

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

«На правах рукопису»

УДК 518.977

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ О.Л. ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз фінансового
ринку»**

спеціальності 124 «Системний аналіз»

**на тему: «Візуалізація диференціальної гри переслідування для об'єктів
з різною інерційністю»**

Виконала:

студентка II курсу, групи КА-02мп

Довжаниця Катерина Григорівна _____

Керівник:

доцент кафедри ММСА, к.ф.-м. н., доц.

Барановська Леся Валеріївна _____

Рецензент:

доцент кафедри СП, к.т.н., доц.

Харченко Костянтин Васильович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____

Київ
2021

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз фінансового ринку»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.Л. ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студентці

Довжаниці Катерині Григорівні

1. Тема дисертації: «Візуалізація диференціальної гри переслідування для об'єктів з різною інерційністю», науковий керівник дисертації Барановська Леся Валеріївна, кандидат ф.-м. наук, доцент, затверджені наказом по університету від «_02_» листопада 20_21_ р. №_3651-с_
2. Термін подання студентом роботи: 12 грудня 2021 року
3. Об'єкт дослідження: диференціальна гра переслідування.
4. Предмет дослідження: метод розв'язуючих функцій у диференціальній грі переслідування для об'єктів з різною інерційністю.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
6. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо):
7. Дата видачі завдання: 5 вересня 2021

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання завдання	01.09.2021 – 05.09.2021	Виконано
2	Збір інформації	06.09.2021 – 12.09.2021	Виконано
3	Ознайомлення з літературою і підготовка теоретичної частини магістерської дисертації	13.09.2021 – 26.09.2021	Виконано
4	Аналіз вимог завдання, вибір методів і засобів розв'язання поставленої задачі	27.09.2021 – 3.10.2021	Виконано
5	Розробка програмного продукту	4.10.2021 – 31.10.2021	Виконано
6	Проведення аналізу ринкових можливостей стартап-проекту	1.11.2021 – 7.11.2021	Виконано
7	Отримання висновків після тестування	8.11.2021 – 15.11.2021	Виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	15.11.2021 – 12.12.2021	Виконано
9	Отримання допуску до захисту та подача роботи до ДЕК	13.12.2021 – 14.12.2021	Виконано

Студент

Катерина ДОВЖАНИЦЯ

Керівник

Леся БАРАНОВСЬКА

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 90 с., 2 рис., 20 табл., 1 дод., 13 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГРА, КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИЙ ПРОЦЕС,
ІНЕРЦІЙНІСТЬ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ, ЗАДАЧА
ЗБЛИЖЕННЯ.

Об'єкт дослідження – диференціальна гра переслідування.

Предмет дослідження: метод розв'язуючих функцій у диференціальній
грі переслідування для об'єктів з різною інерційністю.

Мета роботи – побудова алгоритмів керування в диференціальній грі
переслідування.

Методи дослідження – побудова алгоритмів керування.

Був досліджений метод розв'язуючих функцій в задачах зближення для
об'єктів з різною інерційністю.

Для знаходження часу затримки втікача був розроблений програмний
продукт.

Подальший розвиток предмету дослідження – розгляд задач групового
переслідування, інших класів задач та знаходження оптимального керування
для втікача.

ABSTRACT

Master's dissertation: 90 pp., 2 fig., 20 table, 1 appendix, 13 sources.

DIFFERENTIAL GAME, CONFLICT-MANAGED PROCESS,
INERTERNITY, DIFFERENTIAL-DIFFERENTIAL EQUATION, PROBLEM
OF APPROXIMATION.

The object of research is a differential game of persecution.

Subject of research: the method of solving functions in the differential pursuit game for objects with different inertia.

The purpose of the work is to build control algorithms in the differential sri of persecution.

Research methods - construction of control algorithms.

The method of solving functions in convergence problems for objects with different inertia was investigated.

A software product was developed to find the time of the fugitive's delay.

Further development of the subject of research - consideration of the tasks of group pursuit, other classes of tasks and finding the optimal management for the fugitive.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	Error! Bookmark not defined.
ВСТУП.....	Error! Bookmark not defined.
РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ ТА ДОПОМІЖНІ МАТЕМАТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ	Error! Bookmark not defined.
1.1. Поняття диференціальних ігор переслідування ..	Error! Bookmark not defined.
1.2 Допоміжні математичні результати	11
1.3 Системи диференційно-різницевих рівнянь та методи їх розв'язання	Error! Bookmark not defined.
Висновки до розділу 1	28
РОЗДІЛ 2 МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ	Error! Bookmark not defined.
2.1 Постановка задачі переслідування, означення стратегій.....	Error! Bookmark not defined.
2.2 Узагальнений контрольний приклад Л.С.Понтрягіна	30
2.3 Основна схема метода	34
2.4 Модифікація умови Л. С. Понтрягіна	40
Висновки до розділу 2	49
РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА ТРАЄКТОРІЇ РУХУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ	51
3.1 Приклад «Хлопчик і крокодил»	51
3.2 Приклад для об'єктів рух яких описується ДРР	57
3.3 Візуалізація диференціальної гри на площині	Error! Bookmark not defined.
Висновки до розділу 3	70
РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ СТАРТАП ПРОЕКТУ	71

4.1 Опис ідеї стартап проекту	71
4.2 Технологічний аудит ідеї проекту.....	73
4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	74
4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту	80
4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	82
Висновки до розділу 4	84
ВИСНОВКИ	Error! Bookmark not defined. 5
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	86
ДОДАТОК А ТЕКСТ ПРОГРАМИ.....	88

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ККП – конфліктно-керований процес

ПП – програмний продукт

ДРР – диференціально-різницеve рівняння

ВСТУП

Теорія ігор як самостійна дисципліна виникла у 17 столітті майже одночасно з теорією ймовірності, але практично 300 років майже не розвивалась. Перша важлива робота з напрямку теорії ігор -- є стаття Й. фон Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928). Розвиток теорії ігор з самого початку був спрямований лише на вирішення проблем, що виникали в економіці. Потім почалися нові ідеї та результати теорії ігор, що знайшли застосування в інших областях життя на науки, що стосуються конфліктів: військових справ, моральних питань, вивчення масової поведінки осіб з різними інтересами. Сьогодні теорія ігор стала революційним міждисциплінарним явищем, яке об'єднує психологію, математику, філософію та широкий спектр інших наукових галузей. Ця наука настільки вичерпна, що охоплює майже всі сторони сучасного життя.

Теорія диференціальних ігор — розділ математичної теорії оптимального управління, пов'язане з конфліктно-керованими процесами, що розвиваються з часом і в умовах невизначеності. Такі задачі задаються диференціальними рівняннями. Теорія диференціальних ігор виникла на перетині класичної теорії управління і теорії ігор, результатів моделювання технічних, економічних, біологічних задач. Саме актуальність даних проблем та теоретичний інтерес викликали бурхливий розвиток теорії диференціальних ігор.

Розглянуто локальну задачу зближення об'єктів з різною інерційністю

рух яких описується диференціальними рівняннями другого порядку та диференціально-різницевиими рівняннями. Для розв'язання даної задачі застосований метод розв'язуючих функцій, знайдені достатні умови на параметри процесу, що приведуть траєкторію на термінальну множину та гарантований час зупинки гри.

РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ ТА ДОПОМІЖНІ МАТЕМАТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1 Поняття диференціальних ігор переслідування

Диференціальні ігри - розділ математичної теорії управління, в якому вивчається управління об'єктом в конфліктних ситуаціях. В диференціальних іграх можливості гравців описуються диференціальними рівняннями або диференціальними включеннями, що містять керуючі вектори, якими розпоряджаються гравці тощо. Для вибору свого управління кожен гравець може використовувати поточну інформацію про поведінку гравців. Розрізняють диференціальні ігри двох гравців і багатьох гравців.[1]

Найбільш дослідженими є диференціальні ігри переслідування, в яких кількість гравців дорівнює 2, одного називають наздоганяючим, іншого втікаючим. Мета наздоганяючого - приведення вектора $z(t)$ на задану M множину за якомога короткий час; мета втікача - по можливості відтягнути момент приходу вектора $z(t)$ на M [2].

Прийнята схема позиційних ігор описується наступним чином [4]. Нехай рух конфліктно-керованого вектору z описується системою вигляду

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1.1)$$

де $z \in R^n$;

f – непервна функція.

В евклідовому просторі R^n задана непорожня цільова множина M . Сформульовані дві задачі про позиційний підхід (тобто управління за принципом зворотного зв'язку). Перша задача (вона ставиться перед першим гравцем) – задача про зближення з цільовою множиною M у межах заданих фазових обмежень V ; друга задача (вона ставиться перед другим гравцем) – задача про ухилення вектору від множини M . Сукупність цих (протилежних) задач є диференційною грою зближення-ухилення[2]. Основні результати в диференціальних іграх отримані в 60-і рр.. 20 в. в СРСР Л.С. Понтрягіна, Н.Н. Красовським, Є.Ф. Міщенко, Б.Н. Пшеничним та ін, в США - Р. Айзексом, Л. Берковіц, У. Флемінгом і ін.

1.2 Допоміжні математичні результати

Нехай R^n – евклідів n -мірний простір точок $x = (x_1, \dots, x_n)$, в якому задані звичайні операції додавання та множення на дійсне число, скалярний добуток

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad x, y \in R^n,$$

та норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Відстань між точками задається функцією

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in R^n.$$

Одинична куля з центром у нулі простору R^n

$$S = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Тоді куля радіуса $r, r \geq 0$, з центром у точці x_0 має вигляд $x_0 + rS$, де $rS = \{rx : x \in S\}$. Позначимо $\text{int } S = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$ та множину $x_0 + \varepsilon \text{int } S$ назовемо -околом точки x_0 .

Точка x називається внутрішньою точкою множини $X, X \subset R^n$, якщо існує окіл цієї точки, що цілком знаходиться у X . Сукупність внутрішніх точок множини X утворює її внутрішність $\text{int } X$. Множина X є відкритою, якщо кожна її точка внутрішня [6].

Точка x називається граничною точкою множини $X, X \subset R^n$, якщо будь-який її окіл містить нескінченно багато точок з X . Множина X називається замкнутою, якщо вона містить усі свої граничні точки [10].

Введемо операції над множинами в R^n :

- 1) об'єднання: $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ або } x \in Y\}$;
- 2) перетин: $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ та } x \in Y\}$;
- 3) сума: $X + Y = \{z : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$;
- 4) геометрична різниця (різниця Мінковського): $X \pm Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$.

Замкнута та обмежена множина в R^n – компакт. Нехай X – компакт з простору R^n . Позначимо через X_1 множину векторів $x \in X$, в яких перша компонента найменша, а через X_2 – множину векторів $x \in X$, в яких друга компонента найменша і так далі до X_n . Очевидно, що множина X_n складається з однієї точки x^* . Точку x^* називають лексикографічним мінімумом компакту X і позначають $x^* = \text{lex min } X$.

Якщо X – замкнута множина, то $X \pm Y$ – замкнута. Множина X обмежена, якщо існує таке число $r \in (0, +\infty)$, що $X \subset rS$. Якщо множина може бути отримана за допомогою зліченої кількості операцій об'єднання, перетину та доповнення над замкнутими або відкритими множинами, то така множина називається його борелівською. Більш широкий клас множин утворюють вимірні (за Лебегом) множини [4].

Множина елементів у просторі R^n , замкнуте відносно операцій додавання та множення на число, назвемо лінійним підпростором. Якщо множина в R^n можна представити як суму лінійного підпростору та деякого елемента з R^n , то будемо називати його афінним многовидом. Множина в R^n є опуклою, якщо разом з кожними двома своїми точками вона цілком містить і відрізок, що їх з'єднує [6].

Розглянемо функцію $f(x), f: R^n \rightarrow R^1$. Вона називається напівнеперервною знизу (зверху) в точці x_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $x \in x_0 + \delta S$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad (f(x) < f(x_0) + \varepsilon).$$

Функція, що є напівнеперервною знизу (зверху) а кожній точці множини, називається напівнеперервною знизу (зверху) на цій множині. Якщо функція напівнеперервна і знизу, і зверху, то вона неперервна.

Згідно з теоремою Вейєрштраса, скінчена функція, напівнеперервна знизу (зверху) на компактi, обмежена знизу (зверху) та досягає своєї нижньої (верхньої) межі [5].

Надграфіком функції $f(x)$ називається множина

$$\text{epi } f = \{(x, a): x \in R^n, a \in R^1, a \geq f(x)\},$$

ефективною множиною –

$$\text{dom } f = \{x \in R^n: f(x) < +\infty\},$$

а множиною рівня (лебегівською множиною) – $\{x \in R^n: f(x) < a\}$.

Властивості напівнеперервності знизу функції $f(x)$, замкненості надграфіка та замкненості множини рівня функції $f(x)$ еквівалентні. Функцію

$f(x)$ назвемо борелівською, якщо усі її множини рівня борелівські. Функцію назвемо вимірною (за Лебегом), якщо усі її лебегівські множини вимірні. Будь-яка борелівська функція буде вимірною за Лебегом, але не навпаки. Будь-яка напівнеперервна функція є борелівською [10].

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана скінчена функція $f(x)$. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченої системи інтервалів $(a_1, b_1), \dots, (a_n, \dots, b_n)$, що перетинаються, та таких, що $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, вірна нерівність $|\sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k))| < \varepsilon$, то функція $f(x)$ називається абсолютно неперервною. Очевидно, що усяка абсолютно неперервна функція неперервна, але не кожна неперервна функція є абсолютно неперервною. Абсолютно вимірна функція відображає вимірну множину в вимірну множину [5].

Лема 1.1. Нехай X, Y, Z – компакти з R^n , функція $f(x), f: X \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська), а функція $q(y), q: Y \rightarrow Z$, – борелівська (напівнеперервна зверху). Тоді функція $h(x) = q(f(x)), h: X \rightarrow Z$, вимірна (борелівська) [5].

