

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

П. О. Яганов

**ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ
МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

Затверджено Методичною радою НТУУ „КПІ”

Київ
„ПОЛІТЕХНІКА”

2006

УДК 519.872 (075.8)

Я 27

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ».

(Протокол № 3 від 23.11. 2006 р.)

Рецензенти

І. Ф. Бойко, д-р. техн. наук, проф.,

Національний авіаційний університет

В.С. Смірнов, д-р. техн. наук, проф.,

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій

Відповідальний редактор

Ю.М. Калніболотський, д-р. техн. наук, проф.,

Національний технічний університет України «КПІ»

Яганов П.О.

Я27 Дослідження систем масового обслуговування: Тексти лекцій. –

К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 40 с.

Розглянуто основні поняття теорії систем масового обслуговування, подано математичні моделі систем з одним і з декількома каналами обслуговування. Наведено приклади розрахунку основних параметрів та оптимізації функціонування таких систем.

Для студентів технічних спеціальностей вищих закладів освіти.

УДК 519.872 (075.8)

© П.О. Яганов, 2006

ЗМІСТ

Стор.

ВСТУП	4
1. Структура системи масового обслуговування та розподіл потоку вимог.....	5
2. Математична модель системи масового обслуговування з одноканальною чергою і пуасонівським потоком вимог	9
2.1. Рівняння стану системи масового обслуговування. Функція Пуасона	9
2.2. Дослідження стаціонарного стану системи масового обслуговування	14
2.3. Середній час чекання в черзі	17
2.4. Обслуговування з параметром, пропорційним числу вимог	21
3. Система масового обслуговування з однією чергою і декількома каналами обслуговування	23
3.1. Математична модель стаціонарної багатоканальної системи масового обслуговування.....	23
3.2. Оптимізація функціонування багатоканальної системи масового обслуговування	27
3.3. Телефонний зв'язок як система масового обслуговування	34
ВИСНОВОК	39
Список літератури	40

ВСТУП

У теорії систем масового обслуговування (СМО), яку ще називають теорією черг, вивчають процеси, природа яких має випадковий характер. Прикладами таких процесів є складально-монтажні роботи на виробництві, роботи з налагодження і ремонту обладнання, обслуговування покупців, функціонування телефонного зв'язку, довідково-інформаційних, транспортних, складських служб тощо. Кожний з цих процесів може бути охарактеризований за допомогою таких понять, як „заявка (або вимога) на обслуговування”, „черга”, „лінія (канал) обслуговування”, „потік вимог”, що мають загальноприйняте значення, в той же час є термінами теорії СМО.

У СМО кожна вимога виникає випадково, але потік таких вимог, тобто, їх розподіл в часі, описують певними закономірностями статистичного характеру. Так само тривалість обслуговування може бути детермінованою (точно визначеною) величиною, або не детермінованою (випадковою, стохастичною). Опис процесів у СМО ґрунтується на математичному апараті теорії імовірності. При цьому вважають, що якщо інтервали часу між послідовними надходженнями вимог і (або) час обслуговування статистично не визначений, побудова математичної моделі процесу масового обслуговування (МО) неможлива.

У більшості реально існуючих СМО, що тривалий час стабільно функціонують, можна визначити числові оцінки для опису як потоку вимог, так і інтенсивності обслуговування. Залежно від співвідношень основних параметрів потоку вимог і інтенсивності обслуговування у СМО можуть виникати черги, або їх може не бути. Задачею дослідження цих систем є моделювання процесу функціонування за допомогою аналітичних функцій, які визначають імовірність знаходження в них (в чергах чи на обслуговуванні) певної кількості вимог. Математичний аналіз моделі конкретної технічної системи з чергою дозволяє прогнозувати її стан,

величини, які в стаціонарному (усталеному) стані СМО вважають незмінними. Їх числове значення дорівнює математичному сподіванню відповідної випадкової величини. Кількість вимог n у СМО розраховують за

формулою: $\bar{n} = \sum_{n=0}^l nP_n$, де P_n – імовірність знаходження n вимог в системі,

l – досяжна кількість вимог у СМО. Обмежень на l не встановлюють, проте вважають, що l скінченне.

Якщо $\bar{n} \geq S$, то $\bar{n} = \bar{m} + \bar{k}$ і у СМО є черги. Якщо $n < S$, то $\bar{n} < \bar{k}$ і черг немає. У СМО з єдиною чергою і S каналів обслуговування черга виникає, як тільки $n \geq S+1$. Середнє число вимог в черзі:

$$\bar{m} = \sum_{n=S+1}^l (n-S)P_n = 1P_{S+1} + 2P_{S+2} + \dots + (l-S)P_m$$

Середнє число не зайнятих обслуговуванням каналів: $\bar{\rho} = \sum_{n=0}^S (S-n)P_n$.

Параметри $\bar{n}, \bar{m}, \bar{\rho}$ взаємопов'язані:
$$\begin{cases} \bar{m} - \bar{\rho} = \bar{n} - S, \\ \bar{n} = \bar{m} + S - \bar{\rho} \end{cases}$$

Обґрунтування:

$$\begin{aligned} \bar{m} - \bar{\rho} &= \sum_{n=S+1}^m (S-n)P_n - \sum_{n=0}^S (S-n)P_n = \sum_{n=S+1}^m (n-S)P_n + \sum_{n=0}^S (n-S)P_n = \\ &= \sum_{n=0}^m (n-S)P_n = \sum_{n=0}^m nP_n - S \sum_{n=0}^m P_n = \bar{n} - S. \end{aligned}$$

Будемо розглядати у СМО появу вимоги на обслуговування як подію. Нехай джерело вимог випадковим чином “генерує” вимоги. Якщо в інтервалі часу від $t_0 = 0$ до t з'явилося n вимог, то імовірність появи n вимог в інтервалі від 0 до t позначатимемо $P_n(t)$. Функціонування СМО відбувається так, що:

- 1) імовірність $P_n(t)$ залежить тільки від проміжку часу t і не залежить від вибору початкового моменту t_0 . Тобто, якщо, наприклад, за 1 хвилину на телефонну станцію надходить 10 дзвінків з імовірністю $P_{10} = 0,3$, то та сама кількість дзвінків з тією самою імовірністю надійде в проміжку між 10^{00} і 10^{01} , 12^{30} і 12^{31} і т.д.
- 2) завжди можна вибрати такий інтервал часу Δt , в якому імовірність “генерації” двох і більше вимог дорівнює нулю. Ніякі дві події не відбуваються одночасно (така подія неімовірна).
- 3) імовірність надходження однієї вимоги за проміжок часу Δt скінчена і пропорційна Δt : $P_n(\Delta t) = \lambda \Delta t$. Величина λ називається параметром потоку.

Отже, кількість вимог, які надходять в систему, змінюється дискретно на одну у випадкові моменти часу $t_1, t_2 \dots$ (див. рис. 2).

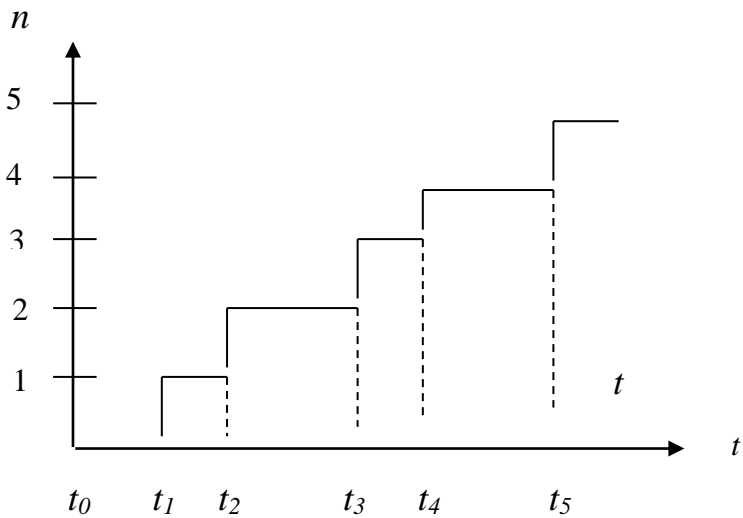


Рис. 2. Розподіл в часі вимог в системі масового обслуговування

Приріст вимог за час t дорівнює кількості вимог, які з’явилися за цей час, і не залежить від того, скільки їх було до початку спостереження t_0 . Якщо відома кількість вимог n в час t_0 , то подальше значення $n(t)$ залежить

від розподілу імовірностей приросту $n(t_0)$ до $n(t)$: $P_n(t_0 + t)$. У всіх процесах масового обслуговування визначення залежності $P_n(t)$ носить фундаментальний характер. Після встановлення закону розподілу імовірностей n вимог в системі $P_n(t)$ можуть бути розрахованими інші важливі кількісні параметри: середнє число вимог в системі \bar{n} , середнє число вимог в черзі \bar{m} , середній час чекання в черзі \bar{t} тощо.

