + 2t_j^{1-\alpha} - t_{j-1}^{1-\alpha} > 0 \quad \forall j \geq 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} y_i^{j-1} - \\ & - \frac{\tau}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-2} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_t^s \leq \frac{\tau^{1-\alpha}(2^{1-\alpha}-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \max_{0 \leq s \leq j-1} \|y^s\|_c. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Нехай виконана умова

$$\tau^\alpha \leq \frac{(2-2^{1-\alpha})h^2}{2c_2\Gamma(2-\alpha)(1-\sigma)}. \quad (2.45)$$

За допомогою (2.43), (2.44) отримаємо оцінку

$$\|F^j\|_c \leq \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \max_{0 \leq s \leq j} \|y^s\|_c + \|\varphi^s\|_c \tau. \quad (2.46)$$

З (2.42) з урахуванням (2.46) знаходимо

$$\|y^{j+1}\|_c \leq \|y^0\|_c + \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_c \tau^\alpha. \quad (2.47)$$

Умова стійкості (2.45) при $\alpha \rightarrow 1$ переходить у відому для чисельних методів умову

$$\tau \leq \frac{h^2}{2c_2(1-\sigma)}.$$

Для похибки $z = y - u$ маємо оцінку

$$\|z^{j+1}\|_c \leq \Gamma(2 - \alpha) \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_c \tau^\alpha.$$

Отже, таким чином стійкість розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії доведена.

Теорема. Нехай виконана умова

$$\tau^\alpha \leq \frac{(2 - 2^{1-\alpha})h^2}{2c_2\Gamma(2 - \alpha)(1 - \sigma)}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Тоді для розв'язку задачі (2.41) справедливий принцип максимуму і для розв'язку має місце апіорна оцінка (2.47) у рівномірній метриці.

З оцінки (2.47) випливає збіжність різницевої схеми (2.41) у рівномірній метриці зі швидкістю $O\left(\tau^\alpha + \frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}\right)$, якщо $h^2 = o(\tau^{1-\alpha})$.

2.4.4 Метод декомпозиції для диференціальних рівнянь з дробовою похідною

Перед тим, як переходити до ознайомлення з даним методом знадобляться деякі допоміжні теоретичні відомості, тому спершу наведемо основні з них.

У підрозділі 2.3 ми вже побачили, який вигляд має узагальнена функція Мітаг-Лефлера (2.23) та також її основні властивості, тому розпочнемо теорію з такого поняття як натуральне перетворення.

$$N(h(t)) = R(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} h(ut) dy, \quad s, u \in (-\infty, \infty), \quad (2.48)$$

де N це N -перетворення функції $h(t)$;

s, u – це змінні цього перетворення.

Зауваження. Рівність (2.48) можна переписати як

$$N(h(t)) = R^-(s, u) + R^+(s, u).$$

Звідки отримаємо

$$N^+(h(t)) = R^+(s, u) = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{st}{u}} h(t) dt, \quad s, u \in (0, \infty). \quad (2.49)$$

Інтеграл у (2.48) збігається рівномірно і абсолютно в комплексній площині, визначеній смугою $b < \operatorname{Re}(s) < a$.

Також зауважимо, що можна отримати перетворення Лапласа та перетворення Сумуду, якщо підключити $u = 1$, і $s = 1$ у наведених вище рівняннях відповідно. Отже, відношення між природним перетворенням і перетворенням Лапласа є симетричним.

Наведемо деякі властивості натурального перетворення:

1. $N^+(1) = \frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$.
2. $N^+(y^v) = \frac{\Gamma(v+1)u^v}{s^{v+1}}, \quad v > -1, \operatorname{Re}(s) > 0$.
3. $N^+(\text{}^C D_t^v \varphi(t))(s, u) = \frac{s^v}{u^v} N^+(\varphi(t))(s, u) - \frac{s^{v-1}}{u^v} \varphi(0), \operatorname{Re}(s) > 0$.

Теорема 1. Якщо $k \in \mathbb{Z}^+$, де $k - 1 \leq v < k$. Тоді N -перетворення похідної Капуто функції $\varphi(t)$ може бути записане у вигляді

$$N^+(\text{}^C D_t^v \varphi(t)) = \frac{s^v}{u^v} R(s, u) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{s^{v-(m+1)}}{u^{v-m}} (D^m \varphi(t))_{t=0}. \quad (2.50)$$

Тепер після ознайомлення з необхідною теорією перейдемо до методології методу декомпозиції.

Розглянемо загальне нелінійне диференціальне рівняння дробового порядку

$${}^C D_t^v y(t) + L(y(t)) + F(y(t)) = g(t), \quad (2.51)$$

де $t > 0$ і $0 \leq v \leq 1$, а також разом з цим початкова умова $y(0) = y_0$;

${}^C D_t^v y(t)$ – похідна Капуто для $y(t)$;

L – лінійний диференціальний оператор;

F вказує на нелінійну частину;

$g(t)$ – це неоднорідна частина

y_0 – визначена неперервна функція.

Після застосування теореми 1 до (2.51) можемо зробити висновок, що

$$N^+(y(t)) = \frac{u^v}{s^v} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{v-(k+1)}}{u^{v-k}} \left(D^k y(t) \right)_{t=0} + \frac{u^v}{s^v} N^+(g(t)) - \frac{u^v}{s^v} N^+ \left(L(y(t)) + F(y(t)) \right). \quad (2.52)$$

Підставляючи початкову умову у рівняння (2.52) і взявши обернене перетворення N^{-1} , отримуємо

$$y(t) = N^{-1} \left(\frac{y_0}{s} \right) + N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+(g(t)) \right) - N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ \left(L(y(t)) + F(y(t)) \right) \right) = H(t) - N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ \left(L(y(t)) + F(y(t)) \right) \right), \quad (2.53)$$

де $H(t)$ утворюється з неоднорідної частини разом з початковою умовою.

Тепер припустимо, що розв'язок $y(t)$ існує в такому вигляді

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t). \quad (2.54)$$

В такому випадку проблемою буде нелінійна частина

$$F(y(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t), \quad (2.55)$$

де поліноми $A_n(t)$ від $y_0, y_1, \dots, y_n$ обчислюються за формулою

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\mathbb{F}(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i)]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Таким чином (2.56) може бути записане в більш акуратному вигляді

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{F}(y_0) \\ A_1 &= y_1 \mathbb{F}'(y_0) \\ A_2 &= y_2 \mathbb{F}'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 \mathbb{F}''(y_0) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Решта поліномів виводиться за такою ж схемою. Підставивши (2.55) в (2.53) отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = H(t) - N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ (L(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)) + (\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t))) \right). \quad (2.58)$$

За допомогою (2.58) можемо зробити висновок, що

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= G(t) = y_0 + N^{-1}g(t) \\
y_1(t) &= -N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ (L(y_0(t)) + A_0(t)) \right) \\
y_2(t) &= -N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ (L(y_1(t)) + A_1(t)) \right) \\
y_3(t) &= -N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ (L(y_2(t)) + A_2(t)) \right)
\end{aligned}$$

В кінці кінців маємо таку рекурентну формулу

$$y_{n+1}(t) = -N^{-1} \left(\frac{u^v}{s^v} N^+ (L(y_n(t)) + A_n(t)) \right), \quad n \geq 1.$$

Отже, наш наближений розв'язок має вигляд

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t).$$

Детальніше з даним методом можна ознайомитись у [32].

Висновки до розділу

Даний розділ було присвячено оглядовій частині математичного апарату розв'язання рівнянь з дробовими похідними, було розглянуто та

доведено деякі основні необхідні теоретичні відомості а також підтвердження збіжності та специфіка двох обраних методів для обчислення результуючої функції рівнянь аномальної дифузії в рамках задачі Коші.

РОЗДІЛ 3 ФОРМУЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ, АНАЛІЗ ТА ВІДМІННОСТІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

В цьому розділі, вже після формулювання та обґрунтування запропонованих методів та їх доведення будемо переходити до формування конкретних алгоритмів для демонстрації роботи методу кінцевих різниць, а також методу за допомогою натурального перетворення.

За допомогою конкретних алгоритмів, що були сформовані, було реалізовано програмний продукт, який втілює методи, що були описані у кінці другого розділу, але так як це був теоретичний розділ, то до практичного застосування перейдемо в ході розділу номер три. Також була імплементована візуалізація отриманих вихідних даних після роботи методів, аби зробити подальший аналіз даних більш комфортним, наглядним та зрозумілішим і зобразити порівняння їх роботи. За допомогою проведеного аналізу були сформовані висновки та порівняні особливості поведінки реалізованих методів, а також його поведінка на граничних значеннях і було зроблене порівняння роботи методу кінцевих різниць з аналітичним розв'язком степеневі функції.

3.1 Архітектура методу скінченних різниць

На початку підрозділу зосередимо увагу на методі скінченних різниць для нашої конкретної задачі Коші (3.2) і наведемо умови збіжності методу. Далі, наведемо ще застосування функції Мітаг-Лефлера для дифузійного рівняння (3.4) і виведемо алгоритм для обчислення значень результату.

3.1.1 Позначення

$$1. \frac{d^\alpha}{dt} f(t) = \varphi(t) = \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(r, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)} t^{r-\alpha} \quad (3.1)$$

Дана функція є аналітичним розв'язком дробової похідної степеневі функції

$$f(t) = t^r$$

2. $u(t, x)$ - розв'язок задачі Коші для однорідної субдифузії

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

з початковими умовами $u(0, x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$

3. u_k^n , де n – параметр часового простору, а k - параметр змінної x

Дані функції є центральними в даній роботі, оскільки вони наближають розв'язок задачі Коші рівняння дифузії дробового порядку (34) методом кінцевих різниць.

4. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – гамма функція

5. $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ – бета функція

$$6. \Delta_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{u_k^{s+1} - u_k^s}{\Delta\tau} \quad (3.3)$$

Регуляризована похідна Капуто потрібна для задачі Коші, в термінах методу скінченних різниць, на якій побудована алгоритмізація методу

$$7. \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \theta(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) + \theta(x, t),$$

$$0 < \alpha \leq 1, -4 < x < 4, 0 \leq t \leq 1 \quad (3.4)$$

З початковою умовою

$$\theta(x, 0) = \cos(\pi x).$$

$$8. E_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+pk)}, p \geq 0, z \in \mathbb{C} \text{ — функція Міттаг-Леффлера} (3.5)$$

$$9. N\left(\frac{\partial^\alpha y(t, x)}{\partial t^\alpha}\right) = \frac{s^\alpha}{u^\alpha} R(x, u, s) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{s^{\alpha-(m+1)}}{u^{\alpha-m}} \cdot \frac{\partial^m}{\partial t^m} y(x, 0), \quad (3.6)$$

де $R(x, u, s) = N(y(t, x))$, $k \in \mathbb{Z}^+ : k-1 \leq \alpha < k$, $u \in (0; 1)$

N – оператор натурального перетворення

3.1.2 Алгоритмізація методів

3.1.2.1 Метод кінцевих різниць

Перш за все почнемо з найпростішого випадку дробового рівняння дифузії (3.2).

Спершу наведемо область визначення функції $u(t, x)$

$$G = \{(t, x) | 0 < t \leq 3, -20 \leq x \leq 20\},$$

значення степеня регуляризованої дробової похідної Капуто $\alpha \in (0; 1)$.

Спочатку перейдемо від неперервної області до дискретної множини точок G_{ht} - дискретної сітки, де h -крок по простору, а $\Delta\tau$ - крок по часу. Значення h та $\Delta\tau$ обираємо такими, щоб вони задовольняли такі умови:

$$\Delta\tau^\alpha < \frac{(2-2^{1-\alpha}) \cdot h^2}{2\Gamma(2-\alpha)},$$

$$-\tau_{j+1}^{1-\alpha} + 2\tau_j^{1-\alpha} - \tau_{j-1}^{1-\alpha} > 0, \forall j \geq 1$$

аби досягти стійкого розв'язку задачі Коші.

Ітеративний процес буде проходити по просторовим шарам, тобто по набору вузлів (τ^n, ξ_k) , що відповідають фіксованому моменту часу τ^n . Спершу треба ініціалізувати початковий(нульовий) шар. Це робиться за допомогою заданих початкових умов задачі Коші (3.2):

$$u_k^0 = u(\tau^0, \xi_k) = u(0, \xi_k) = \frac{1}{2(1+\xi_k^2)},$$

$$k = 0, \dots, K.$$

Після початкових умов починається ітеративний процес знаходження розв'язку.

А вже після проходження по всім просторовим координатам ξ_k , де $k = 1, \dots$, знаходимо формулу для розв'язку задачі Коші.

Спочатку запишемо похідну дробового порядку та звичайну похідну другого порядку за методом кінцевих різниць.

