

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Системи і методи штучного інтелекту»
спеціальності 122/F3 «Комп'ютерні науки»

Укладачі: А.М. Шахновський, О.О. Квітка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 519.6+519.2+004.8

ШЗ1

Укладачі: *Шахновський Аркадій Маркусович, канд. техн. наук, доц.
Квітка Олександр Олександрович, канд. хім. наук, доц.*

Рецензент *Дмитрієва, О.А., д-р техн. наук, проф., проф. кафедри
математичних методів системного аналізу
НН ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний редактор *Джигирей І.М., канд. техн. наук, доц.*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 05.02.2026 р.)
за поданням вченої ради НН ІПСА
(протокол № 11 від 29.12.2025 р.)

Обчислювальна математика. Математичне опрацювання експериментальних даних. Розрахункова робота. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Системи і методи штучного інтелекту» спеціальності 122/F3 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. М. Шахновський, О. О. Квітка. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 110 с.

Електронне мережне навчальне видання розроблено відповідно до програми підготовки бакалаврів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» та містить методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з освітньої компоненти «Обчислювальна математика» на тему «Математичне опрацювання експериментальних даних».

Посібник містить основні теоретичні відомості, необхідні для розв'язання практичних задач кореляційного та регресійного аналізу, апроксимації функцій методом найменших квадратів, зокрема з використанням методу вирівнювання (лінеризації). Наведено приклади типових індивідуальних завдань, рекомендації щодо їх виконання, вимоги до оформлення, структури, обсягу та порядку захисту розрахункової роботи. Посібник сприяє формуванню у студентів системного уявлення про методи обробки даних, розвитку навичок аналітичного мислення, використання прикладного програмного забезпечення та математичних методів у практиці побудови моделей для задач штучного інтелекту.

УДК 519.6+519.2+004.8

Реєстр. № НП 25/26-155. Обсяг 5,7 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056

<https://kpi.ua>

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

ВСТУП. МЕТА І ЗАВДАННЯ РОБОТИ.....	4
1. ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ	6
1.1. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ	6
1.2. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ.....	6
2. СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА, РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ	7
3. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ	12
3.1. ПРОВЕДЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОГО ТА РЕГРЕСІЙНОГО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ	12
<i>Дослідження статистичної залежності між величинами</i>	<i>12</i>
<i>Кореляційний аналіз</i>	<i>14</i>
<i>Регресійний аналіз.....</i>	<i>19</i>
3.2. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ВИРІВНЮВАННЯ ТА МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ АПРОКСИМУЮЧОЇ ФУНКЦІЇ.....	38
<i>Наближення функцій, апроксимація.....</i>	<i>38</i>
<i>Визначення коефіцієнтів апроксимуючого поліному за МНК</i>	<i>43</i>
<i>Лінійна апроксимація за МНК</i>	<i>44</i>
<i>Квадратична апроксимація за МНК.....</i>	<i>47</i>
<i>Апроксимація за МНК у вигляді не поліноміальної функції: лінеаризація даних</i>	<i>51</i>
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	65
ДОДАТКИ.....	68
Додаток А. ДОДАТКОВІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	68
<i>Графічний спосіб оцінювання вигляду емпіричної формули</i>	<i>68</i>
<i>Аналітичний метод вигляду емпіричної формули</i>	<i>71</i>
<i>Множинна (багатофакторна) регресія</i>	<i>74</i>
Додаток Б. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	82
Додаток В. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ТА КОЕФІЦІЄНТІВ АПРОКСИМУЮЧОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	99
Додаток Г. ЗРАЗОК ТИТУЛЬНОГО АРКУША	109
Додаток Д. ТИПОВИЙ ЗМІСТ ПОЯСНЮВАЛЬНОЇ ЗАПИСКИ	110

ВСТУП. МЕТА І ЗАВДАННЯ РОБОТИ

У сучасних умовах розвитку інформаційних технологій здатність ефективно обробляти та аналізувати експериментальні дані є важливою складовою підготовки фахівців зі штучного інтелекту. Математичні методи, зокрема кореляційний аналіз і метод найменших квадратів, лежать в основі багатьох підходів до моделювання, прогнозування та прийняття рішень в інтелектуальних системах.

Розрахункова робота як форма самостійної освітньої діяльності здобувача вищої освіти має на меті закріплення теоретичних знань та розвиток практичних навичок, необхідних для опрацювання та інтерпретації реальних даних. Така робота сприяє формуванню навичок аналізу інформації, програмної реалізації чисельних методів і грамотного оформлення технічної документації.

Цей навчальний посібник призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності «Комп'ютерні науки» та розроблено відповідно до вимог освітньої компоненти «Обчислювальна математика». Посібник містить теоретичні відомості з основ статистичного аналізу даних і методів апроксимації, методичні вказівки щодо виконання індивідуальних завдань, а також вимоги до структури, оформлення та захисту розрахункової роботи..

Мета та завдання розрахункової роботи полягають в поглибленні як теоретичних знань, так і навичок їх застосування для розв'язування поставленої задачі. Основний зміст роботи – розв'язання типових задач кореляційного аналізу та наближення функцій для наборів даних. Кореляційний аналіз – це базовий необхідний інструмент у роботі фахівця зі штучного інтелекту. Він дозволяє не лише розуміти структуру даних, а й приймати обґрунтовані рішення при побудові моделей. Володіння цим методом забезпечує якісну підготовку даних і підвищує ефективність аналітичних систем. У прикладних задачах штучного інтелекту, таких як машинне навчання, аналіз даних, робототехніка чи прогнозування, важливо мати інструменти для «наближення функцій», тобто побудови

функціональної залежності між змінними, насамперед, із використанням одного із найефективніших класичних підходів для цього – методу найменших квадратів.

В ході виконання розрахункової роботи студент розвиває придбані за період навчання навички користування довідковою та науково-технічною літературою, оформлення пояснювальної записки відповідно до норм оформлення.

В навчальному посібнику наведено типові завдання з розрахункової роботи; вимоги і рекомендації щодо складу, обсягу і структури, порядку виконання, оформлення та захисту розрахункової роботи; а також теоретичні відомості, які необхідні для її виконання.

1. ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

1.1. Кореляційний аналіз експериментальних даних

Аналіз парної лінійної кореляції для згрупованих даних

Індивідуальні завдання наведено у Додатку Б.

На основі експериментальних даних, отриманих для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y , і представленими у вигляді кореляційної таблиці:

1.1.1. розрахувати вибірковий коефіцієнт кореляції та оцінити силу зв'язку між Y і X ;

1.1.2. знайти рівняння прямих ліній регресії X на Y та Y на X ; побудувати графіки отриманих рівнянь та порівняти їх із даними кореляційної таблиці;

1.1.3. зробити висновки.

1.2. Регресійний аналіз експериментальних даних

Знаходження загального вигляду та коефіцієнтів апроксимуючої залежності

Індивідуальні завдання наведено у Додатку В.

Для даних, заданих у вигляді таблиці:

1.2.1. отримати апроксимуючі функції у вигляді поліномів першого та другого порядків, оцінити точність апроксимації;

1.2.2. визначити вигляд не поліноміальної апроксимуючої функції (обравши ту з емпіричних залежностей, яка найбільш точно описує наявні дані), та обчислити її коефіцієнти, оцінити точність апроксимації;

1.2.3. зробити порівняльний аналіз трьох отриманих апроксимуючих залежностей і обґрунтувати вибір більш вдалої з них.

2. СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА, РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ

Перед початком виконання розрахункової роботи студент повинен:

- ознайомитися з відповідним розділом навчального курсу;
- опрацювати теоретичні положення, які стосуються поставлених задач;
- уважно розглянути приклади, надані на лекціях та у комп'ютерному практикумі;
- вивчити рекомендовану літературу, пропоновану викладачем.

Недостатнє засвоєння теоретичного матеріалу або формальне ставлення до опрацювання прикладів значно ускладнює виконання розрахункових завдань. У таких випадках студент ризикує допустити серйозні помилки або не зрозуміти суть виконуваних дій, що призведе до втрати навчального ефекту. Робота, виконана не самостійно, позбавляє викладача можливості своєчасно виявити прогалини в знаннях студента. Внаслідок цього студент не набуває необхідних навичок.

Кожен студент зобов'язаний виконати всі завдання розрахункової роботи та подати її на перевірку у встановлені строки, визначені графіком навчального процесу. Після перевірки робота повертається студенту з коментарями. Зауваження необхідно врахувати, внести відповідні виправлення та повторно подати роботу для остаточного затвердження. Завершальним етапом є захист роботи, під час якого студент має продемонструвати розуміння виконаних розрахунків та вміння обґрунтувати отримані результати.

Оформлення результатів роботи здійснюється у вигляді пояснювальної записки, що має відповідати встановленим вимогам (див. нижче). У записці кожне завдання повинно містити:

- стислий теоретичний огляд: постановку задачі, необхідні формули, умовні позначення;

- покроковий опис розв'язання із зазначенням використаних методів, формул;
- результати обчислень у вигляді таблиць, графіків, рисунків тощо;
- за потреби – скріншоти з програмних продуктів;
- аналіз отриманих результатів;
- висновки щодо кожного завдання.

У випадку створення програм, розроблених студентом для виконання обчислень, вихідний код слід надати у додатку із зазначенням призначення й авторства програми, а також з короткими поясненнями щодо його призначення та функціонування.

Пояснювальна записка має включати такі структурні елементи:

- ✓ Титульний аркуш (див. Додаток Г).
- ✓ Завдання на розрахункову роботу (загальні та індивідуальні).
- ✓ Зміст (Додаток Д).
- ✓ Вступ.
- ✓ Розв'язання задачі кореляційного аналізу:
 - короткі теоретичні відомості (постановка задачі, розрахункові формули);
 - опис послідовності виконання задачі, розрахунки, графіки;
 - висновки.
- ✓ Розв'язання задач наближення функцій:
 - короткі теоретичні відомості (постановка задачі, розрахункові формули);
 - знаходження загального вигляду та коефіцієнтів поліноміальних апроксимуючих залежностей (опис послідовності виконання задачі, розрахунки, графіки);
 - Знаходження коефіцієнтів емпіричної залежності (опис послідовності виконання задачі, розрахунки, графіки);
 - висновки: порівняння результатів апроксимації.
- ✓ Список фактично використаних інформаційних джерел.
- ✓ Додатки (за необхідності).

Обсяг пояснювальної записки розрахункової роботи – орієнтовно 20-25 сторінок, при чому вона повинна повністю висвітлювати всі зазначені вище складові. Викладення матеріалу має бути послідовним і зрозумілим.

Розв’язок задач РР необхідно розташовувати в послідовності згідно завдання. Текст основної частини пояснювальної записки ділять на розділи, підрозділи, пункти (див. Додаток Д). Розв’язок задач слід супроводжувати детальними поясненнями.

Розрахунки, що виконуються в середовищі MS Excel, мають бути наведені також у режимі представлення формул.

Розділи роботи починають з нової сторінки, вони повинні мати порядкову нумерацію в межах всієї роботи і позначатися арабськими цифрами з крапкою в кінці. Зміст, вступ, висновки та список використаних літературних джерел не нумеруються. Підрозділи не обов’язково мають починатися з нової сторінки; підрозділи нумерують арабськими цифрами в межах кожного розділу, наприклад: 2.3 (третій підрозділ другого розділу).

Ілюстрації (графіки, рисунки, схеми)

- Позначаються словом «Рис.», нумерація – послідовна в межах кожного розділу (наприклад, Рис. 1.3).
- Ілюстрації бажано розміщувати після першого посилання на них у тексті. Вони мають розташовуватись по центру сторінки.
- Назва і номер рисунка подаються під ним (по центру сторінки), наприклад:

Рис. 2.4 – Графік залежності температури від часу

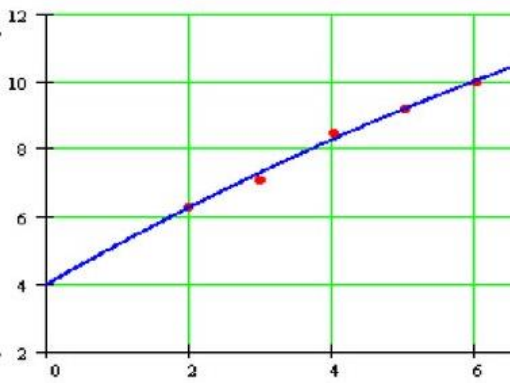
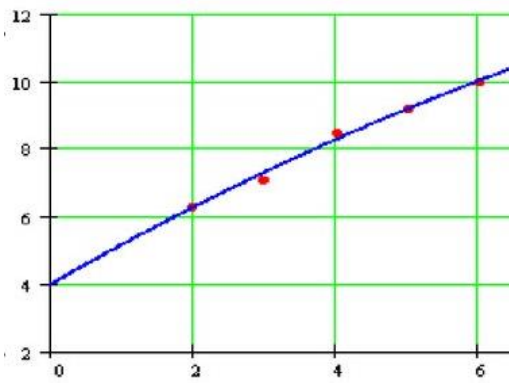
Таблиці

- Позначаються словом «Таблиця», нумерація аналогічна — за розділами, наприклад: Таблиця 3.2.,
- Назва таблиці розміщується над таблицею, наприклад:

Таблиця 3.2. Параметри розрахунку процесу

- Таблиці за можливістю подаються після першого згадування в тексті, але в межах однієї сторінки, якщо їх розмір це дозволяє.

У невеликих за обсягом документах (до 100 сторінок) не рекомендується включати до номера формули, таблиці, рисунку номери підрозділів. Наприклад:

 Рис. 2.3 – Результати апрокосимації	 Рис. 2.1.1.3 – Результати апрокосимації
Рекомендовано	Не рекомендовано

Формули.

Важливі для представлення результатів формули в пояснювальній записці нумерують арабськими цифрами в межах розділу. Номер формули складається з номера розділу і порядкового номера формули в розділі, розділених крапкою. Наприклад, (2.1) – перша формула другого розділу. Рівняння і формули слід виділяти з тексту вільними рядками.

Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів слід наводити безпосередньо під формулою в тій же послідовності, в якій вони дані у формулі. Перший рядок пояснення починають із слова «де» без двокрапки.

Приклад:

Обчислення зваженої похибки моделі машинного навчання здійснюється за формулою:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - \tilde{y}_i)^2, \quad (3.1)$$

де n – кількість спостережень; w_i – ваговий коефіцієнт для i -го прикладу; y_i – фактичне значення вихідної змінної; $\tilde{y}_i$ – прогнозоване значення моделі для i -го прикладу.

Текст обов'язково має містити посилання на використані літературні джерела інформації (включаючи електронні джерела), наведені в списку використаних джерел. Нумерація джерел у списку має відповідати порядку посилань на них в тексті записки. Такі посилання у тексті мають вигляд порядкового номера джерела зі списку джерел, виділеного квадратними дужками, наприклад, [7], [2, 5, 9].

Кожен додаток необхідно починати з нового аркуша. Додатки позначають послідовно літерами українського алфавіту (без знаку №), наприклад, Додаток А. Літери Г, Є, З, І, Й не використовують для позначення додатків.

Рисунки, таблиці та формули, що розміщуються в додатку, нумерують арабськими цифрами в межах кожного додатка, наприклад, Рис.А.1; Таблиця А.4 і т.д.

Деякі найпоширеніші зауваження щодо оформлення пояснювальної записки до РР:

- Відсутні обов'язкові структурні частини (зміст, список літератури тощо).
- Структурні частини роботи (розділи) набрані в підбір, а не починаються з нової сторінки.
- Розділи та підрозділи неправильно пронумеровані, найменування не відповідають змісту.
- Оформлення тексту не відповідає вимогам.
- Таблиці (малюнки, формули) у тексті неправильно оформлені, пронумеровані.

Разом з пояснювальною запискою мають бути надані викладачеві відповідні файли, зокрема:

- файли вихідних даних і результатів розрахунків тестових прикладів;
- файли, в яких були виконані розрахунки (MS Excel тощо);
- файли розробленого програмного продукту (за наявності);
- файл з текстом пояснювальної записки.

3. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

3.1.Проведення кореляційного та регресійного експериментальних даних

Дослідження статистичної залежності між величинами

Одним з найпоширеніших завдань статистичного дослідження є вивчення зв'язку (взаємного впливу) між кількома (у найпростішому випадку – двома) невідомими або маловідомими дослідникам явищами, ознаками, наприклад, між добовою кількістю викурених цигарок та захворюваністю на COVID-19¹, між інтенсивністю курсу курсу тренувань у військовому училищі та рівнем підготовки курсантів² тощо.

Основними завданнями при вивченні зв'язку (взаємного впливу) між явищами (величинами) є:

- 1) оцінювання ступеню залежності та тісноти зв'язку між величинами (кореляційний аналіз);
- 2) відшукування математичної формули, яка б відображала залежність між величинами (регресійний аналіз)

Застосовно до двох ознак, під час спостереження (експерименту) можна помітити, що зміна однієї ознаки перебуває у певному зв'язку із зміною іншої. Дві досліджувані ознаки (випадкові величини) можуть бути:

- пов'язані функціональною залежністю,
- пов'язані статистичною залежністю, або
- бути незалежними:

Іноді досліджувана **залежність виявляється “однозначною”**, тобто кожному значенню першої ознаки завжди відповідає цілком певне, єдине значення другої ознаки. Такі зв'язки між досліджуваними ознаками називають **функціональними**. Наприклад, площа трикутника точно

¹ https://www.pfizerprofi.ru/sites/default/files/analiz_chuvstvity_k_covid-19_u_kurilshchikov_apf2.pdf

² https://www.researchgate.net/figure/Pearson-correlation-coefficient-subgroup-analysis-of-Army-Physical-Fitness-Test-push-up_fig2_334557197

визначається його висотою і основою, довжина кола – радіусом, швидкість падіння є функцією часу падіння та прискорення сили тяжіння, швидкість перебігу певної хімічної реакції залежить від температури. Слід розуміти, що функціональні зв'язки між величинами зустрічаються "у чистому вигляді" лише в ідеальних умовах, коли передбачається, що жодних сторонніх впливів немає. Насправді це недосяжно. Так, строго кажучи, ніколи не можна точно виміряти фактично існуючий радіус кола (через похибки вимірювальних приладів, нерівностей паперу тощо). Вимірювана швидкість падіння тіла при багаторазовому вимірі в реальних умовах буде різна за одних і тих же часів і прискорення сили тяжкості внаслідок похибок вимірювання, зміни швидкості та напрямків повітряних потоків тощо. Таким чином, на практиці завжди діють сторонні для даної функціональної залежності фактори, які порушують абсолютність цієї залежності в різних випадках по-різному. Практично завжди при дослідженні невідомих (маловідомих) явищ (наприклад, застосування нової вакцини по відношенню до рівню захворюваності) потрібна насамперед інформація, чи пов'язані ці явища між собою, і якщо так – то наскільки тісно вони пов'язані.

Статистичною називають залежність, за якої кожному значенню однієї з величин відповідають можливі, ймовірні значення іншої (ряд розподілу); зі зміною однієї величини закономірно змінюються статистичні характеристики рядів розподілу іншої величини (положення рядів розподілу, розсіювання, міра асиметрії тощо).

Статистичну залежність називають **кореляційною**, якщо у разі зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої. Отже, кореляційна залежність – це окремий випадок статистичної залежності. Будь-яка кореляційна залежність є статистичною, але не кожна статистична залежність буде кореляційною.

Кореляційний аналіз

У контексті штучного інтелекту кореляційний аналіз відіграє важливу роль, наприклад, у таких задачах:

- аналіз важливості ознак (feature selection): змінні, що мають сильний кореляційний зв'язок із цільовою змінною, є кандидатами для включення в модель;
- виявлення мультиколінеарності;
- оцінка якості вхідних даних: перевірка логічності та узгодженості зв'язків між змінними перед навчанням моделі;
- зниження розмірності: вибір змінних із найвищою інформативністю.

Метою парного **кореляційного аналізу** є визначенні ступеню зв'язку між двома явищами – виборками значень випадкових величин X і Y , а також (іноді) встановлення форми кореляційного зв'язку (лінійна, квадратична і т.д.).

Припустимо, відомо, що величини X і Y зв'язані **лінійною кореляційною залежністю**. Нехай також дослідні дані, отримані для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y такі, що кожному значенню X відповідає кілька значень Y (наприклад, при $X = x$ величина Y набула значень $y_1, y_2, \dots, y_k$) і навпаки, кожному значенню Y відповідає кілька значень X .

Наявність (чи відсутність) зв'язку між величинами X та Y , а також силу (тісноту) зв'язку найчастіше характеризують **коефіцієнтом кореляції Пірсона** r_{xy} , що являє собою відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

При цьому, **кореляційним моментом** K_{xy} ("моментом зв'язку", чи коваріацією $\text{cov}\{X, Y\}$, (cov_{xy})) випадкових величин X и Y називають математичне очікування добутку центрованих величин:

$$K_{xy} = M \left[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y} \right] = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

Для характеристики сили **лінійного** кореляційного зв'язку між величинами X і Y за дослідними даними вибіровий коефіцієнт кореляції знаходимо за виразом:

$$r_b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{n s_x s_y},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$; s_x, s_y – вибірові середні квадратичні відхилення:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

Для практичного використання більш зручними є формули:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i; \quad (3.1)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}; \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]};$$

Отже, коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина (причому $|r_{xy}| \leq 1$), яку використовують для оцінки тісноти тільки лінійного зв'язку між величинами X і Y .

Для **незалежних** величин кореляційний момент (а отже, і коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю. Такі величини називають **некорельованими**. **Корельованими** називаються величини, кореляційний момент яких (а значить, і коефіцієнт кореляції) відмінний від нуля.

Коефіцієнт кореляції змінюється від -1 до 1 (якщо при розрахунку коефіцієнта кореляції виходить величина більша +1 або менша -1, це значить, що коефіцієнт кореляції розраховано невірно).

Знак коефіцієнта кореляції дуже важливий для інтерпретації отриманого зв'язку. Якщо знак коефіцієнта лінійної кореляції – плюс, то зв'язок між корелюючими ознаками такий, що більшій величині однієї ознаки (змінної) відповідає велика величина іншої ознаки (іншої змінної). Тобто,

якщо один показник (змінна) збільшується, то відповідно збільшується й інший показник (змінна). Така залежність зветься **прямо пропорційною** (прямою, позитивною) залежністю. Якщо ж отриманий знак мінус, то більшій величині однієї ознаки відповідає менша величина іншої. Інакше кажучи, за наявності знаку мінус, збільшення однієї змінної (ознака, значення) відповідає зменшенню іншої змінної. Така залежність носить назву **обернено пропорційної** (зворотньої, негативної) залежності.

При значенні коефіцієнту кореляції $r_{xy} = 0$ залежності між двома досліджуваними величинами немає. Якщо за результатами кореляційного аналізу зв'язок між певними ознаками (явищами) визнано за близький (або функціональний), можна продовжувати дослідження – будувати математичну модель – формулу (функцію, рівняння), яка зв'язує досліджувані явища.

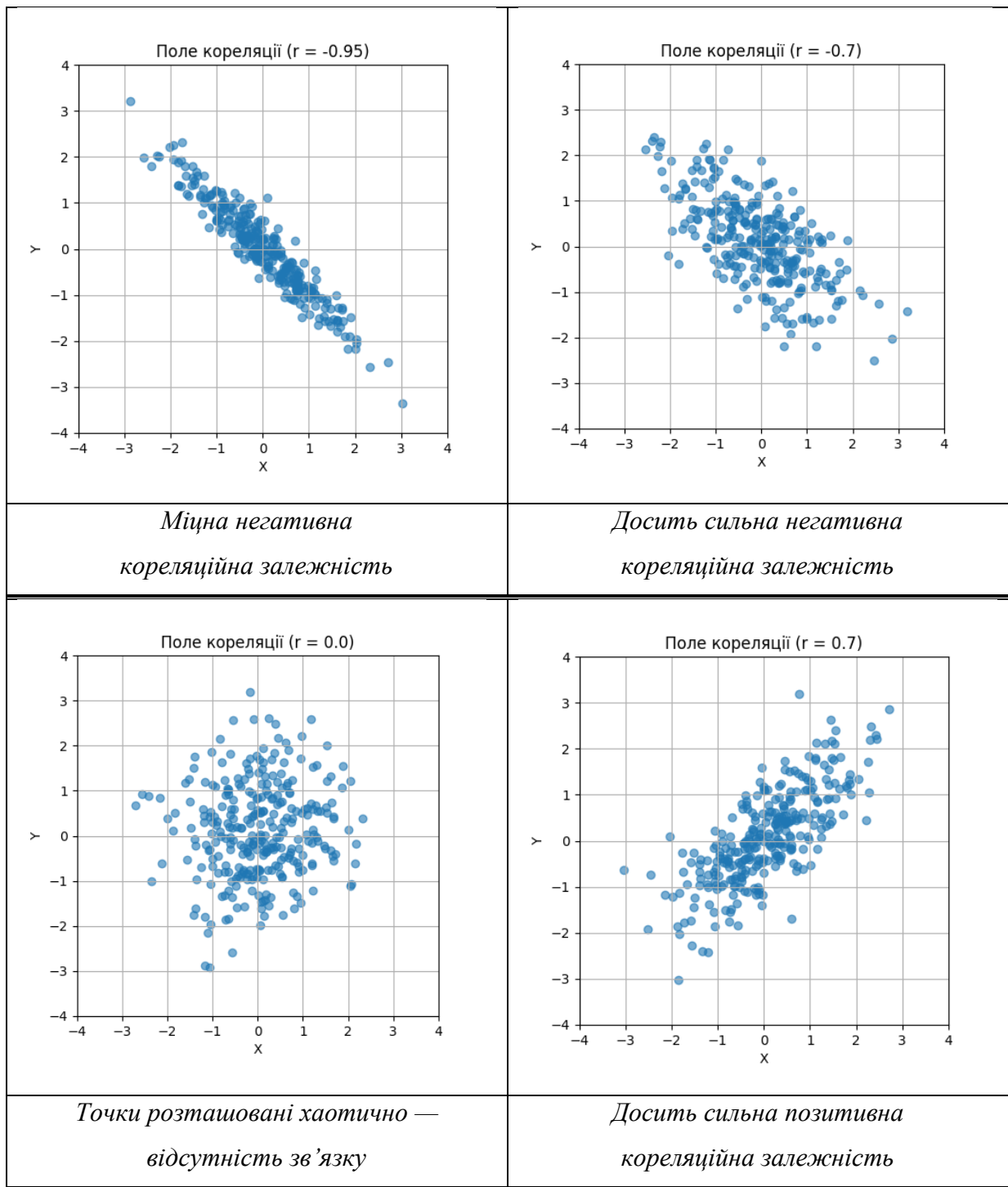
Тіснота зв'язку та величина коефіцієнта кореляції.

