УДК 539.375

Зражевський Г.М.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.[2], к.ф.-м.н., доцент.

Використання формалізму узагальнених функцій при моделюванні дефектів точковими особливостями

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua
2 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

G.M. Zrazhevsky[1], PhD,
V.F. Zrazhevska[2], PhD.

Usage of generalized functions formalism in modeling of defects by point singularity

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua
[2] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

У роботі пропонується новий підхід до побудови моделей точкових дефектів, що базується на розв'язанні граничних задач з негладкими коефіцієнтами. Неоднорідність включається в визначальне рівняння граничної задачі. Такий підхід дозволяє формалізувати дефекти на етапі використання рівнянь стану, а отже автоматично узгоджує дефект з гіпотезами пониження розмірності та не порушує енергетичної замкненості. Розв'язок розшукується у вигляді слабко збіжних рядів по узагальненим функціям. Запропонований підхід спрощує механічну інтерпретацію параметрів дефектів та продемонстрований на кількох прикладах. В першому прикладі будується функція Гріна для гармонійних коливань пружної балки, що містить точковий дефект. Модель дефекту є граничним станом пружного включення з ослабленням чи зі зміцненням. В другому прикладі розглянуто включення еліптичної форми в задачі про гармонійні коливання пружної пластини. Побудовано перше наближення еквівалентної об'ємної сили та вказано шлях до побудови наступних наближень. В третьому прикладі побудована модель крихкої тріщини з відомим стрибком переміщень для статичної двовимірної задачі теорії пружності.

Ключові слова: узагальнені функції,моделювання неоднорідностей, суцільне середовище.

The paper proposes a new approach to the construction of point defect models, based on the solution of boundary value problems with non smooth coefficients. Heterogeneity is included in the determining equation of the boundary problem. This approach allows us to formalize defects at the stage of use of state equations, and thus automatically reconciles the defect with the hypotheses of diminution of dimension and does not break the energy closed. The solution is sought in the form of weakly convergent series of generalized functions. The proposed approach simplifies the mechanical interpretation of defect parameters and is demonstrated in several examples. In the first example, the Green function for harmonic oscillations of an elastic beam with a point defect is constructed. The defect model is a limiting state of elastic inclusion with weakening or strengthening. The second example considers the inclusion of an elliptical shape in the problem of harmonic oscillations of the elastic plate. The first approximation of the equivalent volumetric force is constructed and the path to the following approximations is indicated. In the third example, a model of a brittle crack with a known displacement jump is constructed for a static two-dimensional problem of elasticity theory.

Keywords: generalized functions, inhomogeneity modeling, continuous environment.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

В механіці суцільного середовища та механіці деформованого тіла, зокрема, існує багато моделей, що описують локалізовані неоднорідні включення [1,2,3,4]. Вони визначаються фізичними властивостями, відмінними від характеристик основного матеріалу та можуть мати різну топологію, наприклад, жорстке включення повної розмірності, тріщиноподібні дефекти, включення зі стохастичними характеристиками, що можуть бути змодельовані ансамблем точкових дефектів з невизначеними характеристиками тощо (Рис. 1).

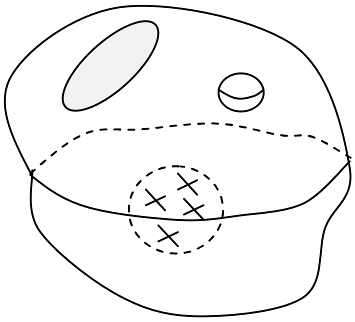

Рис. 1. Типи неоднорідностей

При формулюванні математичних задач для тіл з такими неоднорідностями використовуються різноманітні підходи: метод часткових областей [2], граничних інтегральних рівнянь [3,4], варіаційні методи [1]. В багатьох випадках при розв'язанні модельних задач неоднорідності включаються в праві частини визначальних рівнянь у вигляді еквівалентних розподілених та точкових сингулярностей.