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{u_k^{s+1} - u_k^s}{\Delta\tau} = \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$$

Після чого у лівій частині рівняння розіб'ємо суму на дві частини:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{n-1} (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{u_k^{s+1} - u_k^s}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha}) \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta\tau} = \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$$

І тепер виведемо формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha}) \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta\tau} \\ &= \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} \\ & - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{n-1} (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{u_k^{s+1} - u_k^s}{\Delta\tau} \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= u_k^n + \frac{\Delta\tau \cdot \Gamma(2-\alpha)}{(\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha}) h^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \\ & - \frac{1}{(\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha})} \sum_{s=1}^{n-1} (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \cdot (u_k^{s+1} - u_k^s) \end{aligned}$$

Або в іншому вигляді, нехай в загальному випадку $\tau \in (0; M)$ тоді

$$\Delta\tau = \frac{M}{N}, \tau_i = i \cdot \Delta\tau : i = 0, 1, \dots, N :$$

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= u_k^n + \frac{\Delta\tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha)}{h^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \\
&\quad - \frac{1}{(\Delta\tau^{1-\alpha})h^2} \sum_{s=1}^{n-1} ((n-s+1)^{1-\alpha} \cdot \Delta\tau^{1-\alpha} - (n-s)^{1-\alpha} \\
&\quad \cdot \Delta\tau^{1-\alpha}) \cdot (u_k^{s+1} - u_k^s) \\
&= u_k^n + \frac{\Delta\tau^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha)}{h^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \\
&\quad - \sum_{s=1}^{n-1} ((n-s+1)^{1-\alpha} - (n-s)^{1-\alpha}) \cdot (u_k^{s+1} - u_k^s)
\end{aligned}$$

Тепер підвищимо складність рівняння і розглянемо дифузійне рівняння (3.4). Його, тобто результат отриманий за допомогою методу кінцевих різниць, вже будемо порівнювати з виведеним розв'язком даного рівняння через функції Міттаг-Лефлера.

Почнемо з методу кінцевих різниць:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{\theta_k^{s+1} - \theta_k^s}{\Delta\tau} &= \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + \theta_k^n \\
\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \frac{\theta_k^{s+1} - \theta_k^s}{\Delta\tau} &= \frac{\theta_{k+1}^n + (h^2 - 2)\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2}
\end{aligned}$$

Звідки за попередніми обчисленнями отримуємо:

$$\begin{aligned}
\theta_k^{n+1} &= \theta_k^n + \frac{\Delta\tau \cdot \Gamma(2-\alpha)}{(\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha})h^2} (\theta_{k+1}^n + (h^2 - 2)\theta_k^n + \theta_{k-1}^n) \\
&\quad - \frac{1}{(\tau_1^{1-\alpha} - \tau_0^{1-\alpha})} \sum_{s=1}^{n-1} (\tau_{n-s+1}^{1-\alpha} - \tau_{n-s}^{1-\alpha}) \cdot (\theta_k^{s+1} - \theta_k^s)
\end{aligned}$$

3.1.2.2 Метод з використанням функції Мітаг-Лефлера

Тепер перейдемо до виведення розв'язку за допомогою натурального перетворення (N) та в результаті – функцій Міттаг-Лефлера.

Першим кроком застосуємо оператор натурального перетворення N використовуючи (3.6) до обох частин рівняння (3.4).

Отримуємо:

$$N(\theta(x, t)) = \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \theta(x, 0) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta)$$

Тепер до обох частин застосуємо обернений оператор натурального перетворення:

$$\begin{aligned} N(\theta(x, t)) &= \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} \theta(x, 0) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta) \\ &= \frac{1}{s} \theta(x, 0) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta) \\ \theta(x, t) &= \theta(x, 0) + N^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)\right) + N^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta)\right) \\ &= \cos(\pi x) + N^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)\right) + N^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta)\right) \end{aligned}$$

Припустимо що розв'язок можна записати у вигляді:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \theta_n(x, t)$$

Отже, отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \theta_n(x, t) \\
&= \cos(\pi x) + \varepsilon N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} \varepsilon^n \right) \right) \\
&+ N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x, t) \varepsilon^n \right) \right)
\end{aligned}$$

Звідки маємо

$$\begin{aligned}
& \theta_0(x, t) = \cos(\pi x) \\
& \theta_1(x, t) = N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \right) \right) + N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta_0) \right) \\
& \theta_2(x, t) = N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \right) \right) + N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta_1) \right)
\end{aligned}$$

Узагальнюючи отримуємо формулу:

$$\theta_{n+1}(x, t) = N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} \right) \right) + N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta_n) \right)$$

Підставляючи функції з задачі Коші (3.4) обрахуємо наші значення $\theta_{n+1}(x, t)$

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, t) &= N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \right) \right) + N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\theta_0) \right) \\
&= N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(-\pi^2 \cos(\pi x)) \right) + N^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} N(\cos(\pi x)) \right) \\
&= N^{-1} \left(\frac{-\pi^2 \cos(\pi x) u^\alpha}{s^{\alpha+1}} \right) + N^{-1} \left(\frac{\cos(\pi x) u^\alpha}{s^{\alpha+1}} \right) \\
&= (1 - \pi^2) \cos(\pi x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

Продовжуючи цей самий підхід отримуємо решту значень $\theta_{n+1}(x, t)$

$$\begin{aligned}
\theta_2(x, t) &= (1 - \pi^2)^2 \cos(\pi x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
\theta_3(x, t) &= (1 - \pi^2)^3 \cos(\pi x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

І тепер ми вже маємо все для того щоб записати наш наближений розв'язок ($\varepsilon \rightarrow 1$) задачі Коші (3.4):

$$\begin{aligned}
\theta(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x, t) \\
&= \cos(\pi x) \left(1 + (1 - \pi^2) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (1 - \pi^2)^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right. \\
&\quad \left. + (1 - \pi^2)^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

Звідки, враховуючи формулу (3.5) отримуємо точний розв'язок

$$\theta(x, t) = \cos(\pi x) E_\alpha((1 - \pi^2)t^\alpha)$$

І якщо замінити значення α підставивши замість дробового числа одиницю

$$\alpha = 1$$

$$\theta(x, t) = \cos(\pi x) e^{(1-\pi^2)t},$$

що дійсно є розв'язком такої задачі Коші.

3.2 Дослідження та аналіз результатів, отриманих у результаті чисельних експериментів

Отже, після того як метод для задачі Коші (3.2) та методи для задачі (3.4) алгоритмізовано можна переходити до результатів роботи програмного продукту.

Перш за все покажемо що наш метод достовірний і графічно порівняємо результат методу скінченних різниць та аналітичний розв'язок дробової похідної Капуто для степеневі функції також обчислимо середнє значення помилки (3.1).

Для прикладу степінь функції було взято як $r = 2$, $\alpha = 0.5$. На рис.3.1 можна ознайомитись з середнім значенням помилки і відмінностями у результатах між аналітичним та чисельним методами обрахунків.

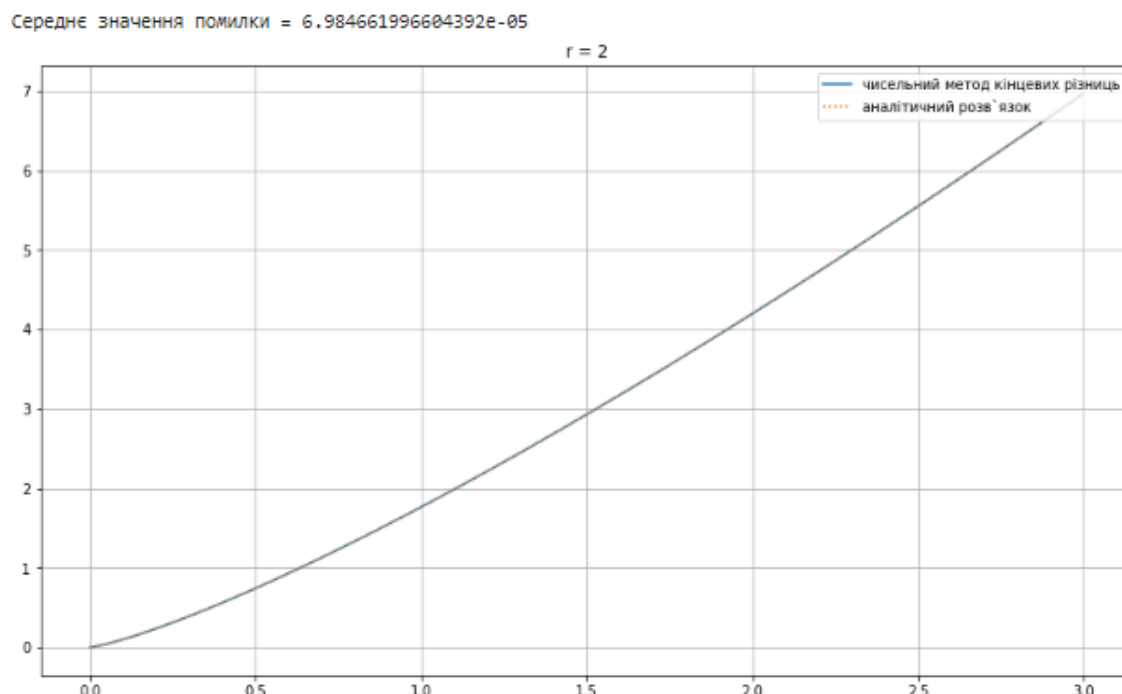


Рисунок 3.1 Порівняльний графік результату програми для степеневій функції t^r

Отже, як бачимо на рис.3.1 помилка методу незначна і на нескінченності метод кінцевих різниць дасть точний результат. Для обчислення даного результату було взято 4801 точку.

Впевнившись у коректності методу перейдемо до двовимірних результатів для задачі (3.2).

По-перше, зафіксуємо значення дробової похідної $\alpha \in (0; 1)$, а саме оберемо для прикладу значення $\alpha = 0.5, 0.7, 0.99$, та зобразимо розв'язок рівняння задачі Коші (3.2), обравши розбиття просторової сітки по t на 41 точку по x на 601 точку, спершу у двохвимірному просторі для фіксованих значень $t = 1, 2, 3$ (рис.3.2-3.4).