Функціонування каналу обслуговування характеризують тривалістю обслуговування. Частіше за інші розглядають такі випадки:

- 1) тривалість обслуговування постійна не випадкова величина;
- 2) тривалість обслуговування випадкова величина з розподілом $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$, де μ – середня кількість заявок, які знаходяться на обслуговуванні за одиницю часу ($1/\mu$ – середній час обслуговування однієї заявки).

Імовірність того, що тривалість обслуговування T триває довше $t > 0$:

$$P(T > t) = e^{-\mu t}.$$

Це випливає з того, що:

$$P(T > t > 0) = \int_t^{\infty} \mu \cdot e^{-\mu t} dt = e^{-\mu t}.$$

Експоненціальний розподіл добре описує тривалість телефонних розмов, виконання заявок на ремонт обладнання, тривалість (обслуговування) супроводу диспетчерами аеропорту літаків, що прибувають тощо.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СМО З ОДНОКАНАЛЬНОЮ ЧЕРГОЮ І ПУАСОНІВСЬКИМ ПОТОКОМ ВИМОГ

2.1. Рівняння стану системи масового обслуговування.

Функція Пуасона

Розглянемо модель процесу, де вхідний потік вимог є однорідним в часі (рівномірним), параметр цього потоку є постійна випадкова величина λ , ніякі дві вимоги не приходять (не стають у чергу) одночасно, а інтервали часу задоволення вимог розподілені за експоненціальним законом з випадковим, але постійним параметром μ . Початок чи закінчення обслуговування вимоги розглядають як подію. Прикладом такого процесу може бути процес контролю на лінії складання та монтажу електронної апаратури серійного виробництва.

Середнє число приладів за одиницю часу на ритмічно працюючому виробництві є величиною постійною. Імовірність того що прилад чекатиме на проведення контролю в інтервалі часу Δt дорівнює $\lambda \Delta t$. Імовірність того, що при середньому часі обслуговування $1/\mu$ контроль одного приладу буде завершено за час Δt дорівнює $\mu \Delta t$. Інтервал Δt такий, що за цей час може відбутись не більше однієї події (один прилад стає в чергу на контроль або контроль одного приладу завершено).

Прийmemo, що стабільний режим обслуговування може бути забезпечений, якщо $\lambda/\mu < 1$. В іншому випадку черга приладів буде необмежено зростати. Величини λ , μ – випадкові, але постійні. Імовірність того, що в інтервалі часу $(t + \Delta t)$ в системі обслуговування знаходиться $n > 0$ вимог (приладів) $P_n(t+\Delta t)$ буде визначатись сумою імовірностей таких чотирьох сумісних незалежних подій:

- а) в момент t в системі було n вимог: імовірність такої події $P_n(t)$;
- б) в інтервалі Δt не надійшло жодної вимоги: імовірність такої події $(1 - \lambda \Delta t)$;

в) в інтервалі Δt жодне обслуговування не закінчилось: імовірність такої події $(1 - \mu\Delta t)$.

Загальна імовірність першої події P^1 дорівнює добутку трьох вище визначених подій: $P^1 = P_n(t) (1 - \lambda\Delta t) (1 - \mu\Delta t)$.

2. а) в момент t в системі знаходиться $n + 1$ вимога: імовірність такої події $P_{n+1}(t)$;

б) в інтервалі Δt не надійшло жодної вимоги: імовірність такої події $(1 - \lambda\Delta t)$;

в) в інтервалі Δt закінчилося обслуговування одного приладу: імовірність такої події $\mu\Delta t$.

Загальна імовірність другої події дорівнює добутку трьох вище визначених подій: $P^2 = P_{n+1}(t) (1 - \lambda\Delta t) \mu\Delta t$.

3. а) в момент t в системі знаходилось $n - 1$ вимога: імовірність такої події $P_{n-1}(t)$;

б) в інтервалі Δt надійшла в систему одна вимога: імовірність такої події $\lambda\Delta t$;

в) в інтервалі Δt жодне обслуговування не закінчилось: імовірність такої події $(1 - \mu\Delta t)$.

Загальна імовірність третьої події дорівнює добутку трьох вище визначених подій: $P^3 = P_{n-1}(t) \lambda\Delta t(1 - \mu\Delta t)$.

4. а) в момент t в системі знаходилось n вимог: імовірність такої події $P_n(t)$;

б) в інтервалі Δt надійшла 1 вимога: імовірність такої події $\lambda\Delta t$;

в) в інтервалі Δt закінчилося 1 обслуговування: імовірність такої події $\mu\Delta t$.

Загальна імовірність четвертої події дорівнює добутку трьох вище визначених подій: $P^4 = P_n(t) \lambda\Delta t \mu\Delta t$.

Тому шукана імовірність:

$$\begin{aligned}
P_n(t + \Delta t) &= P^1 + P^2 + P^3 + P^4 = \\
&= P_n(t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t) + P_{n+1}(1 - \lambda\Delta t) \mu\Delta t + P_{n-1}(t) \lambda\Delta t (1 - \mu\Delta t) + P_n(t) \lambda\Delta t \mu\Delta t = \\
&P_n(t)[1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t + 2\lambda\mu(\Delta t)^2] + P_{n+1}(t) (\mu\Delta t - \lambda\mu(\Delta t)^2) + P_{n-1}(t) (\lambda\Delta t - \lambda\mu(\Delta t)^2).
\end{aligned}$$

Звужуючи інтервал $\Delta t \rightarrow 0$ і нехтуючи доданками $\sim \Delta t^2$, можемо записати:

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t)$$

або

$$\frac{d}{dt} P_n = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) \quad (1)$$

Рівняння (1) описує стан системи, коли в ній знаходиться скінченна кількість вимог $n \neq 0$. Виведемо рівняння, коли в інтервалі часу $(t + \Delta t)$ в системі не було жодної вимоги ($n = 0$). Імовірність цього визначають сумою імовірностей двох незалежних подій:

1) а) в момент t в системі не було жодної вимоги: імовірність такої події

$$P_0(t);$$

б) в інтервалі Δt не надійшло жодної вимоги: імовірність такої події $P_0(\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)$

Загальна імовірність першої події дорівнює добутку трьох вище визначених подій: $P^1 = P_0(t) P_0(\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)$.

2) а) в момент t в системі знаходилась 1 вимога: імовірність такої події $P_1(t)$;

б) в інтервалі Δt закінчилося 1 обслуговування: імовірність такої події $\mu\Delta t$;

в) в інтервалі Δt не надійшло жодної вимоги: імовірність такої події $(1 - \lambda\Delta t)$.

Загальна імовірність другої події дорівнює добутку трьох вище визначених подій $P^2 = P_1(t) (1 - \lambda\Delta t) \mu\Delta t = P_1(t) (\mu\Delta t - \mu\lambda\Delta t^2)$.

Шукана імовірність $P_0(t+\Delta t) = P_0(t) (1 - \lambda\Delta t) + P_1(t) (\mu\Delta t - \mu\lambda\Delta t^2)$.

Звужуючи інтервал $\Delta t \rightarrow 0$ і нехтуючи безмежно малою величиною $\sim \Delta t^2$, отримаємо

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

або

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (2)$$

Об'єднуючи рівняння (1) та (2), отримаємо математичну модель СМО з однією чергою і одним каналом обслуговування (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

Вхідний потік вимог є пуассоновським з параметром λ , а обслуговування описують експоненціальним законом з параметром μ .

Розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) з початковими умовами $P_0(0) = 1$; $P_n(0) = 0$ (при $t = 0$ відсутність вимог у системі є достовірною подією, а імовірність знаходження n вимог рівна нулю) при $t \rightarrow \infty$ є функція

виду:
$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$
, яка називається функцією (розподілом)

Пуасона (див. рис. 2).