У роботі пропонується новий підхід до побудови моделей точкових дефектів, що базується на розв'язанні граничних задач з негладкими коефіцієнтами. Запропонований підхід на відміну від методів, що потребують виконання принципу суперпозиції, може бути застосований до нелінійних задач, в яких використовується лінійне рівняння рівноваги.

Нехай рівняння рівноваги субфізичного елементу має вигляд:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\vec{\varphi} + \vec{\mathrm{X}} = 0, \qquad (1)$$

де $\mathbf{L}$ – лінійний диференціальний оператор, $\mathbf{D}$ – оператор, що визначається моделлю та рівняннями стану, $\vec{\mathrm{X}}$ –узагальнене навантаження, а оператор $\mathbf{D}$ містить негладкі коефіцієнти. Як можна показати, (1) може бути зведено в загальному вигляді до рівняння виду

$$\mathbf{L}\vec{\sigma} = -\vec{\mathrm{X}} + \mathbf{L}(\mathrm{E}\vec{\sigma}) \ , \ \vec{\sigma} = S\vec{\varphi}, \qquad (2)$$

в якому права частина містить узагальнені функції.

Розв'язки таких рівнянь можуть бути знайдені методами теорії узагальнених функцій [5,6].

Продемонструємо застосування запропонованого підходу до задач механіки деформованого твердого тіла.

Точкова неоднорідність в одновимірній моделі Кіргхофа

Розглянемо задачу побудови функції Гріна для гармонійних коливань пружної балки з неоднорідністю, що характеризується зміною модуля Юнга $|\Delta E|<1$, має розмір $2\ell \ll 1$, та центральну координату χ . Рівняння граничної задачі (1) має вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)I\frac{d^2 w}{dx^2}\right) - \omega^2 \rho w = \delta(x-\xi), \qquad (3)$$

де $E(x) = E_0\left(1-\Delta E f(x)\right)$,
$f(x) = H\left(x-(\chi-\ell)\right) - H\left(x-(\chi+\ell)\right)$,
$H(x)$ - функція Хевісайда.

Після розкладу $f(x)$ в аналітичний в просторі узагальнених функцій ряд по ℓ, (3) набуває вигляду (2):

$$\begin{aligned}&\left(1-\Delta E f(x)\right) w_x^{(4)}(x,\xi) - \pi^4 k^4 w(x,\xi) = \\ &F\delta(x-\xi) + \\ &2\Delta E w_x''(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^{(2k+1)}(x-\chi)}{(2k+1)!}\ell^{2k+1} + \\ &+4\Delta E w_x^{(3)}(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^{(2k+2)}(x-\chi)}{(2k+1)!}\ell^{2k+1}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Шляхом введення малого параметру $\varepsilon_i = \frac{2\ell^{2i-1}\Delta E}{(2i-1)!}$, $i = 1, 2, \ldots,$ розв'язок (4) $w = w_0 + \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \cdots$ можна відшукати з системи розділених рівнянь:

$$\begin{cases} w_{0x}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_0 = F\delta(x-\xi), \\ w_{ix}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_i = w_{0x}^{(4)}\delta^{(2i-2)}(x-\chi) + \\ +2w_{0x}^{(3)}\delta^{(2i-1)}(x-\chi) + w_{0x}^{(2)}\delta^{(2i)}(x-\chi) \end{cases}. \qquad (5)$$

Легко отримати [5], що в (5)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\delta^{(2i-2)}(x-\chi)w_{0x}^{(2)}\right) = \\ = \sum_{s=0}^{2i-2} C_{2i-2}^{s} \frac{d^{2i-s}}{dx^{2i-s}} w_0(x,\xi)\bigg|_{x=\chi} \delta^{(2+s)}(x-\chi).$$

Неоднорідність в пластині моделі Кіргхофа

Розглядається задача гармонійних коливань пружної пластинки з неоднорідністю, що характеризується зміною циліндричної жорсткості $|\Delta D|<1$ та визначається функцією області [5]: $\theta(P)=\begin{cases}1, & P>0\\ 0, & P<0\end{cases}$, $P(x,y)\geq 0$, $\vec{\nabla}P\big|_{P=0}\neq 0$. Рівняння граничної задачі (1) має вигляд:

$$\mathbf{L}(-D\mathbf{L}_1 w)+k^2 w+q=0, \tag{6}$$

де $\mathbf{L}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]$, $\mathbf{L}_1:\ \overrightarrow{M}=-D\mathbf{L}_1 w$,

$D=D_0\left(1-\frac{\Delta D}{D_0}\theta(P)\right)$.