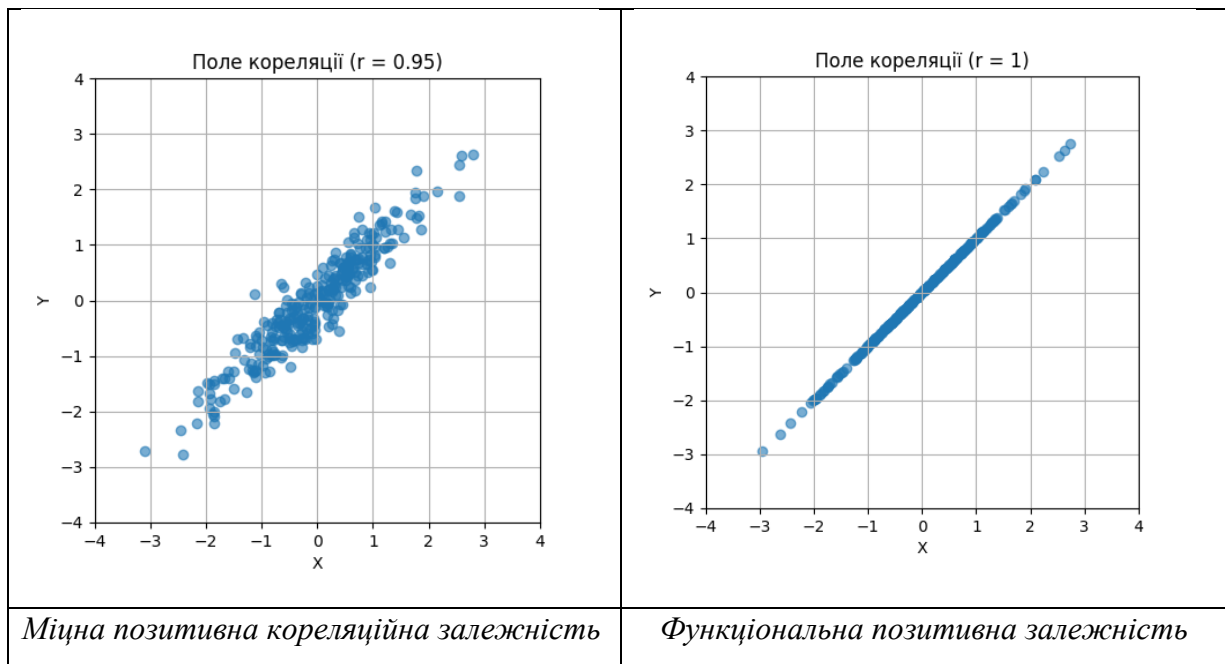
Коефіцієнт кореляції r_{xy}	Тіснота зв'язку
$\pm 0,91-1,0$	Дуже міцний (функціональний)
$\pm 0,81-0,9$	Досить сильний
$\pm 0,65-0,8$	Сильний
$\pm 0,45-0,64$	Помірний
$\pm 0,25-0,44$	Слабкий
До $\pm 0,25$	Дуже слабкий

Примітки:

1. У таблиці пряма залежність (збільшення однієї змінної супроводжується збільшенням іншої) позначена «+»; зворотна залежність (коли збільшення однієї змінної супроводжується зменшенням іншої) – «-»
2. Кореляція не завжди означає наявність причинного зв'язку. Наприклад, дві змінні можуть бути пов'язані через третю приховану змінну.

Про наявність або відсутність кореляції між величинами X і Y можна в першому наближенні судити також за виглядом **поля кореляції** – зображення у вигляді точок усіх отриманих з дослідів пар значень випадкових величин.





Алгоритм проведення кореляційного аналізу

I. Підготовка даних:

- перевірка на пропущені значення;
- виявлення та обробка викидів;
- нормалізація (за потреби).

II. Візуалізація – побудова діаграми розсіювання (scatter plot) — для первинної оцінки залежності.

III. Розрахунок коефіцієнтів: застосування формули Пірсона (або інших формул, залежно від типу даних: наприклад, коефіцієнта рангової кореляції Спірмена, коли дані не мають нормального розподілу або містять викиди).

IV. Оцінка статистичної значущості результатів.

V. Інтерпретація результатів

- аналіз сили та напрямку знайденого зв'язку;
- виявлення потенційних залежностей для побудови моделей машинного навчання (наприклад, у задачах нейромережевої регресії чи класифікації).

Регресійний аналіз

У прикладних задачах штучного інтелекту, таких як машинне навчання, аналіз даних, робототехніка чи прогнозування, важливо мати інструменти для побудови залежності між змінними у вигляді певної функції (найчастіше – алгебраїчного виразу). Один із ефективних класичних підходів для цього – **регресійний аналіз**. Це метод дослідження статистичної залежності між змінними, який дозволяє моделювати і кількісно описувати вплив однієї або кількох незалежних змінних на залежну змінну. Регресійний аналіз можна розглядати **як частковий випадок наближення функцій** (див. нижче).

Нехай дослідні дані, отримані для вивчення залежності між величинами X і Y , такі, що кожному значенню X відповідає кілька значень Y . Наприклад, при $X = x$ величина Y прийняла значення $y_1, y_2, \dots, y_k$. Знайдемо середнє арифметичне цих значень і позначимо його $\bar{y}_x$. Тоді

$$\bar{y}_x = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k}$$

називається **умовною середньою**.

Необхідно за експериментальними даними знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y .

Використовуючи поняття умовної середньої, кореляційну залежність Y від X можна визначити як функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x :

$$\bar{y}_x = f(x). \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) називають **рівнянням регресії Y на X** (або Y по X); функцію $f(x)$ – регресією Y на X (Y по X), а її графік – лінією регресії Y на X (Y по X).

Функціональну залежність умовної середньої $\bar{x}_y$ від y називають кореляційною залежністю X від Y :

$$\bar{x}_y = \varphi(y). \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) називають **рівнянням регресії X на Y (X по Y)**; функцію $\varphi(y)$ – регресією X на Y (X по Y).

Припустимо, що відомий (наприклад, з аналізу поля кореляції) факт, що величини X і Y зв'язані лінійною кореляційною залежністю (тобто очікується, обидві лінії регресії прямі). Потрібно по дослідним даним знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли в результаті незалежних дослідів була отримана сукупність n пар чисел: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ (кожна пара чисел спостерігалася тільки один раз). Тоді шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X буде мати вигляд:

$$Y = \rho_{yx}x + b \quad (3.4)$$

де ρ_{yx} – вибірковий коефіцієнт регресії Y на X . Рівняння (3.4) називають вибірковим рівнянням прямої лінії регресії Y на X . Будемо знаходити параметри ρ_{yx} і b рівняння (3.4), ґрунтуючись на методі найменших квадратів, тобто такими, щоб сума квадратів відхилень дослідних значень y_i від значень Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), обчислених по рівнянню (3.4), була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \min$$

Система нормальних рівнянь для визначення ρ_{yx} і b має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rho_{yx} + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \rho_{yx} + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Вирішивши цю систему, знайдемо шукані параметри:

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (3.6)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (3.7)$$

Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$X = \rho_{yx} y + c,$$

де ρ_{yx} – вибірковий коефіцієнт регресії X на Y .

В залежності від наявних даних, можливі наступні випадки проведення кореляційного і регресійного аналізів.

I. Випадок незгрупованих даних. В найпростішому випадку в результаті незалежних n дослідів була отримана сукупність пар чисел $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

II. Випадок згрупованих даних. Це – більш загальний випадок, коли в n незалежних дослідах одне і те саме значення x спостерігалось n_x разів, значення y – n_y , пара чисел (x, y) – n_{xy} разів. Такі дані **грукують**, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy} і подають у вигляді таблиці, яку називають кореляційною.

Приклад 3.1. Групування даних та кореляційний-регресійний аналіз³.

У n незалежних дослідах ($n = 16$) були отримані такі дані, що стосуються прогнозування рівня мікрозабруднення води на основі просторово-часових параметрів за допомогою моделі машинного навчання. У межах моніторингу водних ресурсів під час військового конфлікту розробляється інтелектуальна

³ Алгоритмізація інженерних розрахунків : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. М. Шахновський, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангінова, О. О. Квітка. –Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 133 с.

система, яка прогнозує ступінь забруднення (Y) на основі гідрологічного або географічного індексу (X):

X	15	15	15	15	16	16	16	16
Y	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,12
X	17	17	17	17	18	18	18	18
Y	1,13	1,12	1,13	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14

Позначення у таблиці: X – умовний код/індекс ділянки або дня моніторингу (може репрезентувати час, координати, або індекс знімку/сенсора). Y – індекс забруднення води, отриманий шляхом лабораторного аналізу або зображень зі супутника/дрону. Кінцева задача дослідження – побудувати модель для передбачення рівню забруднення Y на нових ділянках (або в нові дні), базуючись на попередніх значеннях X .

Представити ці дані у вигляді кореляційної таблиці. Розрахувати коефіцієнт лінійної кореляції.

Розв'язок. Для визначення коефіцієнту кореляції вбудованими засобами MS Excel скористаємося функцією CORREL (у поширеній на користувацьких комп'ютерах локалізації MS Excel можливе ім'я цієї функції – КОРРЕЛ).

A4		✕ ✓ f_x		=CORREL(B1:Q1;B2:Q2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	N	O	P	Q	
1	X:	15	15	15	15	16	16	16	18	18	18	18	
2	Y:	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14	
3	$r_B =$												
4	0,868481485												

Для розрахунку коефіцієнтів вибірових ліній регресії Y на X та X на Y можна скористатися функцією LINEST (у поширеній на користувацьких комп'ютерах локалізації MS Excel можливе ім'я цієї функції – ЛИНЕЙН). Дана функція належить до так званих функцій опрацювання масивів. **Формула масиву** є формулою, результатом виконання якої є (як правило) не одна клітинка, а діапазон.

Увага! У версіях MS Excel, що вийшли після жовтня 2018 року,

введення (або редагування) формули масиву закінчується не натисканням клавіші Enter, а натисканням комбінації клавіш Ctrl+Shift+ Enter.

Для отримання коефіцієнтів лінії регресії слід:

1. Виділити дві вільні клітинки.
2. Увести формулу $=\text{LINEST}(B2:Q2;B1:Q1)$; у поширеній на користувацьких комп'ютерах локалізації MS Excel можливий запис цієї функції $=\text{ЛИНЕЙН}(B2:Q2;B1:Q1)$.

3. Натиснути Enter (у старших версіях MS Excel – натиснути Ctrl+Shift+ Enter).

C6				fx		=LINEST(B2:Q2;B1:Q1)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	N	O	P	Q	
1	X:	15	15	15	15	16	16	16	18	18	18	18	
2	Y:	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14	
3	$r_B =$												
4	0,868481485												
5	$y = mx + b$		m =	b =									
6			0,0072	1,0048									

Виконаємо групування даних для побудови кореляційної таблиці. На перетині рядків і стовпців (табл. 3.1) знаходяться частоти n_{xy} . Наприклад, частота 3, що знаходиться на перетині першого рядка і першого стовпця, вказує, що пара чисел (15; 1.11) спостерігалася в 16 дослідах три рази.

Таблиця 3.1. Кореляційна таблиця

Значення y_i	Значення x_i				
	15	16	17	18	n_y
1,11	3				3
1,12	1	3	1		5
1,13		1	3	2	6
1,14				2	2
n_x	4	4	4	4	$n = 16$

В останньому стовпці табл. 3.1 записані суми частот рядків, що вказують, скільки разів спостерігалось значення y_i , випадкової величини Y при різних значеннях випадкової величиний X . В останньому рядку записані суми частот стовпців, що вказують, скільки разів значення x_i величини X спостерігалось при різних значеннях величини Y .

У нижньому правому куті записана сума всіх частот (загальна кількість проведених дослідів n). Очевидно, $\sum n_x = \sum n_y = n$.

У даному прикладі $\sum n_x = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$ і $\sum n_y = 3 + 5 + 6 + 2 = 16$.

Примітка. Групувати статистичні дані можна із допомогою надбудови MS Excel «Аналіз даних».

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X , отримане за згрупованими даними, буде мати вигляд:

$$\overline{y}_x = \rho_{yx} x + b \quad (3.8)$$

(тут вже використовуємо поняття умовної середньої $\overline{y}_x$).

З огляду на те, що мають місце рівності

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n};$$

звідки

$$\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x}n; \quad \sum_{i=1}^n y_i = \overline{y}n; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = n\overline{x^2},$$

а також те, що кожна пара чисел (x, y) спостерігалася в n дослідях n_{xy} разів (тобто $\sum xy = \sum n_{xy} xy$), формули (3.6) і (3.7) для визначення ρ_{yx} і b можемо записати у вигляді

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}; \quad b = \frac{n\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\sum n_{xy} xy}{n(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}$$

Оскільки $\overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sigma_x^2$, то

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$

Помножимо обі частини цієї рівності на дріб $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\rho_{xy} \sigma_x / \sigma_y = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$$

Таким чином, отримали вираз для вибіркового коефіцієнта кореляції

$$r_B = \frac{\sum n_{xy} xy - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (3.9)$$

і формулу, що зв'язує вибіркового коефіцієнт регресії Y на X – ρ_{yx} і вибіркового коефіцієнт кореляції r_B :

$$\rho_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_B \quad (3.10)$$

чи

$$\rho_{yx} = r_B * \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (3.11)$$

Перетворимо рівняння (3.9) до вигляду, найбільше часто використовуюваного на практиці. З цією метою в друге рівняння системи (3.11) замість $\sum_{i=1}^n x_i$ підставимо $n \bar{x}$, а замість $\sum_{i=1}^n y_i - n \bar{y}$, після чого розділимо обидві частини рівняння на n і знайдемо b :

$$b = \bar{y} - \bar{x} \rho_{yx}$$

Підставивши праву частину цієї рівності в (3.9) замість b , отримаємо

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} \bar{x} + \bar{y} - \bar{x} \rho_{yx}$$

чи

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} (\bar{x} - \bar{x})$$

Скориставшись рівністю (3.11), остаточно одержимо вибіркоче рівняння прямої лінії регресії Y на X у вигляді (3.12). Аналогічно можна знайти вибіркоче рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$\overline{y_x} - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}); \quad \overline{x_y} - \bar{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}). \quad (3.12)$$

Приклад 3.2. Кореляційний та регресійний аналіз у випадку згрупованих даних.

Досліджувалася концентрація ропи у природніх випарювальних басейнах І та ІІ для концентрування морської води⁴. Через низку об’єктивних причин (різний профіль дна та обриси берегів басейнів тощо) концентрації Х та Y ропи відповідно у басейнах І та ІІ відмінні між собою, проте певним чином пов’язані. Потрібно оцінити міцність лінійного кореляційного зв'язку та провести регресійний аналіз – знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y. Задано згруповані дані у вигляді контингентної таблиці (перехресної частотної таблиці), де наведено результати спостережень, протягом яких було виконано 389 одночасних замірів концентрацій ропи (загальний солевміст, г/л) у обох басейнах.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1				X	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340
2					-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3					60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320
4	Y																	
5	80	-	100		1	2		1										
6	100	-	120		1		3	2	2		1							
7	120	-	140			1	3	4	2	1								
8	140	-	160				2		10	4	3							
9	160	-	180					1	5	16	7	4		1				
10	180	-	200						2	12	28	17	6	2				
11	200	-	220						1	8	24	43	15	2				
12	220	-	240								4	18	36	14	3			
13	240	-	260								1	3	11	15	7	2		
14	260	-	280										1	4	13	6	1	1
15	280	-	300												2	4	1	
16	300	-	320													1	2	2
17																		

⁴ Алгоритмізація інженерних розрахунків : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. М. Шахновський, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангінова, О. О. Квітка. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 133 с.

Розв'язок: Знайдемо рівняння регресії. Спочатку обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції r_6 . Розрахунки виконані у середовищі MS Excel (див. табл.3.2).

Примітка: Нижче використано імена формул у поширеній локалізації MS Excel. Відповідність між цією локалізацією і українськими (англійськими) іменами функцій наступна: **СУММ** – **SUM**; **ЕСЛИ** – **IF**; **КОРЕНЬ** – **SQRT**; **СУММПРОИЗВ**–**SUMPRODUCT**.

За значення y_j , величини Y візьмемо середини інтервалів: $y_1 = 90$ (середина інтервалу 80-100), $y_2 = 110$ і т.д. Аналогічно визначатимемо значення x_i , величини X : $x_1 = 70$ і т.д.

Щоб спростити обчислення, перейдемо від початкових варіант x_i та y_j ($i = 1, \dots, 12$; $j = 1, \dots, 14$) до умовних варіант u та v :

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де h_1, h_2 – інтервали: $h_1 = 20$ ($h_1 = x_{i+1} - x_i$), $h_2 = 20$ ($h_2 = y_{j+1} - y_j$).

Примітка. При розрахунках взято однакове значення інтервалу $\Delta = h_1 = h_2 = 20$. У якості $A = C_1$ візьмемо варіанту $x = 190$, а як $B = C_2$ візьмемо варіанту $y = 210$.

Елементи рядку $n_x u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків n_x і u ; елементи стовпця $n_y v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців n_y і v ; аналогічно знаходяться усі елементи $n_x u^2$ та $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (тобто n_{xy}), котрі знаходяться у відповідному рядку кореляційної таблиці на відповідні елементи рядка u .

У рядку t кожен елемент дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (тобто n_{xy}), які знаходяться у відповідному стовпці кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v .

Таблиця 3.2. Обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції

▲	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y				
1				X	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	$\Delta=$		20								
2					-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$B=$		210							
3					60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	n_y	Y	v	$n_y v$	$n_y v^2$	q	qv				
4	Y																		389										
5	80	-	100		1	2		1												4	90	-6	-24	144	-19	114			
6	100	-	120		1		3	2	2		1									9	110	-5	-45	225	-28	140			
7	120	-	140			1	3	4	2	1										11	130	-4	-44	176	-34	136			
8	140	-	160				2		10	4	3									19	150	-3	-57	171	-32	96			
9	160	-	180					1	5	16	7	4		1						34	170	-2	-68	136	-22	44			
10	180	-	200						2	12	28	17	6	2						67	190	-1	-67	67	19	-19			
11	200	-	220						1	8	24	43	15	2						93	210	0	0	0	69	0			
12	220	-	240								4	18	36	14	3					75	230	1	75	75	144	144			
13	240	-	260								1	3	11	15	7	2				39	250	2	78	156	108	216			
14	260	-	280										1	4	13	6	1	1	26	270	3	78	234	109	327				
15	280	-	300											2	4	1		7	290	4	28	112	34	136					
16	300	-	320													1	2	2	5	310	5	25	125	31	155				
17		n_x		389	2	3	8	8	22	41	68	85	69	38	25	13	4	3	389				-21	1621		1489			
18	A=	X			70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	OK	OK									
19	190	u			-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7			-0,0540	2,0406	40,81						
20		$n_x u$			-12	-15	-32	-24	-44	-41	0	85	138	114	100	65	24	21	379		0,9743	2,166	43,33						
21		$n_x u^2$			72	75	128	72	88	41	0	85	276	342	400	325	144	147	2195			0,8777							
22		t			-11	-16	-33	-34	-60	-60	-50	-1	55	52	64	43	17	13											
23		tu			66	80	132	102	120	60	0	-1	110	156	256	215	102	91	1489										

Таблиця 3.2 у режимі представлення формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1				X	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340
2																		
3					60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320
4	Y																	
5	80	-	100		1	2		1										
6	100	-	120		1		3	2	2		1							
7	120	-	140			1	3	4	2	1								
8	140	-	160				2		10	4	3							
9	160	-	180					1	5	16	7	4		1				
10	180	-	200						2	12	28	17	6	2				
11	200	-	220						1	8	24	43	15	2				
12	220	-	240								4	18	36	14	3			
13	240	-	260								1	3	11	15	7	2		
14	260	-	280										1	4	13	6	1	1
15	280	-	300												2	4	1	
16	300	-	320													1	2	2
17			n_x	=СУММ(E17:R17)	=СУММ(E5:E16)	=СУММ(F5:F16)	=СУММ(G5:G16)	=СУММ(H5:H16)	=СУММ(I5:I16)	=СУММ(J5:J16)	=СУММ(K5:K16)	=СУММ(L5:L16)	=СУММ(M5:M16)	=СУММ(N5:N16)	=СУММ(O5:O16)	=СУММ(P5:P16)	=СУММ(Q5:Q16)	=СУММ(R5:R16)
18	A=	X			=(E3+E1)/2	=(F3+F1)/2	=(G3+G1)/2	=(H3+H1)/2	=(I3+I1)/2	=(J3+J1)/2	=(K3+K1)/2	=(L3+L1)/2	=(M3+M1)/2	=(N3+N1)/2	=(O3+O1)/2	=(P3+P1)/2	=(Q3+Q1)/2	=(R3+R1)/2
19	190	u			=(E18-\$A\$19)/\$U\$1	=(F18-\$A\$19)/\$U\$1	=(G18-\$A\$19)/\$U\$1	=(H18-\$A\$19)/\$U\$1	=(I18-\$A\$19)/\$U\$1	=(J18-\$A\$19)/\$U\$1	=(K18-\$A\$19)/\$U\$1	=(L18-\$A\$19)/\$U\$1	=(M18-\$A\$19)/\$U\$1	=(N18-\$A\$19)/\$U\$1	=(O18-\$A\$19)/\$U\$1	=(P18-\$A\$19)/\$U\$1	=(Q18-\$A\$19)/\$U\$1	=(R18-\$A\$19)/\$U\$1
20		$n_x u$			=E17*E19	=F17*F19	=G17*G19	=H17*H19	=I17*I19	=J17*J19	=K17*K19	=L17*L19	=M17*M19	=N17*N19	=O17*O19	=P17*P19	=Q17*Q19	=R17*R19
21		$n_x u^2$			=E17*E19^2	=F17*F19^2	=G17*G19^2	=H17*H19^2	=I17*I19^2	=J17*J19^2	=K17*K19^2	=L17*L19^2	=M17*M19^2	=N17*N19^2	=O17*O19^2	=P17*P19^2	=Q17*Q19^2	=R17*R19^2
22		t			=СУММПРОИЗВ(E5:E16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(F5:F16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(G5:G16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(H5:H16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(I5:I16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(J5:J16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(K5:K16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(L5:L16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(M5:M16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(N5:N16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(O5:O16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(P5:P16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(Q5:Q16;\$U5:\$U16)	=СУММПРОИЗВ(R5:R16;\$U5:\$U16)
23		tu			=E19*E22	=F19*F22	=G19*G22	=H19*H22	=I19*I22	=J19*J22	=K19*K22	=L19*L22	=M19*M22	=N19*N22	=O19*O22	=P19*P22	=Q19*Q22	=R19*R22

Продовження Таблиці 3.2

	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	340		$\Delta =$	20				
2			$B =$	210				
3	320	n_y	γ	ν	$n_y \nu$	$n_y \nu^2$	q	$q \nu$
4		=CYMM(S5:S16)						
5		=CYMM(E5:R5)	= $(A5+C5)/2$	= $(T5-\$U\$2)/\$U\1	= $S5*U5$	= $S5*U5^2$	=CYMMПРОИЗВ(E5:R5;E\$19:R\$19)	= $U5*X5$
6		=CYMM(E6:R6)	= $(A6+C6)/2$	= $(T6-\$U\$2)/\$U\1	= $S6*U6$	= $S6*U6^2$	=CYMMПРОИЗВ(E6:R6;E\$19:R\$19)	= $U6*X6$
7		=CYMM(E7:R7)	= $(A7+C7)/2$	= $(T7-\$U\$2)/\$U\1	= $S7*U7$	= $S7*U7^2$	=CYMMПРОИЗВ(E7:R7;E\$19:R\$19)	= $U7*X7$
8		=CYMM(E8:R8)	= $(A8+C8)/2$	= $(T8-\$U\$2)/\$U\1	= $S8*U8$	= $S8*U8^2$	=CYMMПРОИЗВ(E8:R8;E\$19:R\$19)	= $U8*X8$
9		=CYMM(E9:R9)	= $(A9+C9)/2$	= $(T9-\$U\$2)/\$U\1	= $S9*U9$	= $S9*U9^2$	=CYMMПРОИЗВ(E9:R9;E\$19:R\$19)	= $U9*X9$
10		=CYMM(E10:R10)	= $(A10+C10)/2$	= $(T10-\$U\$2)/\$U\1	= $S10*U10$	= $S10*U10^2$	=CYMMПРОИЗВ(E10:R10;E\$19:R\$19)	= $U10*X10$
11		=CYMM(E11:R11)	= $(A11+C11)/2$	= $(T11-\$U\$2)/\$U\1	= $S11*U11$	= $S11*U11^2$	=CYMMПРОИЗВ(E11:R11;E\$19:R\$19)	= $U11*X11$
12		=CYMM(E12:R12)	= $(A12+C12)/2$	= $(T12-\$U\$2)/\$U\1	= $S12*U12$	= $S12*U12^2$	=CYMMПРОИЗВ(E12:R12;E\$19:R\$19)	= $U12*X12$
13		=CYMM(E13:R13)	= $(A13+C13)/2$	= $(T13-\$U\$2)/\$U\1	= $S13*U13$	= $S13*U13^2$	=CYMMПРОИЗВ(E13:R13;E\$19:R\$19)	= $U13*X13$
14	1	=CYMM(E14:R14)	= $(A14+C14)/2$	= $(T14-\$U\$2)/\$U\1	= $S14*U14$	= $S14*U14^2$	=CYMMПРОИЗВ(E14:R14;E\$19:R\$19)	= $U14*X14$
15		=CYMM(E15:R15)	= $(A15+C15)/2$	= $(T15-\$U\$2)/\$U\1	= $S15*U15$	= $S15*U15^2$	=CYMMПРОИЗВ(E15:R15;E\$19:R\$19)	= $U15*X15$
16	2	=CYMM(E16:R16)	= $(A16+C16)/2$	= $(T16-\$U\$2)/\$U\1	= $S16*U16$	= $S16*U16^2$	=CYMMПРОИЗВ(E16:R16;E\$19:R\$19)	= $U16*X16$
17		=CYMM(S5:S16)			=CYMM(V5:V16)	=CYMM(W5:W16)		=CYMM(Y5:Y16)
18	=R3+R1	=ЕСЛИ(S4=D17;"ОК";"Не	=ЕСЛИ(S23=Y17;"ОК";"Н					
19	=R18-\$			=SV\$17/\$S\$17	=КОЕФНЬ(SW\$17/\$S\$17-U19^2)	=SV\$19*\$U\$1		
20	=R17*R	=CYMM(E20:R20)		=S\$20/\$S\$17	=КОЕФНЬ(S\$21/\$S\$17-U20^2)	=SV\$20*\$U\$1		
21	=R17*R	=CYMM(E21:R21)			=(\$Y\$17/\$S\$17-\$U\$19*\$U\$20)/(\$V\$19*\$V\$20)			
22	=CYMM							
23	=R19*R	=CYMM(E23:R23)						

В останньому стовпці qv кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовбців q і v , а в останньому рядку tu кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t і u . Рівність сум $\Sigma qv = \Sigma tu = 1489$ використовують для контролю правильності обчислень.