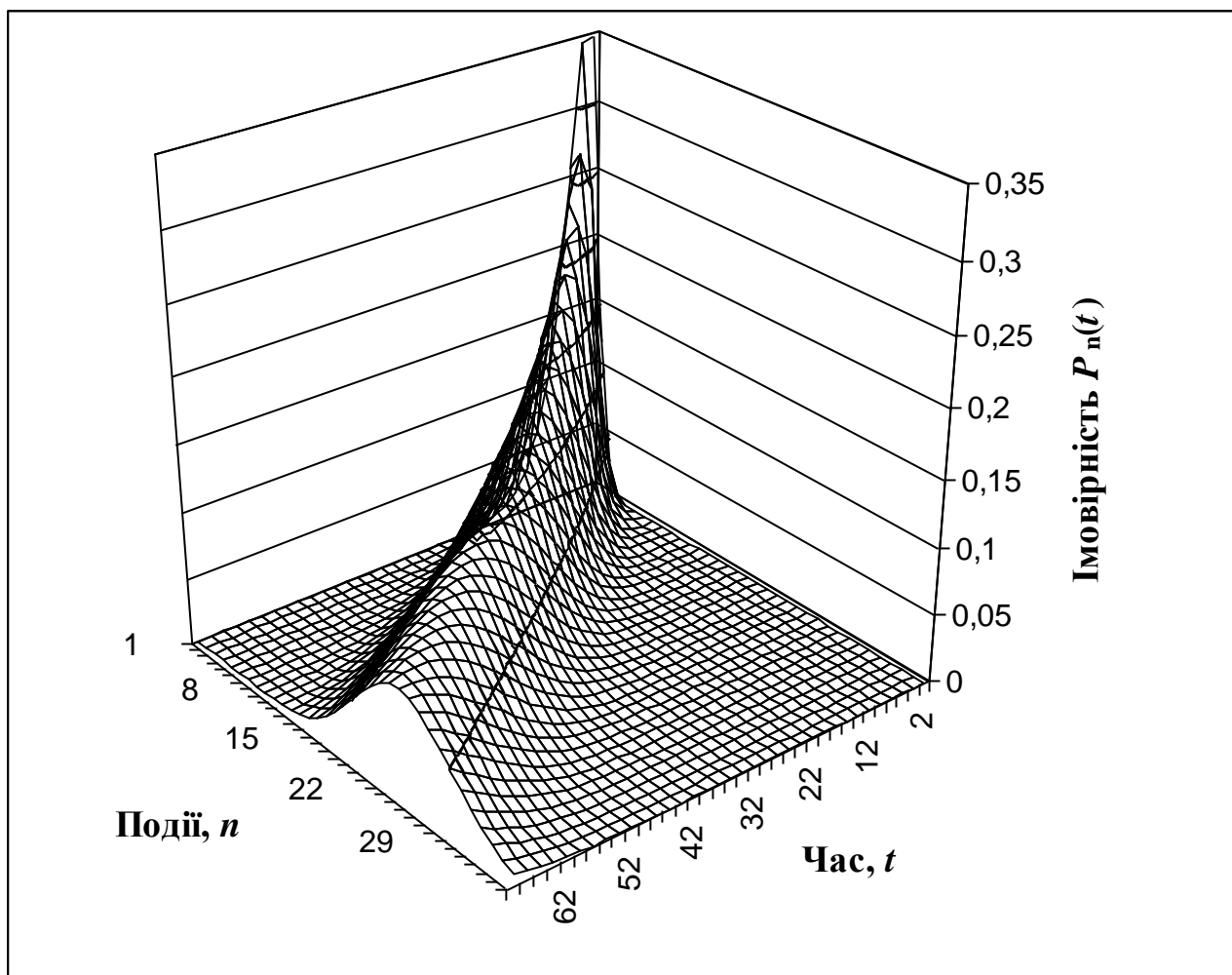


Рис. 2. Функція Пуасона $P_n(t)$.

В пуасонівському потоці важливим є закон розподілу інтервалів часу між двома послідовними вимогами. Імовірність того, що дві вимоги розділені інтервалом $T > t$ виражають формулою: $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Середнє значення інтервалу між двома подіями $\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$. Отже, якщо стохастичний процес описують законом Пуасона з параметром λ , то інтервали між подіями змінюються по експоненціальному закону з тим же параметром. Це розглядають як характерну ознаку пуасонівського потоку вимог у СМО.

Для розподілу Пуасона середня кількість вимог в системі $\bar{n} = \lambda t$.
 Дійсно, якщо прийняти, що математичне сподівання $M[n] = \bar{n}$, то

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right) = \lambda t e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \lambda t \end{aligned}$$

Надалі в прикладах, що будуть розглянуті, будемо вважати, що потік вимог у СМО пуассоновський, а тривалість обслуговування розподіляється по експоненціальному закону.

2.2. Дослідження стаціонарного стану системи масового обслуговування

Одним з найбільш важливим для практики є випадок, коли імовірність перебування n вимог у СМО не змінюється з часом: $P_n(t) = P_n = \text{const}$. Такий випадок характерний для стаціонарних систем без збурень. Тоді СМО можна описати алгебраїчними рівняннями (3) з урахуванням того, що $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0 \\ -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Система рівнянь (4) є моделлю стаціонарної СМО з однією чергою і одним каналом обслуговування.

Виведемо формулу для розрахунку імовірності P_n . Прийнемо до уваги, що $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ і $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ (достовірна подія). Тоді $P_1 = (\frac{\lambda}{\mu})P_0$, $P_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0$,

$$P_3 = (\frac{\lambda}{\mu})^3 P_0 \text{ і т.д. Для } n \text{ вимог } \boxed{P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0}.$$

Можна помітити, що імовірності P_1, P_2, P_3 і т.д. є членами ряду геометричної прогресії із знаменником $\lambda/\mu < 1$ і загальним членом

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0, \text{ де } n = 1, 2, \dots \text{ З рівняння } \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = 1 \text{ визначимо}$$

імовірність того, що вимоги у СМО відсутні (P_0). Сума членів спадної

$$\text{геометричної прогресії зі знаменником прогресії } \lambda/\mu < 1: \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

$$\text{Отже, } 1 = P_0 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \text{ і } P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \text{ Підставляючи у формулу } P_n \text{ значення } P_0,$$

встановлюємо, що при $\lambda/\mu < 1$

$$\boxed{P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu})}.$$

Відношення $\frac{\lambda}{\mu} = \Psi$ називається коефіцієнтом використання системи ($0 < \Psi < 1$), і є основною характеристикою систем масового обслуговування.

$$\text{З урахуванням цього } \boxed{P_n = \Psi^n (1 - \Psi)}.$$

Розрахуємо імовірність того, що вимог в системі буде не менше n :

$$P(N \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} P_i = \sum_{i=n}^{\infty} \Psi^i (1-\Psi) = (1-\Psi)(\Psi^n + \Psi^{n+1} + \Psi^{n+2} + \dots) = (1-\Psi) \cdot \frac{\Psi^n}{1-\Psi}.$$

Наприклад, при $\Psi = 0.9$ імовірність того, що в черзі знаходиться не менше 5 вимог дорівнює $0,9^5 = 0,59$. Тому прагнення домогтися „ефективної” роботи СМО шляхом збільшення Ψ неминуче веде до збільшення черги. Таким чином, при розрахунку СМО необхідно знаходити розумний компроміс між бажанням максимально збільшити коефіцієнт використання системи і неминучим зростанням черг.

Середнє число вимог в одноканальній СМО

$$\bar{n} = \frac{\Psi}{1-\Psi}.$$

Обґрунтування:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{i=n}^{\infty} n P_n = \sum_{i=n}^{\infty} n \Psi^n (1-\Psi) = (1-\Psi) \sum_{n=0}^{\infty} n \Psi^n = (1-\Psi)(\Psi^0 + 2\Psi^1 + 3\Psi^2 + \dots) = \\ &= \Psi(1-\Psi)[1 + 2\Psi + 3\Psi + \dots] = \Psi(1+\Psi) \left[\frac{d}{d\Psi} (\Psi + \Psi^2 + \Psi^3 + \dots) \right] = \\ &= \Psi(1+\Psi) \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{\Psi}{1-\Psi} \right) = \frac{\Psi(1-\Psi)}{(1-\Psi)^2} = \frac{\Psi}{1-\Psi}. \end{aligned}$$

Приклад. Білетна каса щоденно обслуговує 70 чоловік і працює 10 годин на добу. Касир витрачає в середньому 6 хвилин на обслуговування одного клієнта. Яка середня довжина черги біля віконця каси, враховуючи і клієнта, якого обслуговують? **Розв’язок:** $\lambda = 7$, $\mu = 10$ (клієнтів на годину),

$$\Psi = 0,7. \quad \bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{7}{3}. \quad \text{Відповідь: в середньому більше 2 і}$$

менше 3.

Аналізуючи рівняння математичної моделі СМО (3) ми розглянули найпростіший випадок: сталий режим ($P_n(t) = P_n$) з випадковими, але постійними параметрами $\lambda_n = \lambda$; $\mu_n = \mu$. Такий режим характерний для багатьох ритмічно функціонуючих процесів. В перехідному режимі, коли стійкого, сталого стану ще не досягнуто, розв'язок рівнянь (3) з початковими умовами $P_0(0) = 1$; $P_n(0) = 0$; $n = 1, 2, \dots$ ускладнюється і має вигляд функції $P_n(t) = f(\exp(\Psi^n, t) I_n(\Psi, t))$, де $I_n(\Psi, t)$ – модифікована функція Бесселя n -го порядку другого роду. При $t \rightarrow \infty$ $P_n(\infty) = \Psi^n(1 - \Psi)$, що співпадає зі сталим режимом СМО.