Застосувавши описаний підхід, отримаємо рівняння з сингулярністю в правій частині виду:

$$\mathbf{L}(\theta(P)\vec{v})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\theta v_x)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\theta v_{xy})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\theta v_y)$$

$\vec{v}=-D\overrightarrow{M}$.

Вважаючи, що область неоднорідності є центральним еліпсом з головними півосями a,b, легко отримати, згідно з [5], що:

$$\left\langle\frac{\partial\theta(P)}{\partial x},\varphi\right\rangle=\left\langle\delta(P)\frac{\partial P}{\partial x},\varphi\right\rangle=\int\limits_{P=0}\frac{2x}{a^2}\varphi(x,y)\omega,$$

де $dP\omega=dx\,dy$, $\omega=-\frac{b^2}{2y}dx$.

Якщо вважати $a,b<<1$, легко отримати:

$$\delta(P)\frac{\partial P}{\partial x}=\pi ab\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}+\overline{\overline{O}}(a^2,b^2). \tag{7}$$

Доведено

Твердження. (7) інваріантне по відношенню до афінного перетворення:

$$\begin{cases}x'=(x-x^*)\alpha_x+(y-y^*)\alpha_y\\ y'=-(x-x^*)\alpha_y+(y-y^*)\alpha_x\end{cases},\ \alpha_x^2+\alpha_y^2=1.$$

Використавши (7), можна показати, що

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\theta v_x)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\theta v_{xy})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\theta v_y)=$$

$$=\pi ab\left\{v_x(0)\frac{\partial^2\delta(x)}{\partial x^2}\delta(y)+2v_{xy}(0)\frac{\partial^2\delta(x)}{\partial x\partial y}+v_y(0)\frac{\partial^2\delta(y)}{\partial y^2}\delta(x)\right\}+\overline{\overline{O}}(a^2,b^2). \tag{8}$$

(8) визначає точкову об’ємну сингулярність [3], еквівалентну еліптичній неоднорідності.

Плоска задача статичної теорії пружності. Моделювання тріщини через завдання стрибка переміщень.

Рівняння рівноваги для плоскої задачі теорії пружності має вигляд [2,4]:

$$\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}\vec{\varphi}+\vec{\mathrm{X}}=0 \tag{9}$$

де

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix},$$

$\vec{\varphi}^T=(u,v)$ – вектор переміщень.

Нехай тріщина розташовується на розімкненій кривій $P(x,y)=0$, $\left|\vec{\nabla}P\big|_{P=0}\right|=1$, $\hat{\nu}=\vec{\nabla}P=(\alpha_x,\alpha_y)^T$ - нормальний напрямок до тріщини, $\hat{\tau}=(-\alpha_y,\alpha_x)^T$ – дотичний напрямок. Вважаємо, що на $P(x,y)=0$ задано стрибок переміщень: $\left[\vec{u}\right]=\hat{n}[u_n]+\hat{\tau}[u_\tau]\neq 0$. Легко бачити, що в цьому випадку компоненти тензора напружень можна подати у вигляді суми регулярної сингулярної частин, де вектор сингулярних напружень має носієм $P=0$ та в локальних координатах $(\hat{\tau},\hat{n})$, $\vec{t}^{\,S}=t_n^{\,S}\hat{n}+t_\tau^{\,S}\hat{\tau}$, $\vec{q}^{\,S}=q_n^{\,S}\hat{n}+t_r^{\,S}\hat{\tau}$ має вигляд:

$$\begin{cases}t_n^{\,S}=\frac{E}{1-\nu^2}[u_n]\delta(P)\\ t_\tau^{\,S}=\frac{1-\nu}{2}\frac{E}{1-\nu^2}[u_\tau]\delta(P)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_n^{\,S}=\frac{E}{1-\nu^2}[u_\tau]\delta(P)\\ q_\tau^{\,S}=\frac{E\nu}{1-\nu^2}[u_n]\delta(P)\end{cases}$$

