

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Д. Л. Лавренова

НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ-1. ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістр
за освітньо-професійною програмою «Управління, захист та автоматизація енергосистем»
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

Рецензент

*Перетятко Ю.В., к.т.н., доц.
кафедра теоретичної електротехніки ФЕА, КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний
редактор

Яндульський О.С., д.т.н., проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 09.05.2024 р.)
за поданням Вченої ради факультета електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 9 від 29.04.2024р.)*

В навчальному посібнику викладено теоретичні відомості для проведення практичних занять з курсу «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень». Приділено увагу формування у студентів навичок застосування теорії імовірності та математичної статистики, побудови композиційних планів експериментів багатофакторних моделей, кореляційного та регресійного аналізів, організації статистичного контролю.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» ОПП «Управління, захист та автоматизація енергосистем» всіх форм навчання, які проходять лабораторний практикум з освітнього компоненту «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень».

Реєстр. № НП 21/22-760. Обсяг 4,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Д. Л. Лавренова
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

ВСТУП.....	5
Практичне заняття 1 ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ СТАТИСТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ	6
Практичне заняття 2 ПОБУДОВА ЦЕНТРАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПЛАНІВ ДЛЯ БАГАТОФАКТОРНИХ МОДЕЛЕЙ. ЗНАХОДЖЕННЯ АДЕКВАТНИХ МОДЕЛЕЙ.....	10
Практичне заняття 3 ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ДАНИХ.....	17
Практичне заняття 4 ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА РОЗМАХУ	25
Практичне заняття 5 ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА СКВ.....	30
Практичне заняття 6 ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА СКВ ІЗ ЗАДАНИМИ СТАНДАРТНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ	31
Практичне заняття 7 ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ (ЯКІСНИХ) ДАНИХ.....	34
Практичне заняття 8 ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ	39
Список рекомендованої літератури.	42
ДОДАТОК А Значення верхніх меж статистики Стюдента в залежності від кількості ступенів вільності f та рівня статистичної значущості α	43
ДОДАТОК Б Значення 5% верхніх меж статистики Фішера в залежності від кількості ступенів вільності f_1 та f_2	44
ДОДАТОК В Значення 5% верхніх меж статистики Кохрена в залежності від кількості ступенів вільності f_1 та f_2	45
ДОДАТОК Г Коефіцієнти для побудови контрольних карт Шухарта.	46

ДОДАТОК Д Данні для виконання індивідуальних завдань – результати вимірювання (контролю) частоти на підстнціі.....	47
ДОДАТОК Е Індивідуальні завдання до практичного заняття 2.....	52

ВСТУП

Метою навчальної дисципліни «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень» є відпрацювання на практиці студентами навичок застосування теорії імовірності та математичної статистики, побудови композиційних планів експериментів багатофакторних моделей, кореляційного та регресійного аналізів, організації статистичного контролю.

Вивчення дисципліни направлене на підготовку студентів до виконання магістерських дисертацій, а також до участі молодих спеціалістів у науково-дослідній роботі кафедр. Тому головна увага має приділятися набуттю студентами вміння обробляти експериментальні дані та робити висновки щодо правильності, точності та якості отриманих результатів.

Тематика практичних занять відповідає силабусу навчальної дисципліни «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 1. Основи наукових досліджень» для студентів рівня вищої освіти «магістр» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», що навчаються за освітньо-професійною програмою «Управління, захист та автоматизація енергосистем». Також цей посібник може використовуватися студентами рівня вищої освіти «магістр» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», що навчаються за освітньо-науковою програмою «Електроенергетика та електромеханіка». На практичні заняття виносяться наступні теми:

1. Застосування основних статистичних критеріїв при обробці даних експериментів,
2. Побудова центральних композиційних планів для багатофакторних моделей. Знаходження адекватних моделей,
3. Знаходження кореляції даних,
4. Застосування контрольних карт для статистичного контролю. Карти для кількісних даних: побудова карт середнього та розмаху,
5. Застосування контрольних карт для статистичного контролю. Карти для кількісних даних: побудова карт середнього та СКО,
6. Застосування контрольних карт для статистичного контролю. Карти для кількісних даних: побудова карт середнього та СКО із заданими стандартними значеннями,
7. Застосування контрольних карт для статистичного контролю. Карти для альтернативних (якісних) даних,
8. Інтерпретація контрольних карт.

Задля закріплення практичного і теоретичного матеріалу студентам пропонується виконати самостійне практичне завдання (розраховане на 30 хв.) наприкінці кожного заняття.

Практичне заняття 1

ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ СТАТИСТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета заняття отримати досвід застосування на практиці основних статистичних критеріїв при обробці даних експериментів.

Теоретичні відомості та приклади.

Для вирішення більшості практичних задач достатньо знати окремі числові параметри, що характеризують основні властивості розподілення, – моменти k -го порядку.

Моменти розподілення випадкової величини є, фактично, математичними очікуваннями де-яких простих функцій, а саме відхилення від певного центрального значення.

Початковий момент 1-го порядку – відхилення від (ідеального) центру x_0 – математичне очікування

$$M[x] = M[x - x_0]^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \omega(x) \cdot dx$$

x_0 – умовний початок координат

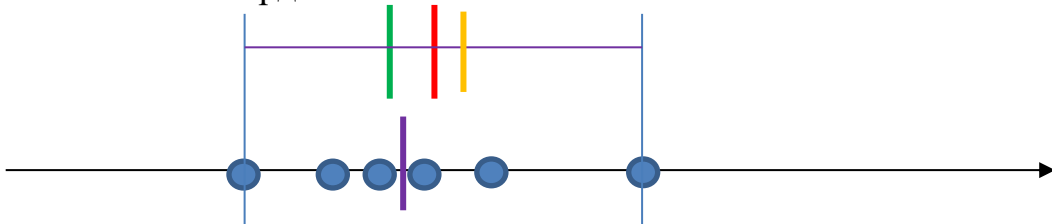


Рисунок 1.1.

На практиці (дискретна вибірка) математичне очікування можна замінити наступними оцінками:

1) середнє значення

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2) середнє зважене значення

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum g_i} \sum g_i \cdot x_i$$

де g_i – ваговий коефіцієнт.

3) медіана – значення, фізично розташоване в центрі ранжованої вибірки

$$X_{med} = X_{\frac{n+1}{2}} \quad \text{або} \quad X_{med} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

4) середина розмаху

$$x_{\text{сеп}} = \frac{x_n + x_1}{2}$$

Властивості математичного очікування

- 1) $M[x] = M[\text{const}] = \text{const}$
- 2) $M[x \cdot c] = M[x] \cdot c$
- 3) $M[x + c] = M[x] + c$

Центральний момент 2-го порядку – квадрат відхилення від мат. очікування – дисперсія

$$D[x] = M[x - M[x]]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 \cdot \omega(x) \cdot dx$$

На практиці (дискретна вибірка) дисперсію можна замінити наступними оцінками:

- 1) Вибіркова дисперсія

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- 2) Середньо квадратичне відхилення (СКВ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Властивості дисперсії

- 1) $D[x \cdot c] = D[x] \cdot c^2$
- 2) $D[x + c] = D[x] + c^2 + 2 D[x] c$
- 3) $D[x + y] = D[x] + D[y]$, якщо x та y – випадкові незалежні величини

Для залежних величин

$$D[x + y] = D[x] + D[y] + 2 \sqrt{D[x] D[y]}$$

Для оцінювання відповідних параметрів двох та більше вибірок застосовують статистичні критерії. Тобто формують гіпотезу про рівність відповідних параметрів та за допомогою обраного статистичного критерію підтверджують її або спростовують.

Критерій Стюдента призначений для перевірки гіпотези про достовірність різниці середніх вибірок з *розподілом, близьким до нормального*. Тобто він дозволяє оцінити відмінності між середніми значеннями $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ двох однорідних вибірок.

Формулювання гіпотези – середнє значення у вибірці 1 достовірно не відрізняється від середнього значення у вибірці 2, тобто відмінності $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ випадкові і незначимі.

У загальному вигляді формула для підрахунку критерія Стюдента (t-критерія):

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma}$$

Для вибірок обсягом $n_1 = n_2 = n$ оцінка критерію Стюдента буде наступною:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

У випадку, коли обсяги вибірок відрізняються $n_1 \neq n_2$:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}} \sqrt{\frac{(n_1 + n_2 - 2)n_1n_2}{n_1 + n_2}}$$

Отримане значення порівнюють із табличним (додаток А) для обраного рівня статистичної значущості та кількості ступенів вільності $f = n_1 + n_2 - 2$. Якщо розрахункове значення критерію менше за табличне, то із обраним рівнем достовірності можна стверджувати, що гіпотеза про рівність середніх підтвердилася.

Критерій Фішера призначений для перевірки гіпотези про достовірність різниці розсіювання двох вибірок з *розподілом, близьким до нормального*. Тобто він дозволяє оцінити відмінності між дисперсіями S_1^2 та S_2^2 двох вибірок.

Формулювання гіпотези – дисперсія у вибірці 1 достовірно не відрізняється від дисперсії у вибірці 2, тобто відмінності у оцінках розсіювання випадкові і незначимі, а значить вибірки однорідні.

У загальному вигляді формула для підрахунку критерія Фішера (F-критерія):

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

при цьому $S_1^2 > S_2^2$.

Отримане значення порівнюють із табличним (додаток Б) для обраного рівня статистичної значущості та кількості ступенів вільності $f_1 = n_1 - 1$ та $f_2 = n_2 - 1$. Якщо розрахункове значення критерію менше за табличне, то із обраним рівнем достовірності можна стверджувати, що гіпотеза про рівність дисперсій підтвердилася.

Критерій Кохрена використовують так само, як критерій Фішера. Але цей критерій призначений для перевірки гіпотези про рівність дисперсій декількох вибірок.

Формулювання гіпотези – дисперсія у вибірці 1 достовірно не відрізняється від дисперсії у всіх інших вибірках, тобто відмінності у оцінках розсіювання випадкові і незначимі, а значить вибірки однорідні.

У загальному вигляді формула для підрахунку критерія Фішера (F-критерія):

$$G = \frac{S_1^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}$$

при цьому $S_1^2 \geq S_i^2$.

Отримане значення порівнюють із табличним (додаток В) для обраного рівня статистичної значущості та кількості ступенів вільності $f_1 = n_1 - 1$ та $f_2 = N - 1$. Якщо розрахункове значення критерію менше за табличне, то із обраним рівнем достовірності можна стверджувати, що гіпотеза про рівність дисперсій підтвердилася.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

1. Вибрати варіант, що складається з де-кількох вибірок даних вимірювання частоти (додаток Д).
2. Розрахувати середнє, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для кожної вибірки окремо і для всіх даних вцілому.
3. Зробити висновки щодо розсіювання результатів вимірювання частоти.

Практичне заняття 2

ПОБУДОВА ЦЕНТРАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПЛАНІВ ДЛЯ БАГАТОФАКТОРНИХ МОДЕЛЕЙ. ЗНАХОДЖЕННЯ АДЕКВАТНИХ МОДЕЛЕЙ

Мета заняття отримати досвід побудови планів експериментів з відсіюванням.

Теоретичні відомості та приклади.

По результатах проведеного експерименту отримують поле кореляції. Інтервал $x_1 \dots x_n$ – це інтервал варіації незалежної змінної, тобто вхідної величини. Розділимо цей інтервал на декілька елементарних інтервалів із довжиною Δx . Для кожного інтервалу зазначимо середнє значення (як ординату). З'єднавши ординати отримуємо лому, яка є емпіричною лінією регресії. Дали при зменшенні довжини інтервалу збільшуємо кількість експериментів. У ліміті приходимо до теоретичної лінії регресії, яка є умовним математичним очікуванням. Саме виходячи з емпіричної лінії регресії робиться припущення (уява) про вид моделі.

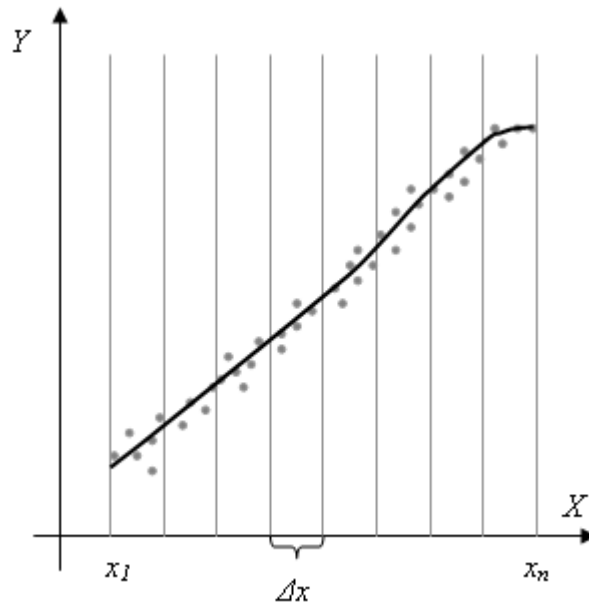


Рисунок 2.1.

Для апроксимації емпіричної лінії регресії використовується поліноміальна модель, що має вигляд:

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x_j + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^n a_{jj} x_j^2 + \dots$$

Метою обробки результатів дослідів є знаходження оцінок коефіцієнтів моделі. На практиці, за рідкісним виключенням, обмежуються другим ступенем. Кожний коефіцієнт дає змогу оцінити вплив окремого фактора на результат.

Якщо кількість факторів 10 та більше, то, для зменшення обсягу моделі, попереду знаходження коефіцієнтів моделі треба оцінити значущість впливу усіх факторів, котрі передбачається включити до моделі. Для цього використовується експеримент з відсіюванням. Останній будується на основі факторних планів 1-го

порядку. Вся сукупність факторів, що має відображатися у моделі, розподіляється на групи по 3-4 фактори у кожній. Якщо передбачається, що є взаємодія факторів, то бажано в одну підгрупу із факторами включити і їх взаємодію. Далі для кожної групи будується матриця повного факторного експерименту (табл. 8.3). Кожній строчці цієї матриці надається свій порядковий номер – у відповідності до випадкового закону розподілу чисел (із рівномірним законом розподілу вірогідності).

Попередня матриця експерименту з відсіюванням має вигляд:

^{I} ^{I}	x_1	x_2	x_3	x_4	^{I} ^{I}	x_5	x_6	x_7	x_8	^{I} ^{I}	x_9	x_{10}
7	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	-1	-1	14	-1	-1
9	+1	-1	-1	-1	1	+1	-1	-1	-1	16	+1	-1
13	-1	+1	-1	-1	8	-1	+1	-1	-1	11	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	11	+1	+1	-1	-1	3	+1	+1
5	-1	-1	+1	-1	12	-1	-1	+1	-1	5	-1	-1
10	+1	-1	+1	-1	3	+1	-1	+1	-1	9	+1	-1
15	-1	+1	+1	-1	7	-1	+1	+1	-1	10	-1	+1
12	+1	+1	+1	-1	14	+1	+1	+1	-1	7	+1	+1
3	-1	-1	-1	+1	15	-1	-1	-1	+1	13	-1	-1
1	+1	-1	-1	+1	4	+1	-1	-1	+1	1	+1	-1
4	-1	+1	-1	+1	2	-1	+1	-1	+1	8	-1	+1
14	+1	+1	-1	+1	13	+1	+1	-1	+1	4	+1	+1
11	-1	-1	+1	+1	16	-1	-1	+1	+1	12	-1	-1
16	+1	-1	+1	+1	10	+1	-1	+1	+1	15	+1	-1
6	-1	+1	+1	+1	9	-1	+1	+1	+1	2	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	6	+1	+1	+1	+1	6	+1	+1

Після того, як таким чином побудовано окремі матриці експерименту, вони всі «зшиваються» в результуючу матрицю експерименту таким чином, щоб в одній строчці опинилися строки з однаковим номером:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\tilde{y}_{1i}$	$\tilde{y}_{2i}$	$\bar{y}_i^I$	$\bar{y}_i^{II}$
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	...	...	...	...
2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	...	...	...	...
3	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	...	...	...	...
4	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	...	...	...	...
5	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	...	...	...	...
6	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	...	...	...	...
7	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	...	...	...	...
8	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	...	...	...	...
9	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	...	...	...	...
10	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	...	...	...	...
11	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	...	...	...	...
12	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	...	...	...	...
13	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	...	...	...	...
14	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	...	...	...	...
15	-1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	...	...	...	...
16	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	...	...	...	...