Зокрема, суперпозиція двох неперервних функцій є неперервною функцією. Визначимо стандартним чином інтеграл Лебега [6] від вимірної функції $f(x)$. Вимірна функція $f(x)$ називається інтегрованою на множині X , якщо інтеграл від неї існує і є скінченим.

Лема 1.2. Нехай X – компакт з $R^n, T > 0, f(t, x), f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, – обмежена вимірна по t та напівнеперервна зверху по x функція. Тоді функція $f(t) = \inf_{x \in X} f(t, x)$ вимірна на інтервалі $[0, T]$ [5].

Лема 1.3. [5] Нехай X, Y – компакти з R^n , функція $f(x, y), f: X \times Y \rightarrow R^1$, –неперервна за сукупністю змінних, а $g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$. Тоді

1. Функція $g(x)$ неперервна по $x, x \in X$.
2. Багатозначне відображення $F(x) = \{y \in Y: f(x, y) = g(x)\}$ напівнеперервне зверху на X .

3. Якщо $F(x)$, $x \in X$, складається з єдиного елемента $y(x)$, а вектор-функція похідних $grad_x f(x, y(x))$, $x \in X$.

Лема 1.4. [5] Нехай X – компакт з R^n , $T > 0$, $f(t, x)$, $f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, обмежена вимірна (борелівська) по t та неперервна по x функція, а $x(t)$, $x: [0, T] \rightarrow X$, вимірна (борелівська) функція. Тоді суперпозиція функцій $f(t) = f(t, x(t))$ є вимірною (борелівською) функцією на інтервалі $[0, T]$.

Нехай (X, F, λ) – вимірний простір, функція $f(x)$, $f: X \rightarrow R^1$, – вимірна. Позначимо $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Інтегралом Лебега від вимірної функції $f(x)$ на множині $A \in F$ відносно міри λ називається величина

$$\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda.$$

Якщо $\int_A f^+ d\lambda < \infty$, $\int_A f^- d\lambda < \infty$, то функція $f(x)$ називається інтегрованою по A відносно λ .

Нехай $(X, F, \lambda) = ([a, b], S_{[a, b]}, \lambda_1)$. Тоді якщо функція $f(x)$ інтегрована за Риманом на $[a, b]$, то вона інтегрована на $[a, b]$ відносно λ_1 та

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda_1.$$

Множина X , $X \subset R^n$, називається опуклою, якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in X$ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$ при $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Порожню множину будемо вважати опуклою.

Якщо X та Y – опуклі множини з R^n , то множини $X \cap Y, X + Y, \lambda X$, λ – число, опуклі. З опуклості множини X випливає опуклість множини $X \pm Y$. Замикання та внутрішність опуклої множини опуклі. Перетин усіх опуклих

множин, що містять множину X , $X \subset R^n$, називають опуклою оболонкою (опукленням) множини X та позначають $co X$ [5].

Теорема 1.1.(теорема Каратеодорі [10]) Нехай X – множина з R^n . Тоді

$$co X = \{x \in R^n : x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, k \leq n + 1, x_1, \dots, x_k \in X, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0\}.$$

При цьому кажуть, що кожна точка $co X$ може бути представлена у вигляді опуклої комбінації точок з X . Якщо множина X – компакт в R^n , то $co X$ також є компактом [6].

Нехай X – непорожня множина з R^n . Позначимо

$$con X = \{z \in R^n : z = \lambda x, x \in X, \lambda > 0\}.$$

Надалі будемо розглядати власні функції, тобто такі, що не приймають значення $-\infty$ та не тотожно дорівнюють $+\infty$. Функцію $f(x), f: X \rightarrow R^1$, будемо називати опуклою на множині $X, X \subset R^n$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ вірною є нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

для усіх $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Прикладом власної функції є функція Мінковського (калібрувальна функція) [6]. Нехай X – опукла множина з R^n , така, що $0 \in \text{int } X$. Тоді

$$\mu_x(p) = \inf\{\alpha > 0 : p \in \alpha X\}, p \in R^n$$

називається функцією Мінковського. Якщо $p \notin \mu X$ для усіх $\mu \geq 0$, то покладемо $\mu_x(p) = \infty$.

Оберненою до калібрувальної функції є функція

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \geq 0: \alpha p \in X\}.$$

Вона визначена для усіх $p \in R^n$ та приймає скінченні значення, якщо $p \neq 0$.

Нехай X – опукла замкнена множина з R^n . Опорною функцією множини X назвемо величину

$$C(X; p) = \sup_{x \in X} (p, x), \quad p \in R^n$$

Тоді

$$X = \{x \in R^n: (p, x) \leq C(X; p) \quad \forall p \in R^n\}.$$

Опорна функція непорожньої опуклої замкненої множини є власною, опуклою, напівнеперервною знизу та додатно однорідною [10]. Остання властивість означає, що

$$C(X; \lambda p) = \lambda C(X; p), \quad \lambda > 0.$$

Будемо вважати, що $C(\emptyset; p) = -\infty$ для усіх $p \in R^n$.

Розглянемо деякі важливі властивості опорних функцій, які в подальшому будуть використані [10].

Властивість 1.1. Нехай X та Y – компакти з R^n . Тоді

$$C(X + Y; p) = C(X; p) + C(Y; p).$$

Властивість 1.2. Нехай X та Y – опуклі компакти з R^n . Тоді $X = Y$ тоді і тільки тоді, коли $C(X; p) = C(Y; p)$ для усіх $p \in R^n$.

Властивість 1.3. Нехай X та Y – опуклі компакти з R^n . Тоді $X \subset Y$ тоді і тільки тоді, коли $C(X; p) \leq C(Y; p)$ для усіх $p \in R^n$.

Властивість 1.4. Нехай X – опуклий компакт, а Y – опукла замкнена множина з R^n . Тоді $X \cap Y \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли

$$C(X; p) + C(Y; p) \geq 0 \quad \forall p \in R^n.$$

Властивість 1.5. Нехай X – компакт з R^n . Тоді

$$C(co X; p) = C(X; p).$$

Нехай множина X – компакт з R^n . Тоді

$$C(co X; p) = \max_{x \in X} (p; x).$$

Позначимо через 2^{R^n} множину усіх підмножин простору R^n , $K(R^n)$ – множина усіх непорожніх компактів з R^n , $co K(R^n)$ – множина усіх непорожніх опуклих компактів з R^n .

Багатозначним відображенням $F(x)$ будемо називати усяке відображення, що діє з R^n у 2^{R^n} та ставить у відповідність кожному елементу $x \in R^n$ деяку множину з R^n .

На множині $K(R^n)$ відстань будемо розраховувати наступним чином:

$$\begin{aligned} dist(X, Y) &= \inf\{\lambda \geq 0: X \subset Y + \lambda S, Y \subset X + \lambda S\} = \\ &= \max\left\{\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \|x - y\|, \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \|x - y\|\right\}. \end{aligned}$$

Тоді множина $K(R^n)$ стає метричним простором, а сама метрика називається хаусдорфовою [8].

Нехай задано багатозначне відображення $F(x)$, $F: R^n \rightarrow 2^{R^n}$. Тоді ефективною множиною є множина

$$\text{dom } F = \{x \in R^n: F(x) \neq \emptyset\}.$$

Багатозначне відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $X \subset \text{dom } F$ напівнеперервне зверху (знизу) в точці $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon S \quad (F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon S).$$

Відображення $F(x)$, що є напівнеперервним зверху (знизу) у кожній точці множини X , називається напівнеперервним зверху (знизу) на множині X . Багатозначне відображення неперервне, якщо воно напівнеперервне і зверху, і знизу.

Нехай задані багатозначних відображення $F_1(x)$, $F_1: X \rightarrow K(R^n)$, $F_2(x)$, $F_2: X \rightarrow K(R^n)$. Суперпозицією відображень $F_1(x)$ та $F_2(x)$ назовемо відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, що визначається наступним співвідношенням

$$F(x) = F_2(F_1(x)) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y).$$

Суперпозиція неперервних багатозначних відображень є неперервним багатозначним відображенням.

Відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, напівнеперервне зверху тоді і тільки тоді, коли його графік замкнений та воно обмежене в околі кожної точки $x \in R^n$.

Для багатозначного неперервного відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, характерним є те, що відображення $\alpha F(x)$, $\alpha \in R^1$, $\text{co } F(x)$ також неперервні. Якщо є задане ще й відображення $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$, то відображення $F(x) \cup G(x)$ та $F(x) + G(x)$ – неперервні [10].

Лема 1.5. [8] Нехай задані напівнеперервні зверху відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та $H(x) = F(x) \cap G(x)$. Тоді відображення $H(x)$ напівнеперервне зверху на множині $\text{dom } H$.

Лема 1.6. Нехай задані напівнеперервне зверху відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, та напівнеперервне знизу відображення $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та $H(x) = F(x) \pm G(x)$. Тоді відображення $H(x)$ напівнеперервне зверху на множині $\text{dom } H$. [8, с.26]

Тоді має місце більш загальне твердження

Твердження 1.1. Нехай $F(x, y)$, $F: X \times Y \rightarrow K(R^n)$, $X, Y \in K(R^n)$ – неперервне багатозначне відображення. Тоді відображення $G(x) = \bigcap_{y \in Y} F(x, y)$ напівнеперервне зверху на множині $X \cap \text{dom } G$ [8].

Однозначну функцію $f(x)$, $f: R^n \rightarrow R^n$, назовемо селектором багатозначного відображення $F(x)$, якщо $f(x) \in F(x)$ для усіх $x \in R^n$.

Теорема 1.2.(теорема Майкла). У напівнеперервного відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow \text{co } K(R^n)$, $X \in K(R^n)$, існує принаймні один неперервний селектор. Зокрема, селектором буде центр кулі, що описана навколо множини $F(x)$ [8].

Відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow \text{co } K(R^n)$, в подальшому іноді будемо називати впуклозначним та компактозначним.

Багатозначне відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, будемо називати вимірним за Лебегом (Борелем), якщо множина X є вимірною за Лебегом (Борелем) та для будь-якої $Y \in K(R^n)$ множина $\{x \in X: F(x) \subset Y\}$ вимірна за Лебегом (Борелем). Для скорочення в подальшому будемо називати вимірні за Лебегом багатозначні відображення просто вимірними, а вимірні за Борелем – борелівськими [9].

Якщо відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$ та функція $\lambda(x)$, $\lambda: R^n \rightarrow R^1$, вимірні, то відображення $F(x) + G(x)$, $\lambda(x)F(x)$, $\text{co } F(x)$, $F(x) \cap G(x)$, $F(x) \cup G(x)$ – вимірні. Нехай $X \in K(R^n)$, а $\lambda(x)$, $\lambda: R^n \rightarrow R^1$, напівнеперервна зверху (вимірна) функція. Тоді відображення $\lambda(x) \cdot X$ є борелівським (вимірним).

Лема 1.7. Нехай $X \in K(R^n)$, $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, – вимірне (борелівське) відображення. Тоді селектор $f(x) = \text{lex min } F(x)$, $x \in X$, – вимірний (борелівський) [8].

Лема 1.8. Нехай $X \in K(R^n)$, багатозначні відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \rightarrow K(R^n)$, вимірні (борелівські), а функція $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in G(x)$, $f(x, y) \in R^n$, вимірна (борелівська) по x та неперервна по y . Тоді багатозначне відображення

$$H(x) = \{y \in G(x): f(x, y) \in F(x)\}$$

є вимірним (борелівським). [8].

Теорема 1.3. (теорема Філіпова-Кастена) [7] Нехай $T > 0$, $X, Y \in K(R^n)$, $f(t, x)$, $f: [0, T] \times X \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська) по t та неперервна по x функція, $g(t)$, $g: [0, T] \rightarrow Y$, – вимірна (борелівська) функція, а $F(t)$, $F: [0, T] \rightarrow K(X)$, – вимірне (борелівське) відображення. Додатково, функція $g(t)$ така, що $g(t) \in f(t, F(t))$, $t \in [0, T]$. Тоді існує вимірний (борелівський) селектор $\xi(t)$ відображення $F(t)$ такий, що

$$g(t) = f(t, \xi(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Нехай $X \in K(R^n)$. Багатозначне відображення $F(x)$, $F: X \rightarrow K(R^n)$, називається рівномірно обмеженим на множині X , якщо існує така константа $r > 0$, що $F(x) \subset rS \quad \forall x \in X$.

Нехай $F(\tau)$, $F: [0, T] \rightarrow K(R^n)$, – вимірне відображення. Інтегралом від багатозначного відображення $F(\tau)$ назовемо множину [7]

$$\int_0^T F(\tau) d\tau = \left\{ x \in R^n : x = \int_0^T f(\tau) d\tau, f(\tau) \in F(\tau) \text{ для } \tau \in [0, T] \right\}.$$

Лема 1.9. [9] Нехай $F(\tau)$, $F: [0, T] \rightarrow K(R^n)$, – вимірне відображення, рівномірно обмежене на інтервалі $[0, T]$. Тоді $\int_0^T F(\tau) d\tau$ – опуклий компакт з R^n такий, що

$$\int_0^T F(\tau) d\tau = \int_0^T co F(\tau) d\tau.$$

Лема 1.10. [9] Нехай $X \in K(R^n)$ та $\alpha(\tau)$, $\alpha: [0, \infty) \rightarrow R^1$, – невід’ємна, обмежена, вимірна функція. Тоді

$$\int_0^T \alpha(\tau) X d\tau = \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \cdot co X, \quad T > 0.$$

Позначимо через Ω_X сукупність вимірних функція $x(t)$, $t \geq 0$, за значеннями з $X \in K(R^n)$.

Лема 1.11. Нехай $X \in K(R^n)$, $f(\tau, x)$, $f: [0, T] \times X \rightarrow R^1$, – вимірна по τ та неперервна по x функція, рівномірно обмежена на $[0, T] \times X$. Тоді

$$\inf_{x(\cdot) \in \Omega_X} \int_0^T f(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^T \inf_{x \in X} f(\tau, x) d\tau.$$

[9].