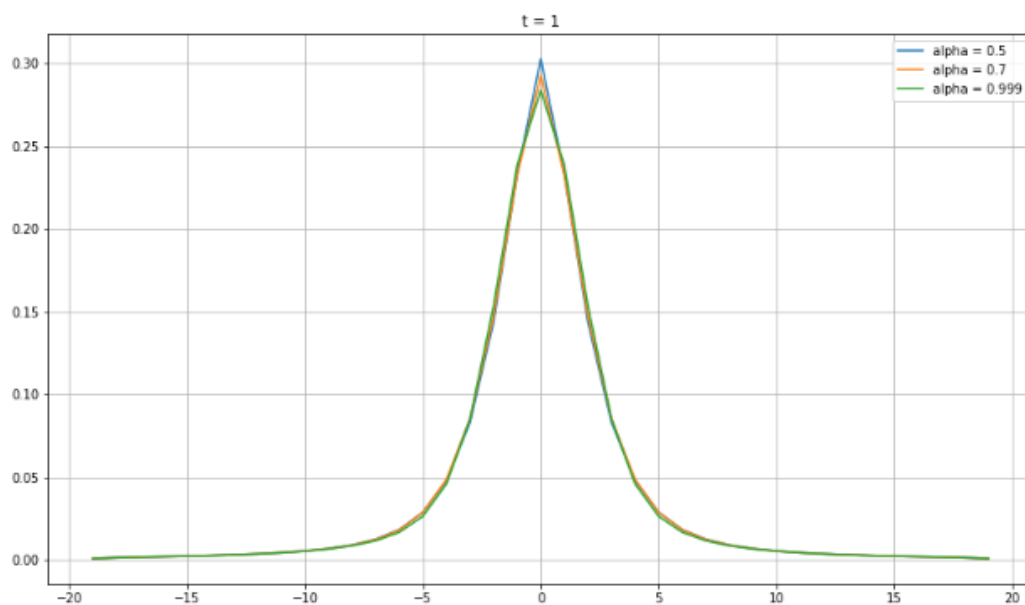


Рисунок 3.2 Графік $u(1, x)$ для фіксованих α

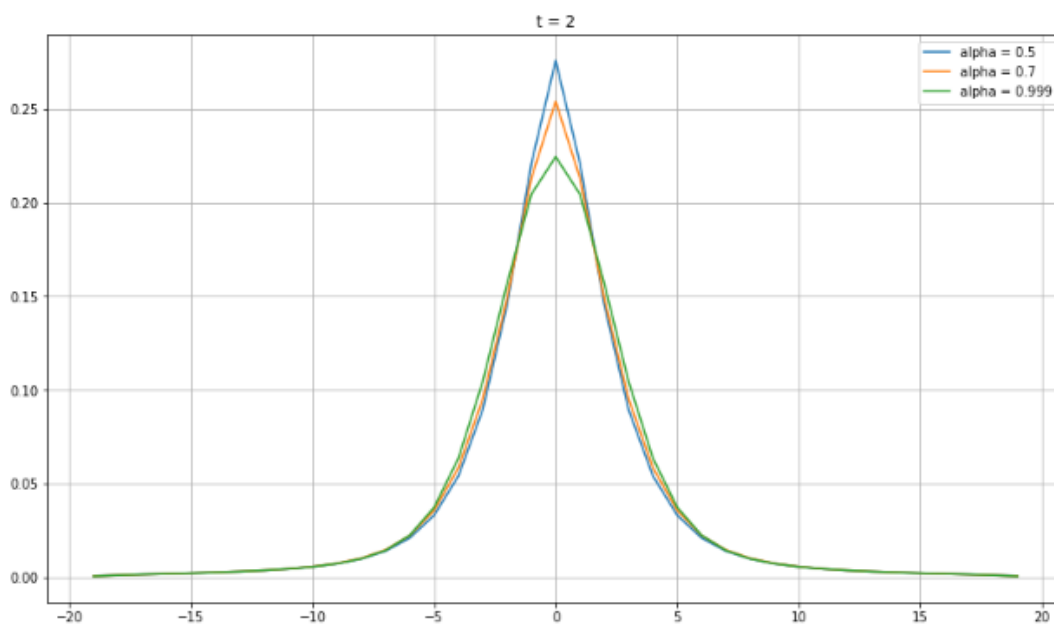


Рисунок 3.3 Графік $u(2, x)$ для фіксованих α

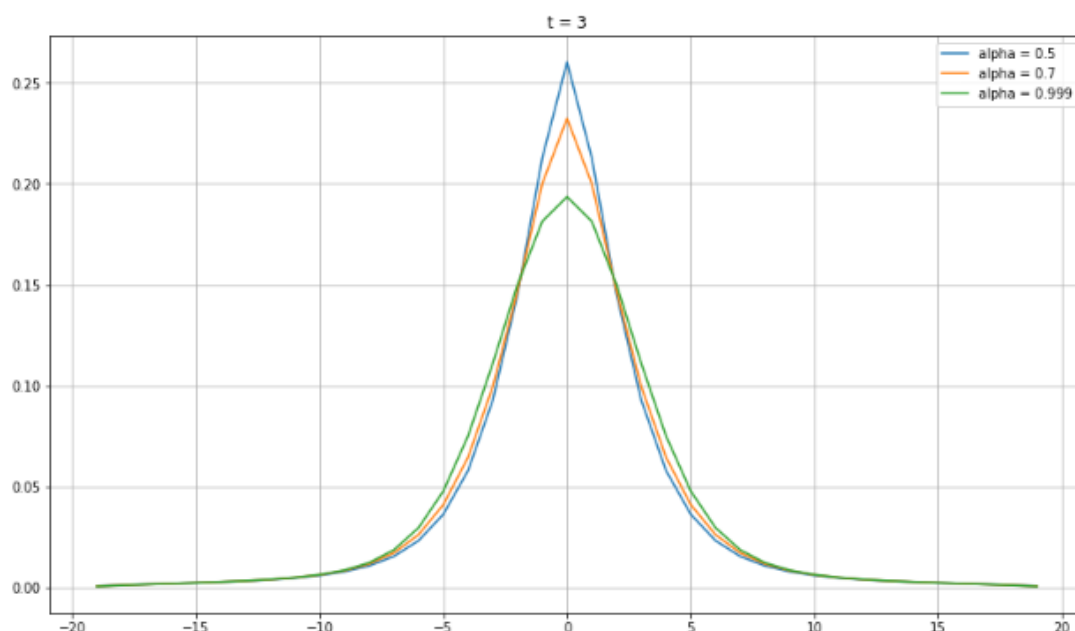


Рисунок 3.4 Графік $u(3, x)$ для фіксованих α

Як бачимо з результатів роботи програми на рисунках (3.2 - 3.4) чим менше дробова степінь α , тим функція краще запам'ятовує початковий вплив або стресор і зрештою повільніше приходить у стан рівноваги, що може досить добре описувати вплив на в'язкопружні матеріали, як вже було сказано на початку магістерської дисертації.

Тепер для кращого розуміння наведемо вирішення у трьох-вимірному просторі задачі Коші (3.2) для значень $\alpha = 0.5, 0.7, 0.99$ (рис.3.5).

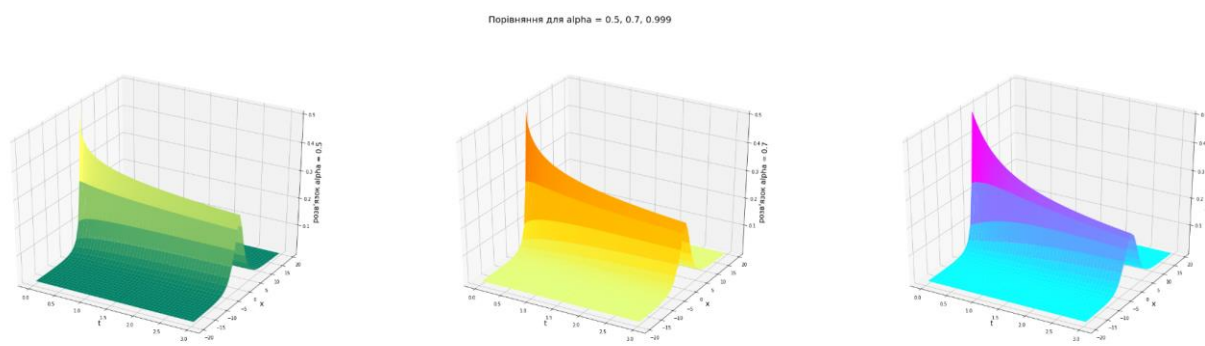


Рисунок 3.5 Порівняння графіків $u(t, x)$ для фіксованих α в тривимірному просторі

На рис.3.5 вже більш ясно можна побачити поведінку функції розв'язку задачі Коші і ще раз побачити те, що чим менший дробовий степінь похідної, тим повільніше розпливається графік функції.

Тепер перейдемо до другого досліджуваного рівняння математичної фізики (3.4), як вже було зазначено раніше тут будемо порівнювати результати двох методів: перший з використанням алгоритму методу кінцевих різниць, другий з використанням операційного числення, де результат записується через функцію Мітаг-Лефлера (3.5).

Будемо порівнювати графіки у фіксованих значеннях степеня дробової похідної $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ та часової змінної $t = 0.5$, а також зобразимо результати для зручності у тривимірному просторі.

- Розбиття для $\alpha = 0.25$: x на 21 точку, t на 14001 точку
- Розбиття для $\alpha = 0.5$: x на 41 точку, t на 2001 точку
- Розбиття для $\alpha = 0.75$: x на 51 точку, t на 401 точку
- Розбиття для $\alpha = 0.99$: x на 81 точку, t на 401 точку

Розбиття просторової сітки було обране саме таким чином для збіжності методів та задля отримання результату за мінімальний час. Як можна побачити з вибору дискретизації для того, щоб обрахувати дробову похідну меншого степеня потрібно більше часу оскільки для отримання збіжності в разі меншого степеня потрібно розділяти часову координату на більше точок, що є цілком очевидним оскільки як вже було сказано менший степінь краще запам'ятовує зазначений вплив на функцію.

Отже, після виконання програми отримуємо такі результати, що зображені на рис.3.6-3.9:

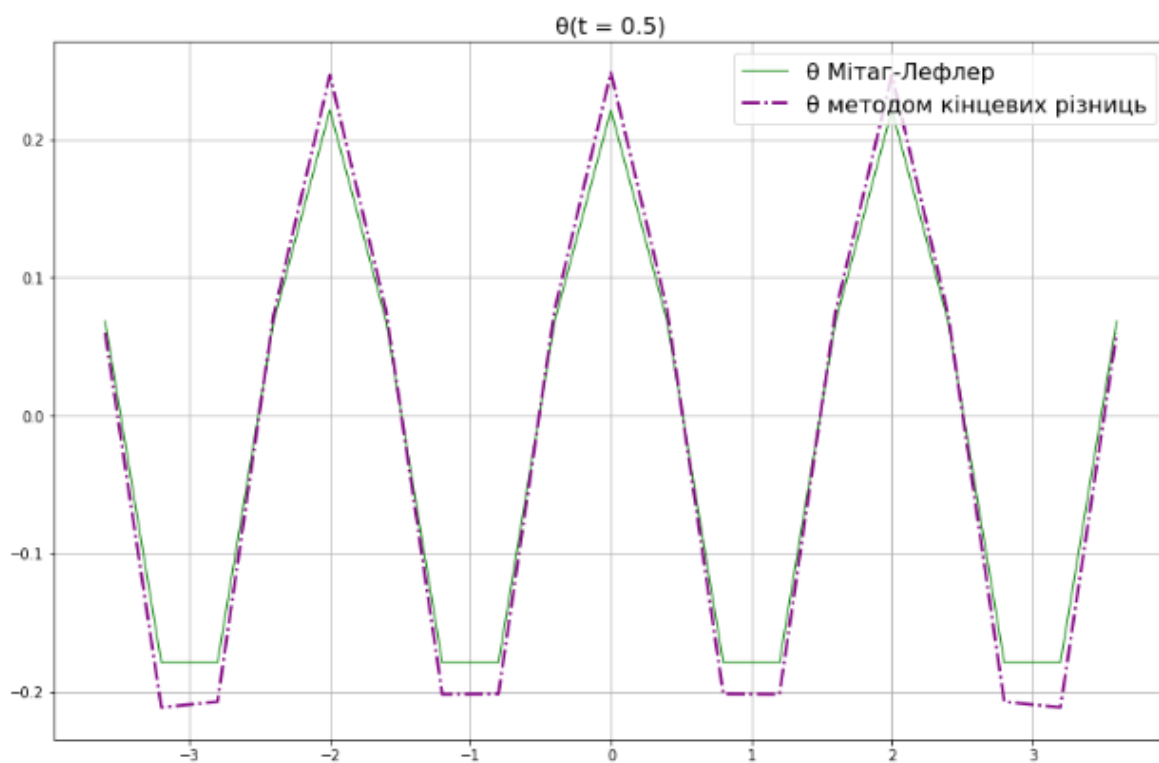


Рисунок 3.6 Порівняння отриманих значень функції $\theta(0.5, x)$, $\alpha = 0.25$

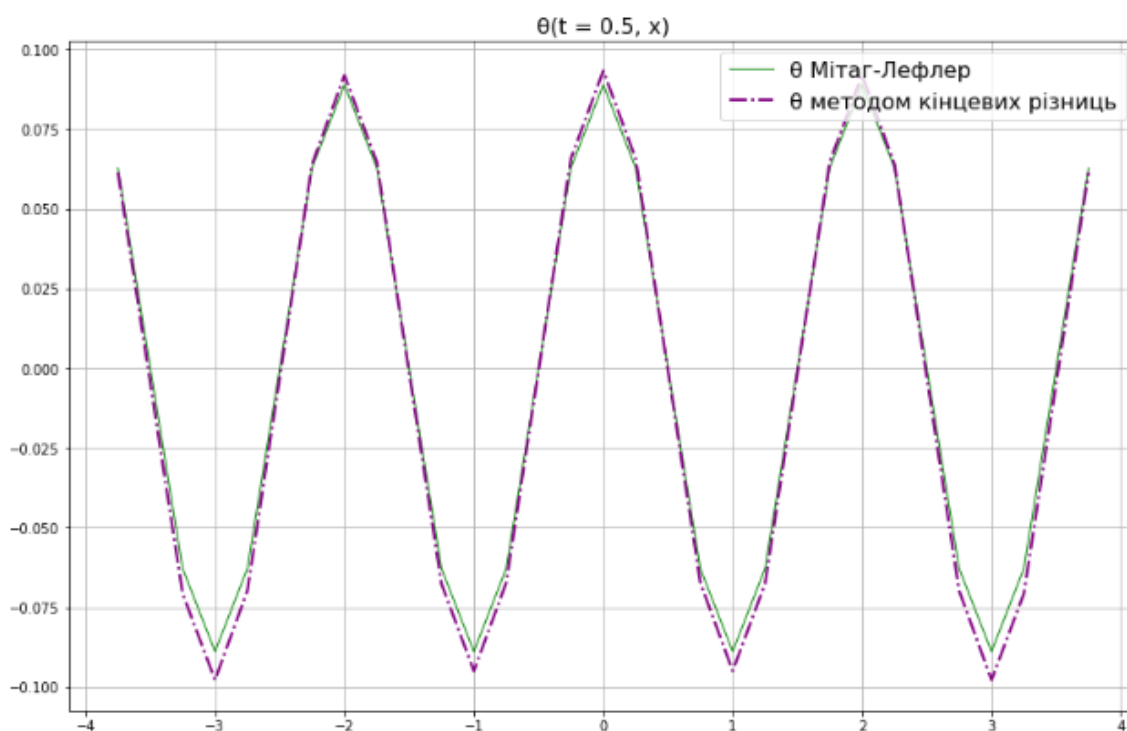


Рисунок 3.7 Порівняння отриманих значень функції $\theta(0.5, x)$, $\alpha = 0.5$