У відповідності до побудованої матриці проводять експеримент. При цьому для забезпечення повної випадковості вибору, матрицю, що отримано, попередньо ще раз

рандомізують. Рекомендовано проводити для кожного випадку не менш ніж 3 дослідження. Отримані значення та обробляються наступним чином. Спочатку знаходять середнє значення для строки, яке після використовується для визначення значущих факторів. Після цього будується поле розсіяння.

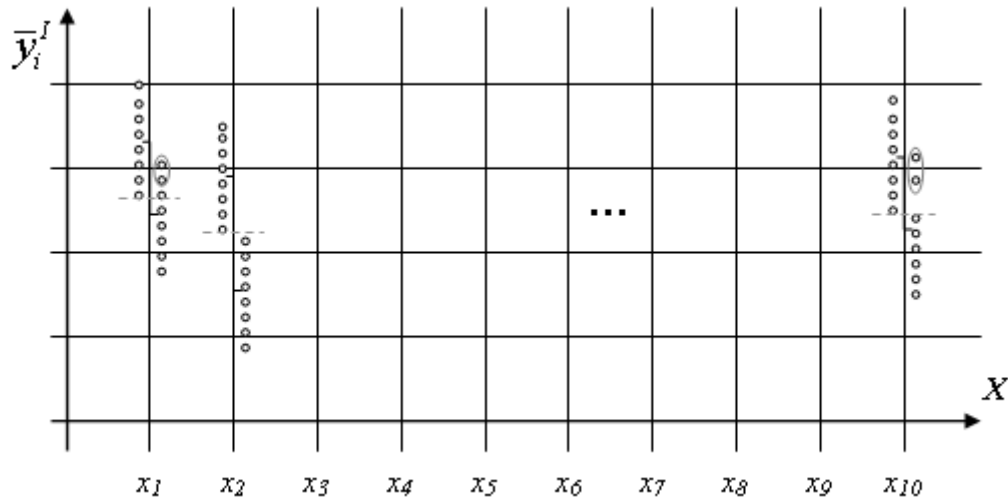


Рисунок 2.2.

Зліва від x_j ($j = \overline{1, 10}$) відкладаємо значення $\bar{y}_i^I$ для випадків коли фактор x_j приймав значення $+1$, а з правого боку – для випадків, коли x_j набував значення -1 .

Для кожного x_j зліва і справа знаходимо медіану для вихідних значень. Графічно оцінюється розмах медіан. Якщо існує фактор x_j , для якого розмах медіани значно перевищує інші, то такий фактор одразу відносять до значущих. Якщо є декілька, на перший погляд значущих факторів, то необхідно розглядати той з них, для якого існують «визначні точки» (○).

«Визначними» називаються ті точки, які геометрично будуть вище за мінімальне значення при $x_j = +1$ та нижче за максимальне значення при $x_j = -1$.

Якщо встановлений один (перший) значущий фактор, то можна за експериментальними даними знайти наближену оцінку коефіцієнта при цьому факторі:

$$\hat{b}_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} \bar{y}_i^I(+) - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} \bar{y}_i^I(-)$$

Фактично це опосередкована різниця середніх значень для $x_j = +1$ та $x_j = -1$. Тобто якщо в розглянутому прикладі вважати, що фактор x_1 значущий, то можна записати:

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{8} (\bar{y}_1^I + \bar{y}_2^I + \bar{y}_8^I + \bar{y}_9^I + \bar{y}_{10}^I + \bar{y}_{12}^I + \bar{y}_{14}^I + \bar{y}_{16}^I) - \frac{1}{8} (\bar{y}_3^I + \bar{y}_4^I + \bar{y}_5^I + \bar{y}_6^I + \bar{y}_7^I + \bar{y}_{11}^I + \bar{y}_{13}^I + \bar{y}_{15}^I).$$

Для подальших кроків експерименту потрібно виключити з результатів $\bar{y}_i^I$ вплив (вклад) цього значущого фактора. Для цього потрібно віднімати значення $\hat{b}_j$ з $\bar{y}_i^I$ в тих строках матриці, де фактор x_j приймає значення $+1$. В інших строках

ніяких змін не відбудеться. Таким чином отримуємо вектор-стовбець $\bar{y}_i^H$. Для цього стовпчика знов будуємо поле розсіяння і т.д. Розглянутий метод має назву методу випадкового балансу.

Процедура виявлення значущих факторів триває до тих пір, доки залишкова дисперсія у заново сформованому стовбці $\bar{y}_i^k$, віднесена до дисперсії відтворюваності, не виявляється незначущою (за критерієм Фішера, тобто коли досягається $F_p < F_T$ дослідження закінчуються).

Практика показала, що зі всієї сукупності факторів, що попередньо включені до поля розсіяння, значущих виявляється не більше 20%.

Якщо на деякому етапі неможливо виділити привуаліруючий фактор, а їх відразу декілька (наприклад 3), то поступають наступним чином. Спочатку будують таблицю (табл. 8.4) комбінації всіх факторів. У відповідну чарунку таблиці заносять значення $\bar{y}_i^I$, яке відповідає даному конкретному співвідношенню знаків («+» та «-»). Після цього знаходять середнє значення для цієї чарунки $\bar{y}_i^I$, а за цими середніми – внесок кожного фактора. Так, наприклад,:

$$\hat{b}_m = \frac{1}{4}(\bar{y}_1^I + \bar{y}_2^I + \bar{y}_3^I + \bar{y}_4^I) - \frac{1}{4}(\bar{y}_5^I + \bar{y}_6^I + \bar{y}_7^I + \bar{y}_8^I).$$

	+x _l		-x _l	
	+x _k	-x _k	+x _k	-x _k
+x _m	+ + + $\bar{y}_1^I$	+ - + $\bar{y}_2^I$	- + + $\bar{y}_3^I$	- - + $\bar{y}_4^I$
-x _m	+ + - $\bar{y}_5^I$	+ - - $\bar{y}_6^I$	- + - $\bar{y}_7^I$	- - - $\bar{y}_8^I$

Таким чином обраховуються $\hat{b}_m$, $\hat{b}_l$ та $\hat{b}_k$, а потім, за правилами алгоритму, віднімають ці значення від $\bar{y}_i^k$ у відповідних строках.

Приклад обробки результатів експерименту.

Модель має вигляд

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$$

Вона містить 2 фактори ($n = 2$). Таким чином кількість дослідів, які необхідно виконати для знаходження коефіцієнтів цієї моделі, становить: $N = 2^n = 2^2 = 4$. Звідси матриця плану експерименту буде мати наступний вигляд:

№	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁ · x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
1	+1	-1	-1	+1	43	35	48
2	+1	+1	-1	-1	90	86	94
3	+1	-1	+1	-1	10	16	16
4	+1	+1	+1	+1	56	54	58

Знаходимо середнє значення та дисперсію результатів проведення кожного досліді: $\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}$; та $S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2$.

В кожному досліді робилося по 3 повторних вимірювання, тобто $m = 3$. Тоді отримуємо:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(43 + 35 + 48) = 42;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{2}[(43 - 42)^2 + (35 - 42)^2 + (48 - 42)^2] = \frac{1 + 49 + 36}{2} = 43;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{3}(90 + 86 + 94) = 90;$$

$$S_2^2 = \frac{1}{2}[(90 - 90)^2 + (86 - 90)^2 + (94 - 90)^2] = \frac{0 + 16 + 16}{2} = 16;$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{3}(10 + 16 + 16) = 14;$$

$$S_3^2 = \frac{1}{2}[(10 - 14)^2 + (16 - 14)^2 + (16 - 14)^2] = \frac{16 + 4 + 4}{2} = 12;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{3}(56 + 54 + 58) = 56;$$

$$S_4^2 = \frac{1}{2}[(56 - 56)^2 + (54 - 56)^2 + (58 - 56)^2] = \frac{0 + 4 + 4}{2} = 4.$$

Для того, щоб перевірити однорідність результатів дослідів скористуємось критерієм Кохрена. Максимальну з усіх дисперсію має 1-ий дослід. Тоді розрахункове значення критерію Кохрена буде дорівнювати:

$$G_p = \frac{43}{43 + 16 + 12 + 4} \approx 0,57,$$

при цьому кількість ступенів вільності чисельника критерію становить: $f_1 = m - 1 = 2$, а знаменника $f_2 = N = 4$. Тоді для рівня статистичної значущості $\alpha = 0,05 \equiv 5\%$ обираємо відповідне табличне значення критерію Кохрена (додаток В): $G_T = 0,768 \approx 0,77$.

Оскільки $G_p < G_T$, то можна стверджувати, що результати дослідів однорідні, а значить умови проведення цих дослідів були однаковими. Тоді за отриманими результатами можна обрахувати коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти моделі знаходяться за формулою: $\hat{a}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} \cdot \bar{y}_i$.

Таким чином розраховуємо:

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{4}[(+1) \cdot 42 + (+1) \cdot 14 + (+1) \cdot 90 + (+1) \cdot 56] = \frac{202}{4} = 50,5;$$

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{4} [(-1) \cdot 42 + (+1) \cdot 90 + (-1) \cdot 14 + (+1) \cdot 56] = \frac{90}{4} = 22,5;$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{4} [(-1) \cdot 42 + (-1) \cdot 90 + (+1) \cdot 14 + (+1) \cdot 56] = \frac{-62}{4} = -15,5;$$

$$\hat{a}_{12} = \frac{1}{4} [(+1) \cdot 42 + (-1) \cdot 90 + (-1) \cdot 14 + (+1) \cdot 56] = \frac{-6}{4} = -1,5.$$

Дисперсія відтворюваності, яка характеризує загальне розсіювання усіх результатів дослідів буде становити:

$$S_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2 = \frac{1}{4} (43 + 16 + 12 + 14) = \frac{75}{4} = 18,75,$$

звідси дисперсія знайдених коефіцієнтів становить:

$$S^2 \{ \hat{a}_j \} = \frac{1}{N \cdot m} \cdot S_a^2 = \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot 18,75 \approx 1,56,$$

$$S \{ \hat{a}_j \} = \sqrt{S^2 \{ \hat{a}_j \}} = \sqrt{1,56} \approx 1,25.$$

Для перевірки статистичної значущості коефіцієнтів моделі використовуємо критерій Стюдента: $t = \frac{|\hat{a}_j|}{S \{ \hat{a}_j \}}.$

Для кожного коефіцієнта моделі розрахункове значення критерію становить:

$$t_0 = \frac{50,5}{1,25} = 40,4; \quad t_1 = \frac{22,5}{1,25} = 18; \quad t_2 = \frac{15,5}{1,25} = 12,4; \quad t_{12} = \frac{1,5}{1,25} = 1,2.$$

Кількість дослідів становить $N = 4$. Тоді для рівня статистичної значущості $\alpha = 0,05 \equiv 5\%$ обираємо табличне значення критерію Стюдента (додаток А) $t_T = 3,182 \approx 3,2$. Оскільки з усіх значень лише $t_{12} < t_T$, тоді припускаємо, що $a_{12} = 0$. Тобто кількість значущих коефіцієнтів моделі становить $l = 3$.

Звідси остаточно модель має такий вигляд:

$$y = 50,5 + 22,5 \cdot x_1 - 15,5 \cdot x_2.$$

Для перевірки адекватності цієї моделі треба отримати розрахункові значення $\hat{y}_i$:

$$\hat{y}_1 = 50,5 \cdot (+1) + 22,5 \cdot (-1) - 15,5 \cdot (-1) = 43,5;$$

$$\hat{y}_2 = 50,5 \cdot (+1) + 22,5 \cdot (+1) - 15,5 \cdot (-1) = 88,5;$$

$$\hat{y}_3 = 50,5 \cdot (+1) + 22,5 \cdot (-1) - 15,5 \cdot (+1) = 12,5;$$

$$\hat{y}_4 = 50,5 \cdot (+1) + 22,5 \cdot (+1) - 15,5 \cdot (+1) = 57,5.$$

На підставі отриманих розрахункових значень можна знайти дисперсію адекватності:

$$S_{\text{ад.}}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 = \frac{3}{4-3} \left[(43,5 - 42)^2 + (88,5 - 90)^2 + (12,5 - 14)^2 + (57,5 - 56)^2 \right] = 3 \cdot [2,25 + 2,25 + 2,25 + 2,25] = 27$$

Адекватність моделі оцінюється за допомогою критерію Фішера:

$$F_P = \frac{S_{\text{ад.}}^2}{S_{\text{в.}}^2} = \frac{27}{18,75} = 1,44,$$

при цьому кількість ступенів вільності для чисельника становить $f_1 = f_{\text{ад}} = N - l = 4 - 3 = 1$, а для знаменника $f_1 = f_{\text{в}} = N(m - 1) = 4 \cdot 2 = 8$. Звідси для рівня статистичної значущості $\alpha = 0,05 \equiv 5\%$ обираємо табличне значення критерію Фішера (додаток Б) $F_T = 5,32$. Оскільки $F_P < F_T$, то із вірогідністю $P = 0,95$ можна стверджувати, що модель адекватна.

Тобто адекватна модель має вигляд $y = 50,5 + 22,5 \cdot x_1 - 15,5 \cdot x_2$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

На основі заданих значень (додаток Е)

1. Побудувати матрицю повного двофакторного експерименту

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$$
2. Перевірити однорідність умов проведення окремих дослідів.
3. Знайти усі значущі коефіцієнти моделі.
4. Перевірити адекватність отриманої моделі

Практичне заняття 3

ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ДАНИХ

Мета заняття на практиці закріпити методику розрахунку коефіцієнтів кореляції по вибірках даних.

Теоретичні відомості та приклади.

Функціональний зв'язок, з точки зору подій, є причинно-наслідковим, тобто зміна однієї величини обов'язково веде до зміни іншої величини. Однак, існує багато подій, для яких зміна однієї події веде до зміни імовірності появи іншої події. Такий зв'язок має назву стохастичний. Мірою лінійної залежності випадкових величин є коваріація, а мірою стохастичного зв'язку двох випадкових величин є коефіцієнт кореляції.

Коваріація двох випадкових величин показує ступень лінійної залежності цих величин одна від одної (мал. 9.1). Тобто це момент зв'язку – математичне очікування добутку відхилень X та Y від центрів:

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y].$$

Фактично, на практиці – це задача прогнозування: коли потрібно вказати межі, в яких знаходиться шукана величина із заданою наперед надійністю (імовірністю), за умови, що інші величини, які пов'язані із нею, набувають певного значення.