Лема 1.12. Нехай $X, Y, M \in K(R^n)$, $F(x, y), F: X \times Y \rightarrow K(R^n)$, – напівнеперервне зверху багатозначне відображення, $f(x), f: X \rightarrow R^n$, – неперервна функція, а також $f(x) \cap M = \emptyset$ та $\overline{\text{con}}(M - f(x)) \cap F(x, y) \neq \emptyset \ \forall x \in X, y \in Y$. Тоді функція $\alpha: X \times Y \rightarrow R^1$, визначена формулою

$$\alpha(x, y) = \max \{ \alpha \geq 0: \alpha(M - f(x)) \cap F(x, y) \neq \emptyset \}$$

напівнеперервна зверху на множині $X \times Y$ [6, с.29].

Лема 1.13. Нехай $X \in K(R^n)$, багатозначні відображення $F(x), F: X \rightarrow K(R^n)$, та $G(x), G: X \rightarrow K(R^n)$, напівнеперервні зверху, а функція $f(x, y), x \in X, y \in G(x), f(x, y) \in R^n$, неперервна. Тоді багатозначне відображення

$$H(x) = \{y \in G(x): f(x, y) \in F(x)\}$$

напівнеперервне зверху [6, с.26].

1.3 Системи диференційно-різницевих рівнянь та методи їх розв'язання

Розглянемо керований об'єкт, поведінка якого описується наступною системою лінійних диференційних рівнянь

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad x \in R^n, \quad u \in U, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

де x – n -мірний вектор фазового стану об'єкту, u – параметр керування,

$U \in K(R^n)$, A – постійна матриця порядку n .

Згідно властивостям лінійних неоднорідних систем розв'язок задачі (1.2) можна записати у вигляді суми $x(t) = x_{\text{одн}}(t) + x_{\text{ч}}(t)$, де $x_{\text{одн}}(t)$ – розв'язок відповідної однорідної системи, $x_{\text{ч}}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи.

Теорема 1.4. Розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

можна записати у вигляді матричного експоненціала

$$x(t) = x_0 e^{At},$$

де $e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots$, де I – одинична матриця порядку n .

Матрицю e^{At} називають фундаментальною матрицею однорідної системи (1.3) [12, с.150].

Якщо обрати керування $u(\tau)$, $\tau \geq 0$, у вигляді вимірної функції часу за значеннями з U , то розв'язок системи (1.2) з використанням формули Коші [12] записується у вигляді

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

При цьому траєкторія $x(t)$ є абсолютно неперервною функцією.

Розглянемо об'єкт, що описується системою диференціальних рівнянь з запізненням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + u(t), \quad x \in R^n, \quad u \in U, t \geq 0, \quad (1.5)$$

де x – n -мірний вектор фазового стану об'єкту, u – параметр керування, $U \in K(R^n)$, A , B – постійні матриці порядку n .

Нехай $K(t)$ – єдина матрична функція, що має наступні властивості [12]:

- 1) $K(t) = \Theta$, $t < 0$, де Θ – нульова матриця порядку n ;
- 2) $K(0) = I_n$, де I_n – одинична матриця порядку n ;
- 3) неперервно диференційована на $t > 0$;
- 4) задовольняє рівнянню

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - \tau), \quad t > 0$$

Тоді $K(t)$ – фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає рівнянню

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Теорема 1.5. Розв'язок системи неоднорідної системи з запізненням (1.5) при початковій умові $u(t) = g(t)$, $t \in [0, \tau]$, де $u(t)$ – неперервно диференційована функція при $t \geq 0$, має вигляд [12, с.90]

$$x(t) = g(0)K(t) + \int_0^\tau (g'(s) - Ag(s))K(t-s)ds + \int_\tau^t K(t-s)u(s)ds$$

Оскільки головним об'єктом дослідження в цій роботі є диференціальні процеси з чистим запізненням, розглянемо методи знаходження фундаментальної матриці саме для таких систем. Частіше за все на практиці використовують метод кроків, або метод послідовного інтегрування [13, с.57], проте нещодавно у монографії Хусаїнова Д.Я.[13, с.98] було запропоновано спеціальний вигляд фундаментальної матриці систем з постійним чистим запізненням.

Розглянемо систему однорідних рівнянь (1.6), в якій матриця A – нульова, тобто

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau), \quad t \geq 0, \tau > 0, \quad x \in R^n, \quad (1.8)$$

при початковій умові

$$x(t) \equiv \varphi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (1.9)$$

де $\varphi(t)$ – неперервно диференційована векторна функція.

Експоненціалом із запізненням $\exp_\tau\{B, \tau\}$ називають матричну функцію, що має вигляд [13]

$$\begin{aligned} & \exp_\tau\{B, \tau\} = \\ & = \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau; \\ I, & -\tau \leq t < 0; \\ I + B \frac{t}{1!} + B^2 \frac{(t - \tau)^2}{2!} + \dots + B^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

полінома степені k , «склеєного» у вузлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Він є неперервною функцією при $t \geq 0$, що автоматично впливає з представлення.

Лема 1.14. [14] Розв'язок $x(t)$ задачі Коші (1.8), (1.9) має вигляд

$$x_0(t) = \exp_{\tau}\{B, t\}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\{B, t - \tau - s\}\varphi'(s)ds. \quad (1.11)$$

Розглянемо неоднорідну систему з чистим запізненням

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau) + u(t), \quad t \geq 0, \tau > 0, x \in R^n, \quad (1.12)$$

при початковій умові (1.9).

Лема 1.15. [14] Розв'язок неоднорідної системи (1.12), що задовольняє нульовим початковим умовам $x(t) \equiv \Theta$, $-\tau \leq t < 0$, для $t \geq 0$ має вигляд:

$$e_q(t) = \int_0^t \exp_{\tau}\{B, t - \tau - s\}u(s)ds.$$

Отже, загальний розв'язок системи (1.12) має вигляд $x(t) = x_0(t) + x_q(t)$, тобто

$$x(t) = \exp_{\tau}\{B, t\}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\{B, t - \tau - s\}\varphi'(s)ds + \int_0^t \exp_{\tau}\{B, t - \tau - s\}u(s)ds.$$

Як бачимо, формула (1.3) цілком відповідає теоремі 1.4. для системи, зміщеної на $-\tau$ та нульовою матрицею A , що свідчить про те, що експоненціал з запізненням $\exp_{\tau}\{B, t\}$ дійсно є фундаментальною матрицею для диференціальних системи з постійним чистим запізненням (1.12), (1.9).

Висновок до розділу 1

Отже, завдання переслідування часто зустрічається в нашому сучасному житті і тому є придатною темою для дослідження. Вони засновані на конфліктно-керованих процесах, а дія учасників описується диференціальними рівняннями.

У першому розділі наведені основні поняття та класифікацію теорії ігор. Визначені теореми та означення, які використовуються для подальшого вивчення диференціальних ігор, також розглянуті методи розв'язування систем диференціально-різницевих рівнянь.

РОЗДІЛ 2 МЕТОД РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

2.1 Постановка задачі переслідування, означення стратегій.

Нехай рух керуючого об'єкта в просторі R^n описується рівнянням

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad (2.1)$$

де z — фазовий вектор, що складається з геометричних координат, швидкостей, прискорень переслідувача і втікача;

A — квадратна матриця порядку n ;

$\varphi(u, v), \varphi: U \times V \rightarrow R^n$ — неперервна за сукупністю змінних функція – блок управління;

U та V — параметри управління переслідувача та втікача, які вибираються з областей управління U та V , що являються непустими ком пактами простору R^n .

Вибираючи свої управління у вигляді деяких функцій, кожний з гравців впливає на процес (2.1), за для своїх цілей. Ціль переслідувача — вивести траєкторію процесу (2.1) на деяку замкнуту множину M^* , яке ми назвемо термінальним, якомога швидше, ціль втікача — відвернути траєкторію процесу (2.1) від зустрічі з множиною M^* на всьому напівнескінченному інтервалі часу, якщо це неможливо, то максимально відтягнути момент зустрічі. Найчастіше в задачах переслідування-втікання термінальна множина M^* є циліндром в множині R^n

$$M^* = M^\circ + \varepsilon S, \quad (2.2)$$

де M° — лінійний підпростір простора R^n ; S — куля з ортогонального доповнення до M° в просторі R^n , $\varepsilon \geq 0$. [4]

Конфліктно-керований процес (2.2) називається квазілінійним. Його особливість в тому, що блок управління нелінійно залежить від параметрів, що пов'язані між собою і можуть впливати один на одного.[4]

Якщо $\varphi(u, v) = u - v$, то процес

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad (2.3)$$

є лінійним. Незважаючи на той факт, що керуючі параметри розділені, процес (2.3) не може бути представлений у вигляді двох незалежних лінійних процесів, одним з яких управляє переслідувач, а іншим — втікач. Частинним випадком процесу (2.3) є лінійний процес з розділеним рухом [5]

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + u, & x \in R^k, \\ \dot{y} = Cy + v, & y \in R^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

де B та C — квадратні матриці порядку k і m відповідно, $k + m = n$.

2.2 Узагальнений контрольний приклад Л.С. Понтрягіна

Рух втікача і переслідувача задається рівняннями:

$$\begin{cases} x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \dots + a_{p-1} \dot{x} + a_p x = u, & x \in R^s, u \in U, \\ y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + \dots + b_{q-1} \dot{y} + b_q y = v, & y \in R^s, v \in V. \end{cases} \quad (2.5)$$

де $x^{(i)}$, $y^{(j)}$ — похідні за часом порядку $i, j, k = p \cdot s, m = q \cdot s$.

Термінальна множина задається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$. В цьому випадку будемо говорити про захват. Якщо $p > q$, то говорять, що переслідуювач має більшу інертність ніж втікач, але меншу маневреність. Якщо $p = q$, то об'єкти мають однакову інертність і однакову маневреність [4].

Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна [5]

Рух втікача і переслідуювача задається рівняннями:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha = \rho u, & x \in R^3, \|u\| \leq 1, \alpha, \rho > 0 \\ \ddot{y} + \beta i = \sigma v, & y \in R^3, \|v\| \leq 1, \beta, \sigma > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Кожне з цих рівнянь є проявленням другого закону Ньютона про руху тіла одиничної маси під дією керуючої сили з урахуванням сили тертя, яка лінійно залежить від швидкості.

Якщо термінальна множина задається рівністю $x = y$, то говорять про точне співпадіння геометричних координат. Якщо множина M означена за допомогою рівності $x = y$, $\dot{x} = \dot{y}$, то говорять про «м'яку посадку», про «м'яку зустріч» [5].

Процес коливання — це ще один приклад процесів другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a^2 x = u, & x \in R^3, \|u\| \leq \sigma, \\ \ddot{y} + b^2 y = v, & y \in R^3, \|v\| \leq \rho. \end{cases} \quad (2.7)$$

де a і b задають амплітуди коливання.

Кожна з однорідних систем задає періодичний рух, що описує коливання математичного маятника. Термінальна множина задається рівністю $x = y$ [5]. Розглянемо найпростіший приклад взаємодії гравців з різною інертністю:

$$\begin{cases} \ddot{x} = u, & x \in R^3, \|u\| \leq 1, \\ \dot{y} = v, & y \in R^3, \|v\| \leq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Переслідувач («крокодил») неповороткий, так як його траєкторія має обмежений радіус кривизни, але може набирати велику швидкість. Втікач без інерційний, але має обмежену швидкість. Термінальна множина визначається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$ [6].

Будемо говорити, що процес задається простим рухом, якщо

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x \in R^3, \|u\| \leq a, \\ \dot{y} = v, & y \in R^3, \|v\| \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Кожний з об'єктів без інерційний і його маневреність необмежена. Термінальна множина задається співвідношенням $\|x - y\| \leq \varepsilon$ [6].

Будь-який з процесів (2.5) — (2.9) може бути проведений до вигляду (2.4) або (2.3) за допомогою відповідної заміни змінних. Коли задана динаміка процесу, термінальна множина та визначений критерій якості (в нашому випадку це завжди час) залишається визначити інформованість гравців про поточний фазовий вектор та взаємному виборі керування.

Нехай $z(0) = z^\circ$ — початковий стан процесу (2.1). Позначимо

$$\begin{aligned} \Omega_U &= \{u(\cdot): u(t) \in U, t \geq 0, u(t) - \text{вимірна}\} \\ \Omega_V &= \{v(\cdot): v(t) \in V, t \geq 0, v(t) - \text{вимірна}\}, \end{aligned}$$

Функцію $u(\cdot) \in \Omega_U$ ($v(\cdot) \in \Omega_V$), вибрану переслідувачем (втікачем) за початковою позицією z° , назовемо програмним керуванням переслідувача (втікача)[5].

Назвемо передісторією управління втікача в момент t , $t \geq 0$, функцію

$$v_t(\cdot) = \{v(s): v(s) \in V, s \in [0, t], v(s) - \text{вимірний}\}.$$

Будемо говорити, що задана квазістратегія переслідувача, якщо визначено відображення $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, що ставить у відповідність початковому стану z° , кожному моменту часу $t \geq 0$ та будь-якій передісторії управління втікача $v_t(\cdot)$ вимірну функцію $u(t) = U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, $t \geq 0$, зі значеннями з області управління U . При цьому має виконуватись умова «фізичної здійсненності», тобто, якщо $v^1(\cdot) \in \Omega_v$, $v^2(\cdot) \in \Omega_v$ та $v^1(t) = v^2(t)$ майже всюди для $t \geq 0$, то відповідні їм функції $u^1(t), u^2(t)$ при відображенні $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$, також рівні майже всюди для $t \geq 0$.

Аналогічно задається квазістратегія втікача. Окремим випадком квазістратегій є стробоскопічні стратегії, визначають контруправління. Для їхнього формального визначення досить у визначенні квазістратегії замість відображення $U(t, z^\circ, v_t(\cdot))$ взяти відображення $U(z^\circ, v_t(t))$ з відповідними змінами. Інакше кажучи, контруправління переслідувача будується на основі знань про початковий стан z° процесу (2.1) та миттєвому значенні управління втікача $u(t) = u(z^\circ, v(t))$, $t \geq 0$. Контруправління втікача визначається симетрично: $v(t) = v(z^\circ, u(t))$, $t \geq 0$. Зрозуміло, що при цьому повинні виконуватись включення $u(\cdot) \in \Omega_U$, $v(\cdot) \in \Omega_V$ [6].