2.3. Середній час чекання в черзі

Для СМО з одним каналом ($S = 1$) середнє число вимог в черзі

$$\boxed{\bar{m} = \frac{\Psi^2}{1 - \Psi}}. \text{ Обґрунтування:}$$

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_n = \sum_{n=2}^{\infty} nP_n - \sum_{n=2}^{\infty} P_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} nP_n - \sum_{n=0}^1 nP_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n - \sum_{n=0}^1 P_n \right) = \\ &= \bar{n} - P_1 - 1 + P_0 + P_1 = \bar{n} - 1 + P_0 = \frac{\Psi}{1 - \Psi} - \Psi = \frac{\Psi^2}{1 - \Psi} \end{aligned}$$

Останнє рівняння обґрунтовує висновок про те, що, якщо у СМО з параметром потоку вимог λ і параметром обслуговування μ встановився стаціонарний режим, то середня кількість вимог, які надходять в систему, дорівнює кількості обслуговувань. Дійсно:

$$\frac{\bar{n}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Psi}{1 - \Psi} = \frac{1}{\mu\Psi} \cdot \frac{\Psi^2}{1 - \Psi} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Psi^2}{1 - \Psi} = \frac{\bar{m}}{\lambda}$$

Тому
$$\frac{\bar{m}}{\lambda} = \frac{\bar{n}}{\mu}.$$

З останньої пропорції випливає, що у СМО закінчує обслуговування стільки ж вимог, скільки і надходить на обслуговування. Відношення

$$\bar{t} = \frac{\bar{m}}{\lambda} = \frac{\bar{n}}{\mu},$$
 що має розмірність часу, визначає середній час чекання в

черзі, і дорівнює середній тривалості обслуговування одноканальної СМО.

Розглянемо приклад. Складальне виробництво на дільниці тестування електронних апаратів (ЕА) організовано на робочих місцях (РМ), які знаходяться по обидва боки стрічки транспортера. Тестований ЕА виставляється на стрічку, після чого він транспортується на дільницю технічного контролю (ТК) (рис. 3). Був проведений моніторинг виробничої діяльності дільниці тестування, під час якого фіксувались ЕА, що поступали на контроль протягом будь-якої хвилини. Всього було проведено 100 спостережень. В таблиці 1 зведені результати спостережень, в якій відмічено кількість випадків (частота f_n), коли реєстрували 0, 1, 2, 3, ... n ЕА протягом будь-якої хвилини спостереження.

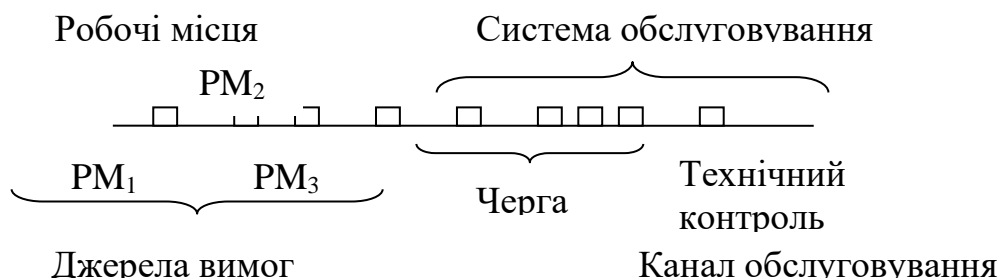


Рис. 3. Структура СМО на дільниці тестування електронних апаратів

Таблиця 1. Результати реєстрації електронних апаратів на дільниці тестування електронних апаратів

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 і більше
f_n	0	0	1	3	5	10	12	14	15	12	9	7	5	3	2	1	1	0

Розрахуємо головні параметри виробництва як СМО за зміну (8 годин).

1. Визначимо середню кількість ЕА, що знаходиться у виробництві?

Будемо розглядати появу n ЕА на контролі як подію. Визначимо імовірність кожної такої події P_n . Розрахунок:

$$P_n = \frac{f_n}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n = 0+1+3+5+10+\dots+2+1+1+0=100$$

$P_0 = 0; P_1 = 0; P_2 = 0,01; P_3 = 0,03; P_4 = 0,05; P_5 = 0,1; P_6 = 0,12; P_7 = 0,14;$
 $P_8 = 0,15; P_9 = 0,12; P_{10} = 0,09; P_{11} = 0,07; P_{12} = 0,05; P_{13} = 0,03; P_{14} = 0,02; P_{15} =$
 $0,01; P_{16} = 0,01; P_{17} = 0.$

2. Визначимо середню кількість ЕА, які надходили на контроль за хвилину (знаходились в черзі і на контролі). Розрахунок:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + 15 \cdot P_{15} + 16 \cdot P_{16} + 17 \cdot P_{17} \approx 8 \text{ (шт)}$$

3. За зміну на контроль надходить в середньому $\bar{n} = 8 \cdot 60 \cdot 8 = 3840$ електронних апаратів.

4. Параметр потоку вимог λ : $\bar{n} = \lambda \cdot \bar{t} = 8$, $\lambda = 8 \text{ хв}^{-1}$.

5. Середній інтервал часу між двома подіями. Розрахунок:

$$\bar{n} = \lambda \cdot \bar{t} = 8, \quad \bar{t} = \frac{1}{8} \text{ (хвилин)} = 7,5 \text{ сек.}$$

6. Імовірність того, що інтервал між двома подіями $T > 30$ секунд.

$$\text{Розрахунок: } P(T > t) = e^{-(8/60) \cdot 30} = e^{-4} = 0,018.$$

7. Параметр обслуговування μ :

$$\bar{n} = \frac{\Psi}{1-\Psi} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 8; \quad \mu = 9 \text{ хв}^{-1}.$$

8. Коефіцієнт використання СМО: $\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{9} = 0,89$.

9. Якої довжини буде черга ЕА на ділянці ТК? Розрахунок:

$$\bar{m} = \frac{\Psi^2}{1-\Psi} = \frac{(8/9)^2}{1-8/9} = 64/9 \approx 7. \text{ Отже, середня довжина черги } \bar{m} = 7.$$

10. Чи буде черга, якщо збільшити продуктивність праці на контролі, збільшивши кількість каналів обслуговування в 7 раз?

Розрахунок:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)p_n = 1 \cdot P_8 + 2 \cdot P_9 + 3 \cdot P_{10} + 4 \cdot P_{11} + 5 \cdot P_{12} + 6 \cdot P_{13} + 7 \cdot P_{14} + 8 \cdot P_{15} + 9 \cdot P_{16} + 10 \cdot P_{17} = \\ &= 0,15 + 0,24 + 0,27 + 0,28 + 0,25 + 0,18 + 0,14 + 0,08 + 0,09 + 0,0 = 2,37 \end{aligned}$$

Отже, в черзі буде в середньому не менше 2 ЕА.

11. Визначимо імовірність того, що довжина черги буде не менше 2 ЕА. Розрахунок: $P(N \geq n) = \Psi^n = 0,89^2 = 0,79$.

12. Яка буде довжина черги, якщо середню тривалість контролю зменшити на 1 секунду? Розрахунок:

При $\mu = 9 \text{ хв}^{-1}$ $\bar{t} = 60/9 = 6,67$ (сек.).

$$\mu' = \frac{1}{t'} \text{ хв}^{-1}; \quad t' = t - 1; \quad \mu' = \frac{60}{6,67 - 1,0} = 10,6 \text{ (хв}^{-1}\text{)};$$

$$\bar{m} = \frac{(\lambda/\mu')^2}{1-\lambda/\mu'} = \frac{8}{10,7} \cdot \frac{8}{10,7-8} = 2,2 \approx 2. \text{ Отже, середня довжина черги } \bar{m} = 2.$$

13. Яким повинен бути параметр обслуговування в цій системі, щоб черга на контролі не перевищувала 2 ЕА? Розрахунок:

$$\bar{m} = \frac{\varphi^2}{1-\varphi} = \frac{\lambda^2/\mu^2}{1-\lambda/\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu-\lambda} \leq 2, \quad \frac{1}{\mu} \cdot \frac{8^2}{\mu-8} \leq 2.$$

$$\mu_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{8 \pm 13,86}{2}; \quad \mu = 10,93 \text{ хв}^{-1}; \quad (\bar{t} = 5,49 \text{ сек})$$

2.4. Обслуговування з параметром, пропорційним числу вимог

Розглянемо інший випадок процесу МО, коли параметр потоку вимог величина постійна $\lambda_n = \lambda$, а параметр обслуговування пропорційний числу вимог у СМО $\mu_n = n\mu$. Запишемо систему рівнянь (4) для цього випадку, внівши в неї відповідні зміни.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + (1+n)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t) \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{cases}$$

В сталому режимі $P_n(t) = P_n = \text{const}$

$$\begin{cases} (n+1)\mu P_{n+1} = (\lambda + n\mu)P_n - \lambda P_{n-1} \\ P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \end{cases} \quad (5)$$

Для $n = 1$: $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$.

Для $n = 2$: $2\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0 = (\lambda + \mu)\frac{\lambda}{\mu} P_0 - \lambda P_0 = \frac{\lambda^2}{\mu} P_0$,

$$P_2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2} P_0.$$

Для $n = 3$: $3\mu P_3 = (\lambda + 2\mu)P_2 + \lambda P_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 - \frac{\lambda^2}{\mu} P_0 = \frac{\lambda^3}{2\mu^2} P_0$

$$P_3 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{2 \cdot 3} P_0$$

Для будь-якого n : $P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0.$

Пам'ятаючи про те, що $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ і

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

можемо записати: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 = P_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}} = 1.$

Звідси $P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}.$

Загальна формула для визначення імовірності знаходження n вимог у СМО з параметром обслуговування, пропорційним числу вимог:

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}$$

Отже, розподіл імовірностей n вимог в даній системі визначають законом Пуасона з параметром $a = \lambda/\mu$.