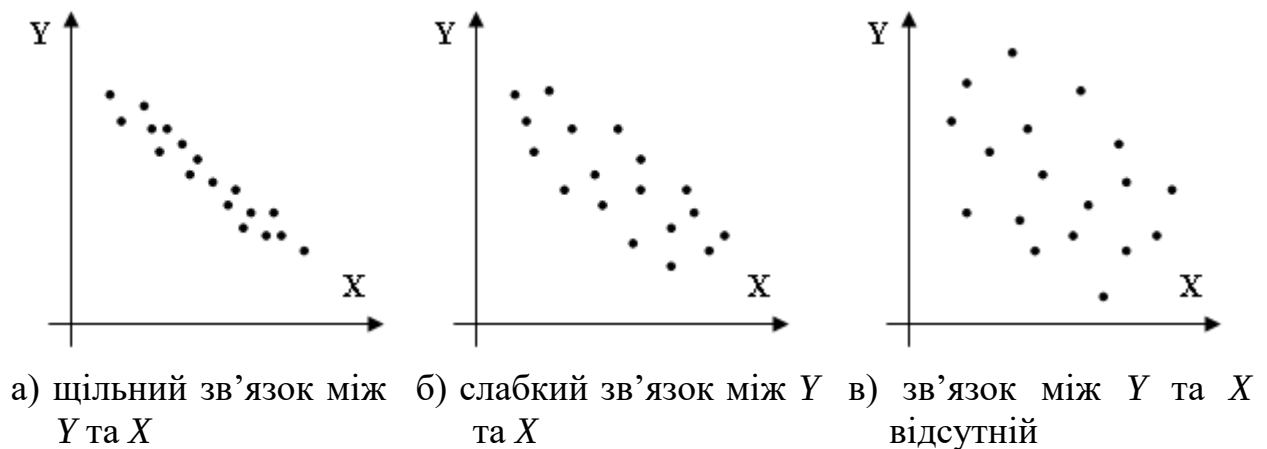


Рисунок 3.1.

Можна стверджувати що коли величини (події) є незалежними, коваріація між ними дорівнює нулю. Однак, зворотне стверджувати не завжди коректно. Тобто величини можуть бути функціонально залежними (події залежать одна від одної), а коваріація дорівнює нулю. Наприклад:

$$Y = \overset{\circ}{X}^2, \quad \text{де} \quad \overset{\circ}{X} = X - M[X].$$

Тоді коваріація буде визначатися як:

$$\text{cov}(X, Y) = M[(Y - M[Y])\overset{\circ}{X}] = M[Y\overset{\circ}{X} - M[Y]\overset{\circ}{X}] = M[Y\overset{\circ}{X}] - M[Y]M[\overset{\circ}{X}] = M[Y\overset{\circ}{X}]$$

при цьому $M[\overset{\circ}{X}] = M[X - M[X]] = M[X] - M[X] = 0$.

Звідси коваріації цих двох величин буде визначатися як

$$M[Y \overset{\circ}{X}] = M[X^2 \overset{\circ}{X}] = M[\overset{\circ}{X}^3] = 0.$$

Тобто в цьому випадку коваріація, а разом з нею і кореляція, дорівнює нулю при наявності функціонального зв'язку. Така ситуація виникла тому, що залежність $Y = X^2$ нелінійна. Мірою щільності лінійного зв'язку є кореляція, тому за умови нелінійності величин вона буде дорівнювати нулю.

При регресійному аналізі (побудова регресійної моделі) вважалося, що X відома (задається) з високою точністю, а випадковість проявляється при знаходженні Y . Тобто при знаходженні $M[X/Y]$ вважалося, що випадкова величина тільки Y .

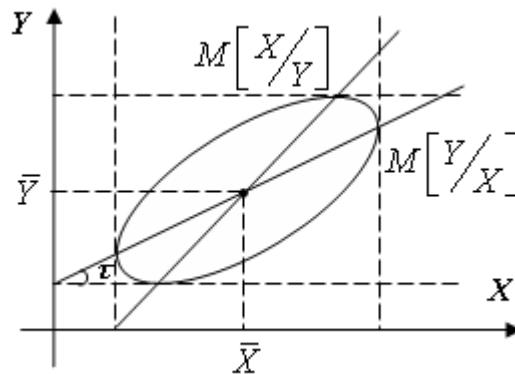


Рисунок 3.2.

Коли випадкові X і Y , то поле кореляції між цілими величинами буде мати форму еліпсу (мал. 9.1). Якщо ввести вертикальні прямі, що дотикаються цього еліпсу, то пряма $M[Y/X]$, що з'єднує точки дотиків буде лінією прямої регресії, а кут її нахилу $\angle \tau$ – коефіцієнтом кореляції (Пірсона):

$$R_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Кореляційна функція.

В техніці всі події відбуваються у часі. Тому мова йде не про випадкові величини або випадкові події, а про випадкові процеси (коли значення величини змінюється у часі).

При вивченні стохастичного (імовірнісного) зв'язку в загальному вигляді необхідно мати N реалізацій випадкового процесу. Тобто вивчається об'єкт N разів на протязі однакових проміжків часу. Для кожної реалізації за результатами експерименту можна знайти оцінку математичного очікування.

На практиці, як правило, до початку обчислення характеристик подій, що розвиваються у часі, проводиться процедура приведення часового ряду до нульового середнього значення. При нульових середніх поняття коваріації і кореляції збігаються. С практичної точки зору ці характеристики різняться лише у повноті інформації – коваріація містить повну інформацію про середню енергію процесу, а кореляція втрачає частину інформації при видаленні середнього значення.

Генеральне математичне очікування $M[Y]$ – є величина, що пропорційна середньому математичних очікувань окремих реалізацій. Звідси, для знаходження імовірнісних характеристик випадкового процесу необхідно мати N його реалізацій. Ця вимога не застосовується до ергодичних випадкових процесів (коли опосередкування за ансамблем реалізацій може бути заміщено опосередкуванням у часі за однією реалізацією). Властивість ергодичності дозволяє будувати вимірювальну апаратуру для вимірювання імовірнісних характеристик випадкового процесу.

Кореляційна функція може бути: автокореляційною (АКФ) або взаємкореляційною (ВКФ).

АКФ показує щільність стохастичного лінійного зв'язку між вибірковими значеннями випадкового процесу, які було відібрано у випадкові моменти часу.

$$K_X(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right].$$

Для безперервного випадкового процесу:

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \cdot w(X, t_1, t_2) \cdot dt.$$

де $w(X, t_1, t_2)$ – функція зміни густини X в часі.

Якщо імовірності характеристики процесу залежать виключно від інтервалу часу між вибірками τ , а не від моментів вибору, то такий процес називається стаціонарним. Його АКФ $K_X(\tau)$ при $\tau=0$ буде $K_X(0)$ – дисперсією. Тому для обчислення нормованої характеристики коефіцієнта кореляції потрібно знайти $K_X(\tau)$. Тоді залежність зміни нормованого коефіцієнта кореляції від інтервалу між вибірками буде мати вигляд:

$$\rho_X = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)}.$$

Апаратно можливо визначити лише окремі ординати залежності.

Функція кореляції з ростом часу τ між вибірковими значеннями завжди буде зменшуватися монотонно або періодично. Критичний час $\tau_n = \tau_{кр}$, по закінченню якого вибіркові значення випадкового процесу будуть вже лінійно зв'язані із значенням ξ , називається інтервалом кореляції. Зазвичай обирають $\xi = 0,05$. Тоді вважають, що залишковою кореляцією можна знехтувати.

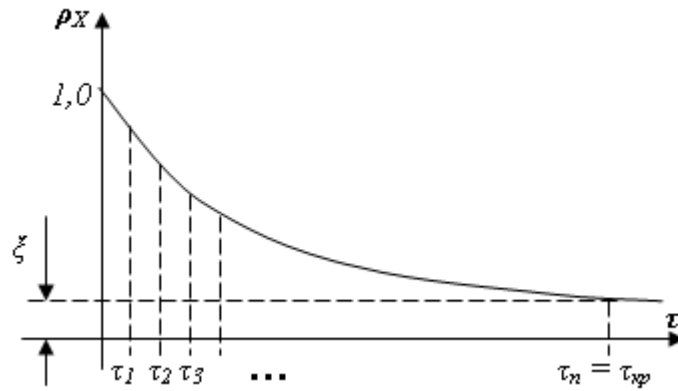


Рисунок 3.3.

Значення інтервалу кореляції має практичне значення. Наприклад, для систем, що мають вимірювальний канал, оскільки ефект опосередкування впливу випадкових похибок вимірювального каналу буде з'являтися тільки тоді, коли отримані значення будуть некорельовані. Значить частота обрання виборок з процесу має бути менша за $\frac{1}{\tau_{kp}}$.

Окрім АКФ є ще й ВКФ для двох випадкових процесів, що розвиваються у часі (мал. 9.5):

$$K_X(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{Y}(t + \tau) \right].$$

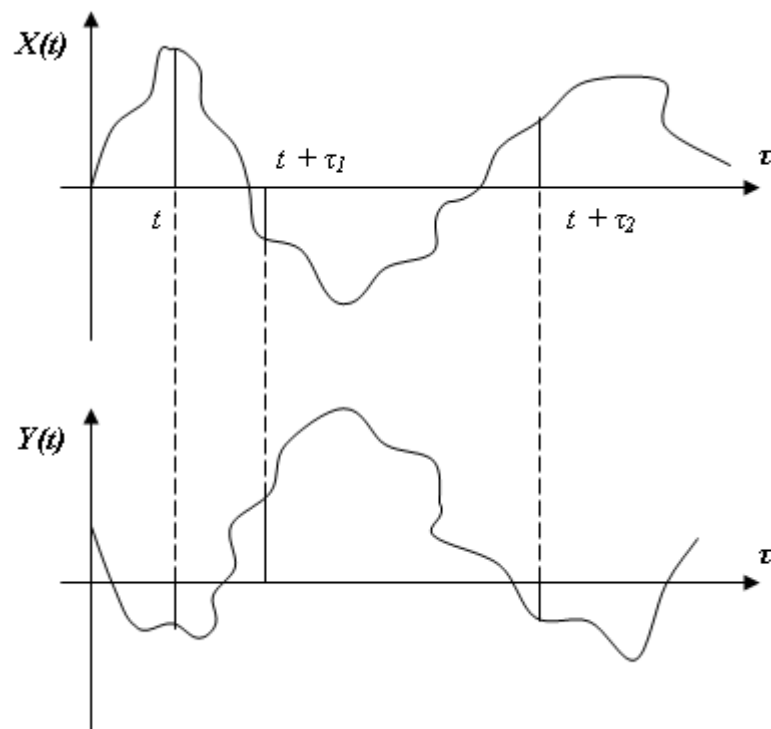


Рисунок 3.4.

Якщо виходити з того, що процес ергодичний (коли опосередкування за ансамблем реалізації може бути заміщено опосередкуванням у часі за однією реалізацією), то для знаходження функції кореляції можна використовувати тільки одну реалізацію. Для ергодичного процесу кореляція матиме вигляд:

$$K_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau) \cdot dt.$$

Це теоретична АКФ. На практиці є обмеження, тому від інтегралу треба перейти до суми:

$$K_X(kT_0) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \overset{\circ}{X}(iT_0) \cdot \overset{\circ}{X}(iT_0 + kT_0).$$

Тобто еквівалентом τ у цьому випадку є k , а T_0 – це, фактично, тактова частота дискретизації:

$$\overset{\circ}{X}(i \cdot T_0) = x(i \cdot T_0) - m_x.$$

Попереду обчислення потрібно або відразу центрувати вибірку (математичне очікування – це нульовий рівень), або обрахувати $\overset{\circ}{X}(i \cdot T_0)$.

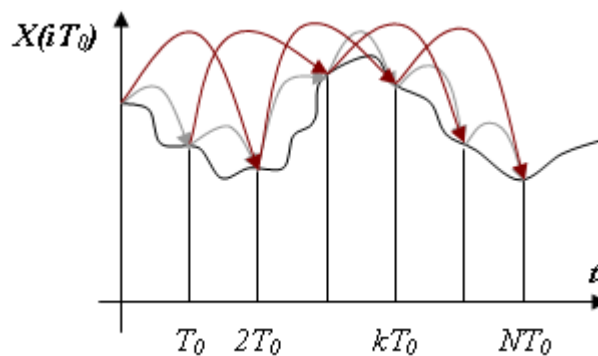


Рисунок 3.5.

$K_X(0)$ – дисперсія;

$K_X(T_0)$ – добуток відліків через T_0 ;

$K_X(2T_0)$ – добуток відліків через $2T_0$;

і т.д.

Саме так знаходять ординати АКФ, за якими будується крива.

Якщо процес не центрований, тоді попередю обрахунків ординати АКФ (або ВКФ) потрібно знайти $\overset{\circ}{X}(i \cdot T_0)$ за формулою (9.1), а вже потім обраховувати наступні опосередкування. Для цього збільшується k від 0 до n (де n – кількість ординат шуканої кореляційної функції) і здійснюється множення вибірових значень, що відстають на інтервал kT_0 . Такій алгоритм має назву послідовного, оскільки відбувається послідовне обчислення ординат кореляційної функції.

Якщо потрібно знайти нормовану кореляційну функцію, то обраховане значення $K_X(kT_0)$ ділиться на $K_X(0)$ и таким чином можна отримати $\rho_X(kT_0)$.

Окрім того, за допомогою послідовного алгоритму можна також знайти і ВКФ:

$$K_{XY}(kT_0) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \overset{o}{X}(iT_0) \cdot \overset{o}{Y}(iT_0 + kT_0).$$

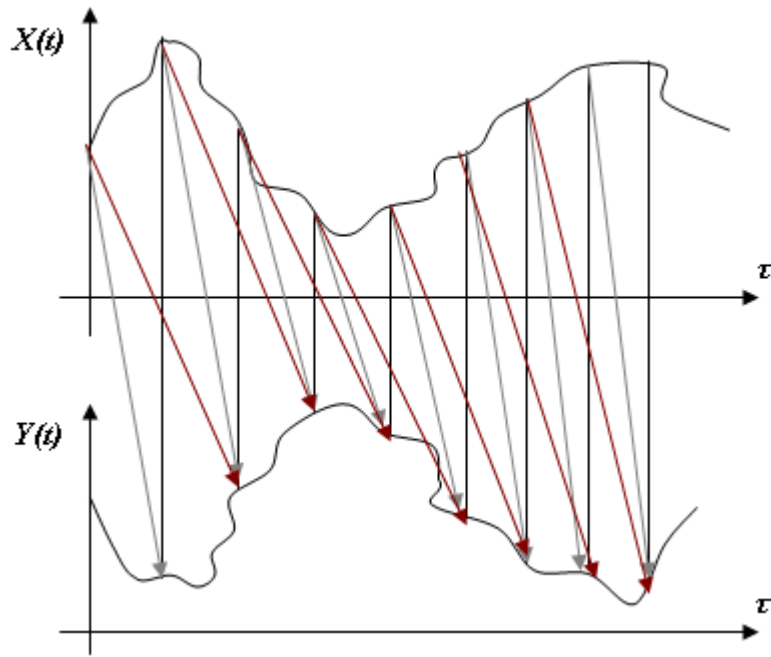


Рисунок 3.6.

Таким чином змішаний момент 1-го порядку – це кореляція. Кореляція є оцінкою щільності стохастичного (імовірнісного) зв'язку двох випадкових величин.

Для оцінки кореляції двох вибірок даних використовують коефіцієнт Пірсона:

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}$$

Вибірковий коефіцієнт автокореляції (кореляція всередині однієї вибірки) оцінюється наступним чином:

$$r_x = \frac{1}{S^2} \cdot \frac{1}{n-l-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \bar{x})(x_{i+l} - \bar{x})$$

де n – загальний обсяг вибірки,

l – зміщення.

Вибірковий коефіцієнт взаємкореляції (функція взаємкореляції для двох вибірок)

$$r_x = \frac{1}{S_x S_y} \cdot \frac{1}{n-l-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \bar{x})(y_{i+l} - \bar{y})$$

Приклад знаходження кореляції даних двох вибірок.