Якщо в ході процесу (2.1) в момент $t \geq 0$ переслідувачу або втікачу відомий поточний фазовий вектор $z(t)$, то будемо говорити про позиційні стратегії та управління [7].

Ототожнимо позиційні стратегії з функціями $u(z)$, $v(z)$, $u(z) \in U$, $v(z) \in V$. Причому при підстановці позиційних управлінь $u(z)$, $v(z)$ в систему управлінь (2.1) повинно існувати розв'язок по Каратеодорі. Ця умова не буде порушена, якщо, наприклад, управління $u(z)$, $v(z)$ неперервно залежать від позиції.

Якщо управління гравців обираються у вигляді функцій $u(z, v)$, $v(z, u)$, то будемо говорити про позиційних контруправліннях [7]. При цьому функції

$$\begin{aligned} u(t, z) &= u(z, v(t)) \in U, \\ v(t, z) &= v(z, u(t)) \in V \end{aligned}$$

повинні бути вимірними за часом та неперервні по z . Якщо управління не є неперервними функціями від позиції, то потрібно розглядати рівняння з розривною правою частиною, диференціальні включення.

Під час вивчення конфліктно-керованого процесу (2.1), (2.2) приймемо бік одного з гравців і постараємося отримати деякий гарантований для нього результат за будь-якої протидії противника. В цій ситуації досить визначити клас управлінь однієї зі сторін, а для іншої можна розглядати як завгодно широкий клас управлінь, сумісний з даним.

Для всіх заданих вище класів стратегій можуть бути поставлені наступні задачі.

2.3 Основна схема метода

Квазілінійний конфліктно-керований процес задано системою

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), z \in R^n, u \in U, v \in V, \quad (2.10)$$

де A — постійна квадратна матриця,

$\varphi: U \times V \rightarrow R^n$ — неперервна за сукупністю змінних.

Термінальна множина є циліндричною та має вид

$$M^* = M^\circ + M, \quad (2.11)$$

де M° — лінійний підпростір з R^n ,

M — непорожній компакт з ортогонального доповнення $L \times M^\circ$ в просторі R^n . Переслідуювач використовує квазістратегії, а втікач — програмні управління [14-19].

Для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) розглядається локальна задача зближення з фіксованим часом. Позначимо через π — оператор ортогонального проектування з R^n на L , через e^{tA} — фундаментальну матрицю однорідної системи $\dot{z} = Az$, а $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$ для $v \in V$.

Розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v),$$

$$W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), t \geq 0.$$

Умова 2.1 (умова Л.С. Понтрягіна [14-19]). Відображення $W(t) \neq \emptyset$ для всіх $t \geq 0$.

Позначимо через $\Gamma = \{\gamma(\cdot): \gamma(t) \in W(t), t \geq 0\}$ сукупність борелівських селекторів багатозначного відображення $W(t)$. Зафіксуємо деякий елемент $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, покладемо

$$\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = \pi e^{At} z + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

і розглянемо розв'язуючу функцію [14-19]

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) =$$

$$= \sup \{ \alpha \geq 0 : [W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)] \bigcap \alpha [M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \}, \quad (2.12)$$

Легко побачити, що так як $0 \in W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)$ для всіх $v \in V, t \geq \tau \geq 0$, то при $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \in M$ функція $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = +\infty$ для всіх $\tau \in [0, t], v \in V$. Якщо ж $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M$, то розв'язуюча функція (2.12) приймає скінченні значення, вона до того ж рівномірна по $\tau \in [0, t], v \in V$ обмежена.

Лема 2.1. [14] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.2.1 і для деяких $t, z, \gamma(\cdot)$, $t > 0, z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M$. Тоді розв'язуюча функція (2.12) борелівська по (τ, v) , і напівнеперервна зверху по $v, \tau \in [0, t], v \in V$.

Лема 2.2. [14] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.1 і для деякого елемента $z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, $T(z, \gamma(\cdot)) < +\infty$. Тоді нижня границя по часу досягається.

Теорема 2.1. [14] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконується умова 2.1, множина M — опукла, для початкового стану z° і деякого селектора $\gamma^\circ(\cdot) \in \Gamma$. $T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)) < +\infty$. Тоді траєкторія процесу (2.10) може бути приведена з початкового стану z° на термінальну множину в момент $T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))$.

Доведення. Нехай $T = T(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)), v(\tau) \in V, \tau \in [0, T]$ — двільна вимірна функція. Розглянемо випадок $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \notin M$. Введемо контрольну функцію

$$h(t) = h(T, t, z^\circ, v(\cdot), \gamma^\circ(\cdot)) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau.$$

Функція $h(t)$ неперервна, не зростає і $h(0) = 1$. З визначення моменту T слідує, що існує таке $t_* = t_*(v(\cdot))$, $0 < t_* \leq T$, що $h(t_*) = 0$. Вкажемо спосіб вибору управління переслідувача [10, 14].

Розглянемо багатозначне відображення

$$U_1(\tau, v) = \{u \in U: \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma^\circ(T - \tau) \in \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) [M - \xi(t, z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))]\}. \quad (2.13)$$

В силу леми 1.11, воно борелівське за совокупністю змінних (τ, v) . Тоді селектор [10, 14-19]

$$u_1(\tau, v) = \text{lex min} U_1(\tau, v), \quad (2.14)$$

є борелівською за (τ, v) функцією (лема 1.10). Управління переслідувача на інтервалі $[0, t_*)$ виберемо рівним

$$u(\tau) = u_1(\tau, v(\tau)). \quad (2.19)$$

Згідно леми 1.1, $v(\tau)$ — вимірنا функція.

Розглянемо багатозначне відображення [10, 14-19]:

$$U_2(\tau, v) = \{u \in U: \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma^\circ(T - \tau) = 0\} \quad (2.15)$$

В силу леми 1.11, воно також борелівське за (τ, v) . Тоді селектор

$$u_2(\tau, v) = \text{lex min} U_2(\tau, v) \quad (2.16)$$

є борелівською за (τ, v) функцією (лема 1.10). Управління переслідувача на інтервалі $[t_*, T]$ буде рівним [10, 14-19]

$$u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau)) \quad (2.17)$$

Згідно лемі 1.1, $u(\tau)$ є вимірною функцією.

Нехай $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \in M$. Тоді управління переслідувача на інтервалі $[0, T]$ буде рівним $u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$. Покажемо, що при такому виборі законів управління переслідувача траєкторія процесу (2.10) в момент T попаде на множину M при будь-якому управлінні втікача.

З формули Коші [14] для процесу (2.10) слідує

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^\circ + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau \quad (2.18)$$

Проаналізуємо спочатку випадок $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \notin M$. Для цього додамо і віднімемо з правої частини рівності (2.18) величину $\int_0^T \gamma^\circ(T-\tau) d\tau$. Тоді, враховуючи закони вибору управління переслідувачем (2.13) – (2.17), отримуємо включення

$$\begin{aligned} \pi z(T) \in & \xi(T, z^\circ, \gamma^\circ(\cdot))(1 - \\ & - \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau + \int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) M d\tau). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням рівності $\int_0^t \alpha(T, \tau, z^\circ, v(\tau), \gamma^\circ(\cdot)) d\tau = 1$, опуклості множини M з леми 1.13 маємо $\pi z(T) \in M$.

Нехай $\xi(t, z^\circ, \gamma^\circ) \in M$. Тоді, враховуючи закон вибору управління переслідувачем, з представлення (2.18) отримуємо включення $\pi z(T) \in M$. Останнє рівносильне включенню $z(T) \in M$.

Замітка 2.1. Управління переслідувача будувалось у вигляді контруправлінь (2.19), (2.17). Однак для визначення моменту t_* — моменту переключення з закону управління (2.19) на закон (2.17) необхідна інформація в момент t про всю передісторію управління втікача $v_t(0)$. Тому вцілому стратегію переслідувача, реалізуючи теорему 2.1, слід класифікувати як квазістратегію [14-19].

Замітка 2.2. Момент T є фіксованим в тому сенсі, що похибки втікача (вони породжують момент переключення t_*), загалом говорячи, не можуть бути використані, а час T не може бути зменшений в рамках даної схеми.

Замітка 2.3. Якщо в схемі методу вибрати селектор $\gamma(\cdot)$ не борелівським, а вимірним, то слідує, що враховуючи лему 1.4, додатково вимагати, щоб розв'язуюча функція $\alpha(T, \tau, z, v(\tau), \gamma(\cdot))$ була вимірною по $\tau, \tau \in [0, t]$, при будь-яких $v(\cdot) \in \Omega_v$ та фіксованих $t > 0, z \in R^n, \gamma(\cdot)$. Достатньою умовою для цього є вимога, щоб при фіксованих $t, z, \gamma(\cdot)$ розв'язуюча функція була нормальним інтервалом, тобто щоб багатозначне відображення

$$F(\tau) = \{(\alpha, v) \in R^1 \times R^n : \alpha \geq \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))\}$$

було вимірним і замкнутим [10].

Крім того, для вибору управлінь переслідувача замість відповідних (2.13) – (2.17) слідує скористатись теоремою Філіпова-Кастена, так як при вимірному селекторі $\gamma(\cdot)$ співвідношення (2.19), (2.17), не забезпечують вимірність управління $u(\tau)$ [8].

З приведеної схеми видно, що центральну роль у визначенні часу $T(z, \gamma(\cdot))$ і при побудові управління переслідувача на «активному» участку грає роль розв'язуюча функція.

Введемо розв'язуючу функцію в вигляді [14-19]

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \\ = \begin{cases} \max \{ \alpha \geq 0 : \{W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)\} \cap \alpha \{M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))\} \neq \emptyset, \\ \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M \\ \alpha(t, \tau), \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \in M \end{cases} \\ t \geq \tau \geq 0, z \in R^n, v \in V, \gamma(\cdot) \in \Gamma \end{aligned}$$

де $\alpha(t, \tau)$ — довільна невід'ємна обмежена вимірна функція, що задовольняє умову $\int_0^t \alpha(t, \tau) d\tau = 1$ для всіх $t \geq 0$.

Якщо через $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ визначити за формулою функцію $T(z, \gamma(\cdot))$, то вона буде такою ж самою. Більше того теорема 2.1 та її доведення не змінюються якщо замість функції $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ використовувати функцію $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$.

У деяких випадках функція $\hat{\alpha}(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ зручніша за функцію $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$, так як вона всюди скінченна.

Лема 2.3.[10] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.10), (2.11) виконана умова 2.1, відображення $W(t, v)$ опуклоозначене для $t \geq 0$, $v \in V$, а множина M — опукла. Тоді, якщо $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin M, t \geq 0, z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$, то

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \inf_{p \in P(t, z)} \left\{ \frac{C(W(t - \tau, v); p) - (p, \gamma(t - \tau))}{-C(M; -p) - (p, \xi(t, z, \gamma(\cdot)))} \right\}, t \geq \tau \geq 0,$$

$$v \in V$$

де $P(t, z) = \{p \in L: \|p\| = 1, C(M; -p) + (p, \xi(t, z, \gamma(\cdot))) < 0\}$.

2.4 Модифікація умови Л. С. Понтрягіна

Умова 2.1 не виконується на деякому інтервалі часу для об'єктів з різною інерційністю. Прикладом є задача «хлопчик і крокодил». Причиною цього явища деколи є той факт, що в самій умові не фігурує такий важливий параметр процесу, як термінальна множина. Один зі способів залучення термінальної множини для розширеного класу задач, що піддаються розв'язанню, приводяться нижче.

Нехай заданий конфліктно-керований процес (2.3), (2.5), для якого умова 2.1 не виконується. Покладем

$$W_*(t, v) = W(t, v) + w(t)M, \quad t \geq 0, \quad v \in V,$$

де $w(\cdot): R^1 \rightarrow R^1$ – деяка неперервна функція. Багатозначне відображення $W_*(t, v)$ неперервне по t та v . З цього слідує, відображення $W_*(t) = \bigcap_{v \in V} W_*(t, v)$, $t \geq 0$, напівнеперервна зверху [10].

Умова 2.2.[10,14] Існує неперервна числова функція $w(t)$, $t \geq 0$, така, що багатозначне відображення $W_*(t)$ непусте для всіх $t \geq 0$.

Замітка 2.4. Для лінійного процесу (2.3), (2.5)

$$W_*(t) = (\pi e^{At}U + w(t)M) \overset{*}{-} \pi e^{At}V.$$

Позначимо $\Gamma_* = \{\gamma(\cdot): \gamma(t) \in W_*(t), t \geq 0\}$ сукупність борелівських селекторів відображення $W_*(t)$. Зафіксуємо деякий елемент $\gamma(\cdot) \in \Gamma_*$ і введем розв'язуючу функцію за формулою [14]:

$$\begin{aligned} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \\ = \sup\{\alpha \geq 0: -\alpha \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \in W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

для $t \geq \tau \geq 0, z \in R^n, v \in V, \gamma(\cdot) \in \Gamma$. Якщо $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = 0$, то $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) \neq 0$, то розв'язуюча функція (2.20) рівномірно по $\tau \in [0, t], v \in V$ обмежена.

Лема 2.4. [10] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.3), (2.5) виконана умова 2.2 і для деяких

$$t, z, \gamma(\cdot), \quad t > 0, \quad z \in R^n, \quad \gamma(\cdot) \in \Gamma, \quad \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \neq 0.$$

Тоді розв'язуюча функція (2.20) борелівська за $(\tau, v), \tau \in [0, t], v \in V$, і напівнеперервна зверху за $v, v \in V$, а функція $\inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ вимірна по $\tau, \tau \in [0, t]$.