Далі послідовно знаходимо:

$$\bar{u} = \frac{\Sigma n_x u}{n} = \frac{-21}{389} = -0,0540 \quad \bar{v} = \frac{\Sigma n_y v}{n} = \frac{379}{389} = 0,9743,$$

де $\bar{u}$, $\bar{v}$ – середні умовних варіант.

Середні квадратичні відхилення умовних варіант:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\Sigma n_x u^2}{\Sigma n_x} - (\bar{u})^2} = \sqrt{\frac{1621}{389} - (-0,0540)^2} = 2,041;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\Sigma n_y v^2}{\Sigma n_y} - (\bar{v})^2} = \sqrt{\frac{2195}{389} - (0,9743)^2} = 2,166.$$

З урахуванням того, що $\Sigma qv = \Sigma tu = \Sigma n_{uv}uv = 1489$, знаходимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_B = \frac{\frac{1489}{389} - (0,9743) \cdot (-0,0540)}{2,166 \cdot 2,035} = 0,8777.$$

Значення вибіркового коефіцієнту $r_B = 0,8777$ вказує, що зв'язок між випадковими величинами досить сильний.

Тепер для визначення коефіцієнтів рівнянь регресії знаходимо наступні величини:

- середні значення:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0,9743 \cdot 20 + 190 = 209,486;$$

$$\bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = (-0,0540) \cdot 20 + 210 = 208,92;$$

- середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_x = \sigma_u h_1 = 2,041 \cdot 20 = 40,82;$$

$$\sigma_y = \sigma_v h_2 = 2,166 \cdot 20 = 43,33.$$

Підставивши знайдені величини в рівняння (3.12) знайдемо рівняння лінії регресії Y на X :

$$y_x = 0,829 \cdot x + 35,21$$

Аналогічно можна знайти рівняння лінії регресії X на Y , якщо скористатись рівнянням (3.12).

Порівняємо умовні середні розраховані за рівнянням регресії з даними кореляційної таблиці:

Таблиця 3.3. Порівняння даних

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
26																			
27			i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
28			x_i		70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	
29			$y_{i \text{ розр}}$		93,2	109,82	126,40	142,98	159,56	176,14	192,72	209,30	225,88	242,46	259,04	275,62	292,20	308,78	
30			$y_{i \text{ табл}}$		100,00	103,33	127,50	125,00	155,45	180,73	195,29	209,76	225,94	237,37	261,20	276,15	295,00	296,67	$\Sigma(y_{i \text{ розр}} - y_{i \text{ табл}})^2 / n$
31			$(y_{i \text{ розр}} - y_{i \text{ табл}})^2$		45,70	42,08	1,21	323,28	16,85	21,08	6,63	0,22	0,00	25,92	4,67	0,28	7,84	146,73	45,89

У режимі представлення даних:

	A	B	C	D	E	F	G	R	S
26									
27			i		1	2	3	14	
28			x_i		=E18	=F18	=G18	=R18	
29			$y_{i \text{ розр}}$		=0,829*E28+35,21	=0,829*F28+35,21	=0,829*G28+35,21	=0,829*R28+35,21	
30			$y_{i \text{ табл}}$		=СУММПРОИЗВ(E5:E16;\$T\$5:\$T\$16)/E17	=СУММПРОИЗВ(F5:F16;\$T\$5:\$T\$16)/F17	=СУММПРОИЗВ(G5:G16;\$T\$5:\$T\$16)/G17	=СУММПРОИЗВ(R5:R16;\$T\$5:\$T\$16)/R17	$\Sigma(y_{i \text{ розр}} - y_{i \text{ табл}})^2 / n$
31			$(y_{i \text{ розр}} - y_{i \text{ табл}})^2$		=(E29-E30)^2	=(F29-F30)^2	=(G29-G30)^2	=(R29-R30)^2	=СУММ(E31:R31)/14
32									

Графік вибіркової лінії регресії Y по X наведено на рис. 3.1 (експериментальні табличні дані позначено не сполученими між собою маркерами (точками), розрахункову лінію – позначено суцільною лінією).

Аналізуючи дані, що наведені в табл. 3.3 та на рис. 3.1, можна побачити, що умовні середні відрізняються незначно. Графік лінії регресії проходить близько до експериментальних точок. Різниця розрахункових і табличних даних (середньоквадратичне відхилення) є суттєво меншим за найменше значення y_i , що вказує на достатню точність розрахунків за знайденим рівнянням регресії Y на X .

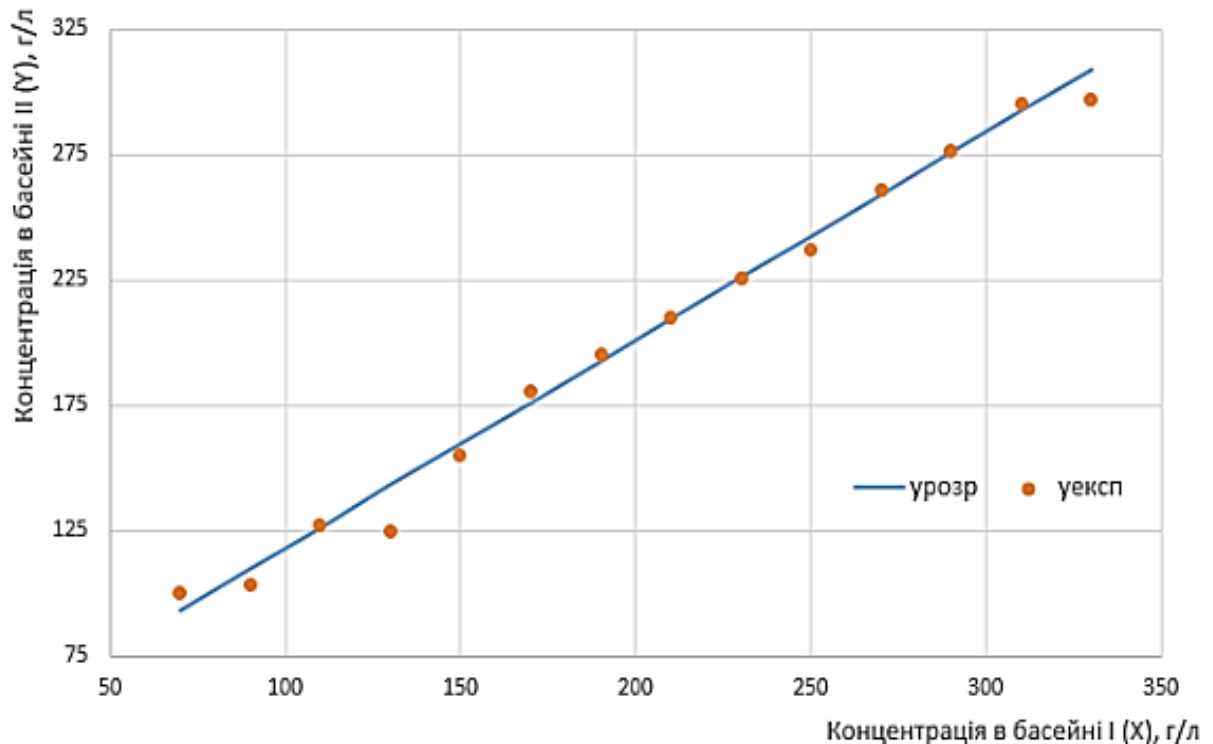


Рис.3.1 – Графік вибіркової лінії регресії Y по X .

Приклад 3.3. Кореляційний та регресійний аналіз у випадку незгрупованих даних.

Прогнозування когнітивного навантаження оператора безпілотного літального апарату на основі біофізичних параметрів. У процесі дослідження ефективності операторів дронів в умовах підвищеного навантаження (наприклад, в зоні бойових дій), досліджується залежність між: X – біофізичним параметром (наприклад, частотою серцебиття, індексом варіабельності серцевого ритму, чи електропровідністю шкіри), та Y – рівнем когнітивного навантаження, визначеним за допомогою нейропсихологічних тестів або ЕЕГ-аналізу (в балах). Кінцевою метою дослідження є навчити модель прогнозувати когнітивне навантаження (Y) за значенням фізіологічного індикатора (X), щоби попереджати перевантаження оператора, адаптувати інтерфейс управління дронами до стану людини, перерозподіляти задачі між людським оператором і автономною системою задля підвищення безпеки та ефективності роботи операторів БПЛА.

На підставі виконаних протягом певного часу вимірювань складено кореляційну таблицю (табл. 3.4)⁵.

Розв'язок.

Розбіб'ємо представлені в таблиці 3.4 значення варіант на інтервали. Перша величина (X) представлена своїми варіантами, які можуть бути згруповані за інтервалами: 72 – 76, 76 – 80, 80 – 84, 84 – 88, 88 – 92, 92 – 96, 96 – 100. Друга величина (Y) представлена своїми варіантами, які можуть бути згруповані за інтервалами: 5–7, 7–9, 9–11, 11–13, 13–15, 15–17, 17–19.

Таблиця 3.4. Кореляційна таблиця (незгруповані дані)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	5,50	5,56	7,88	5,58	7,77	11,94	11,72	8,41	7,60	8,31	9,87	10,16
Y	75,59	73,97	72,23	79,39	77,97	76,86	78,34	80,92	81,62	83,61	81,76	81,99
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	12,04	12,27	12,43	12,26	9,85	10,10	10,36	12,21	12,25	12,14	11,67	11,66
Y	82,14	81,90	82,03	82,02	85,79	85,62	86,35	85,87	86,02	85,87	85,80	86,32
№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
X	11,74	11,81	12,35	13,54	13,80	13,54	13,58	13,68	10,41	10,25	12,07	11,96
Y	86,31	86,10	86,09	85,68	85,81	86,13	85,56	85,89	91,03	88,63	89,67	89,66
№	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
X	12,25	12,50	11,75	11,82	13,69	14,33	14,13	13,54	13,88	14,42	15,84	17,76
Y	90,39	89,51	90,41	90,34	90,18	89,80	89,85	89,77	93,50	93,53	92,90	94,22
№	49	50	51	52	53							
X	17,95	17,82	16,42	15,84	17,68							
Y	95,46	93,78	98,35	96,28	99,47							

Дослідити тісноту лінійного зв'язку, знайти вибіркові рівняння прямої лінії регресії Y на X та X на Y .

Підрахуємо кількість пар варіант, що потрапляють до обраних інтервалів (частоти), і представимо вихідні дані у вигляді перехресної частотної кореляційної таблиці (табл. 3.5).

У табл. 3.5 підраховано також сумарні частоти n_x , n_y для кожного з інтервалів розбиття.

⁵ Алгоритмізація інженерних розрахунків : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. М. Шахновський, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангінова, О. О. Квітка. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 133 с.

Таблиця 3.5. Кореляційна таблиця (згруповані дані)

$Y \backslash X$	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	n_y
72–76	2	1						3
76–80	1	1		2				4
80–84		3	2	4				9
84–88			3	8	5			16
88–92			2	6	4			12
92–96					2	1	3	6
96–100						2	1	3
n_x	3	5	7	20	11	3	4	53

Виконаємо подальші розрахунки. Результати запишемо в дві допоміжні таблиці, які розташовані праворуч і знизу від заданої кореляційної таблиці («права» і «нижня» таблиці) – таблиця 3.6.

Усереднимо значення варіант за інтервалами. За значення y_i , величини Y візьмемо середини інтервалів: $y_1 = 74$ (середина інтервалу 72-76). $y_2 = 78$ (середина інтервалу 76-80) і т. д. Запишемо ці значення в стовпець y правій таблиці (табл. 3.6).

Таблиця 3.6. Кореляційна і допоміжні таблиці («права» та «нижня»)

$Y \backslash X$	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	n_y	y	v	$n_y \cdot v$	$n_y v^2$	q	$q \cdot v$
72 - 76	2	1						3	74	-3	-9	27	-8	24
76 - 80	1	1		2				4	78	-2	-8	16	-5	10
80 - 84		3	2	4				9	82	-1	-9	9	-8	8
84 - 88			3	8	5			16	86	0	0	0	2	0
88 - 92			2	6	4			12	90	1	12	12	2	2
92 - 96					2	1	3	6	94	2	12	24	13	26
96 - 100						2	1	3	98	3	9	27	7	21
n_x	3	5	7	20	11	3	4	53			7	115		91
x	6	8	10	12	14	16	18							
u	-3	-2	-1	0	1	2	3							
$n_x \cdot u$	-9	-10	-7	0	11	6	12	3		$\bar{u} =$	$\bar{v} =$	$\sigma_u =$	$\sigma_v =$	$r_B =$
$n_x u^2$	27	20	7	0	11	12	36	113		0,0566	0,13208	1,45907	1,46709	0,79862
t	-8	-8	0	-2	8	8	9			$\bar{x} =$	$\bar{y} =$	$\sigma_x =$	$\sigma_y =$	
$t \cdot u$	24	16	0	0	8	16	27	91		12,1132	86,5283	2,91813	5,86838	
										$a_x =$	$b_x =$	$a_y =$	$b_y =$	
										1,60602	67,0742	0,39712	-22,2491	

Аналогічно визначатимемо значення x_i , величини X : $x_1 = 6$; $x_2 = 8$; $x_3 = 10$ і т. д. та запишемо їх у рядок x нижньої таблиці 3.6.

Перейдемо від первісних варіант x_i і y_j ($i = 1, 2, \dots, 7$, $j = 1, 2, \dots, 7$) до умовних варіант:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де $h_1 = x_{i+1} - x_i = 7 - 5 = 2$ ($i = 1, 2, \dots, 6$); $h_2 = y_{j+1} - y_j = 76 - 72 = 4$ ($j = 1, 2, \dots, 6$).

У якості C_1 візьмемо варіанту $x = 12$, що є модою – значенням x при найбільшій частоті – $n_x = 20$ (тобто $C_1 = 12$), а як C_2 візьмемо варіанту $y = 86$, що є значенням y при найбільшій частоті – $n_y = 16$ (тобто $C_2 = 86$). Знайдені у такий спосіб умовні варіанти u_i і v_j запишемо відповідно в рядок u нижньої таблиці й у стовпець v правої таблиці (табл. 3.6).

Елементи рядку $n_x \cdot u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків n_x і u ; елементи стовпця $n_y \cdot v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців n_y і v ; аналогічно знаходяться усі елементи $n_x u^2$ та $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (тобто n_{xy}), котрі знаходяться у відповідному рядку кореляційної таблиці на відповідні елементи рядка u . Наприклад, $q = -8$ (перший рядок) знайдено в такий спосіб: $2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) = -8$; $q = -5$ (другий рядок) знайдено в такий спосіб: $1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (0) = -5$; $q = -8$ (третій рядок) знайдено в такий спосіб: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (0) = -8$ і т.д.

У рядку t (табл. 3.6) кожен елемент дорівнює сумі добутків частот n_{uv} (тобто n_{xy}), які знаходяться у відповідному стовпці кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v . Наприклад, $t = -8$ (перший стовпець) знайдено в такий спосіб: $2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) = -8$; $t = -8$ (другий стовпець) знайдено в такий спосіб: $1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -8$; $t = 0$ (третій стовпець) знайдено в такий спосіб: $2 \cdot (-1) + 3 \cdot (0) + 2 \cdot (1) = 0$ і т.д.

В останньому стовпці qv кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовбців q і v , а в останньому рядку tu кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t і u . Рівність сум $\sum qv = \sum tu = \sum n_{uv}uv = 91$ використовують для контролю правильності обчислень.

Далі послідовно знаходимо:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_x u}{n} = \frac{3}{53} \quad \bar{v} = \frac{\sum n_y v}{n} = \frac{7}{53},$$

$$\bar{u} = 0,0566; \bar{v} = 0,13208.$$

де $\bar{u}$, $\bar{v}$ - середні умовних варіант.

Середні квадратичні відхилення умовних варіант:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum n_x u^2}{\sum n_x} - (\bar{u})^2}; \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{\sum n_y v^2}{\sum n_y} - (\bar{v})^2}$$

$$\sigma_u = 1,45907; \sigma_v = 1,46709.$$

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона r_B . Із урахуванням того, що $\sum qv = \sum tu = \sum n_{uv}uv = 91$, вибірковий коефіцієнт кореляції розраховуємо за виразом:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{91 - 53 \cdot 0,057 \cdot 0,13}{53 \cdot 1,46 \cdot 1,47}.$$

$$r_B = 0,79862 \approx 0,8$$

Значення вибіркового коефіцієнту $r_B = 0,79862$ вказує на досить сильний зв'язок між випадковими величинами.

Тепер знаходимо наступні величини:

- середні умовні значення:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0,057 \cdot 2 + 12 \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = 0,13 \cdot 4 + 86$$

$$\bar{x} = 12,1132; \bar{y} = 86,5283$$

- середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_X = \sigma_u h_1 = 1,46 \cdot 2 = 2,9181;$$

$$\sigma_Y = \sigma_Y h_2 = 1,47 \cdot 4 = 5,8684;$$

$$\begin{aligned} \text{Згідно (12) отримуємо: } a_{YX} &= 0,79862 \cdot 5,8684 / 2,9181 = 1,606; \\ b_{YX} &= 0,79862 \cdot 5,8684 / 2,9181 \cdot (-12,1132) + 86,5283 = 67,0742 \end{aligned}$$

Отже, рівняння лінії регресії Y на X :

$$y_x = 1,606 \cdot X + 67,0742.$$

Лінійна регресія Y на X (червона лінія на рис. 3.2) показує, як змінюється Y при зміні X . Дані добре наближуються прямою, що підтверджує сильну кореляцію.

Аналогічним чином визначаємо коефіцієнти вибіркової лінії регресії X на Y згідно (12):

$$a_{XY} = r_B \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,3971;$$

$$b_{XY} = -22,2491$$

$$x_y = 0,3971 \cdot Y - 22,2491.$$

Будуємо графік вибіркової лінії регресії X по Y (рис. 3.3).

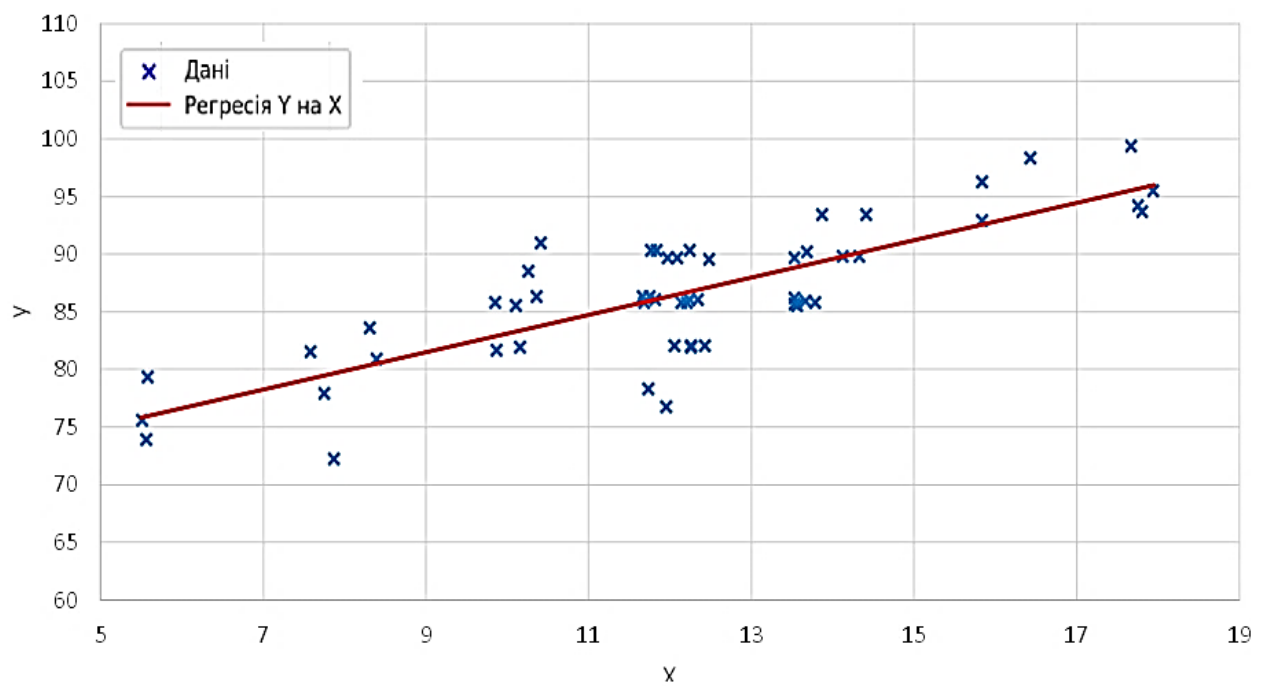
Лінійна регресія X на Y (помаранчева лінія на рис. 3.3) показує, як змінюється X при зміні Y .

Модель вибіркової регресії X на Y також демонструє узгодженість даних із лінійною залежністю і підтверджує сильний позитивний зв'язок.