Знайдемо середнє значення вимог у СМО з параметром обслуговування, пропорційним числу вимог. Розв'язок:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

У СМО, де параметр обслуговування зростає пропорційно довжині черги, черги в такій системі не спостерігається.

Середнє значення вимог у СМО $\boxed{\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu} < 1}$. Тому і час чекання в черзі для такої СМО – це поняття, позбавлене змісту.

3. СИСТЕМА МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ОДНІЄЮ ЧЕРГОЮ І ДЕКІЛЬКОМА КАНАЛАМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ

3.1. Математична модель стаціонарної багатоканальної системи масового обслуговування

Дослідження виробничих систем з чергами завжди пов'язане з визначенням витрат на чекання обслуговування, а також витрат внаслідок незавантаженого обладнання. Очевидно, ці витрати залежать від числа каналів обслуговування у СМО. Розглянемо модель СМО з однією чергою і S каналами обслуговування. Будь-який з каналів, якщо він незайнятий, відразу починає обслуговування першої з вимог, що чекає в черзі. Обслуговування у всіх каналах має експоненціальний розподіл з параметром μ_n , вхідний потік вимог є пуассонівським з параметром λ_n . Черга утворюється, якщо $n > S$.

Щоб черга не зростала безмежно, необхідно, щоб коефіцієнт використання СМО $\Psi = \frac{\lambda_s}{\mu_s} < S$. Багатоканальну СМО з S каналами можна представити як одноканальну, продуктивність якої $\mu_s = S\mu$. Коефіцієнт використання багатоканальної СМО $\Psi = \frac{\lambda}{\mu S} < 1$.

Для моделі багатоканальної СМО використаємо рівняння (5), доповнивши його міркуваннями з підрозділу 3.4. Розглянемо рівняння стану СМО для трьох випадків: $n = 0$; $(1 \leq n < S)$ та $n \geq S$. Для перших двох випадків моделлю СМО буде система рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1; & (n = 0) \\ (\lambda + n\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu(n+1)P_{n+1}; & (1 \leq n < S) \end{cases} \quad (6)$$

Друге рівняння системи описує ситуацію, коли у СМО черг не спостерігають $(1 \leq n < S)$. Тому використаємо результат моделювання СМО з параметром обслуговування, пропорційним числу вимог в системі, в якій черг немає. Для випадку $n \geq S$ рівняння стану матиме вигляд:

$$(\lambda + S\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + S\mu(n+1)P_{n+1}; \quad (n \geq S). \quad (7)$$

Об'єднуючи рівняння (6) та (7) в систему, отримаємо модель багатоканальної СМО з однією чергою:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1; & (n = 0) \\ (\lambda + n\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu(n+1)P_{n+1}; & (1 \leq n < S) \\ (\lambda + S\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + S\mu(n+1)P_{n+1}; & (n \geq S). \end{cases} \quad (8)$$

Формули для розрахунку імовірностей P_n вимог для $n = 0, 1, 2, \dots, S, \dots$:

$$n = 0 : P_n = P_0;$$

$$1 \leq n \leq S : P_n = P_0 \frac{\Psi^n}{n!};$$

$$n \geq S : P_n = P_0 \frac{\Psi^n}{S! S^{n-S}}.$$

Імовірність P_0 розрахуємо, пам'ятаючи, що $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ і $\frac{\Psi}{S} < 1$.

$$P_0 + P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Psi}{n!} + \frac{\Psi^n}{S! S^{n-S}} \right) = P_0 \left[1 + \frac{\Psi}{1!} + \frac{\Psi^2}{2!} + \dots + \frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!} + \frac{\Psi^S}{S!} \left(1 + \frac{\Psi}{S!} + \frac{\Psi^2}{S!} + \frac{\Psi^3}{S!} + \dots \right) \right] = 1,$$

$$P_0 \left[\left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} \right) + \frac{\Psi^S}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Psi}{S}} \right] = 1$$

Отже,
$$P_0 = \frac{1}{\frac{\Psi^S}{S! \left(1 - \frac{\Psi}{S} \right)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!}}.$$

Середнє число вимог в черзі:

$$\bar{m} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S) P_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S) \frac{\Psi^n}{S! S^{n-S}} P_0 = \frac{\Psi^{S+1}}{S \cdot S! \left(1 - \frac{\Psi}{S} \right)^2} P_0.$$

Імовірність того, що вимога чекає в черзі настає тоді, коли $n = S$ і нове надходження може чекати на обслуговування. Ця імовірність становить:

$$P(n \geq S) = \sum_{n=S}^{\infty} P_n = P_0 \frac{\Psi^S}{S!(1 - \frac{\Psi}{S})}.$$

Якщо замість P_0 підставити його значення, визначене вище, отримаємо формулу Ерланга:

$$P(n \geq S) = \frac{\frac{\Psi^S}{S!(1 - \frac{\Psi}{S})}}{\frac{\Psi^S}{S!(1 - \frac{\Psi}{S})} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!}}.$$

Імовірність того, що час чекання в черзі для однієї вимоги перевищує деякий час t : $P(> t) = \exp[-S\mu t(1 - \frac{\Psi}{S})]$.

Середній час чекання в черзі: $\bar{t} = \frac{\bar{m}}{\lambda} = \frac{\Psi^S}{S!S \cdot \mu \cdot (1 - \frac{\Psi}{S})^2} P_0.$

Середня кількість не зайнятих обслуговуванням каналів:

$$\boxed{\bar{\rho} = S - \Psi}$$

Обґрунтування:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^{S-1} (S-n)P_n = \sum_{n=0}^{S-1} (S-n) \frac{\Psi^n}{n!} P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{S-1} (S-n) \frac{\Psi^n}{n!} = P_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} - P_0 \sum_{n=0}^{S-1} n \frac{\Psi^n}{n!} = \\
&= P_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} - P_0 S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi^n}{(n-1)!} = P_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} - P_0 \Psi \sum_{n=1}^{S-1} \frac{\Psi^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= P_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} - (P_0 \Psi \sum_{n=1}^S \frac{\Psi^{n-1}}{(n-1)!} - P_0 \Psi \sum_{n=1}^S \frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!}) = \\
&= P_0 S \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} - P_0 \Psi \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} + P_0 \frac{\Psi^S}{(S-1)!} = P_0 (S - \Psi) \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} + P_0 \frac{\Psi^S}{(S-1)!} = \\
&= P_0 (S - \Psi) \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} + \frac{1}{S - \Psi} \cdot \frac{\Psi^S}{(S-1)!} \right] = \\
&= P_0 (S - \Psi) \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\Psi^n}{n!} + \frac{1}{1 - \frac{\Psi}{S}} \cdot \frac{\Psi^S}{S(S-1)!} \right] = P_0 (S - \Psi) \cdot \frac{1}{P_0} = S - \Psi.
\end{aligned}$$

3.2. Оптимізація функціонування багатоканальної системи масового обслуговування

Дослідження виробничих систем з чергами завжди пов'язано з визначенням витрат на чекання обслуговування і витрат внаслідок незавантаженого обладнання. Очевидно, що ці витрати залежать від кількості каналів обслуговування. Виробникові завжди потрібно знаходити розумний компроміс між довжиною черги як „неминучого лиха” і кількістю каналів обслуговування. Адже бажання ліквідувати чергу вимагає відповідних ресурсів, вартість яких може перевершити економічний ефект від її ліквідації. Розглянемо в якості прикладу функціонування СМО, в якій одна черга і S каналів обслуговування (дивись таблицю 2).

Таблиця 2. Результати статистичного дослідження функціонування СМО

№ п/п	Кількість вимог в черзі, n	Частота появи вимог в черзі, f_n	Імовірність події, P_n	Тривалість обслуговування τ , хвилини	Статистика обслуговування, кількість вимог n
1	16	2	0,000552	0,15	453
2	17	2	0,000552	0,30	408
3	18	8	0,002206	0,45	410
4	19	19	0,00524	0,60	436
5	20	26	0,00717	0,75	396
6	21	47	0,012962	0,90	451
7	22	55	0,015168	1,05	330
8	23	78	0,021511	1,20	314
9	24	112	0,030888	1,35	353
10	25	140	0,03861	1,50	302
11	26	173	0,047711	1,65	272
12	27	209	0,057639	1,80	272
13	28	240	0,066189	1,95	254
14	29	261	0,07198	2,10	209
15	30	284	0,078323	2,25	241
16	31	287	0,079151	2,40	215
17	32	282	0,077772	2,55	207
18	33	268	0,073911	2,70	213
19	34	245	0,067568	2,85	217
20	35	210	0,057915	3,0	186
21	36	177	0,048814	3,15	181
22	37	143	0,039437	3,30	175
23	38	108	0,029785	3,45	153
24	39	79	0,021787	3,60	143
25	40	59	0,016271	3,75	150
26	41	39	0,010756	3,90	132
27	42	27	0,007446	4,05	133
28	43	19	0,00524	4,20	130
29	44	12	0,003309	4,35	120
30	45	15	0,004137	4,50	138

Будь-який з S каналів, якщо він незайнятий, відразу починає обслуговування першої з вимог, що чекає в черзі. **Об'єктом дослідження** є СМО з робочими станціями, принт-сервером (далі сервер) і принтерами, які працюють в локальній мережі ПЕОМ. Дослідники фіксували кількість вимог

на друк в черзі протягом довільно обраних 10 хвилин. Всього було здійснено 3626 спостережень. Статистика обслуговувань фіксувала кількість вимог, обслуговування яких тривало не менше, ніж час τ , кратний 0,15 хвилинам.