Доведення випливає з лем 1.14, 1.1, 1.2. Розглянемо функцію [10,14]:

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \min \left\{ t \geq 0: \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) d\tau \geq 1 \right\} \quad (2.21)$$

для $z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma$. Якщо нерівність в фігурних дужках не виконується при всіх $t \geq 0$, то покладемо $T(z, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Теорема 2.2. [10] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.3), (2.5) виконана умова 2.2, для початкового стану z^0 і деякого селектора $\gamma^0(\cdot) \in \Gamma$,

$$T_1 = T_1(z^0, \gamma^0(.)) < +\infty,$$

причому

$$\int_0^{\tau} w(\tau) M d\tau \subset M. \quad (2.22)$$

Тоді траєкторія процесу (2.3) може бути приведена на термінальну множину з початкового стану z^0 в момент $T_1(z^0, \gamma^0(.))$.

Доведення. Нехай $v(\tau), v(\tau) \in V, \tau \in [0, T_1]$ – будь-яка вимірна функція. Розглянемо випадок $\xi(T_1, z^0, \gamma^0(.)) \neq 0$. Тоді для контрольної функції

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha_1(T, \tau, z^0, v(\tau), \gamma^0(.)) d\tau$$

в силу її неперервності і враховуючи співвідношення (2.21) існує момент $t, 0 < t \leq T_1$, такий, що $h(t) = 0$. З багатозначного відображення

$$\begin{aligned} U_1(\tau, v) &= \{u \in U: -\alpha_1(T, \tau, z^0, v(\tau), \gamma^0(.)) \xi(T_1, z^0, \gamma^0(.)) \in \\ &\in p e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) + w(T_1 - \tau) M - \gamma^0(T_1 - \tau) \} \end{aligned} \quad (2.23)$$

виберемо селектор [10]

$$u_1(\tau, v) = \text{lex min} U_1(\tau, v) \quad (2.24)$$

і управління переслідувача на інтервалі $[0, t)$ покладемо рівним [10]

$$u(\tau) = u_1(\tau, v(\tau)). \quad (2.25)$$

На основі лем 1.11, 1.12, 1.1 і співвідношень (2.23) – (2.25) воно є вимірною функцією.

Нехай

$$U_2(\tau, v) = \{u \in U : 0 \in \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) + w(T-\tau)M - \gamma^0(T-\tau)\}, \quad (2.26)$$

$$u_2(\tau, v) = \text{lex min } U_2(\tau, v) \quad (2.27)$$

і управління переслідувача

$$u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau)), \tau \in [t, T] \quad (2.28)$$

Вона також є вимірною функцією часу в силу лем 1.3.7, 1.3.6, 1.1.1 і співвідношень (2.26) – (2.28).

Якщо $\xi(T, z^0, \gamma^0(.)) = 0$, то покладемо

$$u(\tau) = u_2(\tau, v(\tau)), \tau \in [0, T]. \quad (2.29)$$

Нехай $\xi(T, z^0, \gamma^0(.)) \neq 0$. Додаючи і віднімаючи з правої частини представлення

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau$$

величини

$$\int_0^T \gamma^0(T-\tau) d\tau, \int_0^T \alpha(T, \tau, z^0, v(\tau), \gamma^0(.)) d\tau * \xi(T, z^0, \gamma^0(.))$$

і, враховуючи закони вибору управління переслідувачем (2.23)-(2.29), отримуємо [12]:

$$\begin{aligned} \pi z(T) \in \xi(T, z^0, \gamma^0(.))(1 - \\ - \int_0^T \alpha(T, \tau, z^0, v(\tau), \gamma^0(.)) d\tau) + \int_0^T w(T-\tau) M d\tau, \end{aligned} \quad (2.30)$$

де $\alpha(T, \tau, z^0, v(\tau), \gamma^0(.)) = 0$ для $\tau \in [t, T]$. З (2.30), (2.22) і рівності $h(t) = 0$ слідує включення $\pi z(T) \in M$.

Якщо $\xi(T, z^0, \gamma^0(.)) = 0$, то, діючи аналогічно попередньому випадку і враховуючи закон управління (2.29), отримаємо включення $\pi z(T) \in M$.

Замітка 2.4. Якщо множина M – опукла, а функція $w(t), t \geq 0$, невід’ємна, то замість включення (2.22) достатньо вимагати рівність $\int_0^T w(\tau) d\tau = 1$. Залишається справедливим аналогом лем 2.3, 2.4.

Лема 2.5. [10] Нехай для конфліктно-керованого процесу (2.3), (2.5)

виконана умова 2.2, відображення $W(t, v)$ опуклозначне для $t \geq 0, v \in V$, а множина M – опукла. Тоді, якщо

$$\xi(t, z, \gamma(.)) \neq 0, t \geq 0, z \in R^n, \gamma(.) \in \Gamma,$$

то

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(.)) = \inf_{p \in P(t, z)} \left\{ \frac{C(W(t - \tau, v); p) + w(t - \tau)C(M; p) - (p, \gamma(t - \tau))}{-(p, \xi(t, z, \gamma(.)))} \right\},$$

де $P(t, z) = \{p \in L: \|p\| = 1, (p, \xi(t, z, \gamma(.))) < 0\}$. З леми 2.3.2 випливає твердження.

Наслідок 2.1. Нехай ККП (2.3), (2.5) лінійний, виконана умова 2.2, відображення $pe^{At}U$ опуклозначне для $t \geq 0$, а множина M – опукла. Тоді якщо

$$\xi(t, z, \gamma(.)) \neq 0, \quad t \geq 0, z \in R^n, \gamma(.) \in \Gamma,$$

то розв'язуюча функція $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(.))$ Ввігнута по v на множині V , а слідуючи з цього, неперервна на множині riV . Для знаходження розв'язуючої функції (2.20) в явному виді найбільш корисно слідує твердження.

Лема 2.6. [12] Нехай КПП (2.3), (2.5) лінійний, виконана умова 2.2 існує неперервна додатна функція $r(t), r: R^l \rightarrow R^l$, і число $l \geq 0$ таке, що $pe^{At}U = r(t)S, M = lS$. Тоді, при $\xi(t, z, \gamma(.)) \neq 0$ розв'язуюча функція (2.20) є

найбільшим додатним коренем квадратного рівняння

$$\left\| \pi e^{A(t-\tau)} v + \gamma(t-\tau) - \alpha \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \right\| = r(t-\tau) + w(t-\tau)l$$

відносно α .

Розглянемо деякі узагальнення запропонованої схеми. Нехай багатозначне відображення $W_\cdot(t, v)$ має вид

$$W_\cdot(t, v) = W(t, v) + H(t),$$

де $H: R^l \rightarrow K(R^n)$ – деяке неперервне багатозначне відображення, і при цьому $W_\cdot(t) \neq 0$ для $t \geq 0$. Тоді залишається справедливим твердження теореми 2.2 з тією лише різницею, що замість умови (2.22) має виконуватись включення $\int_0^T H(\tau) d\tau \subset M$. Нехай

$$W(t, \tau, v) = W(t - \tau, v) + w(t, \tau)M, t \geq \tau \geq 0, v \in V,$$

де $w: R^l \times R^l \rightarrow R^l$ – деяка неперервна функція. Багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ неперервне по своїм змінним. Нехай

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v).$$

Умова 2.3. [10] Існує неперервна числова функція $w(t, \tau), t \geq \tau \geq 0$, така, що багатозначне відображення $W(t, \tau)$ непусте для всіх $t \geq \tau \geq 0$. В силу твердження 1.1 відображення $W(t, \tau)$ напівнеперервне зверху.

Позначимо

$$\Gamma = \{\gamma(\cdot, \cdot): \gamma(t, \tau) \in W(t, \tau), t \geq \tau \geq 0\}$$

Сукупність борелівських селекторів відображення $W(t, \tau)$ і зафіксуємо один з них. Покладемо

$$\eta(t, z, \gamma(t, \cdot)) = pe^{At}z + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$$

і розглянемо розв'язуючу функцію [12]:

$$\alpha^0(t, \tau, z, v, \gamma(t, \cdot)) = \sup\{\alpha \geq 0: -\alpha\eta(t, z, \gamma(t, \cdot)) \in W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)\}$$

Легко побачити, що функція $\alpha^0(t, \tau, z, v, \gamma(t, \cdot))$ скінченна, якщо $\eta(t, z, \gamma(t, \cdot)) \neq 0$, і приймає нескінченні значення, якщо $\eta(t, z, \gamma(t, \cdot)) = 0$. Аналогічно попереднім подібним ситуаціям неважко встановити, що функція (2.31) борелівська по $\tau, t \geq \tau \geq 0$, і напівнеперервна зверху по $v, v \in V$ [12].
Позначимо

$$T^0(z, \gamma(\cdot, \cdot)) = \min\{t \geq 0: \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha^0(t, \tau, z, v, \gamma(t, \cdot)) d\tau \geq 1\}.$$

Якщо нерівність в фігурних дужках не виконується, то покладемо $T^0(z, \gamma(.,.)) = +\infty$.

Теорема 2.3. [10] Нехай для ККП (2.3), (2.5) виконується умова 2.3 для початкового стану z^0 і деякого селектора

$$\gamma^0(.,.) \in \tilde{\Gamma}, \quad T^0 = T^0(z^0, \gamma^0(.,.)) < +\infty,$$

Причому

$$\int_0^{T^0} w(T^0, \tau) M d\tau \subset M. \quad (2.32)$$

Тоді траєкторія процесу (2.3) може бути приведена на термінальну множину з початкового стану z^0 в момент $T^0(z^0, \gamma^0(.,.))$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.2.

Зауваження 2.5. Якщо множина M опукла, а функція $w(t, \tau), t \geq \tau \geq 0$, невід'ємна, то замість 2.31 достатньо вимагати рівність

$$\int_0^{T^0} w(T^0, \tau) d\tau = 1.$$

Висновки до розділу 2

У даному розділі означено диференціальну гру переслідування, розглянуто метод розв'язуючих функцій для задачі зближення та його особливості для об'єктів з різною інерційністю. Наведені основні теореми та означення .

Розглянуто теореми, в яких сформульовані необхідні умови завершення гри для об'єктів з різною інерційністю.

РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА ТРАЄКТОРІЇ РУХУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

3.1 Приклад «Хлопчик і крокодил»

Динаміка переслідувача і втікача задаються рівняннями відповідно

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u, x \in R^2, s \geq 2, \|u\| \leq \rho, \rho > 0, \\ \dot{y} &= v, y \in R^2, \|v\| \leq \sigma, \sigma > 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Переслідування вважається завершеним, якщо $\|x - y\| \leq l$.

Перейдемо до системи рівнянь першого порядку. Для цього введемо нові змінні $(z_1, z_2) = z$,

$$z_1 = x - y, z_2 = \dot{x}.\tag{3.2}$$

Продиференціювавши за часом співвідношення (3.2), з врахуванням початкових рівнянь (3.1), отримуємо

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - v, \\ \dot{z}_2 &= u.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Термінальна множина [10, 14] $M = \{z: ||z_1|| \leq l\}$, причому, $M_0 = \{z: z_1 = 0\}$, $L = \{z: z_2 = 0\}$, $M = \{z: ||z_1|| \leq l, z_2 = 0\}$.

Оператор ортогонального проектування $\pi: R^{2s} \rightarrow L$ задається матрицею $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $\pi z = z_1$. Матриця A має вид $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, області керувань –

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : ||u|| \leq \rho \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} : ||v|| \leq \sigma \right\}.$$

Фундаментальна матриця однорідної системи (3.3) [10, 14]:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

У даному випадку $\pi e^{At}U = \rho tS$, $\pi e^{At}V = \sigma S$, $M = lS$, де S – одинична куля підпростору L з центром в нулі. Тоді

$$W(t) = (\rho tS + w(t)lS)^* - \sigma S = (\rho t + lw(t) - \sigma)S.$$

Таким чином умова 2.3 виконується, якщо $\rho t + lw(t) - \sigma \geq 0$. Причому, ця нерівність має виконуватись для $t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right)$. Для $t \geq \frac{\sigma}{\rho}$ досить вимагати, щоб $w(t) \geq 0$, і умова 2.3 виконується автоматично. Для функції $w(t)$ маємо нерівність [14]:

$$w(t) \geq \frac{-\rho t + \sigma}{l}, t \geq 0. \quad (3.4)$$

Покладемо

$$w(t) = \begin{cases} \frac{(-\rho t + \sigma)2\rho}{\sigma^2}, & t \leq \frac{\sigma}{\rho}, \\ 0, & t > \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Тоді при $l \geq \frac{\sigma^2}{2\rho}$ виконана нерівність (3.4). Крім того,

$$\int_0^t w(\tau) d\tau = 1 \text{ при } t \geq \frac{\sigma}{\rho}.$$

З цього слідує [14], з $w(t)$ виду (3.5) можна шукати час закінчення переслідування на інтервалі $t \geq \frac{\sigma}{\rho}$ за умови $l \geq \frac{\sigma^2}{2\rho}$.

Нехай $\gamma(\cdot) = 0$. Тоді $\xi(t, z, 0) = \pi e^{At} z = z_1 + tz_2$. Розв'язуюча функція

$$\begin{aligned} \alpha_*(t, \tau, z, v, 0) = \\ = \sup [\alpha: -\alpha(z_1 + tz_2) \in ((\rho(t - \tau) + lw(t - \tau)S) - \sigma v)], v \in S. \end{aligned}$$

Нехай $z_1 + tz_2 \neq 0$. Тоді розв'язуюча функція є найбільшим коренем квадратного рівняння [14]

$$\begin{aligned} \|\sigma v - \alpha(z_1 + tz_2)\| &= \rho(t - \tau) + lw(t - \tau) \\ \alpha_*(t, \tau, z, v, 0) &= \frac{\sigma(z_1 + tz_2, v)}{\|z_1 + tz_2\|^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\sigma^2(z_1 + tz_2, v)^2 + \|z_1 + tz_2\|^2 \left[(\rho(t - \tau) + lw(t - \tau))^2 - \sigma^2 \|v\|^2 \right])^{\frac{1}{2}}}{\|z_1 + tz_2\|^2}$$

Далі,

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha(t, \tau, z, v, 0) = \frac{\rho(t - \tau) + lw(t - \tau) - \sigma}{\|z_1 + tz_2\|} \quad (3.6)$$

І співвідношення

$$\int_0^t \frac{\rho(t - \tau) + lw(t - \tau) - \sigma}{\|z_1 + tz_2\|} d\tau = 1$$

еквівалентне рівнянню [10, 14]

$$\|z_1 + tz_2\| = \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l. \quad (3.7)$$

Найменший додатний корінь рівняння (3.7) є моментом піймання. Так як $t = 0$ ліва частина рівна $\|z_1\|$, а права l , причому $\|z_1\| > l$ і ліва частина з ростом t росте лінійно, а права квадратично, то при будь-яких z_1 та z_2 момент піймання кінечний [14].