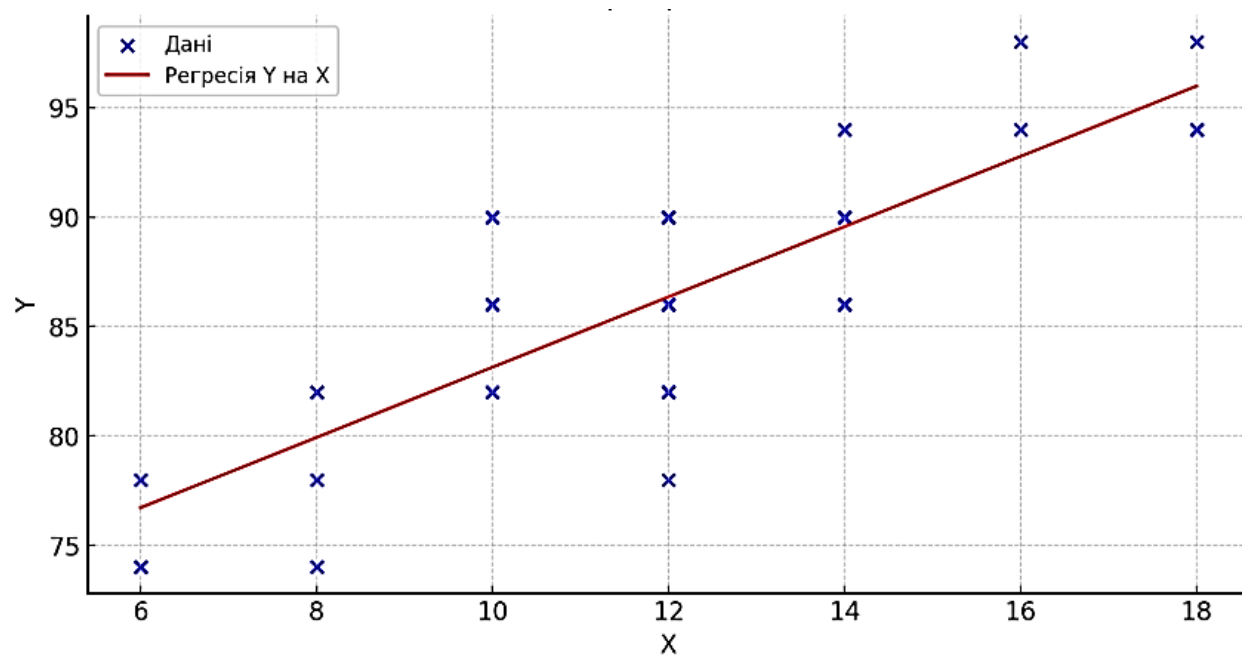
3.2. Використання методу вирівнювання та методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів апроксимуючої функції

Наближення функцій, апроксимація

Наближення функції – це процес знаходження простої функції, яка найкраще описує задану функцію або експериментальні дані за певним критерієм якості, з метою полегшення розрахунків, моделювання або прогнозування.



а)



б)

Рис.3.2 – Графік вибіркової лінії регресії Y по X:

а) – незгруповані дані; б) – згруповані дані

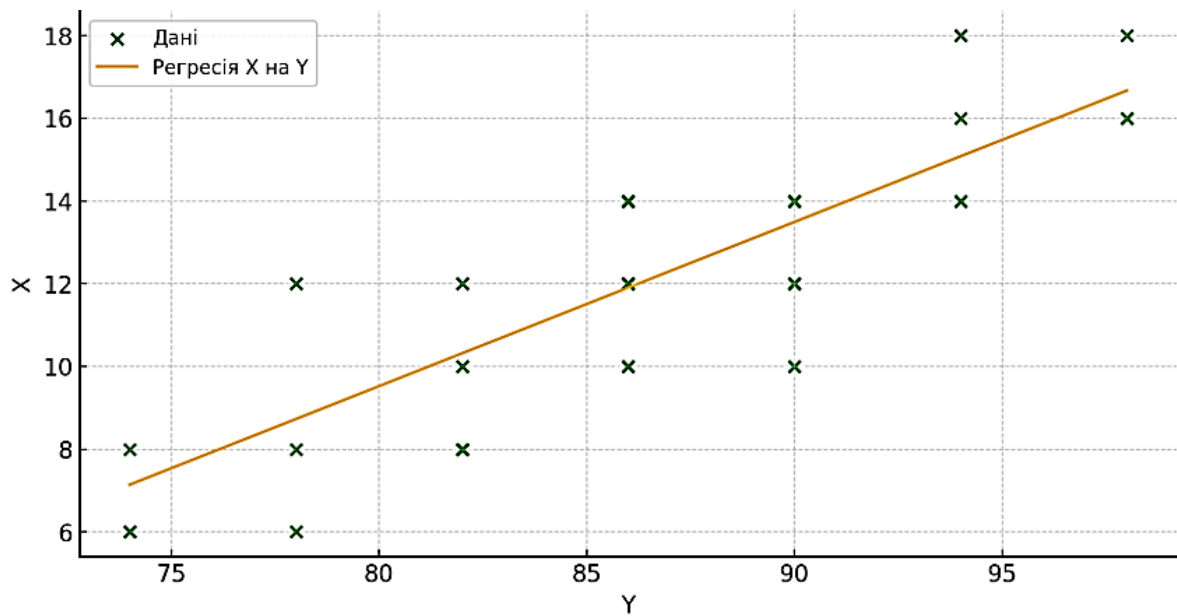


Рис.3.3 – Графік вибіркової лінії регресії X по Y

Задача про наближення функції ставиться наступним чином.

Нехай наявні значення деякої величини y для заданих значень величини x представлені у вигляді таблиці.

x	x_1	x_2	...		x_n
y	y_1	y_2	...		y_n

Задану функцію $f(x)$ потрібно замінити певною більш простою («типовою») функцією $\phi(x)$. Часто в якості наближуючої функції беруть узагальнений поліном n -го порядку:

$$\phi(x) = p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x) \quad (3.13)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_m$ – сталі коефіцієнти; $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ – задана на деякій множині система досить гладких (наприклад, неперервно диференційованих) функцій. Вказана система функцій має бути задана так, щоб відхилення (у певному сенсі) $f(x)$ від $P_m(x)$ на вказаній множині X було найменшим.

Поліном $P_m(x)$ у загальному випадку називають апроксимуючим.

Для практики дуже важливим є частковий випадок, коли система функцій $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ є послідовністю цілих невід’ємних степенів змінної x ,

тобто

$$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x; \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad \varphi_m(x) = x^m$$

і, отже, $P_m(x)$ є звичайним поліномом степеня m :

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (3.14)$$

При цьому, степінь m полінома (3.14) є значно меншою від кількості точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ (рис. 3.4, а).

У залежності від того, що розуміють під відхиленням двох функцій, одержують різні типи задач теорії наближень:

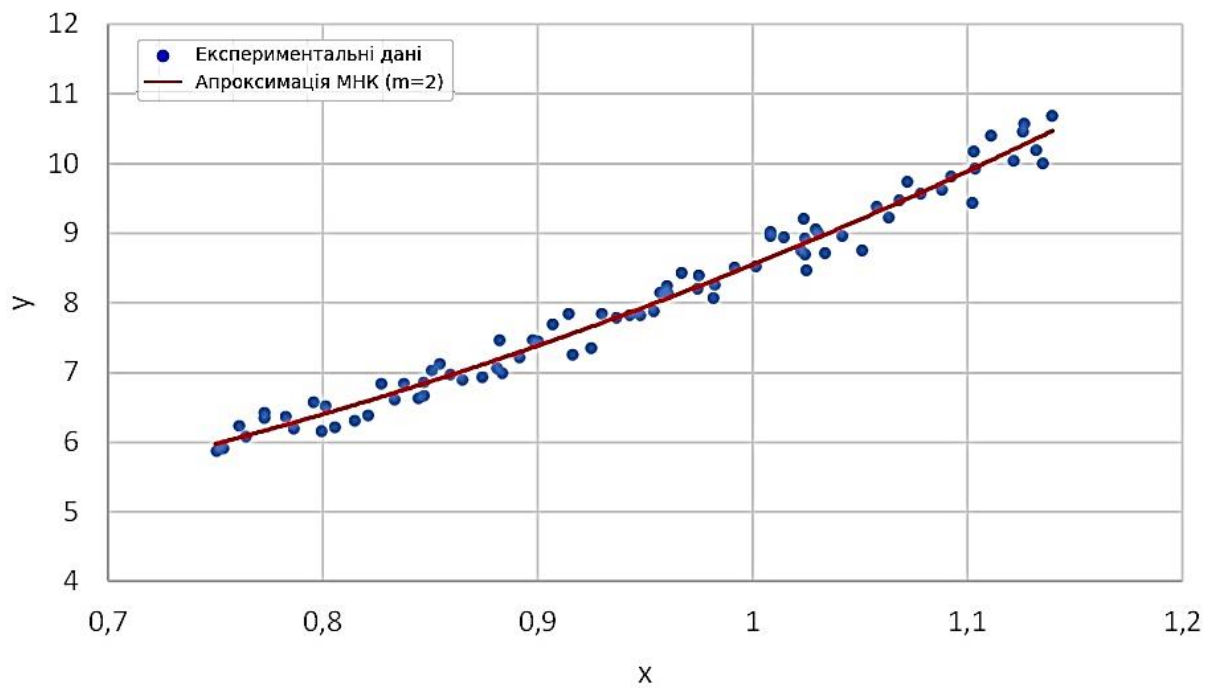
- інтерполяція – спеціальний випадок наближення, коли функція проходить точно через усі задані точки (наприклад, інтерполяція за Лагранжем, сплайнове згладжування);
- апроксимація у середньому – функція описує дані так, щоб мінімізувати середню помилку (наприклад, за методом найменших квадратів – МНК);
- інші методи наближення.

Задачі наближення функцій забезпечують:

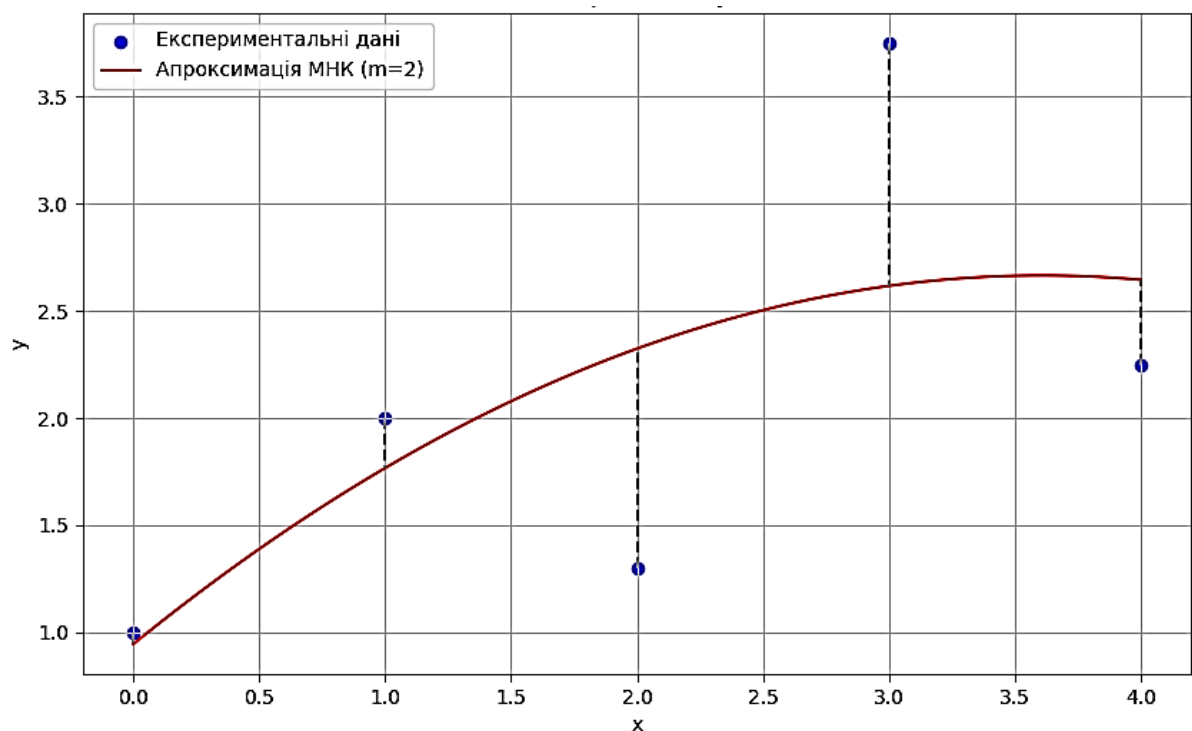
- полегшення обчислень; наприклад, складну функцію замінюють на поліном, щоб швидко розрахувати значення в потрібній точці;
- узагальнення результатів: якщо є табличні дані, апроксимація допомагає отримати аналітичний вираз залежності;
- моделювання: для опису фізичних або економічних процесів, коли точна форма залежності невідома.

Функціональні (наприклад, апроксимуючі) залежності доцільно будувати між тими величинами, які демонструють **тісний (функціональний) кореляційний зв'язок**.

На основі вихідних даних як правило доводиться вирішувати такі різновиди задач апроксимації:



а)



б)

Рис.3.4 – Принцип апроксимації за МНК

- I. Знаходження коефіцієнтів залежності y від x за умови, що формула, яка виражає цю залежність, відома. Наприклад, у випадку лінійної залежності, необхідно знайти параметри a і b для апроксимуючого поліному першого порядку $y = ax + b$.

II. Підбір виду апроксимуючої формули, яка найкращим чином описує залежність між величинами y і x , (характер цієї залежності заздалегідь невідомий), із подальшим визначенням коефіцієнтів апроксимуючої формули.

Отже, побудова апроксимуючої формули в загальному випадку ділиться на два етапи:

- 1) вибір загального вигляду емпіричної формули;
- 2) визначення її параметрів, наприклад, за методом найменших квадратів (МНК). МНК дозволяє знаходити апроксимуючу функцію, яка найкращим чином узгоджується з експериментальними (або навчальними) даними в сенсі мінімізації суми квадратів відхилень. Якщо функція апроксимації нелінійна не поліноміальна, застосовується метод вирівнювання (лінеаризації).

У сфері штучного інтелекту апроксимація використовується, зокрема:

- для навчання моделей регресії, включно з багатовимірною регресією;
- при створенні предиктивних моделей, де потрібно прогнозувати значення на основі вхідних даних;
- на етапі препроцесінгу, для згладжування шумових даних;
- для оцінки параметрів у фізичних або економічних моделях, що використовуються у гібридних ШІ-системах;
- у глибинному навчанні, наприклад, для навчання простих моделей перед остаточним тренуванням нейромереж.

Визначення коефіцієнтів апроксимуючого поліному за МНК

Процес побудови наближуючого (апроксимуючого) для даної функції $f(x)$ багаточлена (3.14) називається точковою квадратичною апроксимацією.

В якості критерію методу найменших квадратів беруть суму квадратів відхилень апроксимуючої залежності від вихідних значень (рис. 3.4, б):

Нормальна система для визначення a_0 і a_1 буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n [a_1 x_i + a_0 - y_i] \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n [a_1 x_i + a_0 - y_i] \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Зробивши найпростіші перетворення, отримаємо

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (3.17)$$

Знайдені внаслідок розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.17) значення коефіцієнтів a_0 і a_1 підставляємо у вираз (3.14) і, таким чином, одержуємо конкретний вигляд апроксимуючого багаточлена $P_1(x)$.

Приклад 3.4. Лінійна апроксимація за МНК

У системі обробки зображень на основі ШІ (наприклад, класифікації фото або сегментації), обчислювальне навантаження на процесор залежить від розміру вхідного зображення (у пікселях або кілобайтах). На основі експериментальних вимірювань було зібрано дані про середнє навантаження на CPU (y %) при обробці зображень різного розміру:

Розмір зображення X , КБ	300	400	500	600	700	800	900	1000
Навантаження CPU Y , %	70,35	75,38	80,53	85,81	91,26	96,83	102,53	108,27

Апроксимувати ці дані поліномом першого порядку і оцінити похибку апроксимації.

Розв'язок. Щоб не оперувати з великими числами, виконуємо нормуюче перетворення – вводимо як аргумент $x = \frac{X-300}{100}$. Функцію

навантаження CPU Y позначимо як y . Для обчислення коефіцієнтів нормальної системи (3.17) складемо таблицю:

i	X_i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	300	0	70,35	0	0
2	400	1	75,38	1	75,38
3	500	2	80,53	4	161,06
4	600	3	85,81	9	257,43
5	700	4	91,26	16	365,04
6	800	5	96,83	25	484,15
7	900	6	102,53	36	615,18
8	1000	7	108,27	49	757,89
Суми		28	710,96	140	2716,13

Тепер запишемо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8a_0 + 28a_1 = 710,96, \\ 28a_0 + 140a_1 = 2716,13. \end{cases}$$

Знайдемо a_0 і a_1 :

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 710,96 & 28 \\ 2716,13 & 140 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 28 \\ 28 & 140 \end{vmatrix}} = 69,89 ; \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 710,96 \\ 28 & 2716,13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 28 \\ 28 & 140 \end{vmatrix}} = 5,42.$$

Отже, шуканий апроксимуючий багаточлен має вигляд

$$y = 69,89 + 5,42x.$$

Повертаючись до вихідних позначень, остаточно отримаємо

$$Y = 69,89 + 5,42 \cdot \frac{X-300}{100},$$

або після найпростіших перетворень:

$$Y = 53,62 + 5,42 \cdot 10^{-2} X.$$

Примітка. Рекомендуємо самостійно впевнитися, що остаточні значення коефіцієнтів поліному можна отримати також без введення нормуючого перетворення $x = \frac{X-300}{100}$.

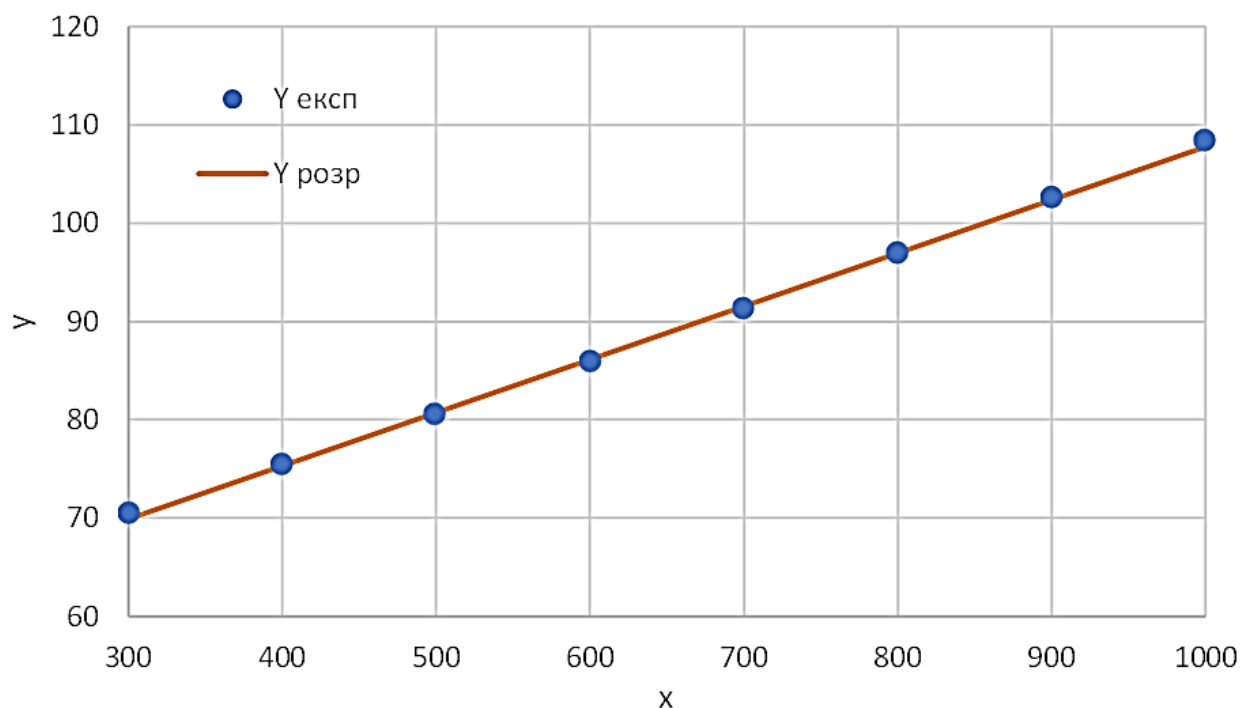


Рис.3.5 – Співставлення лінійної апроксимуючої залежності з вихідними даними.

Квадратична апроксимація за МНК

Нелінійну залежність y від x на практиці часто апроксимують поліномом другого степеня

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

де a_0, a_1, a_2 — коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Критерій МНК в цьому випадку буде мати вигляд

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2.$$

Запишемо нормальну систему для визначення a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Після перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (3.18)$$

Вирішивши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.18) і підставивши знайдені коефіцієнти a_0, a_1, a_2 у (3.14), отримаємо конкретний вигляд апроксимуючого поліному.

Приклад 3.5. Квадратична апроксимація за МНК

Прогноз обсягу оперативної пам'яті, яку споживає нейронна мережа в залежності від кількості її шарів. При побудові нейронних мереж кількість шарів x прямо впливає на споживання ресурсів системи, зокрема оперативної пам'яті (RAM). Проведено серію експериментів і виміряно фактичне споживання пам'яті при різній глибині мережі.

Кількість шарів (x)	1,4	2,2	3,0	3,8	4,6	5,4	6,2	7,0
RAM-споживання (y), МБ	3,135	9,155	19,05	33,39	52,44	76,70	105,5	141,8

Розв'язок. Оберемо в якості апроксимуючого поліному параболу:

$$y_p = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Відповідно до МНК, для обчислення коефіцієнтів апроксимуючої параболі необхідно розв'язати систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Для розрахунку коефіцієнтів нормальної системи рівнянь складаємо таблицю:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1,4	3,135	1,96	2,744	3,842	4,39	6,14
2	2,2	9,155	4,84	10,648	23,426	20,14	44,31
3	3,0	19,05	9,0	27,0	81,0	57,15	171,45
4	3,8	33,39	14,44	54,872	208,51	126,88	482,15
5	4,6	52,44	21,16	97,336	447,75	241,22	1109,63
6	5,4	76,70	29,16	157,46	850,30	414,18	2236,57
7	6,2	105,5	38,44	238,33	1477,63	654,10	4055,42
8	7,0	141,8	49,0	343,0	2401,0	992,60	6948,20
Сума	33,6	441,17	168,0	931,39	5493,46	2510,67	15053,88

Таким чином, нормальна система рівнянь за МНК має вид:

$$\begin{cases} 8a_0 + 33,6a_1 + 168a_2 = 441,17 \\ 33,6a_0 + 168a_1 + 931,39a_2 = 2510,67 \\ 168a_0 + 931,39a_1 + 5493,46a_2 = 15053,88 \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи можна застосувати будь який метод. Наприклад, – метод з використанням оберненої матриці (розрахунок виконано в пакеті MathCAD):

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 33.6 & 168 \\ 33.6 & 168 & 931.392 \\ 168 & 931.392 & 5493.4656 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 441.17 \\ 2510.666 \\ 15053.8788 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.7446 & -1.8994 & 0.2075 \\ -1.8994 & 1.0626 & -0.1221 \\ 0.2075 & -0.1221 & 0.0145 \end{pmatrix} \quad X := A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 7.1975 \\ -7.7801 \\ 3.8393 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 33.6 & 168 \\ 33.6 & 168 & 931.392 \\ 168 & 931.392 & 5493.47 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 441.17 \\ 2510.7 \\ 15053.9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 7.1338 \\ -7.7445 \\ 3.8352 \end{pmatrix}$$

Таким чином, апроксимуючий поліном другого степеня має вигляд:

$$y_p = P_2(x) = 7,1975 - 7,7801x + 3,8393x^2$$

Перевірка якості отриманого апроксимуючого поліному перевіряється стандартним способом.

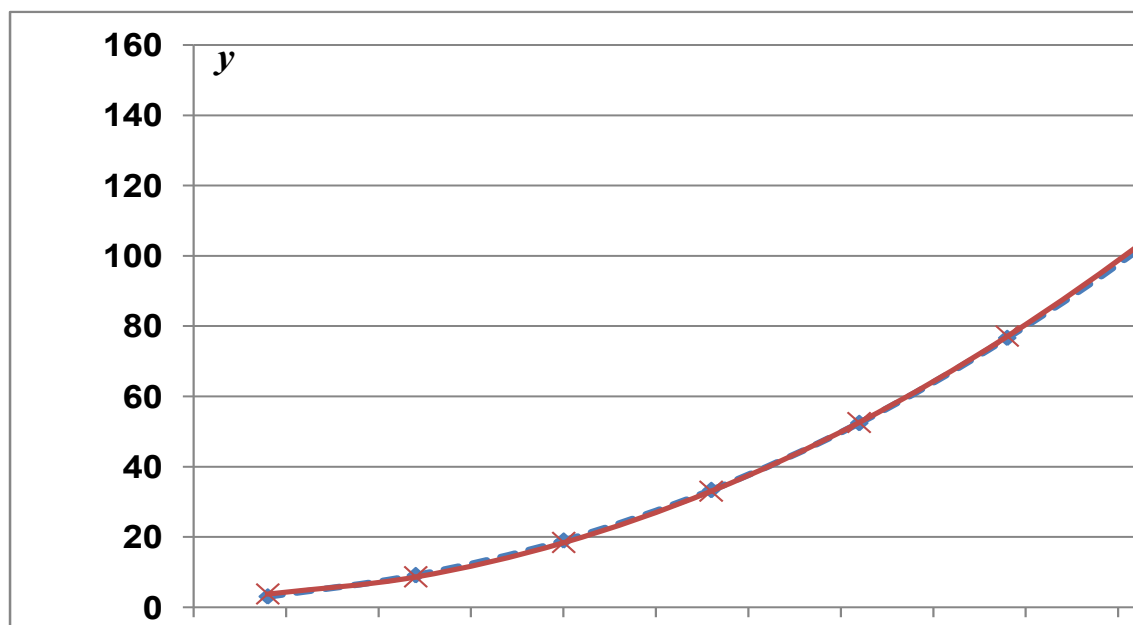


Рис.3.6 – Порівняння експериментальних (y_i) та розрахованих ($P_2(x_i)$) значень

Порівняння експериментальних та розрахованих значень:

I	x	y	$P_2(x)$	$ y-P_2(x) $	$(y-P_2(x))^2$
1	1,4	3,135	3,830	0,6954	0,4836
2	2,2	9,155	8,664	-0,4915	0,2416
3	3,0	19,05	18,411	-0,6391	0,4085
4	3,8	33,39	33,073	-0,3174	0,1008
5	4,6	52,44	52,649	0,2085	0,0435
6	5,4	76,70	77,139	0,4387	0,1925
7	6,2	105,5	106,54	1,0433	1,0884
8	7,0	141,8	140,86	-0,9379	0,8797
Сума:					3,4385

Середньоквадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{p_i})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon^2}{7}} = \sqrt{\frac{3,4385}{7}} \approx 0,7$$

Примітка. Якщо похибка апроксимації або характер апроксимуючої функції є неприйнятними, слід скористатись поліномами більших степенів, поступово їх збільшуючи. Наприклад, для даної залежності продуктивності фільтру від тиску апроксимуючі поліноми третього та четвертого степенів мають вигляд:

$$y = 0,3438 - 1,2361x + 2,0849x^2 + 0,1392x^3$$

$$y = 4,074 - 6,1037x + 4,1734x^2 - 0,22x^3 + 0,0214x^4,$$

і, відповідно, мають середньоквадратичні відхилення $\sigma = 0,24$ та $\sigma = 0,2$, тобто, суттєво менші, ніж у полінома другого степеня.