а, отже, еквівалентні стрибку переміщень, об'ємні навантаження можуть бути представлені як:

$$\begin{cases} P_n^S = \left([u_n]\delta'(P) + \dfrac{(1-\nu)}{2}\dfrac{\partial}{\partial\tau}[u_\tau]\delta(P)\right)\dfrac{E}{1-\nu^2} \\ P_\tau^S = \left(\dfrac{(1-\nu)}{2}[u_\tau]\delta'(P) + \nu\dfrac{\partial}{\partial\tau}[u_n]\delta(P)\right)\dfrac{E}{1-\nu^2} \end{cases},$$

де $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial\tau}[u_n]\delta(P),\varphi \right\rangle = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial\tau}(\delta(P)[u_\tau]),\varphi \right\rangle$,

що збігається з класичними результатами [2,4].

Плоска задача статичної теорії пружності. Моделювання тріщини як граничного стану неоднорідності.

Якщо в (9) вважати, що $E = E_0\left(1 - \dfrac{\Delta E}{E_0}\theta(P_\varepsilon)\right)$, $P_\varepsilon(x,y) > 0$ однозв'язна та скінченна, $\vec{\nabla}P_\varepsilon\Big|_{P_\varepsilon=0} \neq 0$, $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon = P_0$, так, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(P_\varepsilon)\vec{t}_n = \delta(P_0)\left[\vec{t}_n\right]$, можна довести, що результат граничного переходу правої частини (9), перебудованого як вказано в (2), не буде відрізнятись від отриманого в попередньому прикладі, а отже, тріщина на $P_0(x,y) = 0$ може бути проінтерпретована як граничний стан неоднорідності в області $P_\varepsilon(x,y) > 0$ при $\Delta E = 0$.

Список використаних джерел

1. *Колчин Г.Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г.Б. Колчин – Кишинев: Картя молдовенясклэ, 1971. – 172 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости / В. Новацкий – М: Мир, 1975. – 872 с.
3. *Aki K.* Quantitative Seismology / K. Aki, P. Richards – University Science Books, ISBN 0-935702-96-2, 2002. – 704 p.
4. *Crouch S.L.* Boundary element methods in solid mechanics / S.L. Crouch, A.M. Starfield – London: George Allen & Unwin, 1983. – 322 p.
5. *Gelfand I.M.* Generalized Functions, Vol. 1 / I.M. Gelfand, G.E. Shilov – AMS Chelsea Publishing, 1964. - 377 p.
6. *Vladimirow V.S.* Equations of mathematical physics / V.S. Vladimirow M: Mir; Rev. from the 1981 Russian edition, 1984.– 464 p.

References

1. KOLCHIN, G.B. (1971) *Raschet elementov konstrukzij iz uprugih neodnorodnih materialov*. Kishinev: Kartya moldoveniaske.
2. NOVATSKIJ, V. (1975) *Teorija uprugosti*. M: Mir.
3. AKI, K. and RICHARDS, P. (2002) *Quantitative Seismology*. University Science Books.
4. CROUCH, S.L. and STARFIELD, A.M. (1983) *Boundary element methods in solid mechanics*. London: George Allen & Unwin.
5. GELFAND, I.M. and SHILOV, G.E. (1964) *Generalized Functions. Vol. 1*. AMS Chelsea Publishing.
6. VLADIMIROW, V.S. (1984) *Equations of mathematical physics*. M: Mir.

Надійшла до редколегії 15.09.2019