Потрібно знайти кореляцію наступних даних – результати вимірювання паралельного та послідовного з'єднання двох опорів:

	R1	R2
1	50,10	100,20
2	50,20	100,30
3	50,00	100,10
4	50,20	100,40
5	50,30	100,50
6	50,20	100,40
7	50,50	100,90
8	50,30	100,40
9	50,30	100,50
10	50,20	100,30

Для знаходження коефіцієнта кореляції необхідно знайти середнє значення та дисперсії отриманих даних:

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (R_{1i} - \bar{R}_1)(R_{2i} - \bar{R}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (R_{1i} - \bar{R}_1)^2 \sum_{i=1}^{10} (R_{2i} - \bar{R}_2)^2}}$$

Тоді можна отримати наступні проміжні результати:

	R1	R2	$(R_{1i} - \bar{R}_1)$	$(R_{2i} - \bar{R}_2)$	$(R_{1i} - \bar{R}_1)^2$	$(R_{2i} - \bar{R}_2)^2$	$(R_{1i} - \bar{R}_1)(R_{2i} - \bar{R}_2)$
1	50,10	100,20	-0,13	-0,20	0,02	0,04	0,03
2	50,20	100,30	-0,03	-0,10	0,00	0,01	0,00
3	50,00	100,10	-0,23	-0,30	0,05	0,09	0,07
4	50,20	100,40	-0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
5	50,30	100,50	0,07	0,10	0,00	0,01	0,01
6	50,20	100,40	-0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
7	50,50	100,90	0,27	0,50	0,07	0,25	0,14
8	50,30	100,40	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00
9	50,30	100,50	0,07	0,10	0,00	0,01	0,01
10	50,20	100,30	-0,03	-0,10	0,00	0,01	0,00
$\bar{R}$	50,23	100,4	Σ		0,161	0,42	0,25

Таким чином коефіцієнт кореляції становить:

$$r_{12} = \frac{0,25}{\sqrt{0,161 \cdot 0,42}} \approx 0,96$$

Перевіримо його значущість:

$$t_p = \frac{0,96\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,96^2}} \approx 9,88$$

Табличне значення коефіцієнту Ст'юдента (додаток А) в цьому випадку становить $t_T = 2,306$, а оскільки $t_p > t_T$, ро кореляція даних значуща.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

1. Вибрати варіант, що складається з де-кількох вибірок даних вимірювання частоти (додаток Д).

2. Розрахувати коефіцієнт кореляції між окремими вибірками (попарно). Перевірити їх значущість.
3. Розрахувати коефіцієнт кореляції всередині кожної вибірки. Перевірити їх значущість.
4. Зробити висновки щодо взаємозв'язку даних вимірювання частоти за певні періоди часу.

Практичне заняття 4

ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА РОЗМАХУ

Мета заняття на практиці закріпити методику побудови карт середнього та розмаху.

Теоретичні відомості та приклади.

Контрольна карта – це графічний засіб застосовування статистичних методів, важливість яких для керування виробничими процесами була вперше показана доктором Уолтером Шухартом у 1924 р. Теорія контрольних карт розрізняє два види мінливості. Перший вид – випадкові мінливості через «випадкові причини» (відомі ще як «звичайні причини»). Вони зумовлені широким набором причин, що присутні постійно, які нелегко виявити. Кожна з таких причин становить дуже малу частку загальної мінливості, і жодна з них не значима сама по собі. Унеможливлення чи зменшення впливу звичайних причин вимагає управлінських рішень для виділення ресурсів на поліпшення процесу і системи.

Другий вид мінливостей – реальні зміни в процесі. Вони можуть бути наслідком деяких обумовлених причин, не властивих процесу внутрішньо і можуть бути усунуті, принаймні теоретично. Ці причини, які виявляють, розглядають як «невипадкові» чи «особливі» причини зміни. До них можуть бути віднесені недостатня однорідність матеріалу, поломка інструменту, кваліфікація персоналу, невиконання процедур, низька ефективність виробничого чи контрольного устаткування.

Мета контрольних карт – знайти неприродні зміни в даних для процесів, які повторюються, і дати критерії для виявлення недоліку статистичного керування. Процес знаходиться в статистично керованому стані, якщо мінливість викликана тільки випадковими причинами. Після визначення цього прийнятного рівня мінливості будь-яке відхилення від нього вважають результатом дії особливих причин, які варто виявити, вилучити чи послабити.

Карти для кількісних даних можуть описувати вибірккові дані процесу через розкид (мінливість від одиниці до одиниці) і через положення центра (середнє процесу). Тому контрольні карти для кількісних даних майже завжди застосовують і аналізують парами – одна карта для положення центра, інша – для розкиду. Найчастіше використовують пари $\bar{X}$ - та R -карт. Нижче наведено формули контрольних меж (коефіцієнти для відповідних карт – див. додаток Г).

Для $\bar{X}$ -карт

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R};$$

$$\text{Нижня межа керування (НМК)} \quad \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R}.$$

Для R -карт

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad D_3 \cdot \bar{R};$$

Нижня межа керування (НМК) $D_4 \cdot \bar{R}$.

Оцінка можливостей процесу.

У загальному випадку можливості процесу визначають індексом можливостей процесу ІМП (чи С_p):

$$ІМП = \text{номінальний допуск} / \text{розкид процесу} = (ВПЗ - НПЗ) / 6a ,$$

де ВПЗ — верхнє максимально припустиме значення параметра, яке контролюють,

НПЗ — нижнє максимально припустиме значення параметра, яке контролюють,

a — оцінюють за середньою мінливістю всередині підгруп і виражають як s / c_4 або R / d_2 .

За ІМП, меншому ніж 1, можливості процесу неприйнятні, а за ІМП, що дорівнює 1, процес знаходиться на межі потрібних можливостей. На практиці як мінімальне прийнятне значення беруть ІМП = 1,33, оскільки завжди є деякі варіації у вибірках та немає процесів, які завжди знаходяться в статистично керованому стані.

Потрібно зазначити, що ІМП вимірює тільки відношення розкиду процесу і допуску, а положення або центрування процесу не враховують. За високих значень ІМП все-таки можливий вихід частки значень за встановлені межі. Тому важливо також оцінювати відстань між середнім значенням процесу і найближчим гранично допустимим значенням. Подальше обговорення цього питання виходить за рамки цього стандарту.

Приклад.

У таблиці наведено результати вимірювань зовнішнього радіуса втулки. Кожні півгодини робили чотири виміри, усього узято 20 вибірок. Середні і розмахи підгруп розраховано і наведено в таблиці. Встановлено гранично припустимі значення зовнішнього радіуса: 0,219 дм і 0,125 дм. Мета – визначити показники процесу і керування їм за положенням і розкиду так, щоб він відповідав встановленим вимогам.

Підгрупа	Радіус				Середнє	Розмах
	X1	X2	X3	X3	X	R
1	0,1898	0,1729	0,2067	0,1898	0,1898	0,0338
2	0,2012	0,1913	0,1878	0,1921	0,1931	0,0134
3	0,2217	0,2192	0,2078	0,1980	0,2117	0,0237
4	0,1832	0,1812	0,1963	0,1800	0,1852	0,0163
5	0,1692	0,2263	0,2066	0,2091	0,2033	0,0571
6	0,1621	0,1832	0,1914	0,1783	0,1788	0,0293
7	0,2001	0,1927	0,2169	0,2082	0,2045	0,0242
8	0,2401	0,1825	0,1910	0,2264	0,2100	0,0576
9	0,1996	0,1980	0,2076	0,2023	0,2019	0,0096
10	0,1783	0,1715	0,1829	0,1961	0,1822	0,0246
11	0,2166	0,1748	0,1960	0,1923	0,1949	0,0418
12	0,1924	0,1984	0,2377	0,2003	0,2072	0,0453
13	0,1768	0,1986	0,2241	0,2022	0,2004	0,0473
14	0,1923	0,1876	0,1903	0,1986	0,1922	0,0110

15	0,1924	0,1996	0,2120	0,2160	0,2050	0,0236
16	0,1720	0,1940	0,2116	0,2320	0,2049	0,0600
17	0,1824	0,1790	0,1876	0,1821	0,1828	0,0086
18	0,1812	0,1585	0,1699	0,1680	0,1694	0,0227
19	0,1700	0,1567	0,1694	0,1702	0,1666	0,0135
20	0,1698	0,1664	0,1700	0,1600	0,1666	0,0100

Розрахуємо середні значення

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} = \frac{3,8480}{20} = 0,1924$$

$$\bar{\bar{R}} = \frac{\sum R}{k} = \frac{0,5734}{20} = 0,0287$$

де k – число підгруп, $k = 20$.

Перший етап: побудова R-карти і визначання за нею стану процесу.

Центральна лінія $\bar{\bar{R}} = 0,0287$;

ВМК $D_4 \cdot \bar{\bar{R}} = 2,282 \cdot 0,0287 = 0,0655$;

НМК $D_3 \cdot \bar{\bar{R}} = 0 \cdot 0,0287 = 0$ (оскільки $n < 7$, то НКМ не зображують).

Значення множників D_3 і D_4 , узяті з таблиці (додаток Г).

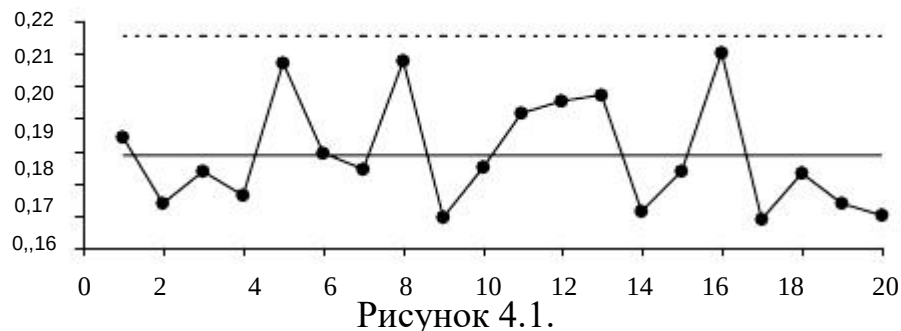


Рисунок 4.1.

Оскільки значення $\bar{\bar{R}}$ в таблиці знаходяться всередині контрольних меж, R-карта вказує на статистично керований стан. Значення $\bar{\bar{R}}$ тепер може бути використано для обчислювання контрольних меж X-карти.

Другий етап: побудова X-карти і визначання за нею стану процесу

Центральна лінія $\bar{\bar{x}} = 0,1924$;

ВМК $\bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{\bar{R}} = 0,1924 + (0,729 \cdot 0,0287) = 0,2133$;

НМК $\bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{\bar{R}} = 0,1924 - (0,729 \cdot 0,0287) = 0,1715$.

Значення множника A_2 обирають для $n = 4$ (додаток Г).

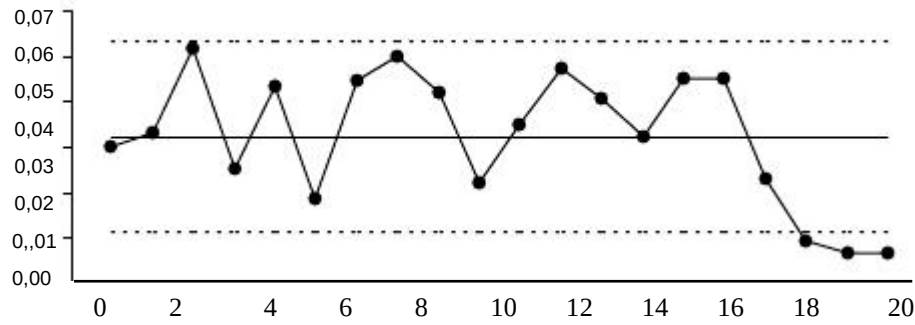


Рисунок 4.2.

Аналіз X-карти показує, що останні три точки вийшли за межі. Це вказує на можливість впливу деяких особливих причин варіацій. Якщо межі були обчислені на основі попередніх даних, то треба вживати певних заходів в точці, що відповідає 18-й підгрупі.

У цій точці процесу варто зробити відповідну корегувальну дію, щоб усунути особливі причини і запобігти їхньому повторенню. Роботу з картами продовжують після встановлення переглянутих контрольних меж без вилючених точок, що вийшли за старі межі, тобто значень для 18-ої, 19-ої та 20-ої вибірок. Значення $\bar{X}$, R і лінії контрольної карти перераховують у такий спосіб:

$$\text{Переглянуте значення } \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} = \frac{3,3454}{17} = 0,1968$$

$$\text{Переглянуте значення } \bar{\bar{R}} = \frac{\sum R}{k} = \frac{0,5272}{17} = 0,0310$$

Переглянута X -карта

Центральна лінія $\bar{\bar{x}} = 0,1968$;

ВМК $\bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{\bar{R}} = 0,1968 + (0,729 \cdot 0,0310) = 0,2194$;

НМК $\bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{\bar{R}} = 0,1968 - (0,729 \cdot 0,0310) = 0,1742$.

Переглянута R-карта

Центральна лінія $\bar{\bar{R}} = 0,0310$;

ВМК $D_4 \cdot \bar{\bar{R}} = 2,282 \cdot 0,0310 = 0,0707$;

НМК $D_3 \cdot \bar{\bar{R}} = 0 \cdot 0,0310 = 0$

Для стабільного процесу з переглянутими контрольними межами можна оцінити можливості. Розрахуємо оцінку середньої мінливості підгруп:

$$a = R / d_2 = 2,2312 / 2,259 = 2,2151.$$

Значення d_2 беруть з таблиці (додаток Г) для $n = 4$.

Обчислимо індекс можливостей:

$$ІМП = \frac{0,2190 - 0,1250}{6 \cdot 0,0151} = \frac{0,0940}{0,0910} = 1,0330$$

Оскільки ІМП більше ніж 1, можливості процесу можна вважати прийнятними.

Проте під час ретельного вивчення можна побачити, що процес не налаштований правильно щодо допуску і тому біля 11,8 % одиниць будуть виходити за встановлене верхнє гранично припустиме значення ВПЗ. Тому, перед тим, як встановити постійні параметри контрольних карт, потрібно спробувати правильно настроїти процес, підтримуючи його під час цієї процедури в статистично керованому стані.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

1. Вибрати варіант, що складається з де-кількох вибірок даних вимірювання частоти (додаток Д).
2. Побудувати карти Шухарта для середнього та розмаху.
3. Розрахувати та нанести на карти відповідні межі регулювання.
4. Зробити висновок щодо можливості процесу.

Практичне заняття 5

ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА СКВ

Мета заняття на практиці закріпити методику побудови карт середнього та СКВ.

Теоретичні відомості та приклади.

Карти для кількісних даних можуть будуватися парою $\bar{X}$ - та S -карта. Нижче наведено формули контрольних меж (коефіцієнти для відповідних карт – див. додаток Г).

Для $\bar{X}$ -карт

Верхня межа керування (ВМК) $\bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{R}$;

Нижня межа керування (НМК) $\bar{\bar{x}} - A_4 \cdot \bar{R}$.

Для S -карт

Верхня межа керування (ВМК) $B_3 \cdot \bar{s}$;

Нижня межа керування (НМК) $B_4 \cdot \bar{s}$.

Далі все аналогічно прикладу (див. заняття 5)

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

1. Вибрати варіант, що складається з де-кількох вибірок даних вимірювання частоти (додаток Д).
2. Побудувати карти Шухарта для середнього та СКВ.
3. Розрахувати та нанести на карти відповідні межі регулювання.
4. Зробити висновок щодо можливості процесу.

Практичне заняття 6

ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ДАНИХ: ПОБУДОВА КАРТ СЕРЕДНЬОГО ТА СКВ ІЗ ЗАДАНИМИ СТАНДАРТНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ

Мета заняття на практиці закріпити методику побудови карт середнього та СКВ із заданими стандартними значеннями.

Теоретичні відомості та приклади.

Карти для кількісних даних можуть будуватися парою $\bar{X}$ - та S -карта. Нижче наведено формули контрольних меж (коефіцієнти для відповідних карт – див. додаток Г) з урахуванням того, що задані стандартне значення характеристики x_0 та стандартне значення відхилення σ_0 .

Для $\bar{X}$ -карт

Верхня межа керування (ВМК) $x_0 + A \cdot \sigma_0$;

Нижня межа керування (НМК) $x_0 - A \cdot \sigma_0$.

Для S -карт

Верхня межа керування (ВМК) $B_5 \cdot \sigma_0$;

Нижня межа керування (НМК) $B_6 \cdot \sigma_0$.

Приклад.