Апроксимація за МНК у вигляді не поліноміальної функції: лінеаризація даних

Хоча найчастіше для апроксимації використовують поліноми, на практиці часто трапляються випадки, коли емпіричні дані краще описуються не поліноміальними функціями – експоненціальними, логарифмічними, степеневими, тощо.

У такому вигляді ці функції не є лінійними по параметрах a , b і безпосереднє застосування методу найменших квадратів є складним. Тому використовують перетворення змінних, які переводять задачу в лінійну форму – **лінеаризацію**, або **вирівнювання** даних. В результаті перетворення задача знаходження коефіцієнтів нелінійної залежності зводиться до лінійної апроксимації за МНК.

Багато функцій, що залежать від двох параметрів, можна лінеаризувати шляхом заміни змінних. Для цього необхідно підібрати таке перетворення

$y = \phi(x, a^*, b^*)$ початкової залежності, в результаті якого ця залежність набуває лінійного вигляду. Далі розв'язується задача лінійної апроксимації для нової залежності, а далі обчислені коефіцієнти a^* і b^* лінійного поліному перераховуються в коефіцієнти вихідної нелінійної залежності a і b . Для багатьох поширених двопараметричних залежностей такий перехід можливий шляхом заміни змінних. Деякі з цих типових функцій наведено в таблиці 3.7.

Наприклад, як видно з таблиці 3.7, для лінеаризації залежності $y = a + b/x$ слід ввести заміни $v = y, u = 1/x$ ($x \neq 0$), залежності $y = a \exp(bx)$ – заміни $v = \ln y, u = x$ ($y > 0, a > 0$), залежність $y = ax^b$ «вирівнюють» введенням заміни $v = \ln y, u = \ln x$ ($x > 0, y > 0, a > 0$) і т.д.

Для показникової залежності $y = ax^b$, логарифмуючи отримаємо $\lg y = x \lg b + \lg a$. Приймаючи $\lg y = y^*, x = x^*, \lg b = b^*, \lg a = a^*$, будемо мати рівняння прямої $y^* = b^* \cdot x^* + a^*$.

Таблиця 3.7. Деякі типові нелінійні функції та їх лінеаризація до вигляду $y^* = b^* \cdot x^* + a^*$

Задана залежність $y = f(x)$	Перетворення змінних		Перетворення коефіцієнтів	
	y^*	x^*	a^*	b^*
$y = a + \frac{b}{x}$	y	$\frac{1}{x}$	a	b
$y = \frac{a}{b + x}$	$\frac{1}{y}$	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{a}$
$y = \frac{ax}{b + x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
$y = \frac{x}{a + bx}$	$\frac{x}{y}$	x	a	b
$y = ab^x$	$\lg y$	x	$\lg a$	$\lg b$
$y = ax^b$	$\lg y$	$\lg x$	$\lg a$	b
$y = ae^{bx}$	$\ln y$	x	$\ln a$	b
$y = ae^{\frac{b}{x}}$	$\ln y$	1	$\ln a$	b
$y = a + bx^n$	y	x^n	a	b

Дробово-раціональну функцію $y = 1/(ax + b)$ перетворимо в лінійну таким чином. Запишемо обернену залежність $\frac{1}{y} = ax + b$, після чого введемо нові змінні $\frac{1}{y} = y^*, x = x^*$. Для логарифмічної залежності $y = a \lg x + b$ введемо нові змінні $y = y^*, \lg x = x^*$. Для дробово-раціональної функції вигляду $y = \frac{x}{ax + b}$ запишемо обернену функцію $\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$, а потім введемо нові змінні $\frac{1}{y} = y^*, \frac{1}{x} = x^*$.

Очевидно, що застосування описаного підходу не обмежується функціями, наведеними в табл. 3.7. Зокрема, для лінеаризації залежності $y = 1/(a_0 + a_1 \exp(-x))$ можна ввести заміни $v = 1/y, u = \exp(-x)$, $y \neq 0$ тощо.

Сучасні програми, призначені для наближення емпіричною залежністю (тобто апроксимації) наявних даних, як правило, визначають коефіцієнти усіх «типових» залежностей, які «вбудовані» в програму. Потім розраховані за кожною із отриманих залежностей значення порівнюються із «вихідними» (отриманими з експерименту), і обирається залежність, що найбільш точно описує вихідний набір даних. Такий спосіб є досить надійним, проте вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Іноді для вибору загального вигляду емпіричної формули використовують спрощені (порівняно швидкі, проте досить неточні) методи вибору вигляду емпіричної формули: графічний та аналітичний (див. додатки).

Алгоритм знаходження коефіцієнтів нелінійних апроксимуючих залежностей із використанням лінеаризації

1. Вибір моделі: з аналізу природи явища або за приблизними методами (графічним, аналітичним) обирається тип функції (експоненціальна, степенева тощо).

2. Перетворення даних: проводиться логарифмування або інше перетворення для отримання лінійної моделі.

3. Побудова нормальної системи рівнянь для перетворених даних.

4. Розв'язання системи: знаходяться оцінки параметрів a , b лінійного поліному.

5. Зворотнє перетворення (наприклад, обернення з логарифмічного вигляду) для повернення до нелінійної форми.

6. Оцінка якості апроксимації. Для перевірки якості проведеної апроксимації:

- обчислити значення апроксимуючої функції у вузлах апроксимації та порівняти їх зі значеннями вихідної функції;
- побудувати на одній координатній площині графіки заданої функції і апроксимуючої функції;
- обчислити величину середньоквадратичної похибки.

Приклад 3.6. Вибір типу нелінійної функції та знаходження її коефіцієнтів за МНК

Прогноз обсягу оперативної пам'яті, яку споживає нейронна мережа в залежності від кількості її шарів. При побудові нейронних мереж кількість шарів x прямо впливає на споживання ресурсів системи, зокрема оперативної пам'яті (RAM). Проведено серію експериментів і виміряно фактичне споживання пам'яті при різній глибині мережі.

Кількість шарів (x)	1,4	2,2	3,0	3,8	4,6	5,4	6,2	7,0
RAM-споживання (y), МБ	3,135	9,155	19,05	33,39	52,44	76,70	105,5	141,8

Розв'язок. Для визначення загального вигляду емпіричної формули побудуємо графік (рис.3.7).

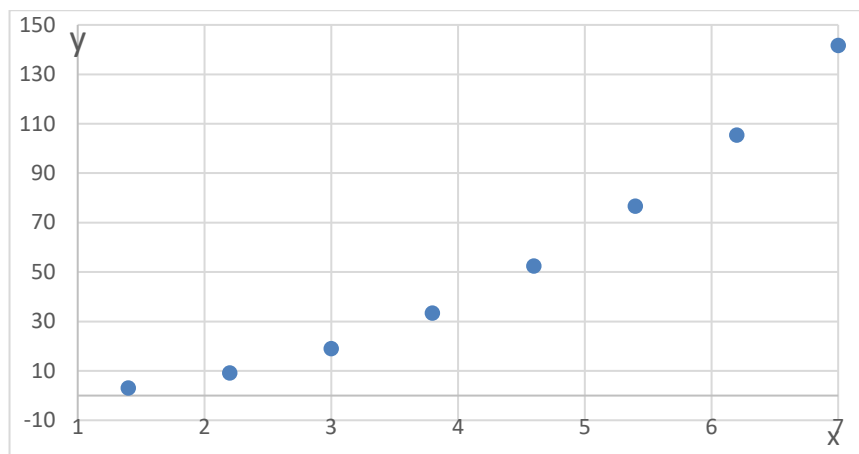


Рис. 3.7 – Точковий графік заданої функції

Бачимо, що графік має досить типовий характер, який може відповідати декільком варіантам емпіричних залежностей (додаток А). Тому застосуємо аналітичний метод для визначення загального вигляду емпіричної формули.

Аналітичний метод базується на використанні для вибору загального вигляду емпіричної формули деяких аналітичних критеріїв x_{ap} , x_{geom} , $x_{гарм}$, y_{ap} , y_{geom} , $y_{гарм}$.

Знайдемо значення аналітичних критеріїв:

$$x_{ap} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{1.4 + 7}{2} = 4.2$$

$$x_{geom} = \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{1.4 \cdot 7} = 3.13$$

$$x_{гарм} = \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 1.4 \cdot 7}{1.4 + 7} = 2.333$$

$$y_{ap} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{3.135 + 141.8}{2} = 72.468$$

$$y_{geom} = \sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{3.135 \cdot 141.8} = 21.084$$

$$y_{гарм} = \frac{2 \cdot y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 3.135 \cdot 141.8}{3.135 + 141.8} = 6.134$$

Тепер знайдемо значення $y_{ap}^*, y_{geom}^*, y_{гарм}^*$, що відповідають обчисленим $x_{ap}, x_{geom}, x_{гарм}$:

$$y_{ap}^* = y_4 + \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} (x_{ap} - x_4) = 33,39 + \frac{52,44 - 33,39}{4,6 - 3,8} (4,2 - 3,8) = 42,915$$

$$y_{geom}^* = y_3 + \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} (x_{geom} - x_3) = 19,05 + \frac{33,39 - 19,05}{3,8 - 3} (3,13 - 3) = 21,389$$

$$y_{гарм}^* = y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} (x_{гарм} - x_2) = 9,155 + \frac{19,05 - 9,155}{3 - 2,2} (2,333 - 2,2) = 10,804$$

Користуючись обрахованими значеннями обчислимо величини:

$$\varepsilon_1 = |y_{ap}^* - y_{ap}| = |42,915 - 72,468| = 29,552$$

$$\varepsilon_2 = |y_{ap}^* - y_{geom}| = |42,915 - 21,084| = 21,831$$

$$\varepsilon_3 = |y_{ap}^* - y_{гарм}| = |42,915 - 6,134| = 36,781$$

$$\varepsilon_4 = |y_{geom}^* - y_{ap}| = |21,389 - 72,468| = 51,078$$

$$\varepsilon_5 = |y_{geom}^* - y_{geom}| = |21,389 - 21,084| = 0,305$$

$$\varepsilon_6 = |y_{гарм}^* - y_{ap}| = |10,804 - 72,468| = 61,663$$

$$\varepsilon_7 = |y_{гарм}^* - y_{гарм}| = |10,804 - 6,134| = 4,67$$

Так як $\varepsilon_{\min} \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_7\} = \varepsilon_5 = 0,305$, то шукана емпірична формула буде мати вигляд степеневій функції: $y = a \cdot x^b$.

Слід зауважити, що в разі, коли разом зі значенням $\varepsilon_{\min}$ ще кілька величин ε мають такий же порядок (наприклад, 0,033; 0,048; 0,06), то необхідно розглянути всі відповідні емпіричні формули в якості апроксимуючих функцій. Найкращою апроксимуючою формулою може виявитись будь-яка з них.

Щоб визначити коефіцієнти a і b у нелінійній залежності $y = a \cdot x^b$ за

методом найменших квадратів, застосовуємо лінеризацію через логарифмування. Візьмемо натуральний логарифм обох частин рівняння:

$$\ln y = \ln(a \cdot x^b) = \ln a + b \ln x.$$

Позначимо: $Y = \ln y$; $X = \ln x$; $A = \ln a$. Тоді отримаємо лінійне рівняння:

$$Y = A + bX$$

Подальший хід розв'язання задачі відбувається аналогічно тому, як було розглянуто у задачі, що описана вище (лінійна апроксимація). Тобто, для знаходження параметрів емпіричної формули використаємо метод вирівнювання (для приведення функції до лінійного вигляду) і МНК для знаходження коефіцієнтів рівняння. В результаті отримуємо апроксимуючу функцію: $y = 1,416 \cdot x^{2,366}$

Стандартним способом виконуємо перевірку отриманої апроксимуючої функції (а також і всіх інших, в разі, якщо вони були знайдені). В таблиці 3.8 наведені значення апроксимуючої функції у вузлах у порівнянні зі значеннями вихідної функції, а також відповідні відхилення.

Таблиця 3.8. Порівняння експериментальних та розрахованих значень продуктивності фільтру

i	x	y	y_p	$(y - y_p)$	$(y - y_p)^2$
1	1,4	3,135	3,139	-0,0040	1,6E-05
2	2,2	9,155	9,147	0,0084	7,1E-05
3	3,0	19,05	19,06	-0,0037	1,4E-05
4	3,8	33,39	33,33	0,0553	0,0031
5	4,6	52,44	52,39	0,0525	0,0028
6	5,4	76,70	76,56	0,1405	0,0198
7	6,2	105,5	106,6	-0,6609	0,4368
8	7,0	141,8	141,5	0,3259	0,1062
Сума:					0,5686

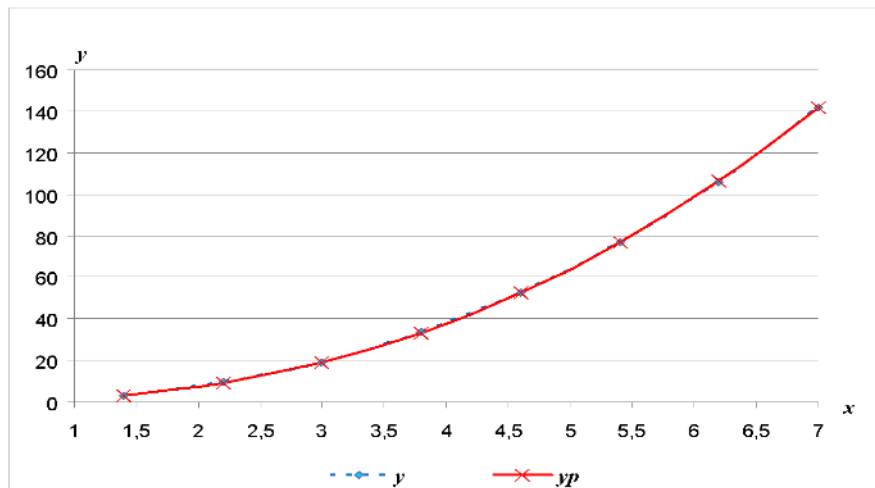


Рис.3.8 – Порівняння експериментальних (y) та розрахованих (y_p) значень

Знайдемо значення середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{pi})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon^2}{7}} = \sqrt{\frac{0,5686}{7}} = 0,27$$

Отже, виходячи з порівняння значень вихідної та апроксимуючої функцій (табл. 3.8 та рис. 3.8) та значення середньоквадратичного відхилення $\sigma = 0,27$ можна зробити висновок, що отримана степенева функція досить добре описує експериментальні дані.

Приклад 3.7. Лінеаризація нелінійної функції та знаходження її коефіцієнтів за МНК. Варіант 1.

Моделювання розсіювання уваги користувача в інтерфейсі ІШ-помічника. Компанія розробляє візуальний інтерфейс для ІШ-помічника, який взаємодіє з користувачами в реальному часі (наприклад, віртуальний консультант або навігатор в застосунку). Команда UX-аналітики помітила, що з ростом часу перебування користувача в інтерфейсі (y), його швидкість реагування на підказки (x) суттєво зменшується.

Таблична залежність – наступна (y – час роботи користувача в інтерфейсі (y хвилини); x – середня швидкість реагування на підказки системи (y секундах⁻¹ або кількість реакцій/хв))

X	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
Y	0,50	1,2	2,0	5,0	8,0	12	17

З апіорних даних відомо, що дана залежність добре описується функцією $y(x) = a + b/x$. Знайти коефіцієнти a, b наведеної залежності.

Розв'язок. Оскільки вид функціональної залежності нам відомий, то для знаходження її коефіцієнтів (**a**, **b**) приведемо функцію $y = a + b/x$ до лінійного вигляду, використовуючи **метод вирівнювання** – перетворення апроксимуючої (наближеної) функції таким чином, щоб перетворити її в лінійну функцію. Для кожної емпіричної формули він індивідуальний. Для вирівнювання даної функції необхідно ввести нові змінні: $Y=y$, $X=1/x$. В результаті отримаємо: $Y = a + b \cdot X$.

Складемо таблицю значень цих величин:

X=1/x	0,303	0,686	1,107	2,618	4,082	5,988	8,403
Y=y	0,5	1,2	2	5	8	12	17

Для перевірки, чи правильно обрана залежність можна побудувати графік вирівняної функції $Y = Y(X)$ – рис. 3.9.

Оскільки отриманий графік є прямою лінією, то можна вважати, що метод вирівнювання для даної залежності застосований правильно.

Параметри **a** і **b** визначимо за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Для розрахунку коефіцієнтів нормальної системи рівнянь (Додаток А) складаємо таблицю:

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	0,303	0,5	0,092	0,151
2	0,686	1,2	0,471	0,824
3	1,107	2	1,226	2,215
4	2,618	5	6,853	13,09
5	4,082	8	16,66	32,65
6	5,988	12	35,86	71,86
7	8,403	17	70,62	142,9
Сума:	23,187	45,7	131,775	263,645

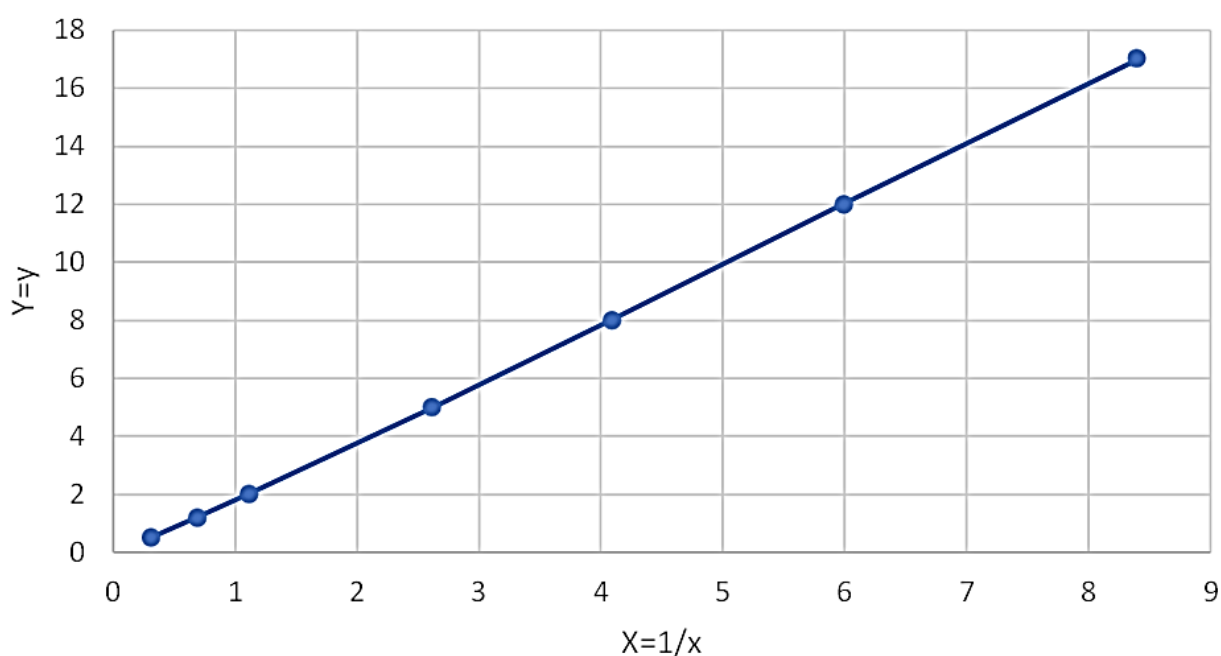


Рис.3.9 – Результат вирівнювання функції

На основі даних таблиці складемо нормальну систему рівнянь ($n = 7$):

$$\begin{cases} 7a + 23,187b = 45,7 \\ 23,187a + 131,775b = 263,645 \end{cases}$$

Для розв'язання отриманої системи рівнянь можна використати будь-який метод. Наприклад, за формулами Крамера значення **a** і **b**, дорівнюють:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{\det \begin{vmatrix} 45.7 & 23.1872 \\ 263.645 & 131.775 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 7 & 23.1872 \\ 23.1872 & 131.775 \end{vmatrix}}; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\det \begin{vmatrix} 7 & 45.7 \\ 23.1872 & 263.645 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 7 & 23.1872 \\ 23.1872 & 131.775 \end{vmatrix}}$$

$$a = \frac{-91.10958}{384.7737} \approx -0.23679; \quad b = \frac{785.8599}{384.7737} \approx 2.042395$$

Таким чином: $a = -0,237$, $b = 2,042$ і апроксимуюча формула для залежності набуває вигляду:

$$y = -0,237 + \frac{2,042}{x}.$$

Для оцінки точності знайденої апроксимуючої формули (порівняння вихідних і розрахованих значень функції) побудуємо таблицю:

i	x	y	$y_{розр}$	ϵ	ϵ^2
1	3,304	0,5	0,381	0,1186	0,0141
2	1,457	1,2	1,165	0,0350	0,0012
3	0,903	2	2,025	-0,0250	0,0006
4	0,382	5	5,110	-0,1098	0,0121
5	0,245	8	8,100	-0,0995	0,0099
6	0,167	12	11,993	0,0069	4,73E-05
7	0,119	17	16,926	0,0738	0,0054
				Сума:	0,0434

Також для оцінки характеру отриманої апроксимаційної формули та наявності відхилень від вихідних значень функції побудуємо графік (рис. 3.10).

Знайдемо значення середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - V p_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \epsilon^2}{6}} = \sqrt{\frac{0,0434}{6}} = 0,085$$

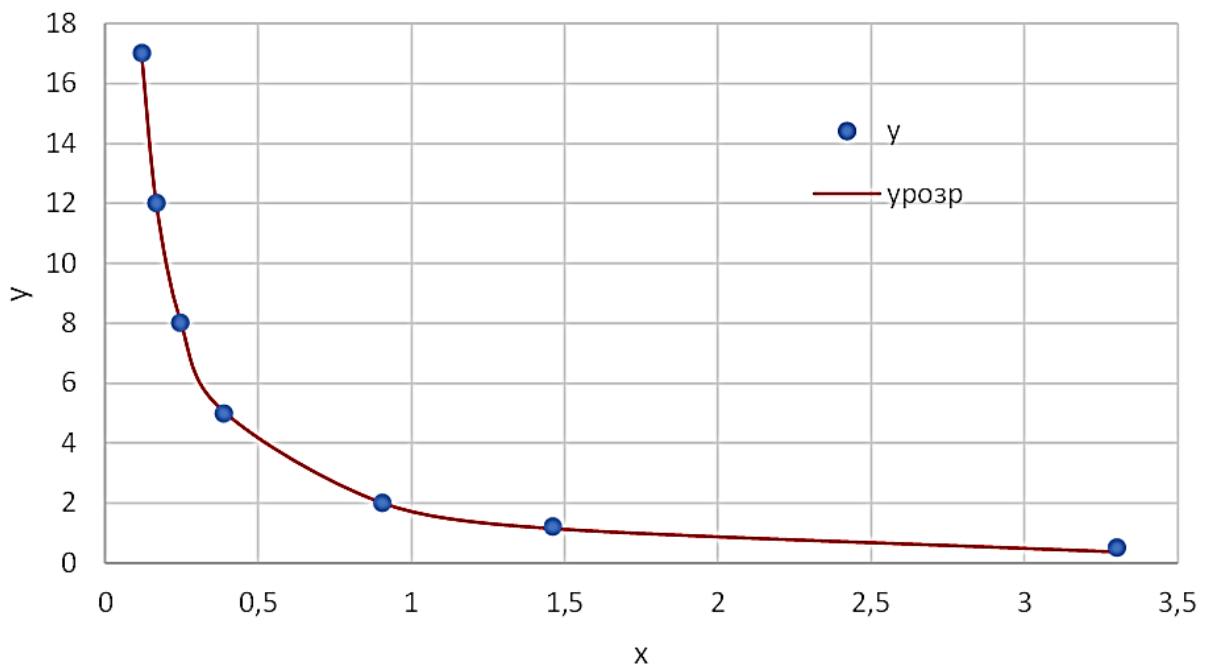


Рис.3.10 – Порівняння експериментальних та розрахованих значень

З порівняння вихідних і розрахованих значень функції та значення середньоквадратичної похибки ($\sigma = 0,085$) можна зробити висновок, що отримана апроксимуюча функція досить добре описує вихідну залежність.