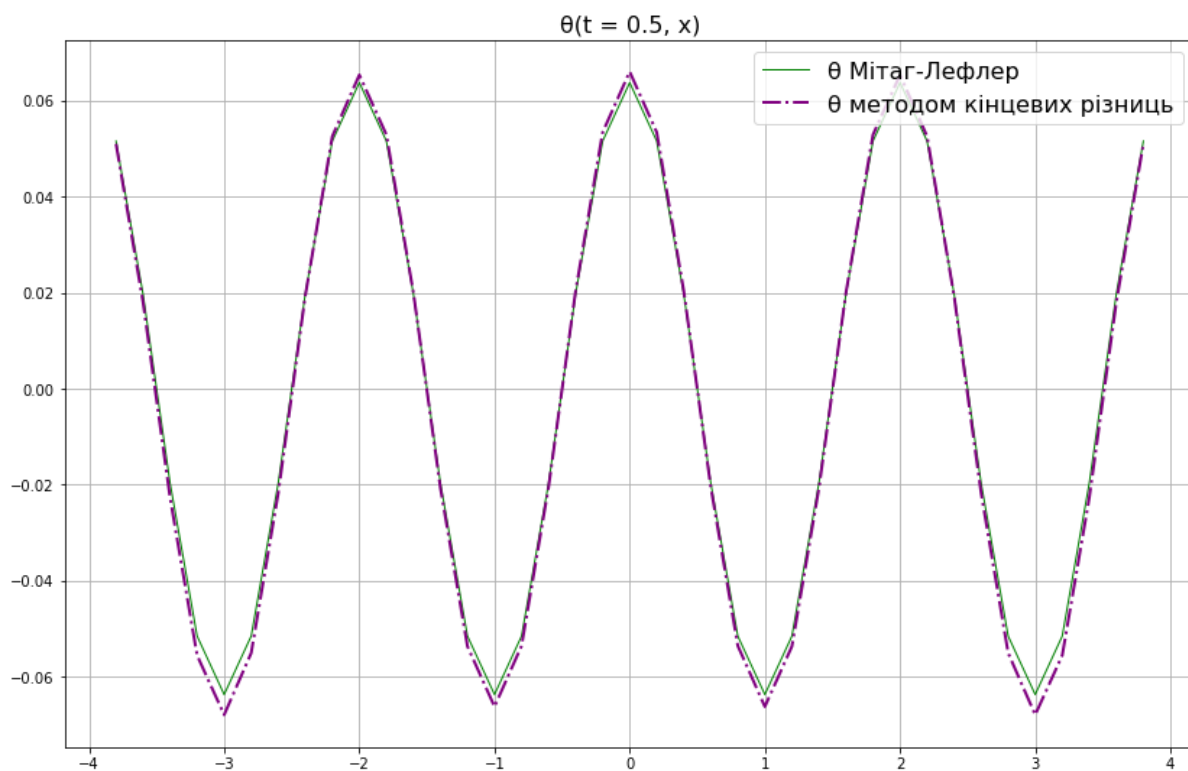


Рисунок 3.8 Порівняння отриманих значень функції $\theta(0.5, x)$, $\alpha = 0.75$

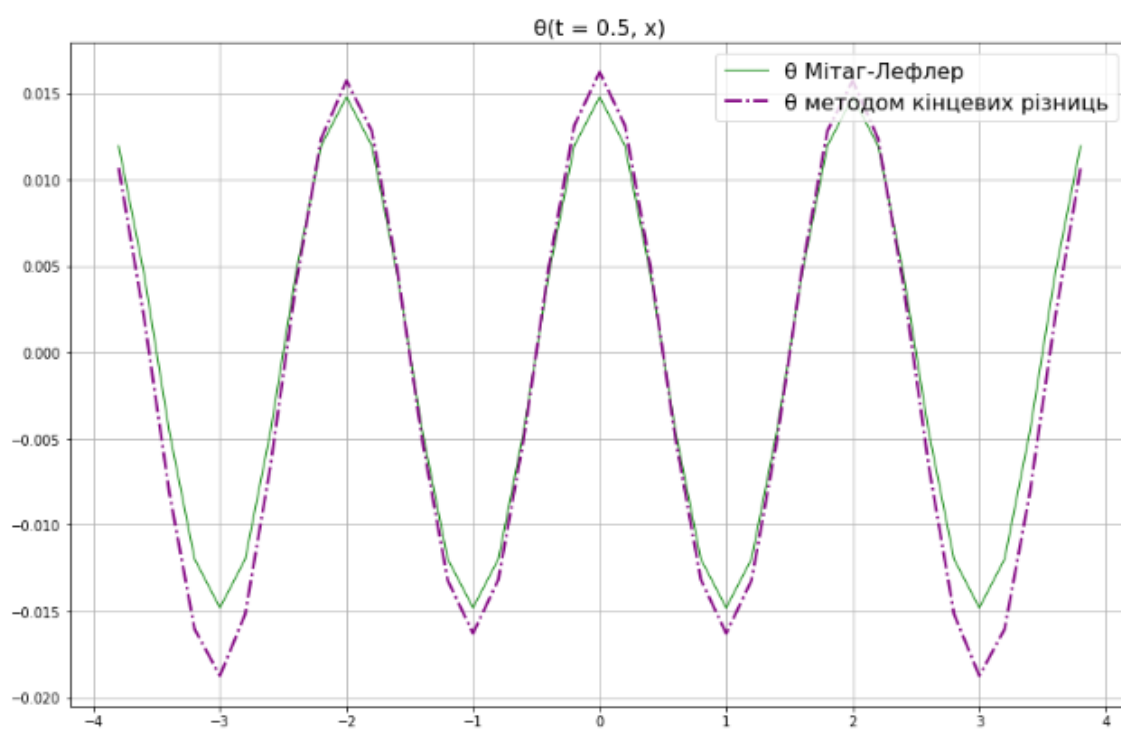


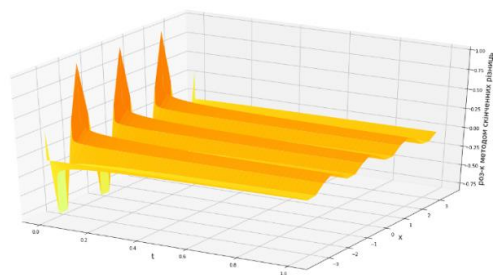
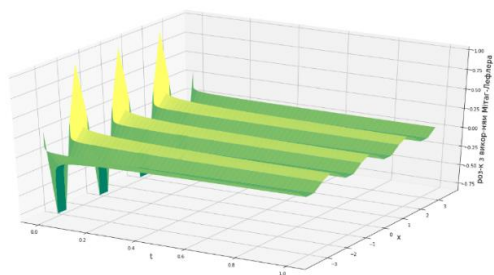
Рисунок 3.9 Порівняння отриманих значень функції $\theta(0.5, x)$, $\alpha = 0.99$

- Середнє значення помилки для $\{\alpha = 0.25 \ t = 0.5\}$: 0.018316660953668597
- Середнє значення помилки для $\{\alpha = 0.5 \ t = 0.5\}$: 0.00395880911921385
- Середнє значення помилки для $\{\alpha = 0.75 \ t = 0.5\}$: 0.0018495660891124765
- Середнє значення помилки для $\{\alpha = 0.99 \ t = 0.5\}$: 0.0015853950356195996

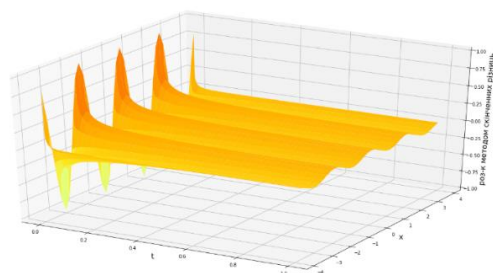
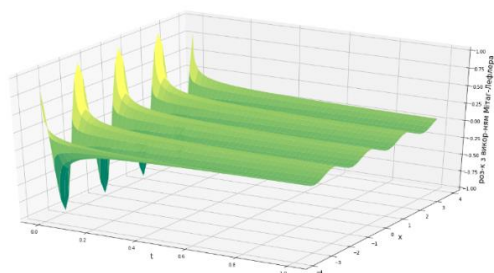
Як бачимо з рисунків (3.6-3.9) та точних обрахунків методи дали доволі схожі результати, помилка досить незначна, найбільша для даного значення $t = 0.5$ помилка вийшла для $\alpha = 0.25$, а найменша для $\alpha = 0.99$, що впринципі є досить природнім явищем, оскільки чим менший показник дробової похідної тим складніші обрахунки і тим більша помилка.

Тепер для відображення нашої досліджуваної функції $\theta(t, x)$ в просторі зобразимо її у трьох вимірах для фіксованих значень α та порівняємо результати обох методів (рис.3.10): справа(зелений) буде розв'язок за допомогою функцій Мітаг-Лефлера, а зліва (помаранчевий) – результат отриманий за допомогою застосування методу кінцевих різниць. Також наведемо значення похибки для всієї нашої часової області t .

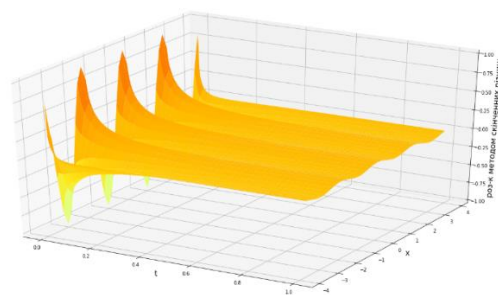
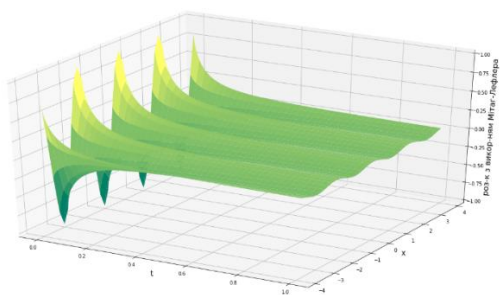
Порівняння для $\alpha = 0.25$ двох підходів обчислення дробової похідної



Порівняння для $\alpha = 0.5$ двох підходів обчислення дробової похідної



Порівняння для $\alpha = 0.75$ двох підходів обчислення дробової похідної



Порівняння для $\alpha = 0.99$ двох підходів обчислення дробової похідної

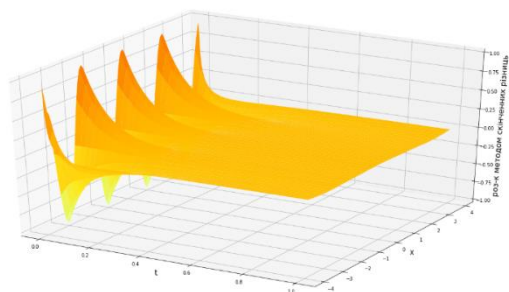
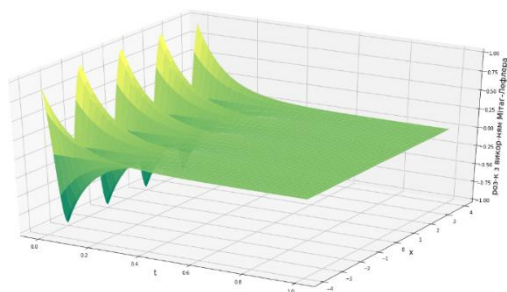


Рисунок 3.10. Порівняльний графік роботи обох досліджуваних методів
для різних значень $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$

- Середнє значення помилки для $\alpha = 0.25$ по всім t : 0.02330924610295585
- Середнє значення помилки для $\alpha = 0.5$ по всім t : 0.005024506134785235

- Середнє значення помилки для $\alpha = 0.75$ по всім t : 0.002178042606416415
- Середнє значення помилки для $\alpha = 0.99$ по всім t : 0.002418074438522353

Як бачимо з рисунків (3.10) та точних обрахунків методи дали доволі схожі результати, помилка досить незначна, найбільша для усієї області помилка вийшла для $\alpha = 0.25$, а найменша для $\alpha = 0.75$, що звісно може бути обгрунтоване вищою кількістю вузлів просторової сітки для $\alpha = 0.25$ і складнішими обрахунками при цьому.

Стосовно часу виконання обох методів, то звісно безсумніву виграє метод обчислення за допомогою функцій Мітаг-Лефлера, проте не є секретом і складність виведення центральної формули для обчислення шуканої функції, але в разі, якщо рівняння можна нескладно вивести за допомогою таких функцій, то набагато краще, особливо для складних та витратних математичних моделей обирати саме цей метод з використанням операційного числення.