Відмітимо також, що рівність $z_1 + tz_2 = 0$ може бути виконана тільки після рівності (3.7). Тому цей випадок розглядати не варто.

Нехай $l \geq \frac{\sigma^2}{2\rho}$ і $t < \frac{\sigma}{\rho}$. Застосуємо теорему 2.3. Тоді

$$W(t, \tau) = (\rho(t - \tau) + lw(t, \tau) - \sigma)S, t \geq \tau \geq 0,$$

і умова 2.4 виконане, якщо $\rho(t - \tau) + lw(t, \tau) - \sigma \geq 0$ для всіх $t \geq \tau \geq 0$.

Звідси отримуємо нерівність для шуканої функції $w(t, \tau)$

$$w(t, \tau) \geq \frac{-\rho(t - \tau) + \sigma}{l}, t \geq \tau \geq 0. \quad (3.8)$$

Покладемо

$$w(t, \tau) \geq \frac{-\rho(t - \tau) + \sigma}{\sigma t - \frac{\rho t^2}{2}},$$

отримуємо: по — перше, справедлива нерівність (3.8), так як $l \geq \sigma t - \frac{\rho t^2}{2}$; по-друге,

$$\int_0^t w(t, \tau) d\tau = 1. \quad (3.9)$$

Поклавши $\gamma(t, \tau) = 0$, маємо $\eta(t, z, 0) = z_1 + tz_2$.

Розв'язуюча функція $\alpha^0(t, \tau, z, v, 0)$ співпадає з функцією $\alpha(t, \tau, z, v, 0)$, якщо $w(t - \tau)$ замінить на $w(t, \tau)$. Тоді

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha^0(t, \tau, z, v, 0) = \frac{\rho(t - \tau) + lw(t - \tau) - \sigma}{\|z_1 + tz_2\|} \quad (3.10)$$

Звідси аналогічно попередньому випадку з врахуванням рівності (3.9), отримуємо рівняння (3.7) для визначення моменту піймання втікача.

Нехай для $l < \frac{\sigma^2}{2\rho}$. Скористаємось теоремою 2.4. Потрібно вказати невід'ємну функцію $w(t, \tau)$, що задовольняє умови (3.8), (3.9). Будемо шукати функцію $w(t, \tau)$ у вигляді $w(t, \tau) = \frac{-\rho(t-\tau)+\sigma}{l} + \Delta(t)$, $t \leq \frac{\sigma}{\rho}$, де $\Delta(t)$ – деяка невід'ємна функція, яку потрібно визначити з умови

$$\int_0^t w(t, \tau) d\tau = \int_0^t \left[\frac{-\rho(t-\tau)+\sigma}{l} + \Delta(t) \right] d\tau = 1$$

Провівши розрахунки, отримуємо

$$\Delta(t) = \frac{\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l}{tl}.$$

Функція $\Delta(t)$ невід'ємна на інтервалах

$$\left[0, \frac{\sigma - (\sigma^2 - 2\rho l)^{1/2}}{\rho} \right] \cup \left[\frac{\sigma + (\sigma^2 - 2\rho l)^{1/2}}{\rho}, +\infty \right),$$

Тому невід'ємну функцію $w(t, \tau)$, що задовольняє умови (3.8), (3.9), можна визначити лише для $t \in \left[0, \frac{\sigma - (\sigma^2 - 2\rho l)^{1/2}}{\rho} \right]$, $t \geq \tau \geq 0$, і вона має вид

$$w(t, \tau) = \frac{\frac{-\rho t^2}{2} + \rho t \tau + l}{t l}. \quad (3.11)$$

Маючи функцію $w(t, \tau)$ виду (3.11), легко побудувати розв'язуючу функцію [14] $\alpha^0(t, \tau, z, v, 0)$. Її мінімум за v дається виразом (3.10), інтегруючи який по τ на інтервалі $[0, t]$ і прирівнюючи до одиниці, отримаємо рівняння (3.7) для визначення моменту піймання на інтервалі $\left[0, \frac{\sigma - (\sigma^2 - 2\rho l)^{1/2}}{\rho}\right]$.

3.2 Приклад для об'єктів рух яких описується ДРР

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t - \tau) - v, & z_1 &\in R^n, n \geq 2, \\ \dot{z}_2(t) &= u, & z_2 &\in R^n, \\ \|u\| &\leq \rho, \rho > 0, \|v\| &\leq \sigma, \sigma > 0. \end{aligned}$$

Початковий стан:

$$z(t) = z^0(t) = \left(z_1^0(t), z_2^0(t)\right), -\tau \leq t \leq 0.$$

Переслідування завершується, коли $\|z_1\| \leq l$.

$$A=0, B = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad z(t) = Bz(t - \tau) + u - v$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : \|u\| \leq \rho \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} : \|v\| \leq \sigma \right\}.$$

Термінальна множина M^* має вигляд

$$\begin{aligned} M^* &= \{z = (z_1, z_2) \in R^{2n} : \|z_1\| \leq l\}, \\ M_0 &= \{z = (z_1, z_2) \in R^{2n} : z_1 = 0\}, \\ L &= \{z = (z_1, z_2) \in R^{2n} : z_2 = 0\}, \\ M &= \{z = (z_1, z_2) \in R^{2n} : \|z_1\| \leq l, \quad z_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Таким чином, оператор ортогональної проєкції визначається матрицею $\pi = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Фундаментальна матриця має вигляд $[K(t)] = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E_n$. [14] Далі отримуємо $W(t) = (\rho t - \sigma)S = \emptyset$ для $t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right)$. Це означає, що умова Понтрягіна не виконується на цьому інтервалі часу. Позначимо [14]

$$D(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\rho} t E_n, & 0 \leq t < \frac{\sigma}{\rho}, \\ E_n, & t \geq \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases}$$

Розглянемо багатозначне відображення $\bar{W}(t)$ [14]:

$$\bar{W}(t) = \pi K(t)U \overset{*}{-} \pi K(t)D(t)V, \quad \pi K(t)U = \rho t S,$$

$$\pi K(t)D(t)V = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\rho}tE_nv \\ 0 \end{pmatrix} = \rho tS, \quad 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{\rho};$$

$$\pi K(t)D(t)V = \sigma S, \quad t \geq \frac{\sigma}{\rho}.$$

Отже, $\bar{W}(t) = \begin{cases} \{0\}, t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right], \\ (\rho t - \sigma)S, t \in \left(\frac{\sigma}{\rho}, +\infty\right). \end{cases}$

Позначимо [14]

$$\bar{\phi}(t, U, V) = \phi(U, V) - \phi(U, D(t)V) = \begin{pmatrix} E_n - D(t) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes V.$$

За умови, коли $t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right]$, маємо

$$\pi K(t)\bar{\phi}(t, U, V) = \left(1 - t \frac{\sigma}{\rho}\right) \sigma S = (\rho t - \sigma)S.$$

Інакше, коли $t > \frac{\sigma}{\rho}$ маємо $\pi K(t)\bar{\phi}(t, U, V) = 0$. Тепер переходимо до побудови багатозначного відображення

$$M(t) = M \overset{*}{-} \int_0^t \pi K(t_1)\bar{\phi}(t, U, V)dt_1.$$

Якщо

$$\int_0^t (\sigma - \rho t_1)S dt_1 = \left(-\frac{\rho t^2}{2} + \sigma t\right)S,$$

$$M(t) = \begin{cases} \left(\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l\right) S, t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right]; \\ \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho}\right) S, t > \frac{\sigma}{\rho}. \end{cases}$$

Відображення $M(t)$ є непорожнім, $\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l \geq 0$ для $t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right]$ та $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \geq 0$ для $t > \frac{\sigma}{\rho}$.

Зауважимо, що дискримінант квадратичного полінома першої нерівності дорівнює $D = \sigma^2 - 2\rho l$.

Таким чином, якщо $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \geq 0$, то $M(t) \neq \emptyset$ для $t \geq 0$.

Розберемо випадок, коли $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} < 0$. Багатозначне відображення $M(t) \neq$

$\emptyset$, якщо $\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l \geq 0$

Отже, у випадку $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} < 0$ шукаємо час завершення гри на інтервалі $t \in \left[0, \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 2\rho l}}{\rho}\right]$.

Виберемо селектор $\gamma^0(t) \equiv 0$ в $\bar{W}(t)$. Тоді

$$\xi(t, z^0(\cdot), 0) = \pi K(t) z^0(0) + \int_{-\tau}^0 \pi K(t - s - 1) B z^0(s) ds.$$

Інтеграл матриці визначається як результат «поелементного» інтегрування. Маємо [14]:

$$\xi(t, z^0(.), 0) = \begin{bmatrix} z_1^0(0) + tz_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s)ds \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Нехай $0 \leq t \leq \frac{\sigma}{\rho}$:

$$\bar{W}(t-s, v) = \pi K(t-s) \phi(U, D(t-s)v) = \rho(t-s) \left(S - \frac{v}{\sigma}\right)$$

Тоді розв'язуюча функція має вигляд [14]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) = \sup \{ \alpha \geq 0 : \rho(t-s) \left(S - \frac{v}{\sigma}\right) \cap \\ \cap \left[\left(\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l \right) S - \xi(t, z^0(.), 0) \right] \neq \emptyset \}, v \in V. \end{aligned}$$

Щоб знайти розв'язуючу функцію, шукаємо неперервні невід'ємні функції $r(t)$ і $q(t)$, такі, що задовольняють умови

$$\pi K(t)U = r(t)S, M(t) = q(t)S$$

Тоді

$$\pi K(t)U = \begin{pmatrix} E_n & tE_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tE_n u \\ 0 \end{pmatrix} = t\rho S.$$

Позначимо $r(t) = \rho t, q(t) = \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l$. Тоді розв'язуюча функція $\bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0)$ є найбільшим коренем квадратного рівняння відносно α [14]:

$$\left\| \pi K(t-s)D(t-s)v - \alpha \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\| = r(t-s) + \alpha q(t),$$

за умови, що $\xi(t, z^0(\cdot), 0) \neq q(t)S$.

Це рівняння можна переписати так:

$$\begin{aligned} & \left\| \pi K(t-s)D(t-s)v \right\|^2 - 2\alpha \left(\pi K(t-s)D(t-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right) + \\ & + \alpha^2 \left\| \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\|^2 = r^2(t-s) + 2\alpha r(t-s)q(t) + \alpha^2 q^2(t), \\ & \alpha^2 \left(\left\| \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\|^2 - q^2(t) \right) - \\ & - 2\alpha \left[\left(\pi K(t-s)D(t-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right) - r(t-s)q(t) \right] + \\ & + \left\| \pi K(t-s)D(t-s)v \right\|^2 - r^2(t-s) = 0. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\min_{v \in V} \bar{\alpha}(t, s, z^0(\cdot), v, 0) = 0$ на векторі

$$v = - \frac{\sigma}{\left\| \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\|} \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot))$$

дає мінімум, а нерівність у визначенні $\bar{T}(z^0(\cdot), 0)$ не виконується для $t \in \left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right]$.

Якщо $\xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \in M(t)$ тоді $\bar{\alpha}(t, s, z^0(\cdot), v, 0) = +\infty$. Найменший момент, у який наведене вище включення виконується, задовольняє рівняння

$$\left\| \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\| = \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l, \quad 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{\rho} \quad (3.13)$$

Таким чином, на інтервалі $\left[0, \frac{\sigma}{\rho}\right]$ час закінчення гри $\bar{T}(z^0(.), 0)$ є найменший додатний корінь рівняння (3.13).

Нехай $t > \frac{\sigma}{\rho}$.

Розглянемо випадок коли $t - s \leq \frac{\sigma}{\rho}$. Тоді $D(t - s) = \frac{\rho}{\sigma}(t - s)$. Якщо $r(t) = \rho t$ тоді $q(t) = l - \frac{\sigma^2}{2\rho}$. Коли $\xi(t, z^0(.), 0) \notin \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho}\right)S$ розв'язуюча функція [14]

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) = \sup \{ \alpha \geq 0 : \rho(t - s)(S - \frac{v}{\sigma}) \cap \\ \cap \left[\left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right) S - \xi(t, z^0(.), 0) \right] \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

є найбільший корінь наступного квадратного рівняння відносно α

$$\left| \left| \frac{\rho}{\sigma}(t - s)v - \alpha \xi(t, z^0(.), 0) \right| \right| = \alpha \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right) + \rho(t - s).$$

Зрозуміло що

$$\min_{v \in V} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) = 0, t - s \leq \frac{\sigma}{\rho}. \quad (3.14)$$

Мінімум досягається на векторі

$$v = -\frac{\sigma}{\|\xi(t, z^0(.), \gamma(.))\|} \xi(t, z^0(.), \gamma(.))$$

При цьому нерівність у визначенні часу $\bar{T}(z^0(.), 0)$ не виконується.

Нехай $\xi(t, z^0(.), \gamma(.)) \in M(t)$. Тоді час закінчення гри $\bar{T}(z^0(.), 0)$ є найменший додатний корінь рівняння [14]:

$$\|\xi(t, z^0(.), \gamma(.))\| = l - \frac{\sigma^2}{2\rho}, t > \frac{\sigma}{\rho}.$$

Розглянемо випадок коли $t - s > \frac{\sigma}{\rho}$. Тоді $D(t - s) = E_n$ та $\bar{W}(t - s, v) = (t - s)\rho S - v$.