Менеджер з якості імпортера чаю висуває до процесу пакування такі вимоги, щоб середня вага пакування була 100,6 г. У цьому разі стандартне відхилення процесу дорівнює 1,4 г – воно отримане на основі аналогічних пакувальних процесів.

Підгрупа №	Середнє підгрупи $\bar{X}$	Розмах підгрупи R
1	100,6	3,4
2	101,3	4,0
3	99,6	2,2
4	100,5	4,5
5	99,9	4,8
6	99,5	3,8
7	100,4	4,1
8	100,5	1,7
9	101,1	2,2
10	100,3	4,6
11	100,1	5,0
12	99,6	6,1
13	99,2	3,5
14	99,4	5,1
15	99,4	4,5

16	99,6	4,1
17	99,3	4,7
18	99,9	5,0
19	100,5	3,9
20	99,5	4,7
21	100,1	4,6
22	100,4	4,4
23	101,1	4,9
24	99,9	4,7
25	99,7	3,4

Оскільки стандартні значення задано ($X_0 = 100,6$; $\sigma_0 = 1,4$), контрольні карти середніх і розмахів можна побудувати з використанням формул і коефіцієнтів A , d_2 , D_2 і D_1 для $n = 5$ (додаток Г).

X -карта:

Центральна лінія $x_0 = 100,6$;

ВМК $x_0 + A \cdot \sigma_0 = 100,6 + (1,342 \cdot 1,4) = 102,52$;

НМК $x_0 - A \cdot \sigma_0 = 100,6 - (1,342 \cdot 1,4) = 98,72$.

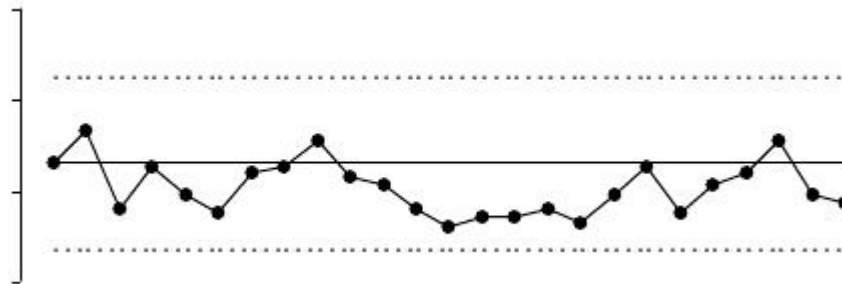


Рисунок 5.1.

R-карта:

Центральна лінія $d_2 \sigma_0 = 2,326 \cdot 1,4 = 3,32$;

ВМК $D_2 \cdot \sigma_0 = 4,918 \cdot 1,4 = 6,92$;

НМК $D_1 \cdot \sigma_0 = 0 \cdot 1,4 = 0$ (оскільки $n < 7$, то НКМ не зображують).

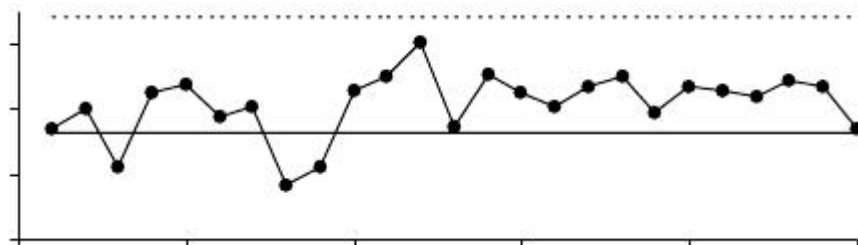


Рисунок 5.2.

Карти показують, що процес не знаходиться в статистично керованому стані на необхідному рівні, тому що є послідовність із 13 точок, що лежать нижче центральної лінії на X-карті і послідовності із 16 точок – вище центральної лінії на R-карті.

Причина такої довгої послідовності низьких значень середнього має бути досліджена й усунена.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

1. Вибрати варіант, що складається з де-кількох вибірок даних вимірювання частоти (додаток Д).
2. Побудувати карти Шухарта для середнього та стандартного відхилення.
3. Розрахувати та нанести на карту середнього межі регулювання для заданого стандартного значення $f_0 = (50 \pm 0,02) \text{ Гц}$ та СКВ $\pm 1\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$.
4. Проаналізувати отримані залежності. Виявити та описати тенденції.
5. 4. Зробити висновок.

Практичне заняття 7

ЗАСТОСУВАННЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ СТАТИСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ. КАРТИ ДЛЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ (ЯКІСНИХ) ДАНИХ

Мета заняття на практиці закріпити методику побудови карт для альтернативних (якісних) даних.

Теоретичні відомості та приклади.

Альтернативні дані являють собою спостереження, що фіксують наявність або відсутність деяких характеристик (або ознак) у кожній одиниці аналізованої підгрупи. На основі цих даних проводять підрахунок кількості одиниць, що мають чи не мають дану ознаку, або скільки таких подій в одиниці продукції, групі або області. Альтернативні дані в загальному випадку можуть бути отримані швидко і дешево, для збору їх не потрібно спеціального навчання. Нижче наведено формули контрольних меж для контрольних карт, що використовують альтернативні дані:

Для частки невідповідних елементів у підгрупі p (кількість невідповідних елементів у підгрупі або обсяг підгрупи) з однаковим обсягом вибірок:

Центральна лінія: $\bar{p}$

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}};$$

$$\text{Нижня межа керування (НМК)} \quad \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}.$$

Для кількості невідповідних елементів у підгрупі np :

Центральна лінія: $n \cdot \bar{p}$

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad n \cdot \bar{p} + 3\sqrt{n \cdot \bar{p}(1-\bar{p})};$$

$$\text{Нижня межа керування (НМК)} \quad n \cdot \bar{p} - 3\sqrt{n \cdot \bar{p}(1-\bar{p})}.$$

Для кількості невідповідностей в підгрупі c :

Центральна лінія: $\bar{c}$

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}};$$

$$\text{Нижня межа керування (НМК)} \quad \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}.$$

Для кількості невідповідностей на одиницю в підгрупі u :

Центральна лінія: $\bar{u}$

$$\text{Верхня межа керування (ВМК)} \quad \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}};$$

$$\text{Нижня межа керування (НМК)} \quad \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}.$$

Приклад p - та np -карти.

Задано число невідповідних одиниць на годину з урахуванням несправностей,

знайдених за 100% контролю невеликих вимикачів за допомогою пристроїв автоматичного контролю. Вимикачі роблять на автоматичній складальній лінії. Оскільки несправність серйозна, для визначання моменту виходу збиральної лінії зі статистично керованого стану використовують контрольну карту частки невідповідних одиниць. *p*-карта отримана під час збирання попередніх даних за 25 підгруп, кожна з яких складається з 4000 вимикачів.

Пвдгрупа	Проконтрольована кількість вимикачів <i>n</i>	Число невідповідних вимикачів <i>np</i>	Частка невідповідностей <i>p</i>
1	4000	8	0,200
2	4000	14	0,350
3	4000	10	0,250
4	4000	4	0,100
5	4000	13	0,325
6	4000	9	0,225
7	4000	7	0,175
8	4000	11	0,275
9	4000	15	0,375
10	4000	13	0,325
11	4000	5	0,125
12	4000	14	0,350
13	4000	12	0,300
14	4000	8	0,200
15	4000	15	0,375
16	4000	11	0,275
17	4000	9	0,225
18	4000	18	0,450
19	4000	6	0,150
20	4000	12	0,300
21	4000	6	0,150
22	4000	12	0,300
23	4000	8	0,200
24	4000	15	0,375
25	4000	14	0,350
Всього	100000	269	

Побудова p -карти:

$$\text{Центральна лінія: } \bar{p} = \frac{8+14+\dots+14}{4000 \cdot 25} = \frac{269}{100000} = 0,0027,$$

це складає 0,27%.

$$\text{ВМК: } \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0,0027 + 3\sqrt{\frac{0,0027(1-0,0027)}{4000}} = 0,0052$$

це складає 0,52%.

$$\text{НМК: } \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0,0027 - 3\sqrt{\frac{0,0027(1-0,0027)}{4000}} = 0,0002$$

це складає 0,02%.

Будуємо p -карту:

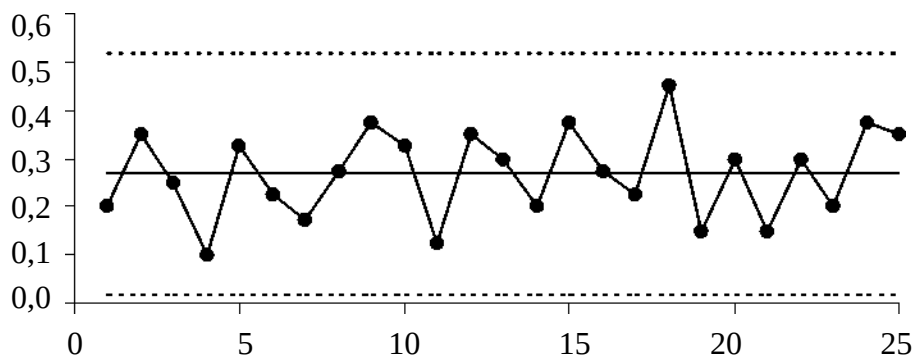


Рисунок 7.1.

Карта показує, що якість вимикачів знаходиться в керованому стані, хоча частка невідповідностей, напевне, занадто велика. Ці контрольні межі можуть бути використані для майбутніх підгруп, допоки процес не зміниться або вийде зі статистично керованого стану. Коли ж процес знаходиться в стані статистичної керованості, навряд чи можливе яке-небудь удосконалення без зміни самого процесу. У такому разі не досить бути просто «обережнішими».

Якщо здійснене поліпшення процесу, треба обчислити нові контрольні межі для майбутніх підгруп, щоб врахувати змінену якість процесу. Якщо процес поліпшений (значення p зменшилося), то потрібно використовувати нові межі. Якщо процес був погіршений (значення p збільшилося), треба знайти додаткові невинні причини.

Побудова np -карти:

$$\text{Центральна лінія: } n \cdot \bar{p} = \frac{8+14+\dots+14}{25} = \frac{269}{25} = 10,76,$$

$$\text{ВМК: } n \cdot \bar{p} + 3\sqrt{n \cdot \bar{p}(1-\bar{p})} = 10,76 + 3\sqrt{10,76(1-0,0027)} = 20,59$$

$$\text{НМК: } n \cdot \bar{p} - 3\sqrt{n \cdot \bar{p}(1-\bar{p})} = 10,76 - 3\sqrt{10,76(1-0,0027)} = 0,93$$

Будуємо *np*-карту:

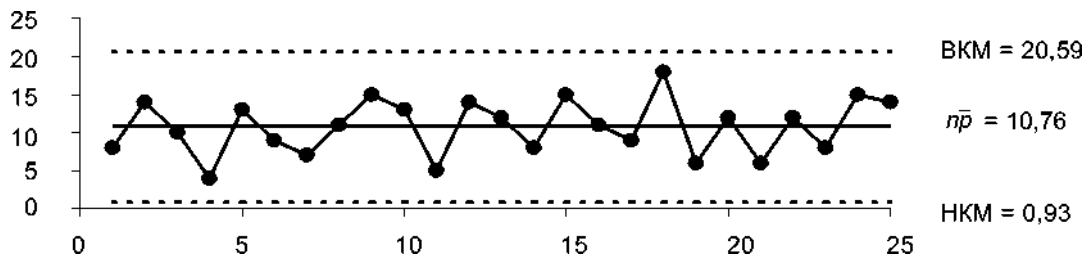


Рисунок 7.2.

Приклад *c*-карти.

Виробник відеокасет бажає управляти кількістю точкових невідповідностей на відеострічці. Відеострічку виробляють довжиною 4000 м. Подані дані показують число точкових невідповідностей, знайдених послідовним обстеженням поверхні 20 мотків відеострічки, кожний довжиною 350 м, з одного виробничого процесу, причому обстежували один край стрічки.

Щоб управляти цим процесом, намічено застосовувати *c*-карту, наносячи число точкових невідповідностей. Дані для 20 мотків наведено нижче.

Номер мотка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Всього
Кількість точкових невідповідностей	7	1	2	5	0	6	2	0	4	4	6	3	3	3	1	6	3	1	5	6	68

Побудова *c*-карти:

$$\text{Центральна лінія: } \bar{c} = \frac{7+1+\dots+6}{20} = \frac{68}{20} = 3,4,$$

$$\text{ВМК: } \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 3,4 + 3\sqrt{3,4} = 8,9$$

$$\text{НМК: } \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 3,4 - 3\sqrt{3,4} = -2,1$$

Оскільки негативні значення неможливі, то нижня межа відсутня.

Будуємо *c*-карту:

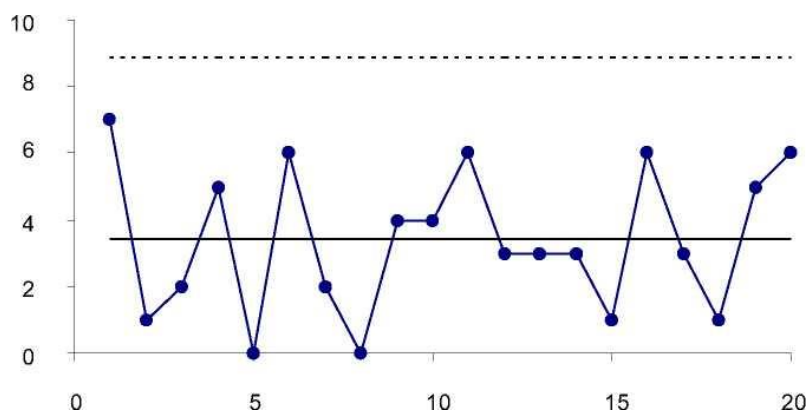


Рисунок 7.3.

Приклад u -карти.

На заводі з виробництва шин кожні півгодини контролювали 15 шин і записували загальне число невідповідностей і кількість невідповідностей на одиницю. Було вирішено застосувати u -карту для числа невідповідностей на одиницю, щоб визначити стан процесу.

Номер підгрупи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Всього
c : Число невідповідностей	4	5	3	6	2	1	5	6	2	4	7	5	2	3	55
u : Число невідповідностей на одиницю	0,27	0,33	0,20	0,40	0,13	0,07	0,33	0,40	0,13	0,27	0,47	0,33	0,13	0,20	

Побудова u -карти:

$$\text{Центральна лінія: } \bar{u} = \frac{\sum c}{\sum n} = \frac{55}{14 \cdot 15} = 0,26,$$

14·15 – це загальне число проконтрольованих одиниць.

$$\text{ВМК: } \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 0,26 + 3\sqrt{\frac{0,26}{15}} = 0,65$$

$$\text{НМК: } \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 0,26 - 3\sqrt{\frac{0,26}{15}} = -0,13$$

Оскільки негативні значення неможливі, то нижня межа відсутня.

Будуємо u -карту:

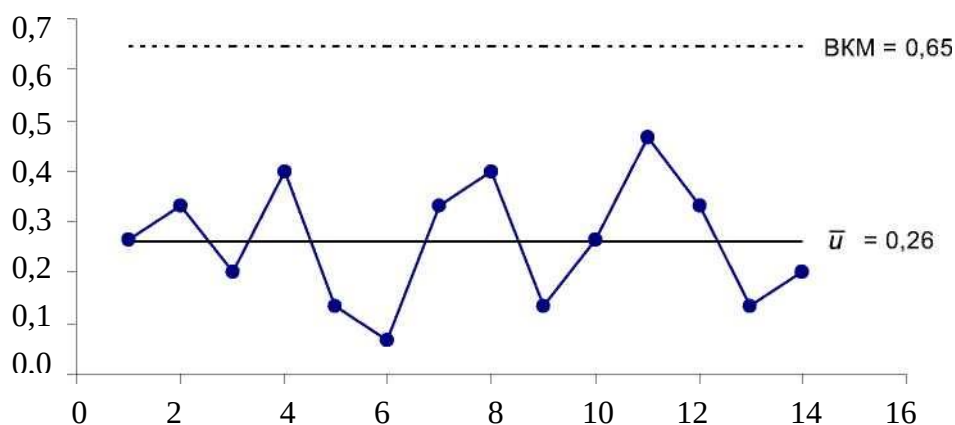


Рисунок 7.4.