Гістограми потоку вимог та статистики обслуговувань подано на діаграмах (рис. 4, 5).

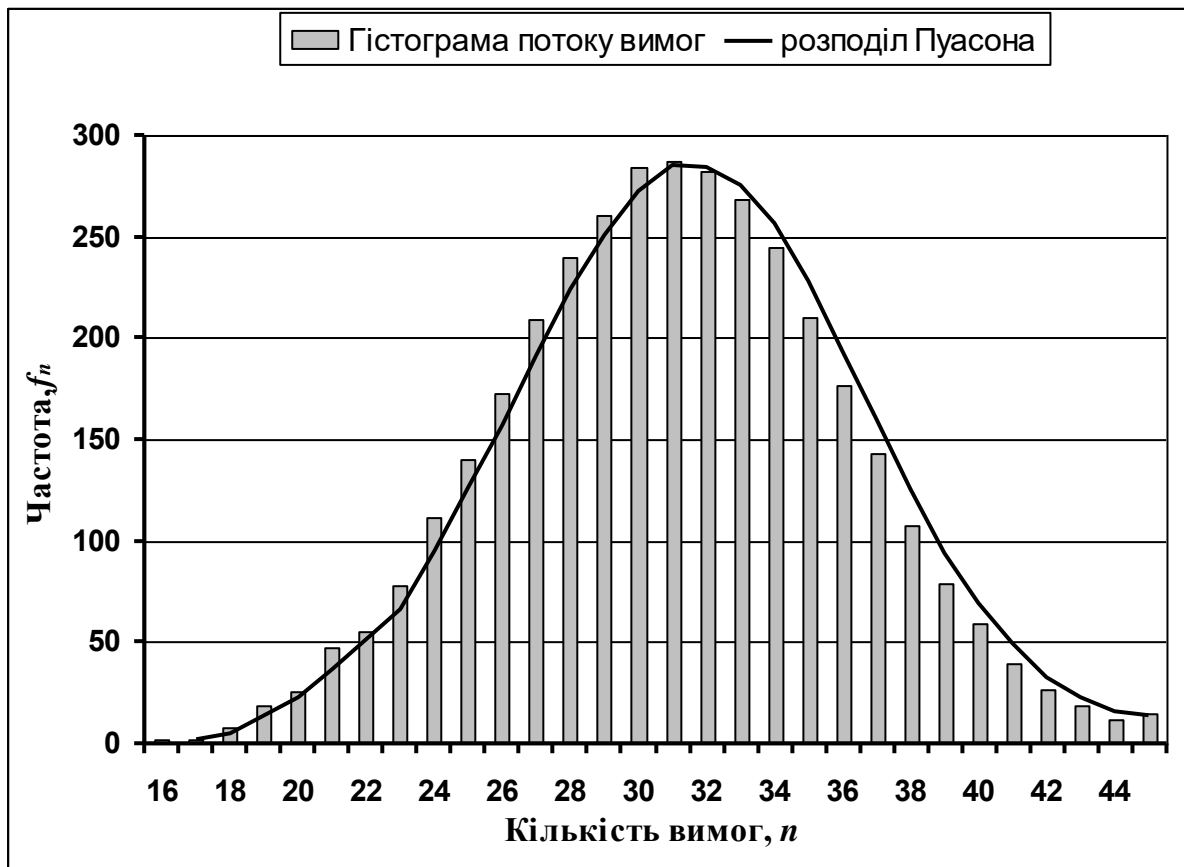


Рис. 4. Діаграма потоку вимог СМО.

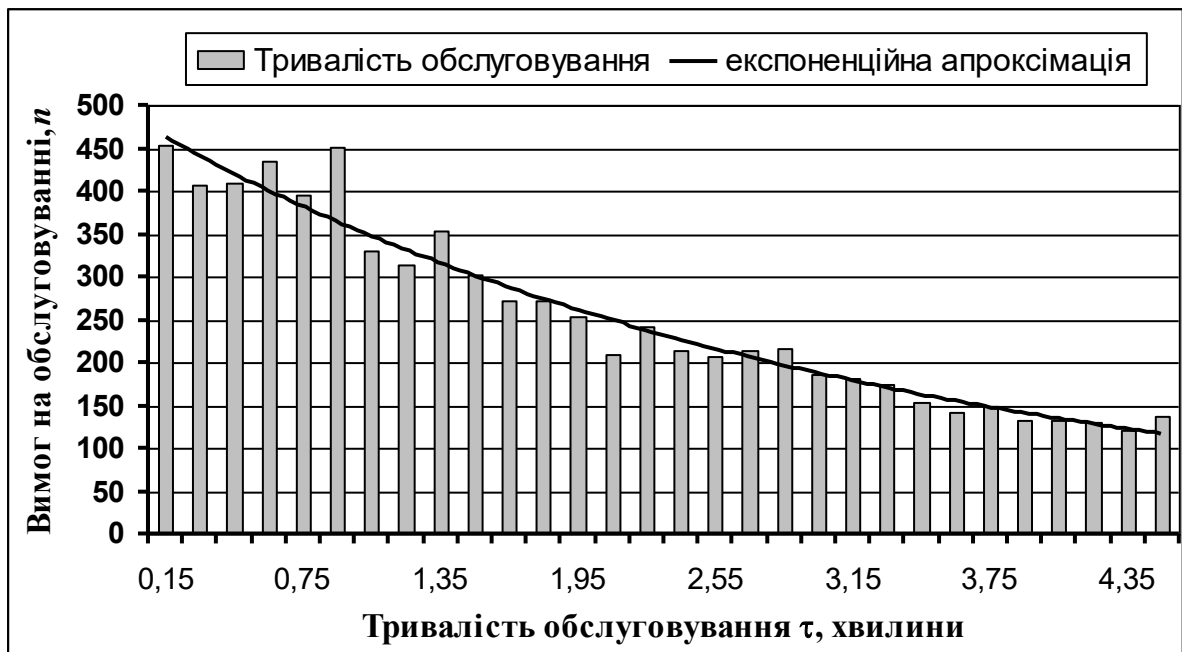


Рис. 5. Діаграма обслуговування вимог СМО.

Робочі станції є **джерелами вимог**, які формують потік заявок на друк документів, працюючи незалежно одна від другої. Тому є підстави вважати потік вимог випадковим (стохастичним) з пуасонівським розподілом. Сервер ставить заявку на друк в єдину спільну **чергу** (список завдань) і розподіляє сукупний потік вимог до принтерів – **каналів обслуговування**, а будь-який з принтерів, якщо він незайнятий, відразу починає обслуговування першої з вимог, що чекає в черзі.

Гістограми підтверджують, що потік вимог у СМО відповідає пуасонівському розподілу, а тривалість обслуговування експоненціальній функції.

Розміри документів на друк та їх якісний склад (наявність тексту, графіки, кольору та інше) різні і змінюються випадково, що обумовлює різну тривалість їх обслуговування. Принтери мають однакові характеристики. Випадковий характер потоку заявок та тривалість їх обслуговування призводять до того, що в деякі періоди часу на вході серверу накопичуються

вимоги, які утворюють чергу на обслуговування, в інші ж періоди система працює з недовантаженням.

Важливість документів і можливі втрати в зв'язку з затриманням їх друку з одного боку, а також витрати на підтримання принтерів в робочому стані дозволяють скласти наступну **оптимізаційну задачу**. При відомих статистичних характеристиках потоку вимог и тривалості їх обслуговування з урахуванням відомих витрат від затримки друку (e_1) та витрат на обслуговування принтерів (e_2), визначити оптимальну кількість принтерів (S_{opt}), яка забезпечує мінімальні сукупні витрати СМО B_S :

$$B_S = e_1 \bar{t}_1 + e_2 \bar{t}_2 ,$$

де \bar{t}_1 – сукупний середній час затримки вимог у черзі;

\bar{t}_2 – сукупний середній час простою принтерів.

Розв'язок задачі.