Розв'язуюча функція має вигляд [14]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) = \sup \{ \alpha \geq 0: [\rho(t - s)S - v] \cap \\ \cap \alpha \left[\left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right) S - \xi(t, z^0(.), 0) \right] \neq \emptyset \}, v \in V. \end{aligned}$$

Тоді $\xi(t, z^0(.), 0) \in \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right)$ найбільший корінь квадратного рівняння відносно α [14]:

$$\|v - \alpha \xi(t, z^0(.), 0)\| = \rho(t - s) + \alpha \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right).$$

Мінімум досягається на векторі $v = -\frac{\sigma}{\|\xi(t, z^0(.), 0)\|} \xi(t, z^0(.), 0)$ Та

$$\min_{v \in V} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) = \frac{\rho(t-s) - \sigma}{\left| \left| \xi(t, z^0(.), \gamma(.)) \right| \right| - \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right)}, t-s > \frac{\sigma}{\rho} \quad (3.15)$$

Оцінімо момент завершення гри у випадку , $t > \frac{\sigma}{\rho}$. До кінця, виконуємо розрахунки з урахуванням формул (3.14), (3.15)

$$\int_0^t \min_{\|v\| \leq \sigma} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) ds = 1$$

Ми спостерігаємо, що якщо $0 \leq s \leq t - \frac{\sigma}{\rho}$, то $t-s > \frac{\sigma}{\rho}$. Отже, у першому інтегралі підінтегральна величина виражається співвідношенням (3.15).

Якщо $t - \frac{\sigma}{\rho} \leq s \leq t$ тоді $t-s \leq \frac{\sigma}{\rho}$. У цьому випадку підінтегральна величина в інтегралі від s до $t - \frac{\sigma}{\rho}$ можна виразити співвідношенням (3.14).

Тому,

$$\int_0^t \min_{\|v\| \leq \sigma} \bar{\alpha}(t, s, z^0(.), v, 0) ds = \int_0^{t-\frac{\sigma}{\rho}} \frac{\rho(t-s) - \sigma}{\left| \left| \xi(t, z^0(.), \gamma(.)) \right| \right| - \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \right)} ds = 1.$$

Після інтегрування наведеного вище виразу отримаємо [14]:

$$\int_0^{t-\frac{\sigma}{\rho}} [\rho(t-s) - \sigma] ds = \|\xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot))\| - \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho}\right),$$

$$\rho t \left(t - \frac{\sigma}{\rho}\right) - \frac{\rho}{2} \left(t - \frac{\sigma}{\rho}\right)^2 - \sigma \left(t - \frac{\sigma}{\rho}\right) = \|\xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot))\| - \left(l - \frac{\sigma^2}{2\rho}\right),$$

$$\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l = \|\xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot))\|.$$

Таким чином, ця гра переслідування різноінерційних об'єктів за заданих початкових умов

$$z^0(t) = \left\{ \left(z_1^0(t), z_2^0(t) \right) : z_1^0(t) \in R^n, z_2^0(t) \in R^n, -\tau \leq t \leq 0 \right\},$$

може бути завершена переслідуювачем у момент $\bar{T}(z^0(\cdot), 0)$, який є найменшим додатним коренем квадратного рівняння відносно t [14]:

$$\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l = \|z_1^0(0) + t z_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds\|, \quad 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{\rho},$$

Коли $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \geq 0$, або коли $t > \frac{\sigma}{\rho}$ в час $\bar{T}$, найменший додатний корінь рівняння відносно t [14]:

$$\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l = \|z_1^0(0) + t z_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds\|,$$

$$\|z_1^0(0) + t z_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds\| = l - \frac{\sigma^2}{2\rho}.$$

Інакше, коли $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} < 0$, у випадку $t \in [0, \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 2\rho l}}{\rho}]$, $\bar{T}$ є найменшим коренем квадратного рівняння [14]:

$$\frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l = ||z_1^0(0) + t z_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds||.$$

Тепер зупинимося на питанні існування коренів цих рівнянь.

Якщо $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \geq 0$, то за умови $z_2^0(0) = 0$ у випадку $||z_1^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds|| \geq l - \frac{\sigma^2}{2\rho}$ час завершення гри є скінченним.

Зрозуміло, що якщо $z_2^0(0) \neq 0$, то час завершення гри скінченний для всіх початкових станів.

Нехай $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} < 0$, тоді гру можна завершити в момент $T \leq \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 2\rho l}}{\rho}$ за умови $||z_1^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s) ds|| \leq l$ [10, 14].

3.3 Візуалізація диференціальної гри на площині

Для зображення траєкторій руху переслідувача та втікача у іграх, описаних вище для випадку на площині, був розроблений ПП на мові програмування Python3. ПП є прототипом системи моделювання прикладу «переслідувачі-втікач» для об'єктів з різною інерційністю, яку можна застосувати в задачах керування.

Для програми вхідними даними є наступні відомості:

- Значення параметрів σ, ρ .
- Початкові координати всіх учасників та прискорення для переслідувача.
- Час запізнення для випадку з ДДР.

Розглянемо алгоритм за яким працює ПП:

1. Перевіряємо умов $l - \frac{\sigma^2}{2\rho} \geq 0$.
2. Знаходимо фундаментальну матрицю e^{At} .
3. Перевіряємо умову $W(t) \neq \emptyset$.
4. Знаходимо час затримки втікача як найменший додатний корінь квадратного рівняння $\|z_1 + tz_2\| = \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + l$, для об'єктів з різною інерційністю або квадратного рівняння $\|z_1^0(0) + t z_2^0(0) + \int_{-\tau}^0 z_2^0(s)\| = l - \frac{\sigma^2}{2\rho}$ для об'єктів з різною інерційністю, рух яких описується ДДР.
5. Будуємо керування переслідувача.
6. За допомогою метода Рунге-Кутти будуємо розв'язки диференціальних рівнянь в момент часу t .

Приклад роботи програми:

$$\text{Нехай } \rho = 1, \sigma = 1, \begin{cases} x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

На рисунку 3.1 можна побачити результати роботи програми для заданих початкових умов.

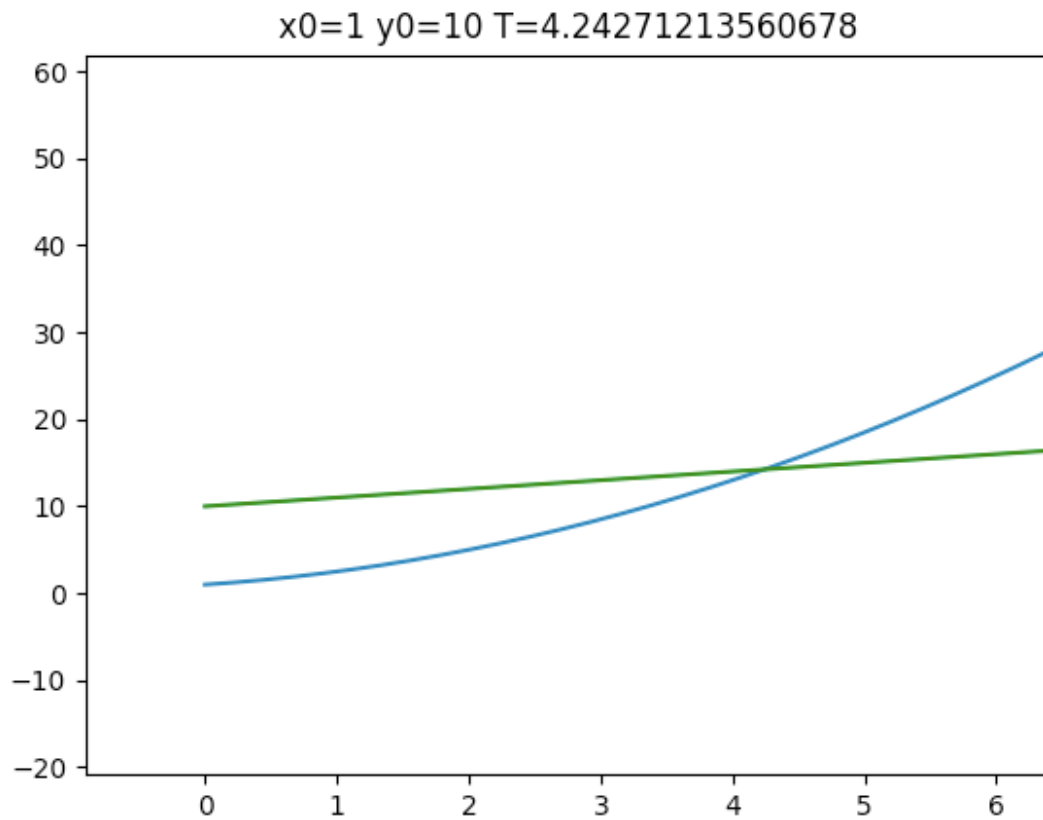


Рисунок 3.1 – Побудова графіків руху втікача та переслідувача з різною інерційністю.

Нехай $\rho = 1$, $\sigma = 4$, $\begin{cases} x(0) = 16, \dot{x}(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

На рисунку 3.2 можна побачити результати роботи програми для заданих початкових умов.

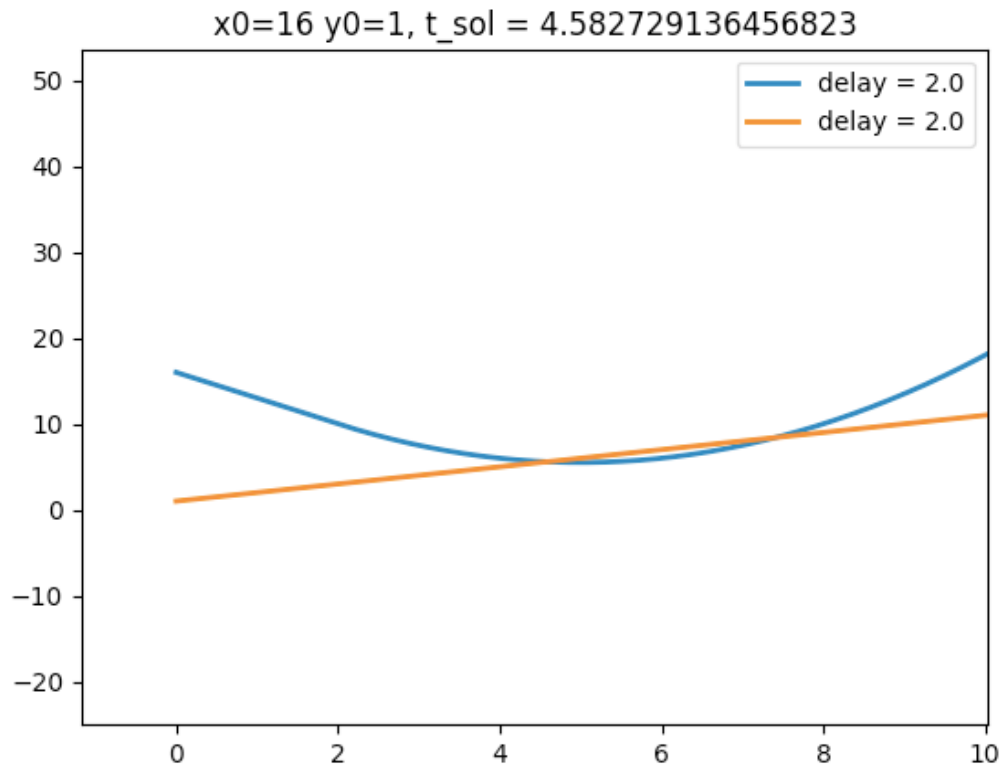


Рисунок 3.2 – Побудова графіків руху втікача та переслідувача з різною інерційністю рух яких описується ДРР.

Висновки до розділу 3

Були розглянуті дві задачі переслідування методом розв’язуючих функцій для об’єктів з різною інерційністю. Розроблений ПП, що буде управління переслідувача за даними початковими умовами та знаходить гарантований час затримки втікача.

РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ СТАРТАП ПРОЕКТУ

4.1 Опис ідеї стартап проекту

Спочатку визначимо стартап-проект. В таблиці 4.1 наведено основну ідею проекту.

Таблиця 4.1 – Опис ідеї стартап-проекту

<i>Зміст ідеї</i>	<i>Напрямки застосування</i>	<i>Вигоди для користувача</i>
Система розрахунку гарантованого часу піймання некерованих об'єктів на площині	Побудова керування	Зручна побудова керування
	Знаходження часу піймання	Легкість використання
	Навчальна	Порівняння методів

Далі слід визначити конкурентів на ринку і провести порівняльний аналіз, визначивши їх переваги та недоліки. У даній системі немає прямих аналогів, тому ми вибрали конкурентів, деталі яких відповідають функціоналу. У таблиці 4.2 наведено основні ознаки ідеї.

Таблиця 4.2 – Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик ідеї проекту

№ п/п	Техніко- економічні характерист ики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів			W (слабк а сторо на)	N (нейт ральн а сторо на)	S (сильн а сторо на)
		Моя система	GitLab	GitHub			
1	Лояльність споживачів	Висока в своїй області	Висока в своїй області	Висока в своїй області		+	
2	Ціна	Задовіль на	Задовіл ьна	Задовільн а		+	
3	Функціонал	Розробка стратегії, експертн а мережа	Сумісн а розроб ка, мережа експер тів	Хостинг проектів, спільна розробка		+	

4.2 Технологічний аудит ідеї проекту

Наступним необхідним кроком є аудит технологій. В таблиці 4.3 наведений аналіз складових частин.

Таблиця 4.3 – Технологічна здійсненність ідеї проекту

№ n/n	Ідея проекту	Технології її реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Система розрахунку гарантованого часу піймання	Використання мови програмування C	Відсутні	Недоступні
2	некерованих об'єктів на площині	Використання мови програмування C++	Відсутні	Недоступні
3		Використання мови програмування Python3	Наявні	Доступні
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: мова програмування Python3				

4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Стартап не існує сам по собі, тому необхідно проаналізувати ринок, на який ми виходимо. У таблиці 4.4 наведені характеристики ринку.