Висновки до розділу

Цей розділ був присвячений обчислювальній частині магістерської дисертації. Архітектура алгоритмів двох методів (з використанням функцій Мітаг-Лефлера на основі операційного числення і скінченних різниць) була коротко визначена з деякими уточненнями для конкретних рівнянь аномальної дифузії із заданими початковими і граничними умовами. Також була розроблена програма, яка втілює центральні методи даної магістерської роботи і ілюструє отримані результати за допомогою двох методів. І в самому кінці був проведений порівняльний аналіз звичайного чисельного методу - скінченних різниць і методу з використанням

операційного числення, порівняння задіяло не тільки візуальну складову, а ще і було вказано уточнення з приводу часу роботи програми, також були виділені істотні особливості поведінки наближених розв'язків двох розглянутих рівнянь.

РОЗДІЛ 4 РОЗРОБКА ВЛАСНОГО СТАРТАП ПРОЕКТУ

Зараз у сучасному світі існує велика потреба в моделюванні та передбаченні деформації в'язкопружних матеріалів, що існують в різних сферах таких як біологія, хімія, промисловість – починаючи від мембран клітини, закінчуючи матеріалами з яких роблять асфальт, або полімерами.

Взагалі людство з давніх давен намагалось зазирати у майбутнє і прогнозувати все, що може знадобитись у майбутньому, проте іноді буває доволі складно змодельовати процес і підібрати рівняння, яке буде цей процес описувати. Так і у випадку з в'язкопружними матеріалами та іншими прикладами застосування дробових похідних, яке є досить обширним. Взагалі, наразі пружність та в'язкість прийнято визначати за допомогою експоненційних функцій, але коли маємо справу з їх поєднанням зрештою експоненційна функція не може впоратись з якісним прогнозом та відтворенням бажаного результату, тому ця магістерська дисертація була присвячена дробовим похідним, що доволі добре моделюють роз'язок такої проблеми.

Все це означає, що проблема, яку вирішує стартап, являється актуальною і цей стартап може стати успішним на ринку та стати основним вибором для переважної кількості цільової аудиторії.

Тому на даному етапі оберемо проблему, яка може зацікавити крупних державних інвесторів і це проблема з в'язкопружним асфальтним матеріалом, щоб допомогти країнам усього світу передбачувати проблеми з транспортними дорогами для автотранспорту, а також велосипедними доріжками і тротуарами. Даний стартап буде допомагати передбачувати деформацію доріг, а також стане в нагоді для того щоб попередити і вчасно полагодити будь-яку важливу ділянку транспортної інфраструктури, а це у

свою чергу підвищить рівень країни і залишить приємне враження у туристів та мешканців.

4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок

Наведемо план розробки стартапу та виведення його на ринок. Спочатку треба провести маркетинговий аналіз, який включає в себе:

- конкурентний аналіз, щоб зрозуміти, якими методами вирішення проблем вже користуються люди;
- формування ідеї самого проекту та виділення цільової аудиторії;
- розробити стратегію виведення товару на ринок, базуючись на аналізі ринкового середовища.

Наступним кроком являється організація самого стартапу. На цьому етапі мають бути:

- складений весь план та побудований таймлайн розробки та запуску продукту;
- запланований обсяг виробництва та оцінений потенційний обсяг ресурсу, який буде потрібен для виконання плану;
- розраховані витрати, необхідні для реалізації проекту, та витрати на запуск проекту.

Далі необхідно виконати фінансово-економічний аналіз та оцінити ризики стартап-проекту, в межах якого:

- визначити обсяг інвестиційних втрат;
- розрахувати основні фінансово-економічні показники проекту (собівартість, ціну продукту/послуги, податковий збір та чистий

прибуток) та визначити показники інвестиційної привабливості проекту (рентабельність продажів, період окупності проекту);

- визначити основні ризики проекту та способи для їх запобігання.

Фінальним кроком являється розробка заходів з комерціалізації продукту. Цей крок являється важливим для масштабування та збільшення розмірів продукту.

Для того, щоб залучити інвесторів та знайти різні способи фінансування проекту, необхідно:

- провести дослідження на предмет інтересів потенційних інвесторів та бізнесів;
- скласти інвестиційну пропозицію, яка включає в себе як опис самого продукту та його теперішні розміри, так і можливі шляхи розширення та розвитку;
- обрати канали комунікації із потенційно зацікавленими персонами.

Далі наведемо результати виконання кожного з описаних кроків.

4.2 Опис ідеї стартап-проекту

Стартап-проект полягає у вирішенні проблеми моделювання реакції в'язкопружних матеріалів, наприклад асфальту на дорогах, але може бути і будь-який інший матеріал у різноманітних сферах життя, і зобразити та передбачити його деформацію в залежності від наданої деформації у певний момент часу, або змодельовати поведінку при постійному стресорі, що допоможе запобігти багатьом проблемам суспільства навіть у області здоров'я.

У таблиці 4.1 наведена інформаційна карта стартапу.

Таблиця 4.1 – Інформаційна карта стартап-проекту

Назва проекту	PredictFutureNow
Автори проекту	Собко Тетяна Олександрівна
Коротка анотація	Додаток зможе спрогнозувати поведінку в'язкопружного матеріалу в залежності від поданих умов та фізичного навантаження
Термін реалізації проекту	12 місяців
Необхідні ресурси	Приміщення з комп'ютерами, доступом до Інтернету, доступ до електромережі Програмне забезпечення для розробки, хмарне сховище для даних, антивірусні програми Фінансові кошти на оплату заробітної плати виконавцям на термін 12 місяців, а також на такі витрати як: оренда приміщення, комунальні послуги, оренда хмарного сховища тощо
Опис проблеми, яку вирішує проект	Продукт вирішує задачу моделювання та відтворення поведінки в'язкопружних матеріалів, що охоплюють майже всі сфери життєдіяльності людини

Кінець таблиці 4.1

Головні цілі та завдання проекту	Метою проекту є створення системи, яка буде автоматично обробляти коефіцієнти та ступінь дробової похідної необхідної для оптимального відтворення поведінки матеріалу за заданими навантаженнями, або умовами навколишнього середовища – наприклад температура
Очікувані результати	Привернення технологічних компаній до нашого стартапу, автономна система для моделювання та прогнозу поведінки в'язкопружного матеріалу

4.3 Технологічний аудит ідеї проекту

Тепер можна розібрати ідею стартапу та провести конкурентний аналіз. У таблиці 4.2 наведений опис ідеї стартапу.

Таблиця 4.2 – Опис ідеї стартапу

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Основна ідея являється створення комплексної системи, яка буде приймати на вхід	Аналіз та передбачення деформації доріг авто-, вело-	Користувач зможе отримувати автоматично результати поведінки об'єкту та визначати

постійні параметри зовнішніх умов, наприклад температуру і постійне або разове фізичне навантаження на матеріал, а також складові матеріалу та його початкову форму у схематичному вигляді	транспорту, а також тротуарів	критичний момент, в який потрібно буде лагодити дороги, що є дуже актуальним для розвинених країн
	Аналіз та передбачення хвороб легень та м'язів	Майже без ніякого медичного втручання можна зробити попередній аналіз та прогноз розвитку багатьох типів хвороб, що допоможе користувачу візуалізувати проблему та не гаяти часу для її вирішення

Далі проведемо порівняльний аналіз конкурентів проекту та наведемо результати у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Порівняльний аналіз конкурентів проекту

№	Техніко-економічні характеристики і ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів				W	N	S
		Власний проект	Castep	Thermo-Calc software	AniForm			
1	Якість прогнозування поведінки матеріалу	Надає доволі хороший результат	Свій власний алгоритм	Свій власний алгоритм	Свій власний алгоритм			+

Продовження таблиці 4.3

2	Доступність по ціні	Безкоштовний при запуску	Лише при наявності смартфонів	Доступний для комерції	Лише при наявності ліцензії		+	
3	Персоналізація генерації	Присутня	Відсутній	Відсутня	Відсутня		+	

Далі аналізуємо реальність технічно здійснити ідею проекту (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Технологічна здійсненність продукту

№ п/п	Ідея проекту	Технології реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Створення комплексної системи, яка буде приймати на вхід дані для моделювання та надані стресові фактори та умови зовнішнього впливу на систему, що	Використання мови програмування Python	Наявні, необхідні допрацювання	Доступні
2		Використання мови програмування Java	Не наявні, необхідні допрацювання	Доступні
3		Використання мови	Наявні, необхідні	Доступні

	моделюється	програмування Rust	допрацювання	
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Python				

4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Далі проведемо попередній аналіз ринку для запуску стартап-проекту (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ п/п	Показники ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	3
2	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	6000
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Позитивна, зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Відсутні
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Відсутні

Кінець таблиці 4.5

6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	15%
---	---	-----

Тепер проведемо характеристику потенційних клієнтів, які можуть бути зацікавлені в проекті (таблиця 4.6).

Таблиця 4.6 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреби, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Деталізація процесу зміни матеріалу під впливом різноманітних факторів	Особи держамного управління, звичайні коритувачі	Цікавить моделювання в залежності від часу поведінки предметів з в'язкопружних матеріалів	Простота використання
2	Моделювання процесу	Держава, правоохоронні та муніципальні органи	Особлива потреба у збереженні якості деталей таких як зовнішні умови та стресові фактори	Особлива якість згенерованих процесів

Кінець таблиці 4.6

3	Відтворення результатів	Графічні дизайнери, звичайні користувачі, Power bi девелопери	Необхідність у зрозумілому відтворенні процесу та прогнозуванню на деякий час задля вчасної реакції на моменти.	Отримання зручних результатів для подальшого аналізу
---	-------------------------	---	---	--

Обрахуємо фактори загроз (таблиця 4.7) та можливостей (таблиця 4.8). Проаналізуємо загрози, щоб зрозуміти можливі перешкоди при запуску продукт на ринок. Фактори можливостей же треба обрахувати, щоб знати усі сприятливі умови та по можливості ними скористатися.

Таблиця 4.7 – Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Хоча ринок є відкритим і неосвоїним, на ньому вже є кілька великих гравців, які відомі на ринку, які вже мають свою цільову групу покупців	Знайти точки додаткової цінності для користувача
2	Ціна збуту	Конкуренти можуть коштувати менше через нижчу якість	Сфокусуватися на якості роботи застосунку та продумати маркетингову стратегію

Продовження таблиці 4.7

3	Якість аналізу	Через комплексність задачі, програмний продукт може мати проблеми на певних предметних областях, так наприклад якщо дані будуть якісно подані на вхід, додаток зможе справитись з моделюванням з високою якістю, але у випадку з деякими нестандартними випадками, або з великою кількістю зовнішніх впливів програма може бути не застосовною, або давати велику помилку реалізації процесу	Мати достатній штаб і ресурси, для побудови різних моделей для різних предметних областей
---	----------------	--	---

Таблиця 4.8 – Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Універсальність	Продукт не залежить від апаратної платформи як у більшості конкурентів	Зробити акцент при маркетингу, продовжувати розвиток як окремого продукту

2	Простота у використанні	Від користувача треба лише завантажити вхідну інформацію про досліджуваний матеріал	Реалізувати зручний інтерфейс для завантаження
3	Якість та гарантії	Надавати найбільш якісні послуги та сервіси	Пропонувати моделі з найкращими результатами, а також надавати усю необхідну технічну підтримку
4	Безкоштовний сервіс при MVP	Максимально швидко набрати базу своїх клієнтів та заявити про себе на ринку	Розгорнути широкий маркетинг, а також активно боротися за клієнтів конкурентів

Далі розглянемо питання конкуренції, а саме визначимо її тип та рівень (таблиця 4.9).

Таблиця 4.9 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	У чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1.Вказати тип конкуренції: недосконала конкуренція	Представлено мало продуктів та експертів	Зробити максимальним збут застосунку
2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнародний	Наявні проекти, розроблені та можуть бути доступні у всьому світі	Розширити цільову аудиторію, розробити інтерфейс на різних мовах
3. За галузевою ознакою: внутрішньогалузева	Можуть працювати з різними галузями	Покращити персоналізацію
4. Конкуренція за видами товарів: товарно-родова	Конкуренція з аналізами інших систем та експертів	Підтримувати та покращувати якість існуючих функцій
5.За характером конкурентних переваг: нецінова	Різні компанії пропонують різну якість	Розробляти якісніші алгоритми і якнайкраще моделювати поведінку моделі процесу

Кінець таблиці 4.9

6.3а інтенсивністю: марочна	Вже представлені компанії із сильним брендом	Предметно створити комунікаційну стратегію для вибудови свого бренду
--------------------------------	--	---

Далі необхідно виконаємо аналіз конкуренції за моделлю 5 сил конкуренції Майкла Портера (таблиця 4.10).