1. Встановимо значення параметра обслуговування μ , припустивши, що закон розподілу імовірностей часу обслуговування заявок описують функцією виду: $P(\tau > 0) = Ae^{-\mu \cdot \tau}$. Методом найменших квадратів знаходимо параметр обслуговування $\mu = 0,316 \text{ хв}^{-1}$.

2. Визначимо параметр потоку вимог λ , припустивши, що потік вимог є пуасоновським: $\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = 31,06$. Отже, $\lambda = \frac{31}{10 \text{ хв}} = 3,1 \text{ хв}^{-1}$, а коефіцієнт використання системи: $\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3,1}{0,316} = 9,81$.

3. Розрахуємо середню кількість заявок, які потребують обслуговування протягом 24-годинного робочого періоду:
 $N = \bar{n} \cdot T = 31 \cdot 6 \cdot 24 = 4464 \text{ заявок}$.

Середній час, необхідний для обслуговування цієї кількості заявок:

$$\bar{T} = \frac{N}{\mu} = \frac{4464}{0,316} = 14126,6 \text{ хв} = 235,4 \text{ год}.$$

4. Визначемо середній час чекання в черзі на обслуговування заявки наїлькість не може бути меншою 10, адже $\Psi = \lambda/\mu = 9,81$.

$$\bar{t} = \frac{\Psi^s}{\mu \cdot s! s(1 - \Psi/s)^2} P_0;$$

$$P_0 = \left[\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\Psi^n}{n!} \right) + \frac{\Psi^s}{s!(1 - \Psi/s)} \right]^{-1}$$

Розрахунок: $S = 10$:	$P_0 = 7,782 \cdot 10^{-6}$	$\bar{t} = 15,518$ хвилин
$S = 11$:	$P_0 = 3,355 \cdot 10^{-5}$	$\bar{t} = 1,673$ хвилин
$S = 12$:	$P_0 = 4,511 \cdot 10^{-5}$	$\bar{t} = 0,592$ хвилин
$S = 13$:	$P_0 = 5,04 \cdot 10^{-5}$	$\bar{t} = 0,255$ хвилин
$S = 14$:	$P_0 = 5,285 \cdot 10^{-5}$	$\bar{t} = 0,117$ хвилин
$S = 15$:	$P_0 = 5,398 \cdot 10^{-5}$	$\bar{t} = 0,055$ хвилин

5. Розрахуємо загальний час, який витрачають заявки в черзі на обслуговування у СМО з кількістю каналів S :

$S = 10$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 15,518 = 69272$ хв. = 1154,5 годин
$S = 11$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 1,673 = 7468$ хв. = 124,5 годин
$S = 12$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 0,592 = 2643$ хв. = 44,05 годин
$S = 13$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 0,255 = 1138$ хв. = 18,97 годин
$S = 14$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 0,117 = 522$ хв. = 8,7 годин
$S = 15$:	$\bar{t}_1 = 4464 \cdot 0,055 = 245$ хв. = 4,1 годин

6. Час простою принтерів при відсутності заявок на обслуговування за

добу буде дорівнювати $\bar{t}_2 = S \cdot 24 - 235,4$ (годин):

при $S = 10$:	$\bar{t}_2 = 10 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 4,6 \text{ годин}$
$S = 11$:	$\bar{t}_2 = 11 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 28,6 \text{ годин}$
$S = 12$:	$\bar{t}_2 = 12 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 52,6 \text{ годин}$
$S = 13$:	$\bar{t}_2 = 13 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 76,6 \text{ годин}$
$S = 14$:	$\bar{t}_2 = 14 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 100,6 \text{ годин}$
$S = 15$:	$\bar{t}_2 = 15 \cdot 24 \text{ год.} - 235,4 \text{ год.} = 124,6 \text{ годин}$

7. Нехай годинні збитки від чекання в черзі $\epsilon_1 = 4$ грошові одиниці, а витрати від функціонування каналів обслуговування (принтерів) становлять $\epsilon_2 = 1$ грошову одиницю. Визначимо витрати у СМО для різної кількості принтерів S :

$S = 10$:	$V_{10} = 1154,5 \cdot 4 + 4,6 = 4522,6 \text{ гр. од.}$
$S = 11$:	$V_{11} = 124,5 \cdot 4 + 28,6 = 526,6 \text{ гр. од.}$
$S = 12$:	$V_{12} = 44,05 \cdot 4 + 52,6 = 228,8 \text{ гр. од.}$
$S = 13$:	$V_{13} = 18,97 \cdot 4 + 76,6 = 152,6 \text{ гр. од.}$
$S = 14$:	$V_{14} = 8,7 \cdot 4 + 100,6 = 135,4 \text{ гр. од.}$
$S = 15$:	$V_{15} = 4,1 \cdot 4 + 124,6 = 141 \text{ гр. од.}$

Отже, оптимальна кількість принтерів становить 14.

Слід зазначити, що після розрахунку коефіцієнту використання СМО $\Psi = \lambda/\mu = 9,81$ могло би здатися, що необхідно 10 принтерів. Проте прийняття такого рішення „на око” нанесло би збитків у сумі $4522,6 - 135,4 = 4387,2$ грошових одиниць щодоби.

Середня кількість не зайнятих друком принтерів $\bar{p} = S - \Psi = 14 - 9,81 = 4,19$. Таким чином, при встановленому співвідношенні витрат на функціонування СМО (4:1) необхідно погодитись з тим, щоб утримувати чотири „зайві” принтери.

3.3. Телефонний зв'язок як система масового обслуговування

Система телефонного зв'язку є типовим прикладом СМО з випадковим потоком вимог (викликів), випадковою тривалістю їхнього обслуговування (сеансів зв'язку) й скінченим числом каналів обслуговування (телефонних ліній). Історично вона стала першим прикладом системи з чергами, з якого почався розвиток теорії систем масового обслуговування. Першою науковою працею з теорії МО вважають роботу датського вченого А.К. Ерланга (1878 - 1929 рр.) «Теорія імовірності і телефонні розмови», опубліковану в 1909 р.

Найбільш загальною характеристикою випадкового потоку викликів є середня частота надходження викликів λ , вимірювана числом викликів в одиницю часу. Аналогічним чином уводять середню тривалість обслуговування одного виклику (середня тривалість розмови) T , вимірювану в одиницях часу. Добуток зазначених величин $a = \lambda T$ визначає середній трафік (інтенсивність трафіка, інтенсивність навантаження, потік навантаження), вимірюваний у спеціальних одиницях – „ерлангах” (ерл), названими на честь А.К. Ерланга – першого вченого у сфері теорії телефонного трафіка. Для вимірювання λ і T можуть використовуватися будь-які одиниці часу, але, щоб уникнути непорозумінь, необхідно обирати одиницю виміру часу однаковою. Наприклад, якщо $\lambda = 20$ викл/год, $T = 0,2$ год., то трафік $a = 4$ ерл (1 ерл = 1 викл/год). Характеристики навантаження – середню частоту надходження викликів λ і трафік a – зазвичай оцінюють для „години пік”, тобто, для годинного інтервалу в період найбільшого навантаження системи зв'язку.

В усіх моделях потік викликів приймають таким, що відповідає розподілові Пуасона, і тривалість обслуговування виклику – експоненціальному розподілові. Різні моделі відрізняються одна від одної тим, що очікує виклики, які надходять у моменти часу, коли всі канали системи зайняті. Ці виклики можуть анулюватися (система з відмовами), або ставати в чергу і чекати звільнення каналу необмежено довгий час, після чого

обслуговуватися протягом необхідного інтервалу часу (система з очікуванням). Розроблено моделі СМО, в яких певним категоріям викликів надають пріоритети в обслуговуванні (системи з пріоритетами). Можливі проміжні випадки, наприклад, моделі з очікуванням, але протягом обмеженого часу.

У системі з обмеженням часу очікування і часу обслуговування після очікування (модель Ерланга „А” або модель Пуасона) виклик, що надійшов у момент зайнятості всіх каналів, стає в чергу, але час чекання не перевищує середнього часу обслуговування (середньої тривалості розмови). Якщо за цей час хоча б один канал звільняється, виклик займає його на частину середнього часу обслуговування, що залишилася, після чого анулюється. У такій системі імовірність відмов:

$$P_A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

У системі з відмовами (модель Ерланга „В”; в англійській термінології „lost-calls-cleared conditions”, тобто „умови анулювання викликів, що одержали відмову”) імовірність відмов (імовірність надходження виклику в момент, коли всі канали зайняті) визначають виразом

$$P_B = \frac{a^S / S!}{\sum_{n=0}^S (a^n / n!)}$$

де S - число каналів, a – трафік, n – виклики.

У системі з очікуванням (модель Ерланга „С”) імовірність того, що виклик, що надійшов, не обслуговується негайно, а стає в чергу:

$$P_C = P_{0C} \frac{a^S S}{S!(S-a)},$$

де $P_{0C} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} (a^n / n!) + \frac{a^S S}{S!(S-a)}}$ – імовірність того, що всі канали вільні.