Карта показує, що процес знаходиться в стані статистичної керованості. Відзначимо, що оскільки обсяги підгруп постійні, можна застосувати і c -карту.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

Індивідуальні завдання не передбачені.

Практичне заняття 8

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ

Мета заняття отримати знання щодо можливих інтерпретацій контрольних карт.

Теоретичні відомості та приклади.

Система карт Шухарта спирається на той факт, що коли мінливість процесу від елементу до елементу і середнє процесу залишаються постійними на даних рівнях (оцінених, відповідно, за R та X), то розмахи (R) та середні (X) окремих підгруп будуть змінюватися тільки випадковим чином і нечасто виходити за контрольні межі. Також не повинно бути очевидних трендів або структур даних, окрім тих, що виникають випадково з деякою часткою імовірності.

X -карта показує, де знаходиться середнє процесу і віддзеркалює стабільність процесу. X - карта виявляє небажані варіації між підгрупами і варіації відносно їх середнього. R -карта виявляє будь-яку небажану варіацію всередині підгруп і служить індикатором мінливості процесу, який досліджують. Це міра слухності (консистентності) і однорідності процесу. Якщо R -карта показує, що варіації всередині підгруп не змінюються, то це означає, що процес залишається в статистично керованому стані. Це має місце тільки в тому випадку, якщо всі вибірки обробляли однаково. Якщо R -карта показує, що процес вийшов з керованого стану або рівень на R -карті зростає, то це може означати, що або окремі підгрупи зазнали різного оброблення, або в процесі діє декілька різних систем причинно-наслідкових зв'язків.

На X -карту також можуть впливати умови, за яких процес вийшов зі стану статистичної керованості за R -карти. Можливість інтерпретувати розмахи або середні значення підгруп залежить від оцінювання мінливості від елементу до елементу, тому R -карту необхідно аналізувати першою. Треба слідувати наступній процедурі керування.

1. Збирають і аналізують дані, обчислюють середні і розмахи.

2. Спочатку будують R -карту. Зіставляють нанесені точки розмахів зі контрольними межами, виділяють точки поза межами, незвичайні структури або тренди. Для кожного сигналу про наявність невикладкової причини в значеннях розмаху аналізують операції процесу, щоб визначити причину. Проводять корегувальні дії і дії щодо запобігання повторенню даної причини.

3. Вилучають усі підгрупи, на як і вплинула невикладкова причина; потім перераховують і наносять на карту нові середній розмах (R) і контрольні межі. Необхідно отримати підтвердження того, що всі точки розмахів під час порівняння з новими межами вказують на статистичну керованість, і, якщо потрібно, повторити послідовність дій: ідентифікування — коригування — перерахування.

4. Якщо деякі підгрупи вилучено з R -карти через виявлені особливі причини, їх треба вилучити і з X -карти. Переглянуті значення R та X треба використати для перерахування пробних контрольних меж для середніх: $X \pm A_2 R$.

Вилучення підгруп, що представляють причину виходу процесу зі стану статистичної керованості, це не «вилучення поганих даних». Швидше за все, тут вилучають точки, на які вплинули відомі не випадкові причини, і ми дістаємо кращу оцінку основного рівня мінливості через випадкові причини. Це в свою чергу дає найвідповіднішу основу для контрольних меж, застосовування яких дозволяє найефективніше виявляти майбутні вияви не випадкових причин варіацій.

5. Коли розмахи знаходяться в статистично керованому стані, розкид процесу (відхилення всередині підгруп) вважають стабільним. У цьому випадку можна проаналізувати середні, щоб побачити, чи міняється у часі середнє значення процесу.

6. Тепер будують X-карту і порівнюють точки з контрольними межами. Виділяють точки поза межами, незвичайні структури точок або тренди так само як і для R-карти необхідно аналізувати будь-який зі станів статистичної некерованості і провести корегувальні і попереджувальні заходи. Треба вилучити точки, які характеризують цей стан і для яких були знайдені не випадкові причини; повторно обчислити і нанести на графік нове середнє процесу ($\bar{X}$) та контрольні межі. Перевіряють, щоб, порівняно з новими межами, всі точки показували статистично керований стан, за необхідності поновлюючи послідовність дій: ідентифікування – коригування – перерахування.

7. Якщо початкові дані для встановлення еталонних значень контрольних меж розташовують лише всередині пробних меж, розширюють межі, щоб охопити майбутні дані. Виконавці (оператор і (або) майстер) повинні користуватися цими межами для подальшого керування процесом, реагувати на сигнали про вихід процесу з керованого стану на будь-якій з X - та R-карт і виконувати належні дії.

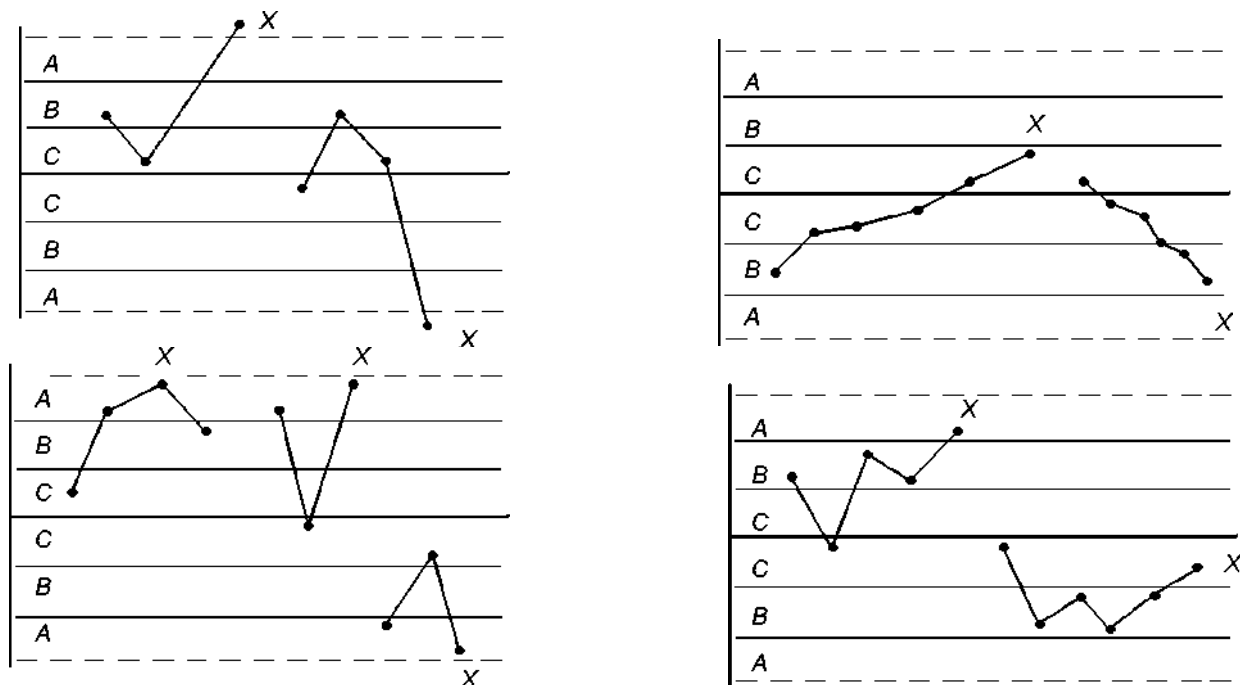


Рисунок 8.1.

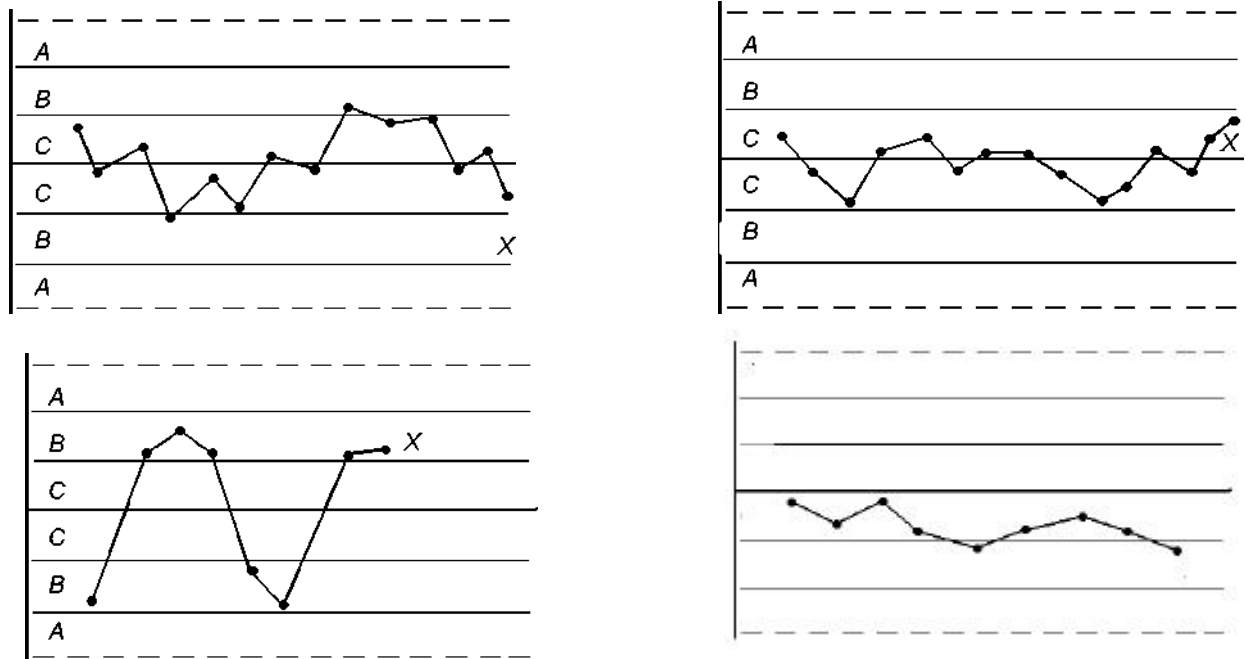


Рисунок 8.2.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

Проаналізувати результати виконання попередніх індивідуальних завдань і надати рекомендації щодо керування процесом.

Список рекомендованої літератури.

1. Статистичний контроль. Контрольні карти Шухарта (ISO 8258:1991, IDT). ДСТУ ISO 8258-2001 – [Чинний]. – К.: Держспоживстандарт України, 2003. – 32 с. – (Національний стандарт України).
2. Володарський Є.Т. Статистична обробка даних: Навч. Посібник. / Є.Т. Володарський Л.О., Кошева – К.: НАУ, 2008 – 308 с.
3. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабальок. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с. – Бібліогр.: с.205.
4. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с.
5. Ковальчук В.В. Основи наукових досліджень. Навчальний посібник. / В.В. Ковальчук – К.: Видавничий Дім «Слово», 2009. – 240 с.
6. Дистанційний курс «Наукова робота за темою магістерської дисертації-1. Основи наукових досліджень», розміщений на платформі дистанційного навчання "Сікорський" – режим доступу: <https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=3323>.

ДОДАТОК А

Значення верхніх меж статистики Стюдента в залежності від кількості ступенів вільності f та рівня статистичної значущості α .

$\alpha \backslash f$	20%	10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,6192
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
32	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007
36	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	3,5821
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510
42	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377
44	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258
46	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150
48	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960
55	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2451	3,4764
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602
65	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,9060	3,2204	3,4466
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163

ДОДАТОК Б

Значення 5% верхніх меж статистики Фішера в залежності від кількості ступенів вільності f_1 та f_2 .

$f_2 \backslash f_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	245,9	248,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,18	2,10
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,13	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,06	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,03	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93

ДОДАТОК В

Значення 5% верхніх меж статистики Кохрена в залежності від кількості ступенів вільності f_1 та f_2 .

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8159	0,7880	0,7341	0,6602	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,0797	0,7454	0,7071	0,6771	0,6333	0,6025	0,5466	0,4748	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5175	0,4884	0,4366	0,3720	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4387	0,4118	0,3645	0,3066	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3817	0,3568	0,3135	0,2612	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3384	0,3154	0,2756	0,2278	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3043	0,2829	0,2462	0,2022	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,7276	0,3067	0,2768	0,2568	0,2226	0,1820	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2541	0,2353	0,2032	0,1655	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2187	0,2020	0,1737	0,1403	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1815	0,1671	0,1429	0,1144	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1422	0,1303	0,1108	0,0879	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1216	0,1113	0,0942	0,0743	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1001	0,0921	0,0771	0,0604	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,5950	0,0713	0,0595	0,0462	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0552	0,0497	0,0411	0,0316	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0292	0,0266	0,0218	0,0165	0,0083

ДОДАТОК Г

Коефіцієнти для побудови контрольних карт Шухарта.

Кількість спостережень у підгрупі, n	Коефіцієнти для обчислювання контрольних меж											Коефіцієнти для обчислювання центральної лінії			
	A	A ₂	A ₃	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	D ₁	D ₂	D ₃	O ₄	C ₄	1/C ₄	d ₂	1/d ₂
2	2,121	1,880	2,659	0,000	3,267	0,000	2,606	0,000	3,686	0,000	3,267	0,7979	1,2533	1,128	0,8865
3	1,732	1,023	1,954	0,000	2,568	0,000	2,276	0,000	4,358	0,000	2,574	0,8862	1,1284	1,693	0,5907
4	1,500	0,729	1,628	0,000	2,266	0,000	2,088	0,000	4,698	0,000	2,282	0,9213	1,0854	2,059	0,4857
5	1,342	0,577	1,427	0,000	2,089	0,000	1,964	0,000	4,918	0,000	2,114	0,9400	1,0638	2,326	0,4299
6	1,225	0,483	1,287	0,030	1,970	0,029	1,874	0,000	5,078	0,000	2,004	0,9515	1,0510	2,534	0,3946
7	1,134	0,419	1,182	0,118	1,882	0,113	1,806	0,204	5,204	0,076	1,924	0,9594	1,0423	2,704	0,3698
8	1,061	0,373	1,099	0,185	1,815	0,179	1,751	0,388	5,306	0,136	1,864	0,9650	1,0363	2,847	0,3512
9	1,000	0,337	1,032	0,239	1,761	0,232	1,707	0,547	5,393	0,184	1,816	0,9693	1,0317	2,970	0,3367
10	0,949	0,308	0,975	0,284	1,716	0,276	1,669	0,687	5,469	0,223	1,777	0,9727	1,0281	3,078	0,3249
11	0,905	0,285	0,927	0,321	1,679	0,313	1,637	0,811	5,535	0,256	1,744	0,9754	1,0252	3,173	0,3152
12	0,866	0,266	0,886	0,354	1,646	0,346	1,610	0,922	5,594	0,283	1,717	0,9776	1,0229	3,258	0,3069
13	0,832	0,249	0,850	0,382	1,618	0,374	1,585	1,025	5,647	0,307	1,693	0,9794	1,0210	3,336	0,2998
14	0,802	0,235	0,817	0,406	1,594	0,399	1,563	1,118	5,696	0,328	1,672	0,9810	1,0194	3,407	0,2935
15	0,775	0,223	0,789	0,428	1,572	0,421	1,544	1,203	5,741	0,347	1,653	0,9823	1,0180	3,472	0,2880
16	0,750	0,212	0,763	0,448	1,552	0,440	1,526	1,282	5,782	0,363	1,637	0,9835	1,0168	3,532	0,2831
17	0,728	0,203	0,739	0,466	1,534	0,458	1,511	1,356	5,820	0,378	1,622	0,9845	1,0157	3,588	0,2787
18	0,707	0,194	0,718	0,482	1,518	0,475	1,496	1,424	5,856	0,391	1,608	0,9854	1,0148	3,640	0,2747
19	0,688	0,187	0,698	0,497	1,503	0,490	1,483	1,487	5,891	0,403	1,597	0,9862	1,0140	3,689	0,2711
20	0,671	0,180	0,680	0,510	1,490	0,504	1,470	1,549	5,921	0,415	1,585	0,9869	1,0133	3,735	0,2677
21	0,655	0,173	0,663	0,523	1,477	0,516	1,459	1,605	5,951	0,425	1,575	0,9876	1,0126	3,778	0,2647
22	0,640	0,167	0,647	0,534	1,466	0,528	1,448	1,659	5,979	0,434	1,566	0,9882	1,0119	3,819	0,2618
23	0,626	0,162	0,633	0,545	1,455	0,539	1,438	1,710	6,006	0,443	1,557	0,9887	1,0114	3,858	0,2592
24	0,612	0,157	0,619	0,555	1,445	0,549	1,429	1,759	6,031	0,451	1,548	0,9892	1,0109	3,895	0,2567
25	0,600	0,153	0,606	0,565	1,434	0,559	1,420	1,806	6,056	0,459	1,541	0,9896	1,0105	3,931	0,2544

ДОДАТОК Д

Данні для виконання індивідуальних завдань – результати вимірювання (контролю) частоти на підстнці.