Таблиця 4.10 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

Складові аналізу	Прямі конкуренти у галузі	Потенційні конкуренти	Постачаль ники	Клієнти	Товарозамі нники
	Інші існуючі системи та продукти	Якість, ціни, кількість користувачі в,капіталовк ладення	Фактори сили постачаль ників	Контроль якості, порівнянн я цін	Сила бренду, якість, ціна, масштаби
Висновки	Конкуренці я з малою інтенсивніс тю, достатньо вільний ринок і	Можливості входження на ринок, нові потенційні конкуренти	Постачаль ники відсутні	Клієнти не диктують умови роботи на ринку	Товарозамі нники відсутні

	ідеальна можливість його захопити				
--	--	--	--	--	--

Маючи результати аналізу конкуренції (таблиця 4.10), характеристики ідеї стартап-проекту (таблиця 4.5), характеристики потенційних клієнтів і їх вимоги до продукту (таблиця 4.6) та фактори ринкового середовища (таблиці 4.7 і 4.8) було сформульовано та обґрунтовано перелік факторів конкурентоспроможності (таблиця 4.11).

Таблиця 4.11 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Універсальність	Продукт не залежить від апаратної платформи як у більшості конкурентів
2	Простота у використанні	Від користувача треба лише завантажити файл зображення
3	Якість та гарантії	Надавати найбільш якісні послуги та сервіси
4	Безкоштовний сервіс при MVP	Максимально швидко набрати базу своїх клієнтів та заявити про себе на ринку

Тепер можна провести аналіз сильних та слабких сторін продукту (таблиця 4.12).

Таблиця 4.12 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін системи

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів						
			-3	-2	-1	0	1	2	3
1	Універсальність	20	+						
2	Простота у використанні	16		+					
3	Якість та гарантії	10		+					
4	Безкоштовний сервіс при MVP	17			+				

Далі проведемо SWOT-аналіз продукту (таблиця 4.13).

Таблиця 4.13 – SWOT-аналіз стартап-проекту

Сильні сторони Універсальність Простота у використанні Якість та гарантії Безкоштовний сервіс при MVP	Слабкі сторони Відсутність сильного бренду Не сформована база клієнтів Не підключені альтернативні канали маркетингу
Можливості Покращення системи Персоналізація Інтеграція з великим сховищем даних,	Загрози Нові системи та експерти Збут

що може містити важливі дані для універсального підходу побудови моделей поведінки в'язкопружних матеріалів	
---	--

Дякуючи проведенню SWOT-аналізу, ми змогли визначити сильні та слабкі сторони, можливості та загрози, пов'язані з конкуренцією та плануванням стартап-проекту. Далі спроектуємо альтернативну ринкову поведінку для інтеграції стартап-проекту на ринок та приблизний час реалізації системного комплексу, з урахуванням потенційних проектів, що можуть бути виведені на ринок та наведемо результати у таблиці 4.14.

Таблиця 4.14 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Вихід на ринок з нижчою якістю	70%	4 місяці
2	Пропонувати одразу платне використання	50%	6 місяців
3	Представлення користувачам системи без інтерфейсу	60%	5 місяців

У даному пункті був проведений детальний аналіз ринку та продукту. Також відповідно до результатів проведеного конкурентного аналізу,

визначених факторів ринку та його сприятливість, описання ідеї та характеристик стартап-проекту, робимо висновок висновок, що існують дуже сприятливі умови для виходу продукту на ринок.

4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту

Для розробки ринкової стратегії продукту, у першу чергу, необхідно проаналізувати цільову аудиторію проекту (таблиця 4.15).

Таблиця 4.15 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит у межах цільової групи (сегменту)	Інтенсивність конкуренції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Персональні користувачі	Середня	25%	Низька	Середня
2	Великі бізнеси	Висока	75%	Низька	Середня
3	Малі та середні бізнеси	Середня	30%	Низька	Середня
4	Держава	Низька	80%	Низька	Висока
Які цільові групи обрано: 2, 3					

Маючи аналіз цільових груп, далі визначимо базову стратегію розвитку продукту (таблиця 4.16).

Таблиця 4.16 – Визначення базової стратегії розвитку

№ п/п	Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку*
1	2 та 3	Диференційованого маркетингу	Масштабування та максимізація	Оптимальних витрат

Для роботи в обраних сегментах ринку сформовано базову стратегію розвитку (таблиці 4.17, 4.18).

Таблиця 4.17 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки*
Ні	Так	Ні	Виклику лідера

Таблиця 4.18 – Визначення стратегії позиціонування

Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспро- можні позиції власного стартап- проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
Універсальність Простота у використанні Якість результатів	Оптимальних витрат	Універсальність Простота у використанні Якість та гарантії Безкоштовне використання при MVP	Система, яка краще всіх аналізує та моделює поведінку в'язкопружних матеріалів в залежності від початкових та постійних факторів, що на неї впливають Система з простим інтерфейсом

4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Після проведеного комплексного аналізу, можемо повноцінно описати ключові переваги концепції потенційного товару (таблиця 4.19) та побудувати концепцію маркетингових комунікацій (таблиця 4.20).

Таблиця 4.19 – Ключові переваги концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Якісна генерація	Якісне моделювання графіків складних процесів поведінки в'язкопружних матеріалів різної форми	Постійне покращення та інтеграція з базами даних, які зможуть допомогти аналізувати більше прикладних областей
2	Універсальність	Система не залежить від апаратної платформи	Такого виду систему може використовувати будь- який користувач
3	Простий інтерфейс	Система дуже проста у	Система із інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом,

		використанні	який вимагає всього лише завантаження необхідних відомостей про матеріал, що необхідно проаналізувати
--	--	--------------	---

Таблиця 4.20 – Концепція маркетингових комунікацій

№ п/п	Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення	Концепція рекламного звернення
1	Пошук спеціалізованих систем	b2b продажі Зв'язок через теплі контакти Таргетована реклама у соціальних мережах та основних платформах, які використовують бізнеси Публікація в спеціалізованих виданнях та ін	Точність Якість Універсальність	Поєднати повідомлення про те, що це якісна система, яка є незалежною	Таргетована реклама на цільову аудиторію

Продовження таблиці 4.20

2	Пошук доступного та дешевого продукту	Рекламні банери в Інтернеті, форуми, реклами від інфлюенсерів	Простота Безкоштовне використання MVP	Вселити довіру у бренд та продукт	Реклама у лідерів думок Вивіски в публічних місцях Таргетована реклама на цільову аудиторію
---	---------------------------------------	---	---------------------------------------	-----------------------------------	---

4.7 Висновки до розділу 4

Даний розділ був присвячений дослідженню стартап-проекту. В якості такого була представлена система для прогнозування поведінки в'язкопружних матеріалів під впливом різноманітних факторів.

У рамках розділу було досліджено розробку стратегій виходу на ринок та маркетинг-стратегії для цього. Зокрема, даний ринок являється сприятливим з невеликою кількістю представлених компаній конкурентів. Оскільки вони дають лише частину функцій, а запропонована система є універсальною та доступною, то у стартап-проекту є всі шанси стати монополістами на ринку.

Також були опрацьовані сильні та слабкі сторони проекту, SWOT аналіз, аналіз конкурентів та цільової аудиторії. На основі всіх досліджень

був сформований концепт маркетингової стратегії для обраних цільових аудиторій.

ВИСНОВКИ

Під час дослідження теми даної магістерської дисертації було розглянуто та знайдено багато цікавих застосувань фрактальних моделей та дифузійних рівнянь з дробовими похідними в часі і просторі зокрема. Було згадано декілька зовсім новітніх застосувань рівнянь аномальної дифузії таких як магнітно-резонансна томографія та деформація бетонних конструкцій.

Згадуючи обчислювальну частину магістерської дисертації, то було досліджено дві моделі аномальної дифузії, а саме субдифузій з дробовою похідною у часі, були отримані результати обчислення розв'язку задач Коші та проілюстровано їх у вигляді графіків, а також була наведена похибка.

Як було отримано з результатів роботи програми – обидва методи (кінцевих різниць та декомпозиції з використанням натурального перетворення) дали доволі схожі результати з незначними відмінностями, що підтвердило той факт, що метод кінцевих різниць для таких задач є застосовним, проте також було визначено, що час витрачений на отримання результату методом кінцевих різниць значно перевищує час, необхідний для досягнення тієї ж мети методом декомпозиції. Проте не можна сказати, що через це цей метод є неефективним, оскільки бувають рівняння в яких початкова умова є функцією, похідні якої не можуть бути записані у загальному вигляді. У зв'язку з цим виникають проблеми з виведенням чіткого напіваналітичного розв'язку методом декомпозиції, тому в такому випадку і розглядається метод кінцевих різниць.

Цей метод є чи не єдиним апаратом, за допомогою якого можна розв'язати будь яке рівняння аномальної дифузії, але звісно він має свій мінус. В деяких випадках результат можна чекати годинами, якщо не

докласти зусиль і не знайти ефективне розбиття. Таке розбиття краще за все обирати нерівномірним за тією координатою по якій береться дробова похідна, тому що таким чином покращиться не тільки збіжність, а й зменшиться необхідна кількість точок для отримання збіжного розв'язку рівняння. Це пов'язано з тим, що відстань, наприклад, між часовими координатами буде або монотонно збільшуватись або зменшуватись, і таким чином невеликої кількості точок буде достатньо, щоб знайти опорні координати розв'язку таких рівнянь.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Нахушев А. М. «Дробное исчисление и его применение». – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Минск. Наука и техника, 1987.
3. Учайкин В. В. «Метод дробных производных». Ульяновск: Изд. «Артишок», 2008. – 512 с.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Inc. Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San Diego – San Francisco – Singapore – Sydney – Tokio. 2006. 541 p.
5. Kochubei A.N., Luchko Y. Handbook of fractional calculus with applications, v.1:Basic theory, 2019.
6. Kochubei A.N., Luchko Y. Handbook of fractional calculus with applications, v.8 : Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part B Dumitru Băleanu, António Mendes Lopes (Eds.), 2019
7. О.В. Чалий, Б.Т. Агапов, А.В. Меленєвська та ін. Медична і біологічна фізика. Підручник для студентів вищих медичних закладів освіти III - IV рівнів акредитації.
8. Sorin Solomon. Generalized Lotka-Volterra (GLV) Models. Jerusalem: Racah Institute of Physics, The Hebrew University, 1998.
9. Carslaw H. S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. 2d ed.Oxford: Clarendon Press, 1959.

10. W. Van Roosbroeck. Theory of the flow of electrons and holes in germanium and other semiconductors. The Bell System Technical Journal. Vol. 29. No. 4. New York: Nokia Bell Labs, 1950. P. 560-607.
11. Vegh, V., Moinian, S., Yang, Q. Reutens, D.C. Fractional Order Magnetic Resonance Fingerprinting in the Human Cerebral Cortex. Mathematics 2021, 9, 1549. <https://doi.org/10.3390/math9131549>
12. Ling Yao, Lixia Ren, Guoli Gong, "Time-Fractional Model of Chloride Diffusion in Concrete: Analysis Using Meshless Method", Advances in Materials Science and Engineering, vol. 2020, Article ID 4171689, 9 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/4171689>
13. O. I. Marichev, Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions. Theory and Algorithmic Tables, Ellis Horwood, Chichester, 1983.
14. M. M. Djrbashian and A. B. Nersessian, Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. Ser. Mat. 3(1) (1968), 1–29 (in Russian).
15. A. N. Kochubei, Fractional-order diffusion, Differ. Equ., 26 (1990), 485–492.
16. A. N. Gerasimov, Generalization of laws of the linear deformation and their application to problems of the internal friction, Prikl. Mat. Meh., 12(3) (1948), 251–260 (in Russian).
17. Yu. N. Rabotnov, Creep Problems in Structural Members, North-Holland, Amsterdam, 1969.
18. M. Caputo, Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent: II, Geophys. J. R. Astron. Soc., 13(5) (1967), 529–539.
19. B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities, Springer, Cham, 2017.

20. R. Garra and F. Polito, On some operators involving Hadamard derivatives, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 24 (2013), 773–782.

21. L. Ma and C. Li, On Hadamard fractional calculus, *Fractals*, 25(3) (2017), 1750033 16 pp.

22. F. Jarad, T. Abdeljawad, and D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Differ. Equ.*, 2012 (2012), 142, 8 pp.

23. Бондаренко В.Г. Фрактальні моделі математичної фізики: еволюційні рівняння з похідними дробового порядку. *Рівняння математичної фізики: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «системний аналіз»*; Київ: КІІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.—100 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/31956/1/RivnMatFiz_Posibnyk.pdf

24. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type.*—Springer Basel AG, 2004.—386 P.

25. Геккиева СХ. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук. 1994. Т. 1. № 1. С. 17-19.

26. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев МХ. Обобщенные уравнения переноса и дробные производные // Доп. НАН Укра'ши. 1997. № 12. С. 47-55.

27. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче для уравнения $\text{sign } y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференц. ур-ния. 1976. Т. 12. № 1. С. 79-88

28. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

29. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

30. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

31. Шхануков МХ. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 746-748.

32. Shah, Kamal & Khalil, Hammad & Khan, Rahmat. Analytical Solutions of Fractional Order Diffusion Equations by Natural Transform Method. Iranian journal of science and technology, 2016. DOI : [10.3390/e21060597](https://doi.org/10.3390/e21060597)

33. Бондаренко В.Г., Собко Т.О. Дифузійні рівняння з дробовими похідними: чисельні методи розв'язування задачі Коші та застосування: збірник доповідей І науково-практичної конференції «Системні науки та інформатика», 22–29 листопада 2022 року, Київ. – К., НН ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. С. 14-21.

ДОДАТОК А ЛІСТІНГ ПРОГРАМНОГО МОДУЛЮ

```

from scipy.special import gamma
import numpy as np

# alpha = 0.71
alpha = 0.5
alphas = [alpha, 0.7, 0.999]
k = 41 #quantity of points for x measure
n = 601 #quantity of points for t measure
# u = np.zeros((n, k))
u_alpha0 = np.zeros((n, k))
u_alpha1 = np.zeros((n, k))
u_alpha2 = np.zeros((n, k))
x = np.linspace(-20, 20, k)
t = np.linspace(0, 3, n)
dx = x[1] - x[0]
dt = t[1] - t[0]
s = gamma(2-alpha)*dt**alpha/dx**2

dt_limit = np.zeros(len(alphas))
for a in alphas:
    dt_limit[alphas.index(a)] = ((2-2**(1-a))*dx**2/(2*gamma(2-a)))**(1/a)
    print(dt_limit[alphas.index(a)])
    dt_limit[alphas.index(a)] = int(np.max(t)/dt_limit[alphas.index(a)]) + 1
print(f'n should be greater than {np.max(dt_limit)} to make criterion
succed')

t

for a in alphas:
    if dt**alpha <= (2-2**(1-alpha))*dx**2/(2*gamma(2-alpha)) :
        for i in range(1, len(t)-1):
            if (-t[i+1]**(1 - alpha) + 2*t[i]**(1 - alpha) - t[i-1]**(1 - alpha))
<= 0:
                print(f'Criterion didn`t succeed for {a}')
                break
            if i == len(t) - 2:
                print(f'Criterion succeeded for {a}')
        else:
            print(f'Criterion didn`t succeed for {a}')

def s(alpha):
    return gamma(2-alpha)*dt**alpha/dx**2

def s_kaputo(alpha):
    return dt/(t[1]**(1-alpha) - t[0]**(1-alpha))

def uk_0(u):
    for j in range(k):
        u[0][j] = 1/(2*(1+x[j]**2))

def uk_nplus1(alpha, u):
    for i in range(n-1):
        for j in range(1, k-1):
            u[i+1][j] = alpha * u[i][j] + s(alpha)*(u[i][j+1] - 2*u[i][j] +

```

```

u[i][j-1])
    return u

def uk_nplus1_kaputo(alpha, u):
    for i in range(n-1):
        for j in range(1, k-1):
            u[i+1][j] = u[i][j] + s_kaputo(alpha)*gamma(2-
alpha)/dx**2*(u[i][j+1] - 2*u[i][j] + u[i][j-1]) - s_kaputo(alpha)/dt *
sum((t[i-s+1] ** (1 - alpha) - t[i-s] ** (1 - alpha)) * (u[s + 1][j] -
u[s][j]) for s in range(i-1))
    return u

x.shape

# Commented out IPython magic to ensure Python compatibility.
import matplotlib.pyplot as plt
def plot(x, t):
    # %matplotlib inline
    plt.figure(figsize=(14, 8))
    plt.plot(x[1:-1], u_alpha0[(n-1)//3*t, 1:-1], "-", label = f'alpha =
{alphas[0]}')
    plt.plot(x[1:-1], u_alpha1[(n-1)//3*t, 1:-1], "-", label = f'alpha =
{alphas[1]}')
    plt.plot(x[1:-1], u_alpha2[(n-1)//3*t, 1:-1], "-", label = f'alpha =
{alphas[2]}')
    plt.title("t = {0}".format(t))
    plt.legend(loc='upper right')
    plt.grid()

def plot_3_graphs():
    fig = plt.figure(figsize=(25,10))
    x_, t_ = np.meshgrid(x[1:-1], t)
    ax = fig.add_subplot(1, 3, 1, projection='3d')
    # ax.plot_surface(ot, ox, z, cmap='inferno')
    ax.set_xlabel('t', fontsize=16)
    ax.set_ylabel('x', fontsize=16)
    ax.set_zlabel("розв'язок р-ня теплопровідності з дробовою похідною",
    fontsize=16)
    ax.plot_surface(t, x, u[:,1:-1], cmap='summer')
    #fig = plt.figure(figsize=(16,10))
    ax = fig.add_subplot(132, projection='3d')
    # ax.plot_surface(ot, ox, np.vstack((u_simple_1_t_x, u_simple_2_t_x,
u_simple_3_t_x)), cmap='spring')
    ax.set_xlabel('t', fontsize=16)
    ax.set_ylabel('x', fontsize=16)
    # ax.set_zlabel('метод композиції h(t, x)', fontsize=16)
    #fig = plt.figure(figsize=(16,10))
    # ax = fig.add_subplot(1, 3, 3, projection='3d')

    # ax.set_xlabel('t', fontsize=16)
    # ax.set_ylabel('x', fontsize=16)
    # ax.set_zlabel("метод кінцевих різниць u(t, x)", fontsize=16)

"""# **Ініціалізація**"""

uk_0(u_alpha0)
uk_0(u_alpha1)
uk_0(u_alpha2)
uk_nplus1_kaputo(alphas[0], u_alpha0)
uk_nplus1_kaputo(alphas[1], u_alpha1)
uk_nplus1_kaputo(alphas[2], u_alpha2)

```

```

u_alpha1

u_alpha2

"""# **Графіка**"""

plot(x, 1)

plot(x, 2)

plot(x, 3)

# Commented out IPython magic to ensure Python compatibility.
# %matplotlib inline
fig = plt.figure(figsize=(50,12))
fig.suptitle(f'Порівняння для alpha = {alphas[0]}, {alphas[1]}, {alphas[2]}', fontsize = 20)
x_, t_ = np.meshgrid(x[1:-1], t)

ax = fig.add_subplot(1, 3, 1, projection = '3d')
ax.plot_surface(t_, x_, u_alpha0[:,1:-1], cmap = 'summer')
ax.set_xlabel('t', fontsize = 16)
ax.set_ylabel('x', fontsize = 16)
ax.set_zlabel(f"розв'язок alpha = {alphas[0]}", fontsize=16)

ax = fig.add_subplot(1, 3, 2, projection = '3d')
# abc = uk_nplus1(0.7)
ax.plot_surface(t_, x_, u_alpha1[:,1:-1], cmap='Wistia')
ax.set_xlabel('t', fontsize = 16)
ax.set_ylabel('x', fontsize = 16)
ax.set_zlabel(f"розв'язок alpha = {alphas[1]}", fontsize=16)

ax = fig.add_subplot(1, 3, 3, projection = '3d')
# abcd = uk_nplus1(1)
ax.plot_surface(t_, x_, u_alpha2[:,1:-1], cmap = 'cool')
ax.set_xlabel('t', fontsize = 16)
ax.set_ylabel('x', fontsize = 16)
ax.set_zlabel(f"розв'язок alpha = {alphas[2]}", fontsize = 16)

plt.show()

"""# Проверка"""

k = 4801
x = np.linspace(0, 3, k)
dx = x[1] - x[0]
r = 2

def duFract_analytical(r):
    return gamma(r+1)/gamma(r+1-alpha)*x**(r-alpha)

def duFract_num(r):
    ret = np.zeros(k-1)
    for i in range(k-2):
        ret[i+1] = 1/(gamma(2-alpha)*dx)*sum((x[i-s+1]**(1-alpha)-x[i-s]**(1-alpha))*(x[s+1]**r-x[s]**r) for s in range(i))
    return ret

u_num = duFract_num(r)

```

```

u_anal = duFract_analytical(r)
res = np.mean(abs(u_num[1:]-u_anal[1:-1]))

# Commented out IPython magic to ensure Python compatibility.
# %matplotlib inline
print(f'Середнє значення помилки = {res}')
plt.figure(figsize=(14, 8))
lines = plt.plot(x[1:-1], u_num[1:], "-", label = 'чисельний метод кінцевих
різниць')
lines_1 = plt.plot(x[1:-1], u_anal[1:-1], ":", label = 'аналітичний
розв'язок')
plt.title("r = {0}".format(r))
plt.legend(loc = 'upper right')
plt.grid()

import numpy as np

def LTInversion(t, lamda, alpha, beta, gama, log_epsilon):
    # Evaluation of the relevant poles
    theta = np.angle(lamda)
    kmin = np.ceil(-alpha/2. - theta/2./np.pi)
    kmax = np.floor(alpha/2. - theta/2./np.pi)
    k_vett = np.arange(kmin, kmax+1)
    s_star = np.abs(lamda)**(1./alpha) *
np.exp(1j*(theta+2*k_vett*np.pi)/alpha)

    # Evaluation of phi(s_star) for each pole
    phi_s_star = (np.real(s_star)+np.abs(s_star))/2

    # Sorting of the poles according to the value of phi(s_star)
    index_s_star = np.argsort(phi_s_star)
    phi_s_star = phi_s_star.take(index_s_star)
    s_star = s_star.take(index_s_star)

    # Deleting possible poles with phi_s_star=0
    index_save = phi_s_star > 1.0e-15
    s_star = s_star.repeat(index_save)
    phi_s_star = phi_s_star.repeat(index_save)

    # Inserting the origin in the set of the singularities
    s_star = np.hstack([[0], s_star])
    phi_s_star = np.hstack([[0], phi_s_star])
    J1 = len(s_star)
    J = J1 - 1

    # Strength of the singularities
    p = gama*np.ones((J1,), np.float)
    p[0] = max(0, -2*(alpha*gama-beta+1))
    q = gama*np.ones((J1,), np.float)
    q[-1] = np.inf
    phi_s_star = np.hstack([phi_s_star, [np.inf]])

    # Looking for the admissible regions with respect to round-off errors
    admissible_regions = \
        np.nonzero(np.bitwise_and(
            (phi_s_star[:-1] < (log_epsilon -
np.log(np.finfo(np.float64).eps))/t),
            (phi_s_star[:-1] < phi_s_star[1:])))[0]
    # Initializing vectors for optimal parameters
    JJ1 = admissible_regions[-1]
    mu_vett = np.ones((JJ1+1,), np.float)*np.inf

```

```

N_vett = np.ones((JJ1+1,), np.float)*np.inf
h_vett = np.ones((JJ1+1,), np.float)*np.inf

# Evaluation of parameters for inversion of LT in each admissible
region
find_region = False
while not find_region:
    for j1 in _admissible_regions:
        if j1 < J1-1:
            muj, hj, Nj = OptimalParam_RB(t, phi_s_star[j1],
phi_s_star[j1+1], p[j1], q[j1], log_epsilon)
        else:
            muj, hj, Nj = OptimalParam_RU(t, phi_s_star[j1], p[j1],
log_epsilon)
        mu_vett[j1] = muj
        h_vett[j1] = hj
        N_vett[j1] = Nj
    if N_vett.min() > 200:
        log_epsilon = log_epsilon + np.log(10)
    else:
        find_region = True

# Selection of the admissible region for integration which
# involves the minimum number of nodes
iN = np.argmin(N_vett)
N = N_vett[iN]
mu = mu_vett[iN]
h = h_vett[iN]

# Evaluation of the inverse Laplace transform
k = np.arange(-N, N+1)
u = h*k
z = mu*(1j*u+1.)**2
zd = -2.*mu*u + 2j*mu
zexp = np.exp(z*t)
F = z**(alpha*gama-beta)/(z**alpha - lamda)**gama*zd
S = zexp*F ;
Integral = h*np.sum(S)/2./np.pi/1j

# Evaluation of residues
ss_star = s_star[iN+1:]
Residues = np.sum(1./alpha*(ss_star)**(1-beta)*np.exp(t*ss_star))

# Evaluation of the ML function
E = Integral + Residues
if np.imag(lamda) == 0.:
    E = np.real(E)
return E

# =====
# Finding optimal parameters in a right-bounded region
# =====
def OptimalParam_RB(t, phi_s_star_j, phi_s_star_j1, pj, qj, log_epsilon):
    # Definition of some constants
    log_eps = -36.043653389117154 # log(eps)
    fac = 1.01
    conservative_error_analysis = False

    # Maximum value of fbar as the ration between tolerance and round-off
    unit
    f_max = np.exp(log_epsilon - log_eps)