При оцінці ємності систем сотового зв'язку звичайно використовують модель Ерланга „В” (модель системи з відмовами). При малих імовірностях відмов моделі Ерланга „В” та „С” дають досить близькі результати. Відзначимо принагідно, що при імовірності відмов або імовірності блокування виклику $P_B > 0,1$ порівняно невелике зростання трафіка призводить до різкого зростання імовірності відмов, тобто до істотного погіршення якості обслуговування. Тому розрахунок ємності системи зазвичай розробляють для значень P_B у межах 0,01...0,05.

Наведемо деякі додаткові характеристики для моделі Ерланга „В”.

Імовірність того, що всі канали вільні: $P_{0B} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N (a^n / n!)}$

Імовірність того, що зайнято S каналів: $S = P_{0B} \sum_{n=1}^S (a^n / (n-1)!)$

Середнє число зайнятих каналів: $P_{SB} = P_{0B} a^S / S!$

Формула, що визначає імовірність блокування виклику в системі з відмовами, занадто громіздка для безпосереднього застосування. На практиці звичайно користуються її представленням у виді таблиці. Приклад такого подання цієї формули у таблиці 3. Спираючись на дані цієї таблиці, відзначимо, що зі збільшенням числа каналів трафік росте швидше, ніж число каналів, особливо при числі каналів менше 30 ... 40. Тому в раціональній побудованій системі стільникового зв'язку повинно бути не менше 30 каналів на осередок.

У формулу входять три параметри: число каналів S , трафік a та імовірність відмов P_B . Якщо відомі будь-які два параметри, можна однозначно знайти третій. Наприклад, якщо відоме число каналів S , і відома імовірність відмов, то розраховують трафік a , який при цьому повинний бути забезпечений (дивись таблицю та рис. 6).

Наведемо приклад. Розглянемо систему стільникового зв'язку, що складається зі 70 осередків, у кожному з яких використовують 30 каналів. Якщо необхідно забезпечити імовірність відмов 0,01, то відповідно до таблиці 3 трафік не повинен перевищувати 20,3 ерл на осередок. Якщо в „годину пік” кожен абонент робить у середньому один виклик на годину і середня

Число каналів S	Імовірність відмов P_B				
	0,002	0,01	0,02	0,05	0,1
	Трафік a , ерл				
1	0,002	0,01	0,02	0,05	0,1
2	0,07	0,15	0,22	0,38	0,6
5	0,9	1,36	1,66	2,22	2,86
10	3,4	4,5	5,1	6,2	7,5
20	10,1	12,0	13,2	15,2	17,6
30	17,6	20,3	21,9	24,8	28,1
40	25,6	29	31	34,6	38,8
50	33,9	37,9	40,3	44,5	49,6
100	77,5	84,1	88	95,2	104,1
150	122,9	131,6	136,8	146,7	159,1
200	169,2	179,7	186,2	198,5	214,3

тривалість розмови складає 2 хвилини, то трафік на одного абонента становить $1/30$ ерл. Отже, у кожному осередку може бути обслуговано $20,3:1/30 = 609$ абонентів, а у всій системі, що складається зі 70 осередків, $609 \cdot 70 = 42630$ абонентів.

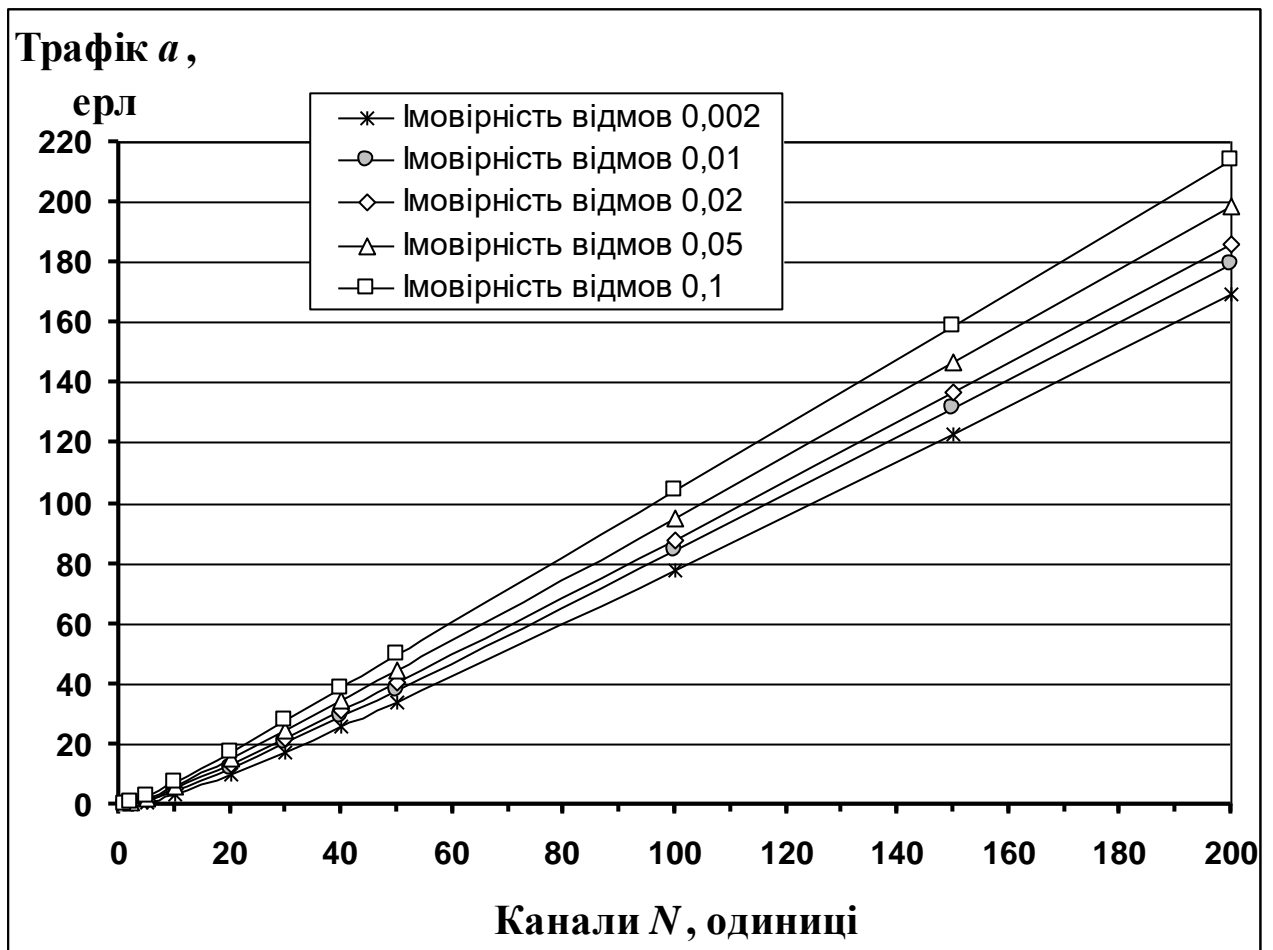


Рис. 6. Ємність трафіку як функція числа каналів для моделі Ерланга „В” (системи з відмовами)

Така ємність розглянутої телефонної СМО розрахована у відповідності з загальноприйнятим підходом для години найбільшого навантаження. При цьому на основі наведених вище формул середнє число зайнятих каналів $K = 20,1$, а імовірність того, що всі канали вільні, або зайнято 10 чи 20 каналів, складає відповідно $P_{0B}=1,55 \cdot 10^{-9}$, $P_{10B} = 0,055$, $P_{20B} = 0,09$.

ВИСНОВОК

Теоретичне вивчення стохастичних процесів, що пов'язані з функціонуванням технічних систем з чергами, вимагає фахового використання математичних моделей, що містять випадкові величини. Системи, що функціонують тривалий час, розглядають як стаціонарні, і в яких випадкові величини є постійними в часі. Для таких систем можна визначити інтервали часу між двома послідовними подіями та час обслуговування як деякі імовірнісні параметри. Співвідношення цих параметрів визначає наявність та довжину черги на обслуговуванні. Якщо прийняти тезу про чергу як „неминуче зло”, то завдання дослідника технічної системи полягає в тому, щоб мінімізувати збитки від існування черги.

У другому і третьому розділах методичних вказівок наведено приклади розрахунку систем масового обслуговування, подано процедуру визначенні параметру потоку заявок і параметру обслуговування заявок з використанням результатів спостереження за системою, показано метод оптимізації функціонування багатоканальної системи масового обслуговування.

Список літератури

1. *Кофман А.* Методы и модели исследования операций /Пер. с французского под ред. проф. Д.Б. Юдина. – М.:Мир, 1966. – 524 с.
2. *Фомин Г.П.* Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 144 с.
3. *Е. В. Бережная, В. И. Бережной.* Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2001. – 201 с.
4. *Вишневикий В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. - М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
5. *Ратынский М.В.* Основы сотовой связи / Под ред. Д.Б. Зелина. 2-е изд. – М.: Радио и связь, 2000. – 248 с.