Приклад 3.8. Лінеаризація нелінійної функції та знаходження її коефіцієнтів за МНК. Варіант 2.

Моделювання активації нейронів у залежності від температури процесора. У процесі навчання великих моделей штучного інтелекту (наприклад, нейронних мереж глибокого навчання), температурний режим графічних процесорів (GPU) або тензорних процесорів (TPU) істотно впливає на їхню продуктивність, стабільність і енергоефективність. Дослідницька команда спостерігає за активністю штучного нейрона (виміряною середньою частотою активації, y) в залежності від температури обчислювального чипа (у градусах Кельвіна, x).

Зібрані дані:

X	270,5	280,8	288,6	299,2	315,4	333,8	353,2
Y	0,0267	0,0533	0,0800	0,1333	0,2667	0,5333	1,0133

Відомо, що активація нейронів у чипі нелінійно зростає зі збільшенням температури до певної межі через фізичні особливості кремнієвих елементів. З апіорних даних відомо, що дана залежність добре описується функцією $Y = be^{\frac{a}{X}}$. Знайти коефіцієнти a , b наведеної залежності.

Розв'язок. Оскільки вид функціональної залежності нам відомий, то логарифмуючи задану формулу, будемо мати $\lg Y = \lg b + \frac{a}{X} \lg e$.

Звідси, вважаючи $y = \lg Y$, $a_0 = \lg b$, $x = 1/X$, $a_1 = a \lg e$, отримаємо лінійну залежність $y = a_0 + a_1 x$.

Значення $y_i = \lg Y_i$ і $x_i = 1/X_i$ наведені в таблиці:

i	X_i	$x_i = 1/X_i$	Y_i	$y_i = \lg Y_i$	x_i^2	$x_i y_i$
1	270,5	0,003697	0,0267	— 1,5735	$1,367 \cdot 10^{-5}$	— $5,817 \cdot 10^{-3}$
2	280,8	0,003561	0,0533	— 1,2733	$1,268 \cdot 10^{-5}$	— $4,534 \cdot 10^{-3}$
3	288,6	0,003465	0,0800	— 1,0969	$1,201 \cdot 10^{-5}$	— $3,801 \cdot 10^{-3}$
4	299,2	0,003342	0,1333	— 0,8752	$1,117 \cdot 10^{-5}$	— $2,925 \cdot 10^{-3}$
5	315,4	0,003171	0,2667	— 0,5740	$1,006 \cdot 10^{-5}$	— $1,820 \cdot 10^{-3}$
6	338,8	0,002952	0,5333	— 0,2730	$8,714 \cdot 10^{-6}$	— $8,060 \cdot 10^{-4}$
7	353,2	0,002831	1,0133	0,005738	$8,015 \cdot 10^{-6}$	$1,624 \cdot 10^{-5}$
Суми		0,02302		— 5,6602	$0,7632 \cdot 10^{-4}$	— 0,01969

Складаємо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7a_0 + 0,02302a_1 = -5,6602, \\ 0,02302a_0 + 0,7632 \cdot 10^{-4}a_1 = -0,0197. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему, наприклад, за формулами Крамера, знайдемо $a_0 = 4,998$; $a_1 = -1767,4$.

Оскільки, через введені нами позначення, $a_0 = \lg b$, то $b = 99471,8$;

$$a_1 = a \lg e, \text{ — то } a = \frac{a_1}{\lg e} = \frac{-1767,4}{0,4343} = -4069,5.$$

Підставивши знайдені значення a і b , отримаємо остаточний вигляд апроксимуючої функції:

$$X = 99471,8 \cdot e^{\frac{-4069,5}{X}}.$$

Дані наступної таблиці та рисунку 3.11 показують відповідність отриманої апроксимуючої функції з дослідними даними.

	X_i	Y_i	$Y_{розр_i}$	$Y_i - Y_{розр_i}$
1	270,5	0,0267	0,0291	- 0,0024
2	280,8	0,0533	0,0505	0,0028
3	288,6	0,0800	0,0748	0,0052
4	299,2	0,1333	0,1233	0,0100
5	315,4	0,2667	0,2477	0,0190
6	338,8	0,5333	0,6039	- 0,0706
7	353,2	1,0133	0,9857	0,0276

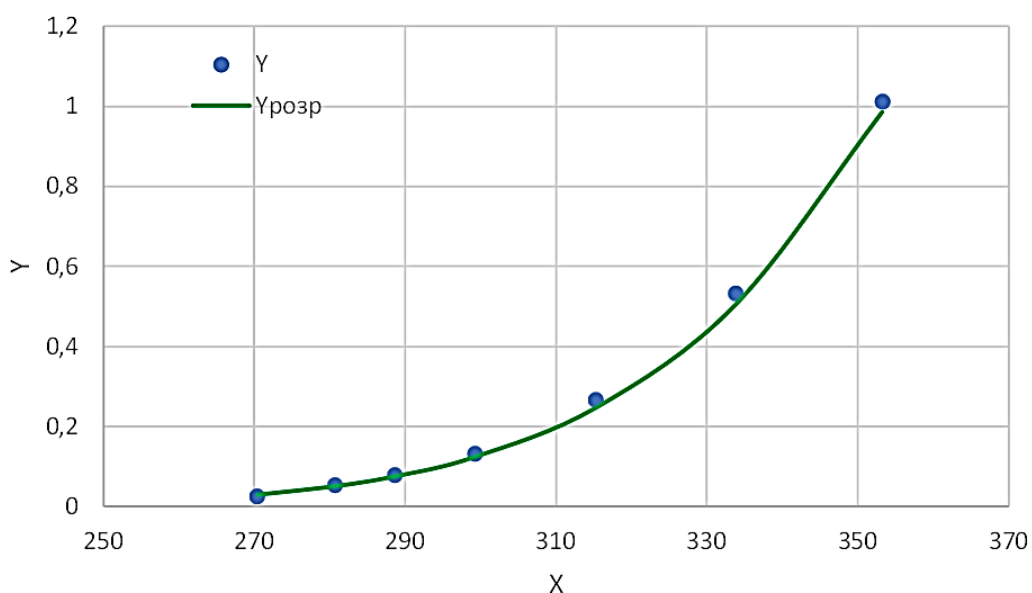


Рис.3.11 – Порівняння експериментальних та розрахованих значень

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгоритмізація інженерних розрахунків: розрахункова робота: навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. М. Шахновський, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангінова, О.О. Квітка. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 86 с.
2. Бондаренко С. Г., Сангінова О. В., Шахновський А. М. Чисельні методи в хімії та хімічній технології: підруч. для здобувачів ступеня бакалавра / КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 564 с. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/393d7459-ecc1-4a58-a075-572a2f288cb2/content>
3. Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю.Я. Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник – К.: ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2004. – 220 с.
4. ДСТУ 3008–2015. Документація у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. – Чинний від 22.06.2015. – URL: https://science.kname.edu.ua/images/dok/derzhstandart_3008_2015.pdf
5. ДСТУ 3582-2013. Інформація та документація. Скорочення слів в українській мові в бібліографічному описі. Загальні вимоги та правила. – Чинний від 22.08.2013. – Режим доступу: https://lib.zsmu.edu.ua/upload/intext/dstu_3582_2013.pdf
6. ДСТУ 8302:2015. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання. – Чинний від 01.07.2016. – Режим доступу: <http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2018/ДСТУ%208302%20повний.pdf>
7. Костюшко І. А. Методи обчислень : підруч. / І. А. Костюшко, Н. Д. Любашенко, В. В. Третиник. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во "Політехніка", 2021. – 243 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/a23882f0-698a-4e5e-b7ca-d367be1c2ccf/content>

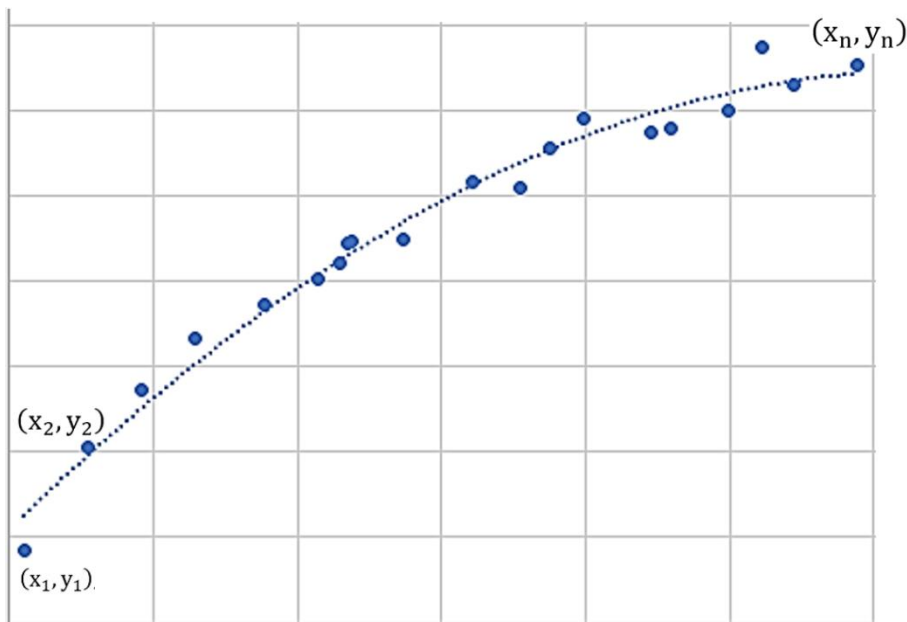
8. Литвинов А. Л. Чисельні методи: теорія і практика : навч. посіб. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2022. – 166 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/62005/1/2022%20печ.%2013Н%20Чисельн_Методи%20Литвинов.pdf
9. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: «Либідь», 1996. – 288 с. – Режим доступу: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Lyashenko_1996_288.pdf
10. Математична статистика : навч. посіб. / М. С. Герич, О. О. Синявська. – Ужгород : Говерла, 2021. – 146 с. – Режим доступу: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/8c8ac77a-4883-4963-a895-96415b348e4b/content>
11. Методи прикладної математики для вирішення інженерних задач хімічної технології. Розрахункова робота : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. В. Сангінова, С. Г. Бондаренко, А. М. Шахновський. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 115 с. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/items/e125f944-1943-497f-953b-63580319d464>
12. Мусіяка В. Г. Основи числових методів : підручник / В. Г. Мусіяка. – Дніпро : Видавництво "ЛІРА", 2017. – 256 с. Режим доступу: https://ecat.ust.edu.ua/ft/Musijaka_Osnovy_chyslovykh_metodiv.pdf
13. Обчислювальна математика та програмування : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С. В. Брановицька, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангінова. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2013. – 112 с.
14. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с. – Режим доступу: <http://dspace.lvduvs.edu.ua/bitstream/1234567890/629/1/теорія%20ймовірностей%20підручник.pdf>

15. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казміренко В. А. Обчислювальна математика: Навч. посіб. – К.: Видавництво, 2013. – 224 с. – Режим доступу: <https://ee.kpi.ua/~vk/calcmat/metod.pdf>
16. Руденко В. М. Математична статистика. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с. – Режим доступу: https://shron1.chtyvo.org.ua/Rudenko_Volodymyr/Matematychna_statystyka.pdf
17. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи : підруч. – К.: Видавнича група BVH, 2006. – 480 с.
18. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. – Режим доступу: http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM_Zadachin.pdf
19. Чисельні методи розв'язання прикладних задач : навч. посіб. / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 142 с. – Режим доступу: https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/79378/3/Honcharov_chyselni_metody.pdf;jsessionid=ACC258A4782981868C5FD195CA822BB0
20. Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с. – Режим доступу: <http://repository.vsau.org/getfile.php/27703.pdf>
21. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Багатовимірний статистичний аналіз : начально-методичний посібник. – Одеса: Астропринт, 2015. – 132 с. – Режим доступу: http://ouek.onu.edu.ua/uploads/courses/msa/Yarovoy_Strakhov_MSA.pdf
22. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical methods for engineers; 8th edition. – McGraw Hill, 2020. – 1008 p.

ДОДАТКИ

Додаток А. Додаткові теоретичні відомості

Графічний спосіб оцінювання вигляду емпіричної формули

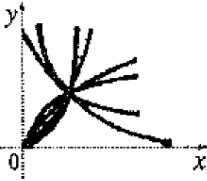
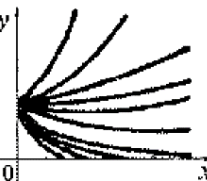
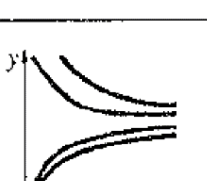
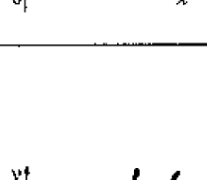


Апроксимуюча функція може бути обрана, ґрунтуючись на зовнішній схожості точкового графіка експериментальних даних із графічним зображенням тієї чи іншої функції

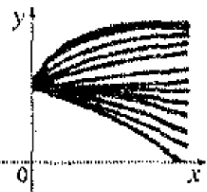
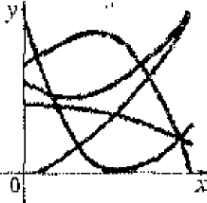
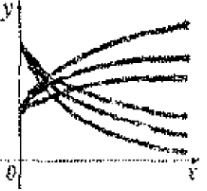
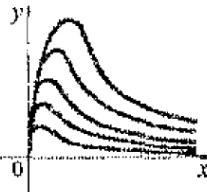
(показниковою, логарифмічною, степеневою тощо) – табл. А1 та А2 [3]).

Для визначення вигляду емпіричної формули необхідно за вихідними даними побудувати точковий графік: на координатній площині будуємо точки, абсциси яких – значення аргументу x , ординати – значення y . На побудованому графіку проводимо плавну лінію так, щоб точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ графіка наближалися до неї і розташовувалися по обидві сторони від неї (деякі точки можуть потрапити на лінію). Це і буде графік функції, який приблизно виражає залежність між величинами y і x , а рівняння побудованої таким чином наближеної лінії буде шуканою емпіричною формулою.

Таблиця А1

Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Примітки
	$y = ax^b$ (графік подано для $a = \text{const}$)	$X = \lg x;$ $Y = \lg y;$ $Y = \lg a + bx$	—
	$y = ae^{bx}$ (графік подано для $a = \text{const}$)	$Y = \lg y;$ $Y = \lg a + bx;$ $\lg e = \lg a + 0,4343 bx$	—
	$y = 1/(a + bx)$	$Y = 1/y;$ $Y = a + bx$	—
	$y = x/(a + bx)$	$Y = x/y;$ $Y = a + bx$	—
	$y = c + ax^b$	Якщо b відомо, $X = x^b$ $y = c + ax$ Якщо b невідомо, знаходять c (див. примітки), тоді $x = \lg x$ $y = \lg (y - c)$ $Y = \lg a + bx$	Для знаходження c на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 , відповід- ними ординатами y_1 і y_2 , третю точку з абсцисою $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ і ординатою y_3 : $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$

Таблиця А2

Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Примітки
	$y = c + a e^{bx}$ (графік подано для $a = \text{const}$ та $a < 0$)	Знаходять c (див. примітки), тоді $y = \lg(y - c)$ $Y = \lg a + bx \lg e = \lg a + 0,4343 bx$	Для визначення c на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 , відповідними ординатами y_1 і y_2 , третю точку з абсцисою $x_3 = 0,5 (x_1 + x_2)$ та ординатою y_3 : $c = (y_1 y_2 - y_3^2) / (y_1 + y_2 - 2y_3)$
	$y = a + bx + cx^2$	$Y = (y - y_1) / (x - x_1)$ $Y = (b + c x_1) + c x$, де x_1 і y_1 – координати довільної точки заданої кривої. При виборі значень x , які складають арифметичну прогресію з різницею h , $Y = \Delta y = y_{i+1} - y_i$ $Y = (bh + c h^2) + 2chx$	Після знаходження b і c знаходять a за рівнянням $\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2$, де n – кількість заданих значень x
	$y = (a + bx) / (c + dx)$	$Y = (x - x_1) / (y - y_1)$ Де x_1 і y_1 – координати довільної точки заданої кривої $Y = A + Bx$	Замість коефіцієнтів a, b, c, d визначають A, B та подають емпіричну формулу у вигляді $Y = y_1 + (x - x_1) / (A + Bx)$
	$y = x / (a + bx + cx^2)$	—	Уведенням нової змінної $Z = x/y$ приходимо до формули $a + bx + cx^2$

Аналітичний метод вигляду емпіричної формули

Цей метод, як і графічний метод, є досить неточним (грубо-орієнтовним). Він базується на використанні деяких аналітичних критеріїв. При цьому вважається, що вихідні дані $x_i, y_i (i=1, \dots, n, n > 3)$ додатні і $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Якщо ж значення $x_i < 0$ (або $y_i < 0$), то достатньо розглянути таблицю значень $(-x_i, y_i)$ або відповідно $(x_i, -y_i)$. Аналогічно при $x_i < 0$ і $y_i < 0$ будують емпіричну формулу для таблиці $(-x_i, -y_i)$. У випадку коли деякі значення x_i, y_i додатні, а деякі – від’ємні завжди можна підібрати такі числа $M > 0, N > 0$ при яких $\xi_i = M + x_i > 0, \eta_i = N + x_i > 0$, і тоді задача зводиться до знаходження емпіричної формули для додатних значень $\xi_i, \eta_i (i=1, \dots, n)$.

Щоб визначити, яка з цих функцій найкраще описує експериментальні дані, необхідно виконати такі обчислення:

1. За таблицею вихідних даних знайти:

$$x_{ap} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

$$y_{ap} = \frac{y_1 + y_n}{2}$$

$$x_{geom} = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$$

$$y_{geom} = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$$

$$x_{гарм} = \frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$$

$$y_{гарм} = \frac{2y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n}$$

2. За таблицею вихідних даних, користуючись, наприклад інтерполяційними формулами (або за наближено побудованим графіком шуканої функції, навколо якого групуються дослідні точки x_i, y_i знайти значення $y_{ap}^*, y_{geom}^*, y_{гарм}^*$, які відповідають знайденим у пункті 1 значенням $x_{ap}, x_{geom}, x_{гарм}$. При чому, якщо, наприклад, x_{ap} (або x_{geom} чи $x_{гарм}$) співпадає з табличним значенням x_i , то відповідне значення y_{ap}^* (або y_{geom}^* чи $y_{гарм}^*$) буде рівне табличному значенню y_i , в іншому випадку y_{ap}^* (або y_{geom}^* чи $y_{гарм}^*$) можна визначити, користуючись формулою лінійної інтерполяції:

$$y_{ap}^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x_{ap} - x_i), \quad (A1)$$

де x_{i+1}, x_i — значення таблиці A1, між якими знаходиться:

$$x_{ap} (x_i < x_{ap} < x_{i+1}); y_i < y_{ap}^* < y_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

3. Знайти величини:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= |y_{ap}^* - y_{ap}| & \varepsilon_2 &= |y_{ap}^* - y_{geom}| & \varepsilon_3 &= |y_{ap}^* - y_{geom}| \\ \varepsilon_4 &= |y_{geom}^* - y_{ap}| & \varepsilon_5 &= |y_{geom}^* - y_{geom}| & \varepsilon_6 &= |y_{geom}^* - y_{ap}| \\ \varepsilon_7 &= |y_{geom}^* - y_{geom}| \end{aligned}$$

Визначити серед них мінімальне значення:

$$\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7\}$$

4. Провести вибір емпіричної формули серед функцій (I-VII). Шукана емпірична формула буде мати вигляд:

- I. $y = ax + b$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_1$;
- II. $y = ab^x$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_2$;
- III. $y = \frac{1}{ax + b}$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_3$;
- IV. $y = a \ln x + b$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_4$;
- V. $y = ax^b$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_5$;
- VI. $y = a + \frac{b}{x}$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_6$;
- VII. $y = \frac{x}{ax + b}$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_7$.

Слід враховувати, що функції I-VII монотонні, і, відповідно, дослідні дані, які їм відповідають x_i, y_i при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i = 1, \dots, n-1)$ повинні мати сталий знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i = 1, \dots, n-1)$. В іншому випадку залежності I-VII протипоказані. Такий спосіб вибору емпіричної формули є грубим

наближенням, він не враховує поведінки всіх проміжних значень x_i, y_i . Крім того, можливий випадок, що змінні x і y підкоряються іншій закономірності, і тоді вигляд емпіричної формули буде відрізнятися від функцій I-VII.

За даними таблиці A1 можна легко впевнитися, що залежність між x і y лінійна, використовуючи аналітичні критерії: якщо $K_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \text{const}(i=1, \dots, n-1; \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \text{ і } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$, то точки x_i, y_i лежать на одній прямій лінії; якщо $k_1 \approx \dots \approx k_{n-1}$, то можна вважати, що формула $y = ax + b$ наближено представляє дослідні дані.

Поширеними емпіричними формулами з трьома параметрами є:

$$\text{I. } y = ax^2 + bx + c \text{ (квадратична залежність)} \quad (\text{A2})$$

$$\text{II. } y = ax^b + c \text{ (степенева залежність)} \quad (\text{A3})$$

$$\text{III. } y = ae^{bx} + c \text{ (показникова залежність)} \quad (\text{A4})$$

Розглянемо аналітичний критерій для квадратичної залежності. Будемо вважати, що $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0 (i=1, \dots, n-1)$, а послідовність $y_1, \dots, y_n$ або монотонна, тобто $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i=1, \dots, n-1)$ зберігає сталий знак, або ж ця послідовність має єдиний екстремум, тобто рівність Δy_i лише один раз змінює знак.

Введемо розділені різниці першого і другого порядків:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \quad (\text{A5})$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \text{ або } [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)}{\Delta_1 x_i}, \quad (\text{A6})$$

де

$$\Delta_1 x_i = x_{i+2} - x_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1} \quad (\text{A7})$$

Доведено, що точки $x_i, y_i (i=1, \dots, n)$ розташовані на параболі (A2) тоді і тільки тоді, якщо зберігаються сталі значення різниці другого порядку.

Зокрема, якщо значення $x_1, \dots, x_n$ рівновіддалені, тобто $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \text{const} (i = 1, 2, \dots, n-1)$, то для існування емпіричної квадратичної залежності необхідно і достатньо, щоб була сталою друга різниця $\Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i (i = 1, \dots, n-2)$.

Множинна (багатофакторна) регресія

Постановка задачі

Якщо на функцію (Y) впливають декілька факторів ($X_1, X_2, \dots$), то замість парної регресії використовується множинна регресія.

Найбільш вживана і досить проста модель множинної лінійної регресії.

Нехай між показником Y і факторами $X_1, X_2, \dots, X_m$ існує лінійний зв'язок

$$M(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (\text{A19})$$

Тоді рівняння регресії має вигляд:

$$\hat{y}_x = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m + \varepsilon, \quad (\text{A20})$$

де y і $\hat{y}_x$ – відповідно фактичні та розрахункові значення показника Y , ε – похибка

Побудова лінійного рівняння множинної регресії

Побудова рівняння регресії зводиться до оцінки його параметрів в (A20). Для оцінки параметрів множинної лінійної регресії застосуємо метод найменших квадратів (МНК) в матричній формі. Введемо до розгляду вектор – стовбці Y, B , матрицю X .

Нехай Y – n -вимірний стовпець (вектор) спостережень:

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$$

Матриця X – комбінація значень факторів, що порядково відповідає стовпцю Y :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & & & \\ x_{i1} & \dots & \dots & x_{im} \\ \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

Примітки:

X – матриця $n * (m+1)$ вимірності спостережень;

i -й рядок матриці відповідає спостереженням вектора значень незалежної змінної $X_1, X_2, \dots, X_m$;

j -й стовпчик матриці відповідає коефіцієнту у рівнянні регресії (A20);

«фіктивний» перший стовпчик матриці відповідає вільному члену у рівнянні регресії (A20).

Вектор-стовпець коефіцієнтів рівняння регресії (A20):

$$B = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]$$

Вектор-стовпець відхилень реальних значень y_i залежної змінної Y від $\hat{y}_i$ модельних, отриманих за рівнянням регресії (A20):

$$e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n],$$

$$e = \begin{pmatrix} y_1 - \hat{y}_{x_1} \\ y_2 - \hat{y}_{x_2} \\ \dots \\ y_n - \hat{y}_{x_n} \end{pmatrix}. \quad (A20)$$

У матричній формі модель (A20) записується у вигляді $Y = X \cdot B + e$

В матричній формі похибка записується $e = Y - X \cdot B$, її квадрат має вигляд $(e)^2 = e^T \cdot e$.

Результатом процедури МНК у матричній формі буде вираз:

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y, \quad (A21)$$

де X^T – транспонована матриця X .

Саме цим виразом визначаються емпіричні коефіцієнти множинної лінійної регресії.

Приклад 1. Знайти коефіцієнти рівняння регресії (A20) на основі вихідних даних (табл. А.3).