11.03.2011		12.03.2011		13.03.2011		11.03.2011	
18:00:02	50,01200104	18:00:02	50,01599884	18:00:02	49,99399948	19:00:06	50,00699997
18:00:10	50,01200104	18:00:06	50,01800156	18:00:06	49,99000168	19:00:10	50,00699997
18:00:14	50,00999832	18:00:10	50,01800156	18:00:10	49,99000168	19:00:14	50,00999832
18:00:14	49,91999817	18:00:14	50,02199936	18:00:14	49,98500061	19:00:18	50,00600052
18:00:18	50,00600052	18:00:18	50,01900101	18:00:18	49,98300171	19:00:26	50,00299835
18:00:22	50,00099945	18:00:26	50,01399994	18:00:22	49,98199844	19:00:34	50,00099945
18:00:26	49,9980011	18:00:30	50,01399994	18:00:26	49,98500061	19:00:38	50,00500107
18:00:34	50,00699997	18:00:34	50,00999832	18:00:34	49,98500061	19:00:42	49,97999954
18:00:38	50,00299835	18:00:42	50,00400162	18:00:38	49,99100113	19:00:46	50,01300049
18:00:46	49,9980011	18:00:50	50,00400162	18:00:46	49,99399948	19:00:50	50,01300049
18:05:02	49,95999908	18:05:02	50	18:05:06	49,99000168	19:05:02	49,97900009
18:05:06	50,00299835	18:05:02	49,99700165	18:05:10	49,99300003	19:05:10	49,98400116
18:05:10	49,97999954	18:05:14	49,99599838	18:05:14	49,99499893	19:05:14	49,98400116
18:05:14	49,99900055	18:05:18	50,00099945	18:05:18	50,0399971	19:05:18	49,95999908
18:05:18	50,00500107	18:05:22	50,00299835	18:05:22	49,99499893	19:05:26	49,98799896
18:05:22	50,00099945	18:05:26	50,00400162	18:05:26	50,0019989	19:05:30	49,98799896
18:05:26	50,00099945	18:05:34	50,00099945	18:05:30	49,99599838	19:05:34	49,98799896
18:05:34	49,95999908	18:05:42	50,00400162	18:05:34	49,99300003	19:05:38	49,99100113
18:05:38	50,00299835	18:05:46	49,9980011	18:05:46	50,05999756	19:05:50	49,99100113
18:05:42	49,99700165	18:05:54	49,99599838	18:05:46	49,99900055	19:05:54	49,98899841
18:10:02	50	18:10:02	49,99700165	18:10:02	50,02000046	19:10:22	50,0019989
18:10:06	50	18:10:06	50,00400162	18:10:06	50,00699997	19:10:34	49,99900055
18:10:06	49,9980011	18:10:10	50,00400162	18:10:14	50,00500107	19:10:38	49,99599838
18:10:14	50	18:10:14	50,00999832	18:10:18	50,00099945	19:10:46	49,9980011
18:10:18	49,9980011	18:10:18	50	18:10:22	50,0399971	19:10:54	49,97999954
18:10:22	49,99300003	18:10:18	50,02000046	18:10:22	49,99700165	19:10:58	49,99200058
18:10:26	49,99100113	18:10:26	50,01499939	18:10:26	49,99200058	19:11:06	49,9980011
18:10:34	49,99100113	18:10:30	50,01499939	18:10:30	50,02000046	19:11:14	50,00099945
18:10:38	49,98500061	18:10:34	50,01499939	18:10:34	49,99000168	19:11:18	50,00299835
18:10:46	49,97900009	18:10:38	50,01499939	18:10:38	49,98799896	19:11:22	49,9980011
18:15:02	49,98899841	18:15:02	50,02099991	18:15:02	49,99900055	19:15:06	50,00500107
18:15:10	49,98899841	18:15:06	50,02099991	18:15:06	49,99700165	19:15:10	49,99900055
18:15:14	49,97999954	18:15:10	50,02099991	18:15:10	49,99700165	19:15:18	49,99599838
18:15:14	49,99000168	18:15:14	50,02099991	18:15:18	50	19:15:22	49,99700165
18:15:18	49,98199844	18:15:18	50,02500153	18:15:22	49,9980011	19:15:26	49,99599838
18:15:22	50	18:15:26	50,01300049	18:15:34	49,97999954	19:15:34	49,99900055
18:15:26	49,98600006	18:15:30	50,01300049	18:15:34	49,99399948	19:15:38	49,97999954
18:15:30	49,98600006	18:15:34	49,97999954	18:15:46	49,99000168	19:15:46	50,00099945
18:15:34	49,99399948	18:15:34	50,01800156	18:15:54	49,98899841	19:15:54	49,99599838
18:15:38	50,00099945	18:15:38	50,01399994	18:15:58	50	19:15:58	49,99599838
18:20:02	49,99200058	18:20:02	50,00400162	18:20:06	50	19:20:10	49,99499893
18:20:06	50,02000046	18:20:06	50,00600052	18:20:10	50	19:20:14	49,99900055
18:20:06	49,98899841	18:20:14	50,00400162	18:20:14	49,9980011	19:20:18	49,99300003
18:20:14	49,99000168	18:20:18	50,00600052	18:20:18	49,99200058	19:20:22	49,99100113
18:20:18	49,99300003	18:20:30	50	18:20:22	49,98500061	19:20:26	49,9980011
18:20:22	49,99100113	18:20:34	50,00600052	18:20:26	49,97800064	19:20:30	49,9980011
18:20:26	50	18:20:42	50,00899887	18:20:30	49,97800064	19:20:34	50,0019989
18:20:26	49,98899841	18:20:42	49,97999954	18:20:34	49,97399902	19:20:38	49,99900055
18:20:30	49,98899841	18:20:50	50,00899887	18:20:38	49,97399902	19:20:42	49,99700165
18:20:34	49,99300003	18:20:54	50,00899887	18:20:42	49,97200012	19:20:46	49,99599838

12.03.2011		13.03.2011		11.03.2011		12.03.2011	
19:00:02	50,00999832	19:00:02	50,0019989	20:00:02	50,00600052	20:00:06	50,01100159
19:00:06	50,00699997	19:00:18	49,99399948	20:00:10	50,00999832	20:00:10	50,01100159
19:00:10	50,00699997	19:00:22	49,9980011	20:00:14	50,00799942	20:00:14	50,01100159
19:00:14	50,00999832	19:00:34	49,99499893	20:00:18	50,00600052	20:00:18	50,00799942
19:00:14	49,97999954	19:00:38	49,99499893	20:00:22	50,00899887	20:00:26	50,00400162
19:00:18	50,01200104	19:00:54	49,95999908	20:00:26	50	20:00:30	49,97999954
19:00:22	49,95999908	19:00:58	49,99700165	20:00:30	50,00899887	20:00:38	50,00799942
19:00:26	50,01200104	19:01:02	49,99399948	20:00:34	50,00299835	20:00:42	50,00500107
19:00:30	50,01200104	19:01:06	49,99599838	20:00:38	50,00500107	20:00:50	50,0019989
19:00:34	50,00899887	19:01:10	49,99599838	20:00:42	50,01300049	20:00:50	49,95999908
19:05:02	49,99399948	19:05:02	50,00400162	20:05:06	50	20:05:02	50,00299835
19:05:06	49,99599838	19:05:06	50	20:05:14	49,9980011	20:05:06	50,00699997
19:05:14	50	19:05:14	49,9980011	20:05:22	49,99399948	20:05:10	50,00699997
19:05:22	49,9980011	19:05:22	49,99499893	20:05:26	49,98899841	20:05:14	50,00899887
19:05:26	50	19:05:26	49,99700165	20:05:34	49,98899841	20:05:18	50,00899887
19:05:34	49,99499893	19:05:34	50	20:05:42	49,98600006	20:05:26	50,01100159
19:05:38	49,99700165	19:05:38	49,99499893	20:05:46	49,98799896	20:05:34	50,00799942
19:05:42	50	19:05:42	49,99700165	20:05:50	49,98799896	20:05:38	50,00999832
19:05:46	50,00500107	19:05:46	50	20:05:54	49,99000168	20:05:42	50,01300049
19:05:50	49,95999908	19:05:50	49,93999863	20:05:58	49,98899841	20:05:46	50,01100159
19:10:06	50,00500107	19:10:06	50,01900101	20:10:10	49,99900055	20:10:06	49,98199844
19:10:14	50,00899887	19:10:10	50,01900101	20:10:14	50,0019989	20:10:10	49,98199844
19:10:18	50,01100159	19:10:14	50,01699829	20:10:18	50,00500107	20:10:14	49,98600006
19:10:30	50,01100159	19:10:22	50,01800156	20:10:26	50,00500107	20:10:18	49,98600006
19:10:34	50,01100159	19:10:26	50,01800156	20:10:46	49,99900055	20:10:26	49,98400116
19:10:38	50,01100159	19:10:30	50,01800156	20:10:54	50,00299835	20:10:30	49,98400116
19:10:42	50,00799942	19:10:34	50,01800156	20:10:58	49,97999954	20:10:34	49,98799896
19:10:46	50,01100159	19:10:38	49,95999908	20:10:58	49,9980011	20:10:38	49,99000168
19:10:50	50,01100159	19:10:38	50,02099991	20:11:06	50	20:10:42	49,99399948
19:10:54	50,00600052	19:10:42	50,02500153	20:11:10	49,95999908	20:10:42	50
19:15:02	50,00699997	19:15:02	50,01300049	20:15:14	49,9980011	20:15:10	49,99900055
19:15:06	50,00500107	19:15:06	50,00699997	20:15:22	49,99599838	20:15:14	49,99599838
19:15:14	50,00500107	19:15:10	49,97999954	20:15:30	49,99599838	20:15:18	49,99399948
19:15:18	50,00099945	19:15:14	50,01100159	20:15:38	49,99399948	20:15:22	49,99900055
19:15:22	49,9980011	19:15:18	50,01300049	20:15:46	49,97999954	20:15:26	49,99499893
19:15:22	50,02000046	19:15:22	50	20:15:46	49,99000168	20:15:30	49,99499893
19:15:26	50,00299835	19:15:22	50,01499939	20:15:50	49,99300003	20:15:38	49,99300003
19:15:34	50,00899887	19:15:26	50,01200104	20:15:54	49,98799896	20:15:42	49,9980011
19:15:38	50,00299835	19:15:34	50,01599884	20:15:54	49,95999908	20:15:46	49,99599838
19:15:42	50,00799942	19:15:38	50,01599884	20:15:58	49,98799896	20:15:50	49,99599838
19:20:06	49,98400116	19:20:02	49,97299957	20:20:02	50,00799942	20:20:02	49,9980011
19:20:10	49,98400116	19:20:06	49,98099899	20:20:06	50,00999832	20:20:14	50
19:20:18	49,98699951	19:20:10	49,98099899	20:20:14	50,01100159	20:20:18	49,9980011
19:20:26	49,99399948	19:20:14	49,97800064	20:20:18	49,95999908	20:20:34	50,00299835
19:20:34	49,98799896	19:20:18	49,97499847	20:20:18	50,01300049	20:20:38	50,00799942
19:20:38	49,98799896	19:20:22	49,97700119	20:20:22	50,00999832	20:20:42	50,00999832
19:20:42	49,99100113	19:20:26	49,98300171	20:20:26	50,00699997	20:20:42	49,97999954
19:20:50	49,99100113	19:20:30	49,98300171	20:20:30	49,97999954	20:20:46	50,01100159
19:20:54	49,99300003	19:20:34	49,98199844	20:20:30	50,00699997	20:20:54	50,01300049
19:20:58	49,99000168	19:20:38	49,98400116	20:20:34	50,0019989	20:20:58	50,00899887

13.03.2011		11.03.2011		12.03.2011		13.03.2011	
20:00:06	50,02500153	21:00:02	50,00999832	21:00:06	49,99300003	21:00:10	49,99700165
20:00:10	50,02399826	21:00:10	50,00999832	21:00:18	49,99499893	21:00:14	49,99599838
20:00:14	50,02399826	21:00:14	50,01300049	21:00:22	49,99900055	21:00:18	50
20:00:18	50,02399826	21:00:18	50,01599884	21:00:26	49,99900055	21:00:26	50
20:00:22	50,02199936	21:00:26	50,01599884	21:00:34	50,0019989	21:00:34	50,00400162
20:00:26	50,02199936	21:00:34	49,97999954	21:00:38	50	21:00:38	50,00799942
20:00:30	50,02199936	21:00:34	50,01300049	21:00:42	49,9980011	21:00:42	50,01100159
20:00:30	50	21:00:38	50,01599884	21:00:46	49,97999954	21:00:46	50,00999832
20:00:34	50,02799988	21:00:42	50,01399994	21:00:58	49,99399948	21:00:46	49,97999954
20:00:38	50,02799988	21:00:46	49,95999908	21:01:02	49,99700165	21:00:50	50,00999832
20:05:02	50,00400162	21:05:02	49,9980011	21:05:02	49,99000168	21:05:02	50,00899887
20:05:06	50,00099945	21:05:06	50,00099945	21:05:10	49,99000168	21:05:06	50,00899887
20:05:14	50,00500107	21:05:18	49,93999863	21:05:14	49,98899841	21:05:14	50,00600052
20:05:22	50,00099945	21:05:18	49,99499893	21:05:18	49,99300003	21:05:26	50,00099945
20:05:26	49,99900055	21:05:22	49,9980011	21:05:22	49,95999908	21:05:42	49,99900055
20:05:34	50,0019989	21:05:26	49,99499893	21:05:26	49,99599838	21:05:54	50,0019989
20:05:38	50	21:05:34	49,9980011	21:05:38	49,99700165	21:06:06	50,0019989
20:05:46	49,93999863	21:05:38	50,00400162	21:05:46	50,0019989	21:06:14	49,9980011
20:05:54	49,9980011	21:05:42	50,00299835	21:05:50	49,97999954	21:06:26	49,9980011
20:05:58	49,99399948	21:05:50	50,00500107	21:05:54	50	21:06:34	50,00299835
20:10:06	50,00299835	21:10:02	49,99599838	21:10:02	50,00899887	21:10:06	50,01499939
20:10:18	50,00099945	21:10:06	49,99200058	21:10:06	50,01699829	21:10:14	50,01300049
20:10:22	49,99900055	21:10:14	49,99599838	21:10:14	50,01699829	21:10:22	50,01300049
20:10:26	49,99599838	21:10:18	49,99900055	21:10:18	50,01399994	21:10:26	50,00699997
20:10:34	49,99599838	21:10:26	49,99200058	21:10:22	50,01599884	21:10:26	49,95999908
20:10:38	49,99100113	21:10:34	49,99200058	21:10:26	50,01599884	21:10:30	50,00699997
20:10:42	49,93999863	21:10:38	49,99599838	21:10:30	50,01599884	21:10:34	50,00500107
20:10:46	49,98699951	21:10:46	49,99300003	21:10:34	50,02099991	21:10:42	50,00999832
20:10:50	49,95999908	21:10:54	49,99300003	21:10:38	50,02500153	21:10:46	50,00699997
20:10:54	49,98699951	21:10:58	49,99300003	21:10:42	50,02700043	21:10:58	49,97999954
20:15:02	50,02299881	21:15:02	49,99300003	21:15:10	50,0320015	21:15:02	50,00999832
20:15:06	49,97999954	21:15:06	49,99300003	21:15:14	50,02700043	21:15:06	50,00999832
20:15:06	50,02299881	21:15:14	49,99599838	21:15:18	50,02199936	21:15:10	50,00999832
20:15:10	50,02299881	21:15:18	49,99300003	21:15:22	50,02399826	21:15:18	50,01200104
20:15:14	50,02500153	21:15:26	49,99900055	21:15:26	50,02199936	21:15:22	50
20:15:18	50,02199936	21:15:34	50,00099945	21:15:30	50,02199936	21:15:26	50,01499939
20:15:22	50,01800156	21:15:38	50	21:15:30	50,02000046	21:15:30	50,01499939
20:15:26	50,02099991	21:15:38	50,00299835	21:15:38	50,02199936	21:15:34	50,01499939
20:15:30	50,02099991	21:15:42	50,00500107	21:15:46	50,02199936	21:15:38	50,01499939
20:15:34	50,01300049	21:15:58	50,00299835	21:15:50	50,02199936	21:15:46	50,01499939
20:20:02	49,99499893	21:20:02	50,00600052	21:20:02	50,02500153	21:20:02	50,01699829
20:20:06	49,99900055	21:20:14	50,00299835	21:20:06	50,02099991	21:20:06	50,02299881
20:20:14	49,99399948	21:20:18	50,00799942	21:20:10	50,02099991	21:20:10	50,02299881
20:20:18	49,99700165	21:20:26	50,00600052	21:20:14	50,02099991	21:20:14	50,02099991
20:20:26	50,00299835	21:20:30	50,00600052	21:20:18	50,01800156	21:20:18	50,01699829
20:20:34	50,00400162	21:20:38	50,00299835	21:20:26	50,01699829	21:20:26	50,02000046
20:20:38	50,00299835	21:20:42	50,00400162	21:20:30	50,01699829	21:20:26	50,01100159
20:20:42	49,99700165	21:20:46	50,00600052	21:20:34	50,02000046	21:20:30	50,01100159
20:20:46	49,99399948	21:20:50	50,00600052	21:20:38	50,02199936	21:20:34	50,01300049
20:20:54	50	21:20:54	50,00299835	21:20:46	50,02199936	21:20:38	50,01100159