Таблиця 4.4 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ n/n	Показники стану ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	100
2	Загальний обсяг продаж	1,5 млн. \$
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Немає
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Немає
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	15

Наступним кроком є визначення основних груп потенційних користувачів продукту та складання опису вимог кожної такої групи (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Потреба, що формує ринок</i>	<i>Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)</i>	<i>Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів</i>	<i>Вимоги споживачів до товару</i>
1	Засіб для перевірки методів	Спеціалісти	Мають досвід в області	Якість
2	«Бібліотека» області	Студенти	Початківці	Цікавить інформація
3	Каталог методів	Компанії	Цікавить що працює	Ціна, якість

Далі необхідно проаналізувати загрози, які можуть виникнути і перешкодити успішному запуску проекту. Результати представлені в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Фактори загроз

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст загрози</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Мала інформованість	Багато можливих користувачів можуть не знати про існування системи	Рекламна компанія
2	Складність інтерфейсу	Лише спеціалісти зможуть розібратись в інтерфейсі	Додати інструкцію

Також необхідно розглянути фактори, які можуть сприяти проекту. Результати представлені у таблиці 4.7.

Таблиця 4.7 – Фактори можливостей

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст можливості</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Інструмент для перевірки	Інструмент для перевірок ідей	Створення якісного інструменту
2	База інформації	База стратегій для різних задач	Розширення бази

Далі необхідно охарактеризувати конкурентне середовище. Результати аналізу наведено у таблиці 4.8.

Також виконаємо аналіз конкуренції за моделлю п'яти сил конкуренції Майкла Портера. Результати аналізу зведено в таблицю 4.9.

Таблиця 4.8 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

<i>Особливості середовища</i>	<i>В чому проявляється</i>	<i>Вплив на діяльність підприємства</i>
1. Вказати тип конкуренції: Чиста	Багато систем/ спеціалістів	Розробити цікавий продукт
2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнаціональна	Є системи з різних країн	Збільшити аудиторію

Продовження таблиці 4.8

3. За галузевою ознакою: міжгалузева	Застосовується в різних цілях	Збільшити можливості системи
4. Конкуренція за видами товарів: товарно-родова	Конкуренція з іншими подібними інструментами	Збільшити функціонал системи
5. За характером конкурентних переваг: Нецінова	Різні інструменти для моделювання	Розширення корисних якостей мережі
6. За інтенсивністю: Марочна	Відомий бренд надає переваги	Розвивати ім'я бренду

Таблиця 4.9 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

<i>Складові аналізу</i>	<i>Прямі конкуренти в галузі</i>	<i>Потенційні конкуренти</i>	<i>Постачальники</i>	<i>Клієнти</i>	<i>Товари-замінники</i>
	<i>GitLab, GitHub</i>	<i>Спеціалізованіс ть ринку</i>	<i>Їх методи та реалізація</i>	<i>Їх роботи</i>	<i>Більш якісний</i>
Висновки	Інтенсивної боротьби не буде	Є можливості та конкуренти	Не диктують	Не диктують	Товари-замінники відсутні

Результати аналізу підтверджують, що ринок має сприятливі умови для створення та запуску цього стартап-проекту. Було сформульовано та

підтверджено перелік факторів конкурентоспроможності. Аналіз представлено в таблиці 4.10.

Таблиця 4.10 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)</i>
1	Багатофункціональність	Проект має багато можливостей для розвитку
2	Доступність програмного продукту	Загальнодоступність та кросплатформеність
3	Обслуговування	Періодичні оновлення бази даних та нові версії системи

Після проведення аналізу можна виділити сильні та слабкі (які потребують вдосконалення) сторони продукту (таблиця 4.11).

Таблиця 4.11 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін системи

<i>№ n/ n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Бали 1-20</i>	<i>Рейтинг товарів-конкурентів</i>						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Багатофункціональність	19				+			
2	Доступність ПП	17				+			
3	Обслуговування	17			+				

SWOT-аналіз дозволяє оцінити можливості та загрози бізнесу, а також сильні і слабкі сторони продукту. Результати наведені у таблиці 4.12.

Таблиця 4.12 – SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: Новаторство та багатofункціональність	Слабкі сторони: Клієнти
Можливості: постійні вдосконалення	Загрози: конкуренція, збут

На основі SWOT-аналізу було спроектовано альтернативну ринкову поведінку для інтеграції стартап-проекту (таблиця 4.13).

Таблиця 4.14 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

<i>№ п/п</i>	<i>Альтернатива ринкової поведінки</i>	<i>Ймовірність отримання ресурсів</i>	<i>Строки реалізації</i>
1	Швидкий вихід з мінімально функціональним продуктом	10%	6 місяці
2	Поступовий вихід з якісним продуктом	90%	12 місяців

4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розробка ринкової стратегії починається з визначення стратегії охоплення ринку. Для цього необхідно охарактеризувати цільові групи потенційних споживачів (табл. 4.14).

Таблиця 4.14 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

<i>№</i>	<i>Опис</i> <i>профілю</i> <i>цільової</i> <i>групи</i> <i>потенцій</i> <i>них</i> <i>клієнтів</i>	<i>Готовніс</i> <i>ть</i> <i>спожива</i> <i>чів</i> <i>сприйня</i> <i>ти</i> <i>продукт</i>	<i>Орієнтов</i> <i>ний попит</i> <i>в межах</i> <i>цільової</i> <i>групи</i> <i>(сегменту</i> <i>)</i>	<i>Інтенсивні</i> <i>сть</i> <i>конкуренції</i> <i>в сегменті</i>	<i>Просто</i> <i>та</i> <i>входу у</i> <i>сегмент</i>
1	Спеціаліс т в області	Висока	90%	Низька	Середня
2	Студент	Висока	3%	Низька	Середня
3	Компанія	Висока	7%	Низька	Середня
Які цільові групи обрано: 1, 2, 3					

Для роботи в обраних сегментах ринку сформуємо базову стратегію розвитку (таблиці 4.15, 4.16, 4.17).

Таблиця 4.15 – Визначення базової стратегії розвитку

<i>№ п / п</i>	<i>Обрана альтернат ива розвитку проекту</i>	<i>Стратегі я охоплення ринку</i>	<i>Ключові конкурентоспромо жні позиції відповідно до обраної альтернативи</i>	<i>Базова стратегія розвитку*</i>
1	3	Стратегія спеціаліза ції	Функціональність, багатогалузовість та якість	Стратегія диференційован ого маркетингу

Таблиця 4.16 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

<i>№ п/ п</i>	<i>Чи є проект «першопрохідце м» на ринку?</i>	<i>Чи буде компанія шукати нових споживачів , або забирати існуючих у конкуренті в?</i>	<i>Чи буде компанія копіювати основні характеристи ки товару конкурента, і які?</i>	<i>Стратегія конкурентн ої поведінки*</i>
1	Так	Так	Ні	Стратегія лідеру

Таблиця 4.17 – Визначення стратегії позиціонування

<i>№</i> <i>n/</i> <i>n</i>	<i>Вимоги до</i> <i>товару цільової</i> <i>аудиторії</i>	<i>Базова</i> <i>стратегія</i> <i>розвитку</i>	<i>Ключові</i> <i>конкурентоспромо</i> <i>жні позиції</i> <i>власного стартап-</i> <i>проекту</i>	<i>Вибір</i> <i>асоціацій,</i> <i>які мають</i> <i>сформуват</i> <i>и</i> <i>комплексну</i> <i>позицію</i> <i>власного</i> <i>проекту</i> <i>(три</i> <i>ключових)</i>
1	Якість, функціональніс ть, зрозумілий інтерфейс	Стратегія диференційовано го маркетингу	Якість, висока функціональність, велика кількість інформації	Імідж, якість, спеціалізац ія

4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Завершальним етапом є створення маркетингової концепції товару. Спочатку необхідно визначити основні переваги концепції потенційного продукту (табл. 4.18). Ми також опишемо три рівні моделей продуктів (таблиця 4.19).

Таблиця 4.18 – Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ n/n	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Знаходження часу	Інструментарій для обчислення	Спеціалізація
2	Пошук нових методів	Список наявних методів	Унікальність

Таблиця 4.19 – Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні товару	Сутність та складові		
I. Товар за задумом	Знаходження часу за допомогою готових методів		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	М/Нм	Вр/Тх/Тл/Е/Ор
	Програмний продукт – складна, комплексна система		
	Якість: тестування науковими підрозділами		
	Пакування - інсталятор		
	Марка: назва організації-розробника + назва товару		
III. Товар із підкріпленням	До продажу: розтермінування, доставка		
	Після продажу: постійне оновлення та вдосконалення		
За рахунок чого потенційний товар буде захищено від копіювання: захист інтелектуальної власності			

Далі необхідно визначити цінові межі продукту (таблиця 4.20).

Таблиця 4.20 – Визначення меж встановлення ціни

№ п/п	Рівень цін на товари-замінники	Рівень цін на товари-аналоги	Рівень доходів цільової групи споживачів	Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу
1	2000	4000	2 млн.	1500-1800

Висновки до розділу 4

Проведено перший етап розробки стартап-проекту, тобто маркетинговий аналіз стартап-проекту.

Можна сказати, що проект має можливість комерціалізації на ринку, тому що на ринку немає конкурентів і є величезна потенційна аудиторія, також прибутковість проекту задовільна і ринок зростає.

Краще вибрати той варіант, де для реалізації проекту використовується мова програмування Python3. Проект має великі шанси на подальший розвиток та вдосконалення.

ВИСНОВКИ

У роботі було досліджено диференціальні ігри для об'єктів з різною інерційністю. Сформульовано необхідні та достатні умови для завершення гри. Для розв'язання задачі розглядається алгоритм, що описує структуру управління переслідувача для конфліктно-керованого процесу рух якого описується звичайними диференціальними рівняннями та диференціально-різницеvими рівняннями за допомогою методу розв'язуючих функцій.

Створено програмний продукт на мові програмування Python3, для знаходження гарантованого часу затримки втікача та побудови траєкторії руху об'єктів. Вхідними даними для програми є: значення параметрів конфліктного процесу; початкові координати переслідувача і втікача. Результати мають графічне представлення.

Під час виконання роботи всі поставлені завдання були виконані. Тобто:

- а) дослідити сучасний стан розробок методів розв'язку диференціальних ігор для об'єктів з різною інерційністю розв'язування;
- б) пошук схеми методу розв'язуючих функцій для об'єктів з різною інерційністю та об'єктів рух яких задається диференціально-різницеvими рівняннями;
- в) знайти достатні умови для закінчення гри та гарантований час при заданих початкових умовах.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Aumann R.J. Lectures on Game Theory. San Francisco: Westview Press, 1989. 120 p.
2. Dixit A., Nalebuff B. Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. N.Y.: Norton, 1991. 394 p.
3. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1984. 96 с.
4. Чикрий А.А. Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками. *ДАН СССР*. 1979. Т.246. С. 1306-1309.
5. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Решение линейной дифференциальной игры преследования на основе альтернированного интегрирования без дикриминации управления убегания. *ДАН СССР*. 1984. Т. 278. С. 1330-1334.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука. 1969.
7. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр. *ДАН СССР*. 1969. Т. 184. С.285-287.
8. Колмогоров А. М., Фомин А.М. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 479с.
10. Чикрий, А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с
11. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
12. Перестюк М. О. , Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / Київ: ТВіМС, 2004. 224 с.

13. Беллман Р., Дифференциально-разностные уравнения Москва, Мир, 1967. 548с.
14. Baranovska, L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects, *Advances in Dynamical Systems and Control*. – Springer. 2016. V. 69. P. 159-176.
15. Baranovska, L.V. Quasi-Linear Differential-Deference Game of Approach, *Understanding Complex Systems*. 2019. P. 505-524.
16. Baranovska, L.V. On Quasilinear Differential-Difference Games of Approach, *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. P. 53-67.
17. Lesia V. Baranovska. Pursuit differential-difference games with pure time-lag, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2019. P. 1021-1031.
18. Baranovska L.V. Group pursuit differential games with pure time-lag, *Understanding Complex Systems*. 2021. P. 475–488.
19. Baranovska, L.V. Differential-Difference Games of Approach with Multiple Delays, *Cybern Syst Anal*. 2021. P. 787-795.

ДОДАТОК А ТЕКСТ ПРОГРАМИ

```

import matplotlib.pyplot as plt
from math import cosh,cos,pi,sin,sinh,exp
import numpy as np
import scipy.integrate as integr

u=1
v=1

def f(t,x):
    return [x[1],u,v]

a, b = 0, 50
u0 = [1,1,10]
Dif_x = integr.solve_ivp(t_span=(a, b), y0=u0, fun=f, dense_output=True)
Dif_x = Dif_x.sol
T='kate'
if __name__ == '__main__':
    X = np.linspace(a, b, 20000)
    Y = [Dif_x.__call__(i)[0] for i in X]
    # plot for our algorithm
    Z = [Dif_x.__call__(i)[2] for i in X]

    # Solution of system
    solution = 'No'
    for i in range(len(X)):
        if abs(Y[i] - Z[i]) <= 0.005:
            solution = str(X[i])
            break

x0,y0 = 1,10

```

```

plt.plot(X, Y)
plt.plot(X, Z, color='green')
plt.title('x0=' + str(x0) + ' y0=' + str(y0) + ' T=' + solution)
plt.show()

from ddeint import ddeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = 1
v = 4
tau = 2

x0 = 16
y0 = 1

def model(Y,t,d):
    x,y = Y(t)
    xd,yd = Y(t-d)
    return np.array([yd - v, u])

g = lambda t : np.array([x0, y0])
tt = np.linspace(0, 50, 20000)# timeline horizon which we considered

yy = ddeint(model,g,tt,fargs=(tau,))
# WE PLOT X AGAINST Y
plt.plot(tt, yy[:,0], lw=2, label='delay = %.01f%%tau)'
plt.plot(tt, yy[:,1], lw=2, label='delay = %.01f%%tau)'

#Solution of system
solution = 'No'
for i in range(len(tt)):
    if abs(yy[:,0][i] - yy[:,1][i]) <= 0.005:
        solution = 'x0=' + str(x0) + ' y0=' + str(y0) + ", t_sol = " + str(tt[i])

```

```
break
```

```
plt.title(solution)
```

```
plt.legend() # display the legend
```

```
plt.show()
```