Таблиця А.3. Комбінація значень факторів і стовпець спостережень

№	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	+1	+1	7,4
2	-1	+1	+1	7,8
3	+1	-1	+1	10,2
4	-1	-1	+1	5,77
5	+1	+1	-1	17,0
6	-1	+1	-1	7,6
7	+1	-1	-1	9,4
8	-1	-1	-1	8,8

Визначаємо емпіричні коефіцієнти множинної лінійної регресії за формулою (A21):

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 + 10,2 + 5,77 + 17 + 7,6 + 9,4 + 8,8) = 9,25$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{i1} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 - 7,8 + 10,2 + 5,77 + 17 - 7,6 + 9,4 - 8,8) = 1,75$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{i2} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 - 10,2 - 5,77 + 17 + 7,6 - 9,4 - 8,8) = 0,7$$

$$b_3 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{i3} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 + 10,2 + 5,77 - 17 - 7,6 - 9,4 - 8,8) = -1,45$$

Побудова нелінійного рівняння множинної регресії

Для оцінювання параметрів множинної нелінійної регресії також застосовний метод найменших квадратів – формула (A21). Різниця полягає у застосуванні іншого рівняння регресії, наприклад, так званого неповного квадратичного рівняння:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (A22)$$

Приклад 2. Знайти коефіцієнти рівняння регресії (A22) на основі вихідних даних (табл. А.4).

Таблиця А.4. Комбінація значень факторів і стовпець спостережень

№	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	y
1	1	1	1	1	92,9
2	1	-1	1	1	95,4
3	1	1	-1	1	79,3
4	1	-1	-1	1	83,5
5	1	1	1	-1	95,8
6	1	-1	1	-1	98,5
7	1	1	-1	-1	86,0
8	1	-1	-1	-1	91,5

Визначаємо у MS Excel емпіричні коефіцієнти множинної лінійної регресії за формулою (A21):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X		x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃		y
2		1	1	1	1	1	1	1	1		92,9
3	8x7	2	1	-1	1	1	-1	-1	1		95,4
4		3	1	1	-1	1	-1	1	-1		79,3
5		4	1	-1	-1	1	1	-1	-1		83,5
6		5	1	1	1	-1	1	-1	-1		95,8
7		6	1	-1	1	-1	-1	1	-1		98,5
8		7	1	1	-1	-1	-1	-1	1		86
9		8	1	-1	-1	-1	1	1	1		91,5
10			1	2	3	4	5	6	7		
11											
12	X^T	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
13	7x8	2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
14		3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	
15		4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
16		5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	
17		6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	
18		7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	
19			1	2	3	4	5	6	7	8	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
21													
22	$(X^T X)$	1	8	0	0	0	0	0	0		{=МУМНОЖ(C12:I18;C2:I9)}		
23	7x7	2	0	8	0	0	0	0	0				
24		3	0	0	8	0	0	0	0				
25		4	0	0	0	8	0	0	0				
26		5	0	0	0	0	8	0	0				
27		6	0	0	0	0	0	8	0				
28		7	0	0	0	0	0	0	8				
29			1	2	3	4	5	6	7				
30													
31		1	0,125	0	0	0	0	0	0		{=МОБР(C22:I28)}		
32	$(X^T X)^{-1}$	2	0	0,125	0	0	0	0	0				
33	7x7	3	0	0	0,125	0	0	0	0				
34		4	0	0	0	0,125	0	0	0				
35		5	0	0	0	0	0,125	0	0				
36		6	0	0	0	0	0	0,125	0				
37		7	0	0	0	0	0	0	0,125				
38			1	2	3	4	5	6	7				

Нагадаємо, що використовувані для розрахунків функції MS Excel належать до так званих функцій опрацювання масивів. **Формула масиву** є формулою, результатом виконання якої є (як правило) не одна клітинка, а діапазон. Увага! У версіях MS Excel, що вийшли після жовтня 2018 року, введення (або редагування) формули масиву закінчується не натисканням клавіші Enter, а натисканням комбінації клавіш Ctrl+Shift+ Enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
40	$(X^T X)^{-1} X^T$	1	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	{=МУМНОЖ(C31:I37;C12:I18)}			
41	7x8	2	0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125	-0,125				
42		3	0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125	-0,125	-0,125				
43		4	0,125	0,125	0,125	0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125				
44		5	0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125				
45		6	0,125	-0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125				
46		7	0,125	0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125				
47			1	2	3	4	5	6	7	6				
48														
49	$(X^T X)^{-1} X^T Y$	1	90,359								{=МУМНОЖ(C40:I46;K2:K9)}			
50	7x1	2	-1,8588											
51		3	5,28375											
52		4	-2,5913											
53		5	0,56625											
54		6	0,19125											
55		7	1,08375											

Зауваження. Якщо незалежні змінні в матриці X взяти як відхилення кожного значення від свого середнього, то величина $(X^T \cdot X)$ називається матрицею моментів. Елементи її головної діагоналі є величини дисперсії незалежних змінних, інші елементи відповідають взаємним коваріаціям.

В матричній формі похибка записується $\underline{e} = Y - XB$; утворимо квадрат похибки:

$$Q = e^T \cdot e = (Y - XB)^T \cdot (Y - XB) = Y^T \cdot Y - B^T X^T Y - Y^T X B + B^T X^T X B = Y^T Y - 2B^T X^T Y + B^T X^T X B,$$

де індекс T – транспонування; матричні співвідношення:

$$(Y - XB)^T = Y^T - (XB)^T; (XB)^T = B^T X^T; B^T X^T Y = Y^T X B \text{ відомі.}$$

$$\text{Умова існування extr: } \frac{\partial Q}{\partial B} = 0; \frac{\partial Q}{\partial B} = -2X^T Y + 2(X^T X)B;$$

$$X^T Y = (X^T X)B \Rightarrow B = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Якщо незалежні змінні в матриці X взяті як відхилення кожного значення від свого середнього, то матрицю $X^T X$ називають матрицею моментів.

Статистична перевірка рівняння множинної регресії

1. Оцінювання залишкової дисперсії у вигляді суми квадратів відхилень виміряних значень від розрахованих за моделлю:

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{m-(n+1)} \sum_{i=1}^m [Y_i - Y_i(X)]^2, \quad (\text{A23})$$

де Y_i – відгук у i -му досліді,

$Y_i(X)$ – значення відгуку, отримане за моделлю.

Зауваження. Якщо модель виявиться адекватною об'єкту, то єдиною причиною розходження між даними досвіду і моделлю є похибка e вимірювань з дисперсією відтворюваності σ_e^2 . Отже, залишкова дисперсія може служити оцінкою дисперсії σ_e^2 . На практиці заздалегідь невідомо, що модель адекватна, тому оцінку дисперсії відтворюваності виконують по серії повторних дослідів.

2. Кожен i -й досвід повторюємо r разів при незмінних умовах. Отримуємо набори значень відгуків:

$$Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, r.$$

Обчислюємо вибіркове середнє для відгуку в i -ому досліді, усереднене по серії з r його значень:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r Y_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Проводимо оцінювання дисперсії відтворюваності

$$S_e^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2, \quad (A24)$$

$$\text{де } S_i^2 = \frac{1}{(r-1)} \sum_{k=1}^r (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2.$$

3. Виконуємо точкове оцінювання параметрів коефіцієнтів регресії.

Оцінка математичного очікування μ_{b_i} коефіцієнта регресії b_i збігається з його оцінкою B_i .

Оцінки дисперсії коефіцієнта регресії $S_{b_i}^2 = \sigma_e^2 C_{ii}$.

Оцінка коефіцієнта коваріації для i -го і k -го коефіцієнтів регресії $K_{ik} = \sigma_e^2 C_{ik}$.

Для оцінки дисперсії відтворюваності σ_e^2 використовується S_e^2 .

4. Перевірка значущості коефіцієнтів регресії. Перевірка проводиться для кожного коефіцієнта і зводиться до перевірки основної гіпотези $H_0: b_i = 0$ та альтернативної $H_1: b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для перевірки складаються статистики, що мають розподіл Стюдента:

$$t_i = \frac{|B_i|}{S_{b_i}}, \quad (A25)$$

де $S_{b_i} = \sqrt{S_e^2 C_{ii}}$ – оцінка середньоквадратичного відхилення для коефіцієнта B_i .

За розподілом Стюдента при числі ступенів свободи $[m(r-1)]$, рівній числу ступенів свободи оцінки S_e^2 в (A25) і заданому рівні значимості α визначається квантиль $t_\alpha[m(r-1)]$. Якщо $t_i > t_\alpha[m(r-1)]$, то нульова гіпотеза повинна бути відкинута і, отже, коефіцієнт B_i - збережений в моделі.

5. Перевірка адекватності моделі. Перевірка проводиться шляхом порівняння залишкової дисперсії $S_{i\bar{y}0}^2$ з дисперсією відтворюваності S_e^2 , отриманої при повторних дослідях. При неадекватній моделі залишкова дисперсія буде значимо переважати над S_e^2 . Для перевірки обчислюється статистика

$$F = \frac{S_{i\bar{y}0}^2}{S_e^2} \quad (A26)$$

з розподілом Фішера зі ступенями свободи $[m-(n+1)]$ в чисельнику і $[m(r-1)]$ в знаменнику. Задається рівень значимості α і визначається квантиль $F_\alpha [m-(n+1), m(r-1)]$, якщо $F \leq F_\alpha [m-(n+1), m(r-1)]$, то приймається гіпотеза про адекватність моделі. В іншому випадку гіпотеза відкидається.

6. Перевірка працездатності моделі. Для перевірки обчислюється коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{r[m-(r-1)]S_{i\bar{y}0}^2 + m(r-1)S_e^2}{r \sum_{i=1}^m [Y_i - \bar{Y}]^2 + m(r-1)S_e^2}, \quad (A27)$$

$$\text{де } \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{Y}_i.$$

Коефіцієнт детермінації показує, яка частина із загального розсіювання вимірних значень відгуку щодо його середнього значення визначається обраною регресійною моделлю. Межі зміни коефіцієнта: $0 \leq R^2 \leq 1$. Якщо $R^2=0$, то вплив факторів не проявляється, а дані вимірів визначаються випадковими впливами. Чим ближче R^2 до одиниці, тим краще якість пророкувань дослідних даних обраною моделлю. На практиці приймають $R_{\min}^2 = 0.75$, при $R^2 \geq R_{\min}^2$ вважають, що модель цілком працездатна.

Додаток Б. Кореляційний аналіз. Індивідуальні завдання.

У сучасних автономних платформах (зокрема, безпілотниках, мобільних наземних станціях та інтелектуальних сенсорних мережах) широко застосовуються адаптивні системи контролю, в яких значення одного параметра не вимірюється безпосередньо, а оцінюється на основі іншого – за результатами аналізу великої кількості експериментальних спостережень. Розглядається ситуація, у якій: $X(V)$ – це налаштовуваний керуючий параметр системи (наприклад, інтенсивність сигналу, напруга живлення чи кількість тактів виконання алгоритму ШІ), одиниці довільні; $Y(U)$ – це спостережуваний результат або ефективність системи (наприклад, відсоток / частка успішної ідентифікації цілей, точність класифікації або коефіцієнт утилізації ресурсу), у відсотках.

Варіант № 1

$V \setminus U$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	9	6				
0,6-0,7	5	5		8		
0,7-0,8	3	7		19		
0,8-0,9			6		4	6
0,9-1,0			4		4	6

Варіант № 2

$V \setminus U$	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	5	8				
40-55	1	1				
55-70	1	4		24	6	5
70-85			3	8	5	
85-100				1	6	1

Варіант № 3

$V \setminus U$	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	4					
0,6-0,7		3	5			
0,7-0,8			7	21		
0,8-0,9			4	7	4	4
0,9-1,0			4		8	1

Варіант № 4

$V \setminus U$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	6	1				
40-55		2	5	4		
55-70	1	2		17		
70-85			7			4
85-100					1	12

Варіант № 5

$V \setminus U$	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	9	2				
0,6-0,7	1	2	5			
0,7-0,8		4	2	18		
0,8-0,9			5			7
0,9-1,0				1	1	5

Варіант № 6

V \ U	2 - 4	4-6	6 -8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
0,5-0,6	6	8				
0,6-0,7	3	5	4			
0,7-0,8	3	8		17		
0,8-0,9			5		6	
0,9-1,0					8	9

Варіант № 7

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	9	5				
40-55	1	2	3	8		
55-70	2	3	2	29		
70-85			6	4	2	5
85-100			1	2	7	4

Варіант № 8

V \ U	2 - 4	4-6	6 -8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
0,5-0,6	6	5				
0,6-0,7		9				
0,7-0,8		2		15	7	
0,8-0,9			6	4	2	2
0,9-1,0					1	1

Варіант № 9

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	5	8				
40-55	1	1	1			
55-70		1		15		
70-85			8	7		8
85-100					1	5

Варіант № 10

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	4	6				
0,6-0,7		6	6			
0,7-0,8	3	3		18		
0,8-0,9			6	6	6	
0,9-1,0			1		5	11

Варіант № 11

V \ U	2 - 4	4-6	6 -8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
25-40	5					
40-55		3	4			
55-70		8		28	5	
70-85			1	7		6
85-100				4	9	1

Варіант № 12

V \ U	2 - 4	4-6	6 -8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
0,5-0,6	5	1				
0,6-0,7		1	5	5		
0,7-0,8		7		18		
0,8-0,9			1	5		8
0,9-1,0			2	1	6	12

Варіант № 13

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	4	3				
40-55		1				
55-70		6		18	1	
70-85			8		5	3
85-100					5	9

Варіант № 14

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	6	1				
0,6-0,7	4	8	3			
0,7-0,8		2		2	4	
0,8-0,9			5			6
0,9-1,0			1		8	9

Варіант № 15

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	7	6				
40-55	5	1				
55-70	2		8	17	2	
70-85			1	2	5	6
85-100					9	9

Варіант № 16

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	4					
0,6-0,7		3	3			
0,7-0,8		7		22	4	
0,8-0,9			7	8	2	
0,9-1,0					1	6

Варіант № 17

V \ U	2 - 4	4-6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
25-40	2					
40-55		9				
55-70		2	4	26		
70-85			5	5		5
85-100				2	9	3

Варіант № 18

V \ U	2 - 4	4-6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
0,5-0,6	3	1				
0,6-0,7	3	9	4			
0,7-0,8	3	3		22		3
0,8-0,9			8	2	2	
0,9-1,0				2	7	12

Варіант № 19

V \ U	2 - 4	4-6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
25-40	7	4				
40-55	3	7	1			
55-70		8	7	17	5	
70-85			2	7		5
85-100				2	1	8

Варіант № 20

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	7	5				
0,6-0,7		1	3	5		
0,7-0,8		2	1	29		2
0,8-0,9			8	6	9	6
0,9-1,0				5	1	3

Варіант № 21

V \ U	2 - 4	4-6	6 -8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
25-40	8	2				
40-55		4				
55-70		1	3	15	2	
70-85			7			
85-100					1	8

Варіант № 22

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	9					
0,6-0,7		5	4			
0,7-0,8	1	5	1	28	1	5
0,8-0,9			7	7	4	
0,9-1,0					1	7

Варіант № 23

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	7	5				
40-55	4	3	2			
55-70		2		27		
70-85			1	5		1
85-100					6	5

Варіант № 24

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	2					
0,6-0,7		1	4			
0,7-0,8		8	4	22		
0,8-0,9			3	8		
0,9-1,0					5	7

Варіант № 25

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	1	7				
40-55		4	1	7		
55-70		1	3	21		
70-85			4	6		
85-100					1	6

Варіант № 26

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	2	6				
0,6-0,7	2	8	5	7		
0,7-0,8	1	7		24		
0,8-0,9			1	2	9	
0,9-1,0					8	9

Варіант № 27

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	7		1			
40-55		8				
55-70	1	7		29	4	4
70-85			7		2	2
85-100				4	2	12

Варіант № 28

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	9	7				
0,6-0,7	5	2	2			
0,7-0,8		8	6	2		
0,8-0,9			7		6	7
0,9-1,0					8	12

Варіант № 29

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	1	4				
40-55		6	1			
55-70			6	21		
70-85			6	9	3	
85-100			3	2	3	11

Варіант № 30

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	6					
0,6-0,7	1	4	6			
0,7-0,8		3		18		
0,8-0,9			5	4		
0,9-1,0				1	3	12

Варіант № 31

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	5	7				
0,6-0,7		6	5			
0,7-0,8	2		4	23		
0,8-0,9			1		7	5
0,9-1,0					5	11

Варіант № 32

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	6	6				
40-55		1	3			
55-70			2	15		
70-85			8	9	6	
85-100			2		3	9

Варіант № 33

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	1	2				
0,6-0,7	4	5	5			
0,7-0,8		7		25	5	2
0,8-0,9			4	9		
0,9-1,0				3	8	11

Варіант № 34

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
25-40	5	5				
40-55	1	2	6			
55-70	1	5		2		
70-85			6	4		
85-100			3		2	9

Варіант № 35

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	9	1				
0,6-0,7		6	4	1		
0,7-0,8		7		24		4
0,8-0,9			7	6		
0,9-1,0			5		6	12

Варіант № 36

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	7	4	1			
40-55	2	5				
55-70	1	5		23		
70-85			1	2	4	
85-100				5	1	1

Варіант № 37

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	4	3				
0,6-0,7	2	8				
0,7-0,8		1		28	5	
0,8-0,9			3		5	7
0,9-1,0					9	4

Варіант № 38

V \ U	2 - 4	4-6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
25-40	1	5				
40-55		5	1	7		
55-70		2		2	2	
70-85			5			
85-100				5	1	7

Варіант № 39

V \ U	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	5	8				
0,6-0,7	4	3	2			
0,7-0,8		1	8	16		
0,8-0,9		2	6			
0,9-1,0					4	5

Варіант № 40

V \ U	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
25-40	5	3	3			
40-55	1	3	6			
55-70	3	2	2	2	7	
70-85			9		4	8
85-100					1	6

Варіант № 41

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	4	6				
0,6-0,7		1	1			
0,7-0,8	3	5	8	25	1	
0,8-0,9			10	8	7	1
0,9-1,0					2	6

Варіант № 42

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	8					
23 - 36		7	1		1	
36 - 49		7		15		
49 - 62			7	3	4	
62 - 75					4	4

Варіант № 43

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	5		1			
0,6-0,7		1	4			
0,7-0,8		6		23		
0,8-0,9			9		4	2
0,9-1,0					5	7

Варіант № 44

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	5	4				
23 - 36		9	3			
36 - 49	3	5	7	19		
49 - 62			5	6		
62 - 75				2	9	6

Варіант № 45

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	2	4				
12 - 19	5	1	3	1	4	
19 - 24				20		5
24 - 29		4	10	4		8
29 - 34			1	1	3	11

Варіант № 46

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	3	3				
23 - 36	3	1		3		
36 - 49		8		22	3	
49 - 62			9	5	9	4
62 - 75			3		3	4

Варіант № 47

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	6	1				
12 - 19		6	6		2	
19 - 24		8		29		5
24 - 29			2	6		4
29 - 34			5		10	3

Варіант № 48

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	5	1				
23 - 36	2	3	1	1		
36 - 49		7	6	17		
49 - 62			5	7	7	
62 - 75				6	2	6

Варіант № 49

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	3					
0,6-0,7	3	2	4			
0,7-0,8		6		24		4
0,8-0,9			9	6	5	2
0,9-1,0			5		1	3

Варіант № 50

Y \ X	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
10 - 23	6	2				
23 - 36		3	1	5		
36 - 49		7		21		1
49 - 62			3	7	7	6
62 - 75			2	5	9	4

Варіант № 51

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	9	2				
12 - 19	4	3	6			
19 - 24	2	2		17		2
24 - 29			8	9	3	6
29 - 34				3	5	6

Варіант № 52

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	9	7	1			
23 - 36	1	2	4			
36 - 49		6	7	18	1	
49 - 62		3	8	7		6
62 - 75			3	3	4	7

Варіант № 53

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	3	8				
12 - 19	5	3			4	
19 - 24		8	8	15	4	
24 - 29			2		9	5
29 - 34					4	3

Варіант № 54

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	10	4				
23 - 36		10	5			
36 - 49	3	1	4	27	1	
49 - 62		5	1	9	4	5
62 - 75			1	6	8	10

Варіант № 55

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	4	8				
0,6-0,7		3	6			
0,7-0,8		6	1	24		2
0,8-0,9			8	8	6	3
0,9-1,0					7	8

Варіант № 56

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	7	6				
23 - 36	5	5	5			
36 - 49		2	7	23		
49 - 62			1	9	7	5
62 - 75				5	6	9

Варіант № 57

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	7	3				
0,6-0,7	1	4	3			
0,7-0,8		7		22		
0,8-0,9			10	2	8	2
0,9-1,0					9	5

Варіант № 58

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	2	6	1			
23 - 36	3	5	1	8		
36 - 49			2	24	7	3
49 - 62			7	3	4	3
62 - 75			5		6	11

Варіант № 59

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	8	1				
0,6-0,7		3	2			
0,7-0,8				29		
0,8-0,9			9	3	8	
0,9-1,0					5	5

Варіант № 60

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	4					
23 - 36	3	6	6	1		
36 - 49		7		27	2	1
49 - 62			7	4		
62 - 75			3	1	10	4

Варіант № 61

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	5					
12 - 19		1	5			
19 - 24		5		17		4
24 - 29			4	6		
29 - 34			2		7	10

Варіант № 62

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
7 - 12	5	8				
12 - 19		2	3			
19 - 24		2		20	1	
24 - 29			6			1
29 - 34					6	8

Варіант № 63

Y \ X	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
7 - 12	4					
12 - 19	3	10	4			
19 - 24		5		19		
24 - 29			8			
29 - 34			2		10	7

Варіант № 64

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	2	1				
23 - 36		4	6			
36 - 49	2		5	26	2	4
49 - 62			1	6	4	2
62 - 75			3		7	4

Варіант № 65

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	6					
12 - 19		5	3	7		
19 - 24		4	5	28	2	
24 - 29			1		2	2
29 - 34					8	11

Варіант № 66

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	1	4				
23 - 36	4	2	6			
36 - 49		2		18		
49 - 62			6		4	
62 - 75					4	7

Варіант № 67

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	7	7	3			
12 - 19		3	6			
19 - 24		5	5	28	4	
24 - 29		2	1	6	6	
29 - 34			2		9	4

Варіант № 68

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	8	7				
23 - 36		5	3			
36 - 49		1		18		
49 - 62		5	3		2	4
62 - 75				5	8	6

Варіант № 69

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	7					
23 - 36	1	1	4	2		
36 - 49		2	1	23	4	
49 - 62			6		5	8
62 - 75					9	3

Варіант № 70

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
7 - 12	8	5	3			
12 - 19		9				
19 - 24		4		24		
24 - 29			9	6	3	5
29 - 34					3	7

Варіант № 71

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
7 - 12	9		3			
12 - 19	3	9	5		1	
19 - 24		8		18		
24 - 29			8	6		7
29 - 34				4	7	7

Варіант № 72

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 23	9	3				
23 - 36		6				
36 - 49	2	1	5	22		
49 - 62		7	10	5	9	
62 - 75			2	2	9	12

Варіант № 73

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
0,5-0,6	9	4	3			
0,6-0,7	3	1	6			
0,7-0,8	2	4	8	22		
0,8-0,9			1	4		4
0,9-1,0					6	12

Варіант № 74

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	9	6				
0,6-0,7	1	8	1			
0,7-0,8		6	6	26		
0,8-0,9			10	7	4	7
0,9-1,0					3	11

Варіант № 75

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 - 12	9					
12 - 19	4	8	1			
19 - 24				15		
24 - 29			6	4		5
29 - 34					8	6

Варіант № 76

Y \ X	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16
8 - 12	4	7				
12 - 16	2	1		7		
16 - 20		5	6	18		
20 - 24			6		5	
24 - 28					9	9

Варіант № 77

Y \ X	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21
18 - 22	4					
22 - 26		1	6			
26 - 30		8		17	4	
30 - 34			1			2
34 - 38					4	7

Варіант № 78

Y \ X	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29
22 - 28	1	5				
28 - 34		1	4			
34 - 40		5		15		
40 - 46			4	3		4
46 - 52					1	11

Варіант № 79

Y \ X	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
64 – 70	1	3				
70 - 76		5		1		
76 - 82			3	23		
82 - 88			1	7	2	6
88 - 94					3	8

Варіант № 80

Y \ X	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
20 - 30	8	2				
30 - 40	4	5	2			
40 - 50	1	3		2		
50 - 60		6	7			7
60 - 70			1		1	7

Варіант № 81

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	4	2				
0,6-0,7		5	3			
0,7-0,8			6	20	6	
0,8-0,9			2	7	5	
0,9-1,0				3	7	4

Варіант № 82

Y \ X	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39	39 - 43	43 - 47
33 - 43	1	8				
43 - 53		5	6	4		
53 - 63		6		28		
63 - 73			8	8	6	6
73 - 83			2	2	7	11

Варіант № 83

Y \ X	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34	34 - 38	38 - 42
0,5-0,6	1	4				
0,6-0,7		6	3			
0,7-0,8			6	45	5	
0,8-0,9			2	10	6	
0,9-1,0				4	7	3

Варіант №84

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 - 20	5	8				
20 - 30	3	5	2	4		
30 - 40		2		29	4	
40 - 50			9		7	
50 - 60					9	12

Варіант № 85

Y \ X	2 - 8	8 - 14	14 - 20	20 - 26	26 - 32	32 - 38
5 - 15	2	3				
15 - 25		4	1			
25 - 35			6	30	7	
35 - 45			5	12	3	
45 - 55				6	9	2

Варіант № 86

Y \ X	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
0,5-0,6	1	2				
0,6-0,7		7	2	3		
0,7-0,8		2		18		
0,8-0,9			9	9	5	4
0,9-1,0					7	4