11.03.2011		12.03.2011		13.03.2011		11.03.2011	
22:00:02	50,01399994	22:00:02	50	22:00:06	50,00699997	14:00:02	49,99700165
22:00:10	50,01399994	22:00:06	50,0019989	22:00:10	50,00699997	14:00:06	50,00099945
22:00:14	50,01599884	22:00:22	49,97999954	22:00:14	50,00099945	14:00:18	50,00699997
22:00:26	50,01599884	22:00:26	50,01100159	22:00:18	49,9980011	14:00:38	50,00999832
22:00:26	49,97999954	22:00:34	50,01100159	22:00:26	49,99100113	14:00:42	50,00600052
22:00:34	50,01800156	22:00:38	50,00999832	22:00:30	49,95999908	14:00:46	49,95999908
22:00:38	50,01200104	22:00:42	50,01100159	22:00:30	49,99100113	14:00:46	50,01100159
22:00:46	50,01200104	22:00:50	49,95999908	22:00:34	49,99100113	14:00:54	50,01499939
22:00:50	49,95999908	22:00:50	50,01100159	22:00:38	49,99499893	14:00:58	50,00999832
22:00:54	50,01399994	22:00:54	50,01100159	22:00:50	49,93999863	14:01:02	50,01300049
22:05:02	50,00400162	22:05:06	49,93999863	22:05:02	50,00099945	14:05:02	50,00999832
22:05:02	49,95999908	22:05:06	49,98500061	22:05:06	50,00600052	14:05:06	50,00400162
22:05:06	50,00400162	22:05:10	49,98500061	22:05:14	50,00400162	14:05:14	49,99700165
22:05:14	50,00899887	22:05:14	49,98099899	22:05:18	50,00099945	14:05:18	50,0019989
22:05:18	50,00699997	22:05:18	49,98400116	22:05:22	49,9980011	14:05:26	49,99900055
22:05:22	50,00699997	22:05:22	49,98899841	22:05:26	49,99599838	14:05:38	49,99100113
22:05:26	50,01100159	22:05:26	49,98899841	22:05:38	49,93999863	14:05:46	49,99100113
22:05:34	50,00400162	22:05:26	49,91999817	22:05:38	49,99700165	14:05:54	49,99300003
22:05:38	50,00799942	22:05:30	49,98500061	22:05:42	49,99499893	14:05:58	49,99700165
22:05:42	50,00299835	22:05:34	49,98699951	22:05:46	49,99100113	14:06:02	49,97999954
22:10:02	50,00799942	22:10:02	49,99300003	22:10:02	50,00400162	14:10:02	50,00600052
22:10:06	50,00500107	22:10:10	49,98899841	22:10:06	49,9980011	14:10:14	50,00600052
22:10:14	50,00500107	22:10:14	49,99000168	22:10:14	50,00500107	14:10:18	50,00600052
22:10:18	50,00299835	22:10:18	49,98799896	22:10:18	50,00299835	14:10:26	50,00999832
22:10:42	50,00099945	22:10:30	49,98799896	22:10:22	50,00500107	14:10:38	50,01300049
22:10:46	50,00600052	22:10:34	49,98600006	22:10:34	50,00500107	14:10:42	50,00799942
22:10:54	50,00600052	22:10:38	49,98400116	22:10:38	50,00799942	14:10:46	50,00799942
22:10:58	50,00299835	22:10:42	49,98099899	22:10:42	50,01200104	14:10:54	50,01100159
22:11:02	50,00600052	22:10:42	49,93999863	22:10:46	50,01200104	14:10:58	50,01599884
22:11:06	50,00999832	22:10:46	49,98899841	22:10:50	49,97999954	14:11:06	50,01800156
22:15:02	49,99200058	22:15:02	50,01599884	22:15:06	49,99900055	14:15:42	50,01399994
22:15:14	49,99200058	22:15:10	50,01599884	22:15:06	49,97999954	14:15:46	50,01699829
22:15:14	50	22:15:14	50,01300049	22:15:10	49,99900055	14:15:54	50,01800156
22:15:22	49,99599838	22:15:18	50,01599884	22:15:26	50,00299835	14:15:58	50,02099991
22:15:26	49,99900055	22:15:22	50,01900101	22:15:34	50,00400162	14:16:06	50,01699829
22:15:26	50,02000046	22:15:26	50,01900101	22:15:42	50,0019989	14:16:18	50,01300049
22:15:34	50,0019989	22:15:30	50,01900101	22:15:46	49,99700165	14:16:22	50,00999832
22:15:46	50	22:15:34	50,01900101	22:15:54	49,99700165	14:16:26	50,00600052
22:15:54	50,00400162	22:15:38	50,02199936	22:15:58	49,95999908	14:16:42	50,00899887
22:15:58	50,00899887	22:15:46	50,02099991	22:16:02	49,99499893	14:16:54	50
22:20:02	49,99700165	22:20:02	50,01399994	22:20:02	50,01399994	14:20:02	49,98600006
22:20:06	49,99300003	22:20:06	50,01200104	22:20:06	50,01399994	14:20:06	49,98199844
22:20:18	49,99599838	22:20:10	50,01200104	22:20:10	50,00899887	14:20:10	49,98199844
22:20:18	50	22:20:18	50,01200104	22:20:14	50,02000046	14:20:14	49,97600174
22:20:22	50	22:20:26	50,01499939	22:20:14	50,00299835	14:20:22	49,97499847
22:20:34	50,0019989	22:20:30	50,01499939	22:20:22	50	14:20:26	49,97600174
22:20:38	50,00500107	22:20:34	50,01200104	22:20:30	50	14:20:30	49,97600174
22:20:42	50,0019989	22:20:38	50,00699997	22:20:38	49,9980011	14:20:34	49,97800064
22:20:46	50	22:20:46	50,00699997	22:20:42	50,00299835	14:20:38	49,97499847
22:20:58	49,9980011	22:20:54	50,00699997	22:20:46	50,00400162	14:20:42	49,97900009

12.03.2011		13.03.2011		11.03.2011		12.03.2011	
14:00:18	50	14:00:06	49,97999954	17:30:06	50,00299835	17:20:06	50,01800156
14:00:22	49,9980011	14:00:22	50,00299835	17:30:14	49,9980011	17:20:14	50,01200104
14:00:34	50	14:00:30	50,00400162	17:30:18	50,00099945	17:20:18	50,01399994
14:00:38	49,97999954	14:00:34	50	17:30:26	49,95999908	17:20:26	50,00899887
14:00:46	49,99499893	14:00:42	50,00400162	17:30:34	49,93999863	17:20:34	50,00600052
14:00:54	50	14:00:46	50,0019989	17:30:38	49,98699951	17:20:38	50,00299835
14:00:58	49,9980011	14:00:58	49,9980011	17:30:54	49,98899841	17:20:46	50
14:01:02	49,99599838	14:01:02	49,99399948	17:31:06	49,99100113	17:20:50	49,9980011
14:01:06	49,95999908	14:01:06	49,98500061	17:31:14	49,98899841	17:20:54	50,00500107
14:01:14	49,99499893	14:01:10	49,95999908	17:31:18	49,98699951	17:20:58	50,00799942
14:05:10	49,99200058	14:05:02	49,98799896	17:35:06	49,98400116	17:25:06	49,99599838
14:05:14	50,0019989	14:05:06	49,99399948	17:35:10	49,95999908	17:25:14	49,99000168
14:05:22	50	14:05:14	49,95999908	17:35:14	49,98899841	17:25:22	49,99499893
14:05:34	49,99399948	14:05:18	49,98500061	17:35:18	49,99300003	17:25:38	49,99200058
14:05:46	49,98799896	14:05:22	49,97999954	17:35:30	49,99599838	17:25:50	49,98600006
14:06:10	49,98799896	14:05:26	49,98300171	17:35:42	49,99300003	17:25:54	49,93999863
14:06:14	49,98600006	14:05:34	49,99000168	17:35:46	49,99599838	17:25:58	49,98899841
14:06:38	49,98400116	14:05:42	49,99300003	17:35:54	49,99900055	17:26:02	49,99300003
14:06:46	49,99100113	14:05:46	49,99599838	17:35:58	49,99499893	17:26:06	49,99499893
14:06:58	49,99300003	14:06:06	49,99300003	17:36:06	49,99900055	17:26:14	49,98899841
14:10:06	49,99599838	14:10:06	50,02000046	17:40:02	49,99900055	17:30:06	50
14:10:14	49,99700165	14:10:10	50,01599884	17:40:06	50,00299835	17:30:14	49,99300003
14:10:18	49,99499893	14:10:14	50,01200104	17:40:14	50,00500107	17:30:18	49,99599838
14:10:22	49,99100113	14:10:26	50,01200104	17:40:18	50,0019989	17:30:22	49,9980011
14:10:54	49,99300003	14:10:30	49,97999954	17:40:26	50,00600052	17:30:34	50,00400162
14:10:58	49,99499893	14:10:34	50,02199936	17:40:34	50,00400162	17:30:38	50,00899887
14:11:02	49,99100113	14:10:38	50,01699829	17:40:42	50,00600052	17:30:46	50,00600052
14:11:06	49,98799896	14:10:42	50,02199936	17:40:46	50,00299835	17:30:58	50,00799942
14:11:14	49,98500061	14:10:46	50,01699829	17:40:58	50,00600052	17:31:06	50,00500107
14:11:18	49,97999954	14:11:02	50,01699829	17:41:06	50,00899887	17:31:10	50,01300049
14:15:10	49,98199844	14:15:14	49,97999954	17:45:10	49,98500061	17:35:06	50,01499939
14:15:18	49,98500061	14:15:22	50,00299835	17:45:18	49,98899841	17:35:14	50,00899887
14:15:42	49,97900009	14:15:34	50,00500107	17:45:22	49,93999863	17:35:18	50,01399994
14:15:54	49,98199844	14:15:46	50,00999832	17:45:30	49,98899841	17:35:22	50
14:15:58	49,98400116	14:15:54	50,01499939	17:45:38	49,98699951	17:35:26	50,01100159
14:16:02	49,98799896	14:15:58	50,01100159	17:45:46	49,98199844	17:35:34	50,00899887
14:16:10	49,99599838	14:16:10	50,01300049	17:45:54	49,98799896	17:35:38	50,00500107
14:16:18	49,99700165	14:16:14	50,01499939	17:45:58	49,99000168	17:35:42	50,00899887
14:16:30	49,99399948	14:16:18	50,01200104	17:46:02	49,98899841	17:35:58	50,00500107
14:16:34	50	14:16:22	50,00500107	17:46:10	49,99000168	17:36:02	50,01100159
14:20:06	50,00099945	14:20:02	49,99300003	17:50:06	50,01900101	17:40:06	50,00400162
14:20:14	50,00699997	14:20:06	49,99599838	17:50:18	50,00999832	17:40:18	50,00600052
14:20:18	50,00999832	14:20:14	49,98799896	17:50:22	50,00699997	17:40:30	50,01399994
14:20:30	50,00600052	14:20:18	49,99200058	17:50:26	50,00899887	17:40:38	50,01599884
14:20:34	50,00899887	14:20:26	49,99000168	17:50:34	49,93999863	17:40:42	50,01300049
14:20:38	49,97999954	14:20:38	49,98300171	17:50:38	50,01300049	17:40:50	50,01100159
14:20:42	50,00400162	14:20:42	49,98899841	17:50:42	50,00799942	17:40:54	50,00699997
14:20:46	50,00899887	14:20:46	49,98600006	17:50:50	50,00999832	17:40:58	50,00400162
14:21:10	50,00400162	14:20:54	49,99000168	17:50:54	50	17:41:02	50,0019989
14:21:14	49,99499893	14:20:58	49,98799896	17:50:58	49,99499893	17:41:10	50,00500107

ДОДАТОК Е

Індивідуальні завдання до практичного заняття 2.

	Варіант 1			Варіант 2			Варіант 3			Варіант 4			Варіант 5		
№	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃
1	85	90	91	11	10	15	56	62	60	13	15	8	12	17	9
2	60	57	61	82	94	89	14	16	10	87	94	91	50	45	47
3	40	42	48	55	57	58	88	92	94	40	45	49	52	57	55
4	12	14	16	39	41	46	42	44	38	52	50	59	95	89	90

	Варіант 6			Варіант 7			Варіант 8			Варіант 9			Варіант 10		
№	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃
1	10	14	14	56	58	61	89	93	91	49	57	52	43	38	47
2	59	61	57	85	89	90	43	38	47	42	47	43	55	51	58
3	47	41	42	16	11	13	57	61	59	88	91	93	90	89	96
4	88	91	87	44	38	47	13	9	13	10	15	12	12	14	8

	Варіант 11			Варіант 12			Варіант 13			Варіант 14			Варіант 15		
№	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃	y ₁	y ₂	y ₃
1	13	16	16	40	44	48	57	63	61	92	89	95	57	51	59
2	39	43	48	13	9	14	14	9	15	10	12	16	9	15	15
3	84	89	92	85	91	88	41	45	39	42	47	41	91	87	94
4	59	57	63	54	57	52	94	87	91	51	49	57	42	37	49