```

```

# Evaluation of the starting values for sq_phi_star_j and
sq_phi_star_j1
sq_phi_star_j = np.sqrt(phi_s_star_j)
threshold = 2.*np.sqrt((log_epsilon - log_eps)/t)
sq_phi_star_j1 = min(np.sqrt(phi_s_star_j1), threshold - sq_phi_star_j)

# Zero or negative values of pj and qj
if pj < 1.0e-14 and qj < 1.0e-14:
    sq_phibar_star_j = sq_phi_star_j
    sq_phibar_star_j1 = sq_phi_star_j1
    adm_region = 1

# Zero or negative values of just pj
if pj < 1.0e-14 and qj >= 1.0e-14:
    sq_phibar_star_j = sq_phi_star_j
    if sq_phi_star_j > 0:
        f_min = fac*(sq_phi_star_j/(sq_phi_star_j1-sq_phi_star_j))*qj
    else:
        f_min = fac
    if f_min < f_max:
        f_bar = f_min + f_min/f_max*(f_max-f_min)
        fq = f_bar**(-1/qj)
        sq_phibar_star_j1 = (2*sq_phi_star_j1-fq*sq_phi_star_j)/(2+fq)
        adm_region = True
    else:
        adm_region = False

# Zero or negative values of just qj
if pj >= 1.0e-14 and qj < 1.0e-14:
    sq_phibar_star_j1 = sq_phi_star_j1
    f_min = fac*(sq_phi_star_j1/(sq_phi_star_j1-sq_phi_star_j))*pj
    if f_min < f_max:
        f_bar = f_min + f_min/f_max*(f_max-f_min)
        fp = f_bar**(-1/pj)
        sq_phibar_star_j = (2.*sq_phi_star_j+fp*sq_phi_star_j1)/(2-fp)
        adm_region = True
    else:
        adm_region = False

# Positive values of both pj and qj
if pj >= 1.0e-14 and qj >= 1.0e-14:
    f_min = fac*(sq_phi_star_j+sq_phi_star_j1) / \
        (sq_phi_star_j1-sq_phi_star_j)**max(pj, qj)
    if f_min < f_max:
        f_min = max(f_min, 1.5)
        f_bar = f_min + f_min/f_max*(f_max-f_min)
        fp = f_bar**(-1/pj)
        fq = f_bar**(-1/qj)
        if ~conservative_error_analysis:
            w = -phi_s_star_j1*t/log_epsilon
        else:
            w = -2.*phi_s_star_j1*t/(log_epsilon-phi_s_star_j1*t)
        den = 2+w - (1+w)*fp + fq
        sq_phibar_star_j = ((2+w+fq)*sq_phi_star_j +
fp*sq_phi_star_j1)/den
        sq_phibar_star_j1 = (-(1.+w)*fq*sq_phi_star_j + (2.+w-
(1.+w)*fp)*sq_phi_star_j1)/den
        adm_region = True
    else:
        adm_region = False

```

```

    if adm_region:
        log_epsilon = log_epsilon - np.log(f_bar)
        if not conservative_error_analysis:
            w = -sq_phibar_star_j1**2*t/log_epsilon
        else:
            w = -2.*sq_phibar_star_j1**2*t/(log_epsilon-
sq_phibar_star_j1**2*t)
            muj = (((1.+w)*sq_phibar_star_j + sq_phibar_star_j1)/(2.+w))**2
            hj = -2.*np.pi/log_epsilon*(sq_phibar_star_j1-sq_phibar_star_j) \
                / ((1.+w)*sq_phibar_star_j + sq_phibar_star_j1)
            Nj = np.ceil(np.sqrt(1-log_epsilon/t/muj)/hj)
        else:
            muj = 0.
            hj = 0.
            Nj = np.inf

    return muj, hj, Nj

# =====
# Finding optimal parameters in a right-unbounded region
# =====
def OptimalParam_RU(t, phi_s_star_j, pj, log_epsilon):
    # Evaluation of the starting values for sq_phi_star_j
    sq_phi_s_star_j = np.sqrt(phi_s_star_j)
    if phi_s_star_j > 0:
        phibar_star_j = phi_s_star_j*1.01
    else:
        phibar_star_j = 0.01
    sq_phibar_star_j = np.sqrt(phibar_star_j)

    # Definition of some constants
    f_min = 1
    f_max = 10
    f_tar = 5

    # Iterative process to look for fbar in [f_min, f_max]
    while True:
        phi_t = phibar_star_j*t
        log_eps_phi_t = log_epsilon/phi_t
        Nj = np.ceil(phi_t/np.pi*(1. - 3*log_eps_phi_t/2 + np.sqrt(1-
2*log_eps_phi_t)))
        A = np.pi*Nj/phi_t
        sq_muj = sq_phibar_star_j*np.abs(4-A)/np.abs(7-np.sqrt(1+12*A))
        fbar = ((sq_phibar_star_j-sq_phi_s_star_j)/sq_muj)**(-pj)
        if (pj < 1.0e-14) or (f_min < fbar and fbar < f_max):
            break
        sq_phibar_star_j = f_tar**(-1./pj)*sq_muj + sq_phi_s_star_j
        phibar_star_j = sq_phibar_star_j**2
        muj = sq_muj**2
        hj = (-3*A - 2 + 2*np.sqrt(1+12*A))/(4-A)/Nj

    # Adjusting integration parameters to keep round-off errors under
    control
    log_eps = np.log(np.finfo(np.float64).eps)
    threshold = (log_epsilon - log_eps)/t
    if muj > threshold:
        if abs(pj) < 1.0e-14:
            Q = 0
        else:

```

```

        Q = f_tar**(-1/pj)*np.sqrt(mu_j)
        phibar_star_j = (Q + np.sqrt(phi_s_star_j))**2
        if phibar_star_j < threshold:
            w = np.sqrt(log_eps/(log_eps-log_epsilon))
            u = np.sqrt(-phibar_star_j*t/log_eps)
            mu_j = threshold
            Nj = np.ceil(w*log_epsilon/2/np.pi/(u*w-1))
            hj = np.sqrt(log_eps/(log_eps - log_epsilon))/Nj
        else:
            Nj = np.inf
            hj = 0

    return mu_j, hj, Nj

import numpy as np
from scipy.special import gamma

def ml(z, alpha, beta=1., gama=1.):
    eps = np.finfo(np.float64).eps
    if np.real(alpha) <= 0 or np.real(gama) <= 0 or np.imag(alpha) != 0. \
        or np.imag(beta) != 0. or np.imag(gama) != 0.:
        raise ValueError('ALPHA and GAMA must be real and positive. BETA
must be real.')
    if np.abs(gama-1.) > eps:
        if alpha > 1.:
            raise ValueError('GAMA != 1 requires 0 < ALPHA < 1')
        if (np.abs(np.angle(np.repeat(z, np.abs(z) > eps))) <=
alpha*np.pi).any():
            raise ValueError('|Arg(z)| <= alpha*pi')

    return np.vectorize(ml_, [np.float64])(z, alpha, beta, gama)
def ml_(z, alpha, beta, gama):
    # Target precision
    log_epsilon = np.log(1.e-15)
    # Inversion of the LT
    if np.abs(z) < 1.e-15:
        return 1/gamma(beta)
    else:
        return LTInversion(1, z, alpha, beta, gama, log_epsilon)

import numpy as np

alpha = 0.99

# *****alpha = 0.25*****
# k = 11, 21 #quantity of points for x measure alpha = 0.25
# n = 1001, 14001 #quantity of points for t measure alpha = 0.25

# *****alpha = 0.5*****
# k = 41 #quantity of points for x measure alpha = 0.5
# n = 2001 #quantity of points for t measure alpha = 0.5

# *****alpha = 0.75*****
# k = 51 #quantity of points for x measure alpha = 0.75
# n = 401 #quantity of points for t measure alpha = 0.75

# *****alpha = 0.99*****
# k = 81 #quantity of points for x measure alpha = 0.99
# n = 401 #quantity of points for t measure alpha = 0.99

k = 81

```

```

n = 801

alphas = [alpha]

u1 = np.zeros((n, k))
u2 = np.zeros((n, k))
x = np.linspace(-4, 4, k)
t = np.linspace(0, 1, n)
dx = x[1] - x[0]
dt = t[1] - t[0]

dt_limit = np.zeros(len(alphas))
for a in alphas:
    dt_limit[alphas.index(a)] = ((2-2**(1-a))*dx**2/(2*gamma(2-a)))**(1/a)
    print(dt_limit[alphas.index(a)])
    dt_limit[alphas.index(a)] = int(np.max(t)/dt_limit[alphas.index(a)]) + 1
print(f'n should be greater than {np.max(dt_limit)} to make criterion
suced')

def uk_0_2v(u):
    for j in range(k):
        u[0][j] = np.cos(np.pi*x[j])

def calcU_anal(alpha):
    for i in range(n-1):
        for j in range(k):
            u1[i+1][j] = np.cos(np.pi*x[j])*ml((1-np.pi**2)*t[i+1]**alpha,
alpha)
    return u1

def calcU_num(alpha):
    for i in range(n-1):
        for j in range(1, k-1):
            u2[i+1][j] = u2[i][j] + s_kaputo(alpha)*gamma(2-
alpha)/dx**2*(u2[i][j+1] + (dt**2 - 2)*u2[i][j] + u2[i][j-1]) -
s_kaputo(alpha)/dt * sum((t[i-s+1] ** (1 - alpha) - t[i-s] ** (1 - alpha))
* (u2[s + 1][j] - u2[s][j]) for s in range(i-1))
    return u2

# Commented out IPython magic to ensure Python compatibility.
def plot_2_graph(x, y1, y2, _t, labels):
    # %matplotlib inline
    plt.figure(figsize=(14,9))
    plt.title("θ(t = {0}, x)".format(_t), fontsize=16)
    l=plt.plot(x[1:-1], y1[list(t).index(_t), 1:-1],"-",linewidth = 1, c =
"green", label = labels[0])
    l_1=plt.plot(x[1:-1], y2[list(t).index(_t), 1:-1],"-", linewidth = 2 , c
= "purple", label = labels[1])
    plt.legend(loc = "upper right", fontsize=16)
    plt.grid()

uk_0_2v(u1)
uk_0_2v(u2)
calcU_anal(alpha)
calcU_num(alpha)

list(t).index(0.25)

plot_2_graph(x, u1, u2, 0.25, ["θ Мітаг-Лефлер", "θ методом кінцевих
різниць"])
```

```

plot_2_graph(x, u1, u2, 0.5, [" $\theta$  Мітаг-Лефлер", " $\theta$  методом кінцевих
різниць"])

plot_2_graph(x, u1, u2, 1, [" $\theta$  Мітаг-Лефлер", " $\theta$  методом кінцевих
різниць"])

# Commented out IPython magic to ensure Python compatibility.
# %matplotlib inline
fig = plt.figure(figsize = (50, 12))
fig.suptitle(f'Порівняння для  $\alpha = \{\alpha[0]\}$  двох підходів обчислення
дробової похідної', fontsize = 20)
x_, t_ = np.meshgrid(x[1:-1], t)

ax = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection = '3d')
ax.set_xlabel('t', fontsize = 16)
ax.set_ylabel('x', fontsize = 16)
ax.set_zlabel(f"роз-к з викор-ням Мітаг-Лефлера", fontsize = 16)
ax.plot_surface(t_, x_, u1[:,1:-1], cmap = 'summer')

ax = fig.add_subplot(122, projection = '3d')
# abc = uk_nplus1_kaputo(alphas[1])
# abc = uk_nplus1(0.7)
ax.plot_surface(t_, x_, u2[:,1:-1], cmap = 'Wistia')
ax.set_xlabel('t', fontsize=16)
ax.set_ylabel('x', fontsize=16)
ax.set_zlabel(f"роз-к методом скінченних різниць", fontsize=16)

# ax = fig.add_subplot(1, 3, 3, projection='3d')
# abcd = uk_nplus1_kaputo(alphas[2])
# # abcd = uk_nplus1(1)
# ax.plot_surface(t_, x_, abcd[:,1:-1], cmap='cool')
# ax.set_xlabel('t', fontsize = 16)
# ax.set_ylabel('x', fontsize = 16)
# ax.set_zlabel(f"розв'язок  $\alpha = \{\alpha[2]\}$ ", fontsize = 16)

plt.show()

res_t = np.mean(abs(u1[list(t).index(0.5),1:-1]-u2[list(t).index(0.5),1:-1]))

res_t = np.mean(abs(u1[list(t).index(0.5), 1:-1] - u2[list(t).index(0.5), 1:-1]))
res_all = np.mean(abs(u1[:,1:-1]-u2[:,1:-1]))
print(f'Середнє значення помилки для  $\alpha = \{\alpha\}$   $t = 0.5$ : {res_t}')
print(f'Середнє значення помилки для  $\alpha = \{\alpha\}$  по всіх  $t$ : {res_all}')

```