Варіант № 87

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
30 - 40	3	1				
40 - 50		2	3			
50 - 60			5	20	7	
60 - 70			6	8	4	
70 - 80				2	5	3

Варіант № 88

Y \ X	3 - 9	9 - 15	15 - 21	21 - 27	27 - 33	33 - 39
0,5-0,6	9	8				
0,6-0,7		1				
0,7-0,8		8	2	26		5
0,8-0,9			5		9	
0,9-1,0					8	9

Варіант №89

Y \ X	7 - 11	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31
21 - 29	1	4				
29 - 37	1	2	3			
37 - 45			7	30	3	
45 - 53			4	10	6	
53 - 61				5	4	2

Варіант № 90

Y \ X	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30
16- 24	9	2				
24 - 32		1	5	6		
32 - 40				18		
40 - 48			6			
48 - 56			4	3	5	8

Варіант № 91

Y \ X	4 - 14	14 - 24	24 - 34	34 - 44	44 - 54	54 - 64
0,5-0,6	5	4				
0,6-0,7	1	3	6			
0,7-0,8			5	45	5	
0,8-0,9			2	8	7	
0,9-1,0				4	8	2

Варіант № 92

Y \ X	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
25 - 35	6	8				
35 - 45		6	5			
45 - 55			7	21	4	5
55 - 65			4	7	4	4
65 - 75			2	2	6	5

Варіант № 93

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	4	2				
0,6-0,7		2	3	1		
0,7-0,8			5	50	6	
0,8-0,9				10	8	1
0,9-1,0					2	3

Варіант № 94

Y \ X	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29	29 - 33
18 - 28	9	5				
28 - 38		3				
38 - 48		5		16	2	
48 - 58			5		5	
58 - 68				2	2	8

Варіант № 95

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	2	2				
0,6-0,7		4	5			
0,7-0,8			10	45	7	
0,8-0,9			3	10	6	
0,9-1,0					2	5

Варіант № 96

Y \ X	4 - 10	10 - 16	16 - 22	22 - 28	28 - 34	34 - 40
17 - 27	8	4				
27 - 37	4	2	3	1		
37 - 47		8	6	29	6	
47 - 57			8	2	7	
57 - 67			1	5	8	1

Варіант № 97

Y \ X	1 - 9	9 - 17	17 - 25	25 - 33	33 - 41	41 - 49
13 – 23	5	7				
23 - 33		6	8			
33 - 43			4	40	5	
43 - 53			6	12	2	
53 - 63				1	3	2

Варіант № 98

Y \ X	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15
0,5-0,6	3	5				
0,6-0,7		3	5			
0,7-0,8		4		24	5	
0,8-0,9			1	5	9	6
0,9-1,0					6	6

Варіант №99

Y \ X	25 – 29	29 – 33	33 – 37	37 – 41	41 – 45	45 – 49
35 – 45	1	7				
45 – 55	1	7	5			
55 – 65			8	25		
65 - 75			1	6	8	3
75 - 85					8	11

Варіант №100

Y \ X	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27	27 – 29	29 – 31
20 – 28	8	7				
28 – 36	4	7	6			
36 – 44				23	2	
44 - 50		2	9		7	3
50 - 56					4	11

Варіант № 101

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
7 – 12	8					
12 – 19		2	6			
19 – 24		2		26		
24 – 29			1	9	7	6
29 – 34					1	11

Варіант № 102

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
10 – 23	8	5				
23 – 36		3	6	7		
36 – 49		4	7	18		
49 – 62			6	5	3	1
62 – 75					1	6

Варіант № 103

Y \ X	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
10 - 23	1	4				
23 - 36	4	1	2		4	
36 - 49			3	17		
49 - 62			6	7		
62 - 75			1		9	9

Варіант № 104

Y \ X	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
0,5-0,6	1	5				
0,6-0,7	3	3	1			
0,7-0,8		2	5	18		1
0,8-0,9			7	4	2	3
0,9-1,0			5	5	1	3

Варіант № 105

Y \ X	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19	20-23
0,5-0,6	3	7				
0,6-0,7		7	5			
0,7-0,8		3		17	7	
0,8-0,9			6	3	5	
0,9-1,0			2		5	1

Додаток В. Знаходження загального вигляду та коефіцієнтів апроксимуючої залежності. Індивідуальні завдання.

У сучасних інформаційно-керованих системах оборонного призначення, зокрема в автономних безпілотних платформах (дронів, роботизованих розвідників), одним із критичних параметрів є швидкість обробки або передавання керуючого сигналу u залежно від напруги живлення або внутрішнього електричного потенціалу V . Інженери провели експериментальне дослідження залежності швидкості інформаційного відгуку u (в умовних одиницях) від вхідної напруги системи V (в вольтах), отримавши такі дані:

№1	V	1,5	2,7	3,6	4,8	6,3	7,5	8,7	9,9	11,1	12,3	13,5
	u	2,91	4,12	4,85	5,69	6,68	7,41	8,05	8,68	9,24	9,52	9,76
№2	V	2,4	3,3	4,2	5,1	6	6,9	7,8	8,4	9,3	10,2	11,1
	u	3,82	4,62	5,3	5,93	6,47	7,04	7,57	7,89	8,36	8,83	9,3
№3	V	1,8	3	4,5	6,6	8,1	9,6	10,5	11,4	12,6	13,8	
	u	3,23	4,37	5,51	6,86	7,7	8,51	8,95	9,42	9,96	10,39	
№4	V	2,1	2,7	3,3	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3	6,9	7,5	8,1
	u	3,55	4,08	4,59	5,09	5,51	5,88	6,3	6,69	7,02	7,38	7,65
№5	V	3,9	4,8	6	7,2	8,1	9	10,2	11,1	12,3	13,5	14,7
	u	5,06	5,72	6,5	7,19	7,72	8,21	8,83	9,24	9,83	10,59	11,44
№6	V	1,5	3	4,2	5,7	7,2	8,4	9,6	10,8	12	13,2	
	u	2,93	4,33	5,28	6,32	7,22	7,85	8,53	9,1	9,69	10,32	
№7	V	2,1	3,6	4,8	6	7,5	9	9,9	11,4	12,3	2,1	3,6
	u	3,53	4,87	5,7	6,47	7,38	8,22	8,67	9,41	9,8	3,53	4,87

У процесі розробки адаптивного обчислювального модуля для автономних систем (наприклад, безпілотних літальних апаратів або наземних роботизованих платформ), що працюють на базі штучного інтелекту,

дослідники зіткнулись із задачею оптимізації обчислювального навантаження залежно від кількості одночасно оброблюваних сенсорних сигналів. Нехай x – кількість сенсорних входів, які обробляються в реальному часі, а y – загальний час реакції системи (у мс) або обчислювальне навантаження на процесор, зафіксоване в умовних одиницях. Дані експериментальних вимірювань подано у вигляді таблиці:

№8	x	2,4	3,6	5,4	7,2	8,4	10,8	12,6	15	16,8	18,6	20,4
	y	10	12,6	16,2	18,2	19,1	21	21,7	23,1	23,5	24,19	24,88
№9	x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	y	0	11,8	16,8	19,5	21,5	22,9	24	24,7	25,2	26,04	
№10	x	1,2	3	4,8	7,8	10,2	12,6	14,4	17,4	20,4	23,4	26,4
	y	6	11,5	15	18,9	20,6	21,8	22,6	23,8	24,5	25,31	26,15
№11	x	0,6	4,2	6,6	9,6	13,2	16,2	19,8	22,8	25,2	27,6	
	y	3,4	14,3	17,5	20	21,9	23,3	24,3	25,2	25,4	25,84	
№12	x	0	1,8	3,6	6	8,4	11,4	13,8	16,8	19,2	21,6	
	y	0	8,2	13	16,9	19	21,3	22,5	23,6	24,2	25,1	
№13	x	2,4	4,8	7,2	9,6	12	15,6	18	20,4	23,4	26,4	29,4
	y	10,1	15,2	18,1	20	21,7	23,2	23,9	24,4	25,1	26,04	26,98

У процесі проєктування високопродуктивного обчислювального модуля для автономних роботизованих систем військового призначення, інженери досліджують залежність споживаної потужності (енергоспоживання) від рівня обчислювального навантаження. Нехай x – кількість одночасно оброблюваних запитів або активних нейромережевих процесів; $y = f(x)$ – споживана потужність (у мВт), зафіксована на дослідному зразку. Отримано такі експериментальні дані:

№14	x	4,5	5,46	6,18	7,38	8,82	10,26	11,94	13,38
	y	1940	2785	3501	4862	6766	8956	11858	14650
№15	x	5,7	6,42	7,38	8,34	9,54	10,74	11,7	12,9
	y	3012	3760	4861	6099	7826	9750	11424	13687
№16	x	4,98	6,18	7,14	7,86	9,3	10,5	12,18	13,86
	y	2345	3503	4575	5465	7460	9348	12300	15641
№17	x	4,74	5,7	6,9	8,58	10,02	11,46	13,14	14,1
	y	2139	3015	4296	6427	8572	10996	14159	16143
№18	x	5,94	7,14	8,1	9,06	9,78	10,98	12,18	13,62
	y	3254	4577	5774	7110	8195	10160	12303	15135
№19	x	5,62	6,76	8,54	9,42	10,12	11,45	12,53	13,76
	y	2570	4025	6115	7477	8582	10576	12768	15650
№20	x	4,74	6,42	7,62	9,06	10,5	11,7	12,66	13,38
	y	2145	3750	5162	7115	9345	11420	13227	14647

У процесі розробки спеціалізованого нейропроцесора для автономної бойової системи, яка виконує виявлення об'єктів в умовах реального часу, було необхідно дослідити поведінку нелінійної функції активації, що використовується в структурі нейронної мережі. Величина x – це нормалізоване вхідне збудження нейрона, а $y = f(x)$ – значення функції активації, що визначає вихід нейрона після обробки сигналу.

За результатами тестування прототипу мережі, отримано такі значення:

№21	x	0,05	0,13	0,21	0,33	0,45	0,53	0,65	0,73
	y	0,384	0,644	0,762	0,851	0,91	0,931	0,953	0,972
№22	x	0,09	0,15	0,23	0,29	0,35	0,43	0,49	0,57
	y	0,543	0,675	0,779	0,83	0,868	0,897	0,925	0,942

№23	x	0,33	0,43	0,51	0,61	0,69	0,77	0,85	0,91
	y	0,856	0,905	0,923	0,949	0,967	0,976	0,984	0,993
№24	x	0,07	0,19	0,31	0,45	0,59	0,71	0,79	0,87
	y	0,472	0,74	0,841	0,906	0,947	0,968	0,977	0,989
№25	x	0,11	0,25	0,37	0,47	0,55	0,63	0,75	0,89
	y	0,595	0,8	0,872	0,916	0,934	0,953	0,975	0,99
№26	x	0	0,16	0,28	0,44	0,56	0,72	0,84	0,96
	y	0	0,694	0,819	0,902	0,939	0,969	0,981	0,996
№27	x	0,04	0,12	0,2	0,32	0,48	0,6	0,68	0,8
	y	0,328	0,618	0,749	0,845	0,917	0,948	0,962	0,978
№28	x	0,08	0,24	0,36	0,44	0,52	0,64	0,76	0,88
	y	0,508	0,788	0,867	0,903	0,929	0,955	0,973	0,987
№29	x	0	0,17	0,27	0,35	0,41	0,49	0,55	0,67
	y	0	0,712	0,813	0,865	0,895	0,921	0,936	0,961
№30	x	0,24	0,32	0,4	0,48	0,56	0,64	0,8	0,92
	y	0,79	0,848	0,885	0,915	0,938	0,953	0,981	0,992

У новітніх оборонних розробках широко застосовуються високопродуктивні обчислювальні блоки для реалізації штучного інтелекту (ШІ). Надійна робота таких процесорів потребує ефективного терморегулювання, яке базується на температурно-датчиковій інформації. В рамках дослідження температурної стабільності було змодельовано залежність температури теплоносія y (°C) від швидкості потоку охолоджувальної рідини x (л/год), яка подається через рідинну систему охолодження. Отримано такі дані:

№31	x	369	448	527	606	685	764	843	922	1001		
	y	28,15	28,33	28,50	28,66	28,85	29,11	29,33	29,53	29,80		
№32	x	929	958	987	1016	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219
	y	29,58	29,69	29,77	29,83	29,96	29,98	30,08	30,22	30,30	30,34	30,45

№33	x	383	476	569	662	755	848	941	1034	1127		
	y	28,18	28,34	28,56	28,81	29,06	29,35	29,63	29,90	30,16		
№34	x	907	914	921	928	935	942	949	956	963	970	
	y	29,51	29,52	29,58	29,59	29,58	29,60	29,60	29,69	29,66	29,67	
№35	x	301	312	323	334	345	356	367	378	389		
	y	28,04	28,08	28,09	28,12	28,09	28,10	28,15	28,19	28,22		
№36	x	920	940	960	980	1000	1020	1040	1060	1080	1100	1120
	y	29,55	29,61	29,64	29,75	29,81	29,82	29,92	29,95	30,07	30,07	30,14
№37	x	332	374	416	458	500	542	584	626	668		
	y	28,09	28,18	28,21	28,34	28,44	28,50	28,60	28,73	28,87		
№38	x	975	1050	1125	1200	1275	1350	1425	1500	1575	1650	
	y	29,72	29,94	30,20	30,37	30,59	30,78	31,01	31,19	31,30	31,45	

У проєктуванні автономних інтелектуальних систем, таких як мобільні роботизовані платформи для оборонного та цивільного призначення, широко використовуються технічні рідини (наприклад, мастильні матеріали або рідкі охолоджувачі), властивості яких істотно залежать від температури. При експлуатації в умовах відсутності прямого вимірювання температури (наприклад, у закритих вузлах або в екстремальних середовищах), температура оцінюється за непрямыми параметрами, зокрема, за в'язкістю η . У таких випадках вбудовані сенсори визначають η , а температура T відновлюється з табличних залежностей.

№39	η	287	291	295	299	303	307		
	T	1,153	0,987	0,895	0,795	0,740	0,730		
№40	η	289	295	301	307	313	319		
	T	1,095	1,037	0,703	0,633	0,641	0,548		
№41	η	292	301	310	319	328	337	346	355
	T	1,013	0,865	0,557	0,502	0,388	0,350	0,272	0,185

№42	η	292	301	310	319	328	337		
	T	1,013	0,833	0,672	0,437	0,389	0,308		
№43	η	288	293	298	303	308	313	318	323
	T	1,124	0,898	0,952	0,673	0,665	0,576	0,557	0,445
№44	η	288	293	298	303	308	313		
	T	1,124	0,902	0,826	0,698	0,684	0,631		
№45	η	289	295	301	307	313	319	325	
	T	1,095	0,978	0,760	0,646	0,563	0,482	0,460	
№46	η	291	299	307	315	323	331		
	T	1,039	0,883	0,622	0,602	0,401	0,347		
№47	η	285	287	289	291	293	295	297	299
	T	1,215	1,239	1,098	0,960	1,012	0,909	0,954	0,749
№48	η	286	289	292	295	298	301	304	307
	T	1,184	1,110	0,929	0,951	0,795	0,818	0,794	0,663
№49	η	291	299	307	315	323	331		
	T	1,039	0,772	0,632	0,597	0,481	0,408		
№50	η	288	293	298	303	308	313	318	
	T	1,124	1,064	0,787	0,824	0,645	0,544	0,556	

В системах штучного інтелекту, що використовуються в автономних роботизованих платформах (наземних, повітряних або морських), а також у високоточних інформаційно-аналітичних комплексах оборонного призначення, важливим є адаптивний контроль за зміною ключових параметрів обладнання в реальному часі. Наприклад, температурні, швидкісні або навантажувальні характеристики можуть не вимірюватися напряму, а визначатися за табличними залежностями з інших контрольованих параметрів. У задачі наведено таблицю експериментальних значень параметра y , що залежить від величини x (x – обороти електродвигуна у xv^{-1} , y – температура у контрольній точці, К). Такі табличні залежності виникають при калібруванні сенсорів, побудові цифрових двійників технічних систем, а також у моделях машинного навчання для реального часу, які вбудовуються в ПЗ оборонних технологій. Від точності

апроксимації залежить надійність прийняття рішень штучним інтелектом у системах, де затримки або похибки неприпустимі.

№51	x	1115	1230	1345	1460	1575	1690	1805	1920	2035	2150	2265
	y	30,14	30,44	30,77	31,06	31,23	31,57	31,64	31,84	31,89	31,64	31,54
№52	x	983	1066	1149	1232	1315	1398	1481	1564	1647	1730	1813
	y	29,74	30,11	30,24	30,48	30,71	30,92	31,12	31,31	31,46	31,59	31,69
№53	x	1086	1172	1258	1344	1430	1516	1602	1688	1774	1860	1946
	y	30,05	30,42	30,51	30,81	31,07	31,27	31,43	31,46	31,70	31,77	31,78
№54	x	1003	1106	1209	1312	1415	1518	1621	1724	1827	1930	2033
	y	29,80	30,22	30,41	30,70	30,97	31,21	31,42	31,59	31,71	31,78	31,79
№55	x	1104	1208	1312	1416	1520	1624	1728	1832	1936	2040	2144
	y	30,10	30,33	30,72	31,04	31,19	31,54	31,66	31,69	31,80	31,90	31,72
№56	x	1013	1126	1239	1352	1465	1578	1691	1804	1917	2030	2143
	y	29,83	30,20	30,50	30,81	31,09	31,33	31,54	31,69	31,77	31,79	31,73
№57	x	1073	1146	1219	1292	1365	1438	1511	1584	1657	1730	1803
	y	30,01	30,26	30,52	30,56	30,87	31,14	31,27	31,35	31,59	31,65	31,59
№58	x	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
	y	29,79	30,20	30,39	30,67	30,93	31,17	31,38	31,55	31,68	31,76	31,79
№59	x	1063	1126	1189	1252	1315	1378	1441	1504	1567	1630	1693
	y	29,98	30,28	30,32	30,45	30,68	30,79	30,97	31,20	31,40	31,53	31,46
№60	x	1034	1168	1302	1436	1570	1704	1838	1972	2106	2240	2374
	y	29,89	30,18	30,67	31,02	31,32	31,56	31,72	31,79	31,76	31,61	31,32
№61	x	1060	1120	1180	1240	1300	1360	1420	1480	1540	1600	1660
	y	29,97	30,04	30,27	30,39	30,59	30,82	31,05	31,19	31,38	31,50	31,45
№62	x	987	1074	1161	1248	1335	1422	1509	1596	1683	1770	1857
	y	29,75	29,90	30,27	30,52	30,76	30,98	31,19	31,37	31,52	31,65	31,73
№63	x	1054	1108	1162	1216	1270	1324	1378	1432	1486	1540	1594
	y	29,95	30,17	30,23	30,54	30,49	30,68	30,78	31,02	31,10	31,30	31,29

№64	x	1001	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1809	1910	2011
	y	29,80	30,18	30,39	30,68	30,94	31,18	31,39	31,56	31,69	31,77	31,79
№65	x	1066	1132	1198	1264	1330	1396	1462	1528	1594	1660	1726
	y	29,99	30,18	30,45	30,64	30,84	31,04	30,97	31,24	31,27	31,48	31,71

У процесі проектування автономних розумних сенсорів для систем ситуаційної обізнаності на базі штучного інтелекту (ШІ), що використовуються у безпілотних оборонних комплексах, було виявлено, що чутливість сенсора (коефіцієнт адаптації K) істотно залежить від температури навколишнього середовища T . Надійне прогнозування цієї залежності є критично важливим для функціонування пристрою в умовах екстремального температурного навантаження – наприклад, при дії термічної зброї, у гарячих точках або в умовах військової розвідки. Інженери отримали експериментальні дані в табличному вигляді:

№66		№67		№68		№69		№70	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
600	0,12	825	0,15	725	0,2	860	0,4	620	0,31
650	0,4	850	0,3	775	1,15	880	0,84	640	0,93
700	1,52	875	0,69	800	2,49	900	1,61	660	2,72
725	2,59	900	1,34	850	10,85	920	3	680	7,3
775	7,2	925	2,55	875	21,08	940	5,55	700	18,7
800	11,3	950	4,78	900	39,72	960	9,88	720	45,34
850	26,05	975	8,55	950	127,1	980	17,3	740	104,6
№71		№72		№73		№74		№75	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
550	0,33	675	0,12	520	0,14	740	9,1	520	0,19
575	1,09	725	1,08	560	0,4	760	12,21	580	0,87
600	3,4	750	2,75	600	1,11	780	16,2	620	2,15
625	9,44	800	16,3	640	2,56	800	21,11	680	6,64
650	24,46	825	36,24	680	5,49	820	27,24	720	12,77
675	58,92	850	77,05	720	10,73	840	34,65	780	29,89
700	133,4	875	156,8	760	19,57	860	43,63	860	77,22

№76		№77		№78		№79		№80	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
640	0,95	780	0,11	860	0,32	550	0,31	825	0,15
680	7,35	820	0,51	880	0,6	600	3,41	850	0,31
700	18,68	860	1,95	900	1,14	650	24,45	875	0,69
740	104,7	900	6,92	920	2,05	700	133,4	900	1,41
780	491,5	940	21,66	940	3,69	750	580	925	2,73
820	1984	980	61,93	960	6,43	800	2098	950	5,19
860	7032	1020	162,9	980	10,91	850	6526	975	9,51
№81		№82		№83		№84		№85	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
600	0,14	540	0,33	540	0,15	610	1,81	518	0,16
625	0,39	560	0,54	580	0,41	630	2,69	543	0,31
650	1,13	580	0,87	620	1,02	650	3,85	568	0,59
675	2,95	600	1,4	660	2,33	670	5,52	593	1,09
700	7,12	620	2,16	700	4,8	690	7,68	618	1,84
725	16,39	640	3,19	740	9,11	710	9,87	643	3
750	35,52	660	4,67	780	16,18	730	13,72	668	4,75
№86		№87		№88		№89		№90	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
625	0,22	620	0,29	580	0,69	560	0,55	560	0,25
675	0,81	660	2,72	620	1,71	600	1,38	600	0,67
725	2,61	700	18,68	660	3,82	640	3,22	640	1,56
775	7,18	740	104,9	700	7,75	680	6,66	680	3,38
825	17,35	780	492	740	14,59	720	12,75	720	6,67
875	38,08	820	1983	780	25,82	760	22,84	760	12,21
925	76,65	860	7033	820	43,13	800	38,57	800	21,14

№91		№92		№93		№94		№95	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
740	14,62	540	0,14	740	17,21	650	1,11	650	0,44
760	19,56	600	0,66	760	22,85	700	7,16	700	1,5
780	25,77	640	1,55	780	29,86	750	35,5	750	4,38
800	35,57	700	4,8	800	38,55	800	144,5	800	11,33
820	43,11	760	12,23	820	49,16	850	498,4	850	26,01
840	54,7	820	27,22	840	61,95	900	1498	900	54,55
860	68,68	860	43,64	860	77,2	950	4011	950	105,8
№96		№97		№98		№99		№100	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
600	0,14	740	0,33	625	0,15	610	1,81	740	0,16
625	0,39	760	0,54	675	0,41	630	2,69	760	0,31
650	1,13	780	0,87	725	1,02	650	3,85	780	0,59
675	2,95	800	1,4	775	2,33	670	5,52	800	1,09
700	7,12	820	2,16	825	4,8	690	7,68	820	1,84
725	16,39	840	3,19	875	9,11	710	9,87	840	3,00
750	35,52	860	4,67	925	16,18	730	13,72	860	4,75
№101		№102		№103		№104		№105	
T	K	T	K	T	K	T	K	T	K
625	0,22	620	0,29	740	0,69	560	0,55	560	0,25
675	0,81	660	2,72	760	1,71	600	1,38	600	0,67
725	2,61	700	18,68	780	3,82	640	3,22	640	1,56
775	7,18	740	104,9	800	7,75	680	6,66	680	3,38
825	17,35	780	492	820	14,59	720	12,75	720	6,67
875	38,08	820	1983	840	25,82	760	22,84	760	12,21
925	76,65	860	7033	860	43,13	800	38,57	800	21,14

Додаток Г. Зразок титульного аркуша

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра штучного інтелекту

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

з курсу:

"ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА"

на тему:

"МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ"

Виконав:

Студент 2-го курсу НН ІПСА

Групи КІ-51

Левандович Ю.С.

Перевірив:

доц. Шахновський А.М.

Київ 2025

Додаток Д. Типовий зміст пояснювальної записки

(Примітка: Титульний аркуш та завдання розміщуються у пояснювальній записці перед змістом і у змісті не відображаються)

ВСТУП	4
1. РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ	5
1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЗАДАЧІ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ	5
1.2 ОПИС ПОСЛІДОВНОСТІ ВИКОНАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ	8
1.3 ВИСНОВКИ З РОЗДІЛУ	12
2 РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ	18
2.1 ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ АПРОКСИМАЦІЇ	18
2.2 ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ	22
2.3 ЗНАХОДЖЕННЯ ВИГЛЯДУ ТА КОЕФІЦІЄНТІВ АПРОКСИМУЮЧОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ	25
2.5 ВИСНОВКИ З РОЗДІЛУ	30
ВИСНОВКИ	32
СПИСОК ПОСИЛАНЬ	33
ДОДАТОК А. ТЕКСТИ ПРОГРАМ	34