

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ
ІНСТИТУТ

Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

«До захисту допущено»

В. о. завідувача кафедри

_____ Терещенко І. М.

«___» _____ 2023 р.

Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності: 113 Прикладна математика
на тему: «Моделювання вторинної циркуляції при
інерційному обертанні рідини»

Виконав: студент 4 курсу, групи ФІ-91
Осика Олександр Михайлович

Керівник: проф., д.т.н. Ковалець І. В.

Рецензент: с.н.с., д.т.н. Беженар Р.В.

Засвідчую, що у цій дипломній
роботі немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ
ІНСТИТУТ

Кафедра математичного моделювання та аналізу даних

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський)
Спеціальність (освітня програма) — 113 Прикладна математика,

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри

_____ Терещенко І. М.

«__» _____ 2023 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу

Студент: Осика Олександр Михайлович

1. Тема роботи: *«Моделювання вторинної циркуляції при інерційному обертанні рідини»*,

керівник: проф., д.т.н. Ковалець І. В.,

затверджені наказом по університету №__ від «__» _____ 2023 р.

2. Термін подання студентом роботи: «__» _____ 2023 р.

3. Вихідні дані до роботи: _____

4. Зміст роботи: *Аналіз та виявлення проблематики сучасних моделей вторинних циркуляцій; побудова концептуальної та математичної моделі до сформульованої актуальної задачі; моделювання задачі за допомогою чисельних методів.*

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): *Презентація доповіді*

6. Дата видачі завдання: 10 лютого 2023 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	8.02.2023 – 17.02.2023	Виконано
2	Огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження	18.02.2023 – 16.03.2023	Виконано
3	Побудова концептуальної та розробка математичної моделі	17.03.2023 – 07.04.2023	Виконано
4	Побудова чисельного розв'язку та його аналіз	08.04.2023 – 15.05.2023	Виконано
5	Програмна реалізація чисельного методу та моделювання задачі	16.05.2023 – 07.06.2023	Виконано

Студент

_____ Осика О. М.

Керівник

_____ Ковалець І. В.

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 70 стор., 18 рисунки, 1 таблицю, 28 джерел.

У роботі було проведено дослідження початкового етапу розвитку вторинних циркуляцій рідини та розроблені математичні моделі для аналізу структури вторинних циркуляції біля твердої поверхні. У ході дослідження проаналізований розвиток вихрової течії та розроблена спрощена модель вторинних циркуляцій при інерційному обертанні рідини, що дозволяє ефективно оцінити динаміку течії у в'язкому підшарі та, як наслідок, спростити обчислення для подальшого моделювання.

ВТОРИННІ ЦИРКУЛЯЦІЇ, МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ, МЕТОД КІНЦЕВИХ ОБ'ЄМІВ

ABSTRACT

The qualification work contains: 70 pages, 18 figures, 1 table, 28 sources.

Research carries out the research of the initial stage development for secondary flows. Mathematical models for structure analysis of secondary flows near boundary layer were developed. In progress of research the development of the eddy flows was analyzed and simplified model of secondary circulations for inertial rotation liquid was developed. Obtained results allow to effectively estimate the dynamics of the flow in the viscous boundary layer and, as a result, to simplify calculations for further modeling.

SECONDARY FLOWS, FINITE-DIFFERENCE METHOD,
FINITE-VOLUME METHOD

ЗМІСТ

Вступ.....	8
1 Моделювання вторинної циркуляції при інерційному обертанні рідини	10
1.1 Вторинні течії, як прояв закону збереження циркуляції	11
1.2 Вторинні течії у прикладних задачах	14
1.3 Сучасні дослідження вторинних циркуляцій	18
Висновки до розділу 1.....	18
2 Постановка задачі і математична модель вторинних циркуляцій у придонному шару	20
2.1 Основні рівняння гідродинаміки та загальні припущення	20
2.2 Математична модель	26
2.2.1 Рівняння вільної поверхні	26
2.2.2 Параметризація динаміки висоти примежового шару.....	27
2.2.3 Аналітична оцінка середньої вертикальної швидкості.....	29
2.2.4 Рівняння для радіальних швидкостей у придонному шарі ..	33
2.2.5 Рівняння для вертикальної швидкості	33
Висновки до розділу 2.....	34
3 Чисельний метод розв'язку для математичної моделі	36
3.1 Кінцево-різницевий метод.....	36
3.1.1 Різницеві апроксимації.....	36
3.1.2 Алгоритмізація чисельного методу	38
3.1.3 Оцінка точності різницевих апроксимацій	38
3.1.4 Стійкість різницевої схеми	39
3.1.5 Монотонність наближеного розв'язку	41
3.1.6 Різницеві апроксимації для рівнянь вертикальних швидкостей	42
3.2 Метод скінченних об'ємів (Finite-volume method).....	43
3.2.1 Необхідні перетворення рівнянь	44

3.2.2 Різницеві апроксимації	7 46
3.2.3 Врахування закону збереження	47
3.2.4 Алгоритмізація	48
Висновки до розділу 3	49
4 Моделювання та аналіз результатів	50
4.1 Розвиток течії за часом та відповідність аналітичній оцінці	50
4.2 Розподіл вертикальних швидкостей для різних параметрів часу .	53
4.3 Оцінка дисипації енергії, що викликана вторинною циркуляцією .	54
4.4 Розподіл швидкостей для різних вихідних параметрів	55
4.5 Якісний характер вихрової течії у циліндрі	55
Висновки	58
Перелік посилань	60
Додаток А Тексти програм	63
А.1 Кінцево-різницева модель	63
А.2 Модель для методу кінцевих об'ємів	64
А.3 Додаткові функції для обчислення вертикальних швидкостей	70

ВСТУП

Актуальність дослідження.

Актуальність дослідження насамперед впливає з галузі, до якої належить наведена робота, адже гідродинаміка розв'язує загалом інженерні задачі. Попри це, явища вторинних циркуляцій відіграють важливу роль у широкому спектрі прикладних задач, наприклад:

- Моделювання потоків у каналах, річках, тощо.
- Моделювання потоку рідини через вигнуті труби.
- Циркуляція повітря і пов'язані з ним вертикальні рухи у атмосфері.
- Оцінки ефективності системи охолодження лопаток турбин.

Метою дослідження є розробка спрощених моделей аналізу структури вторинних циркуляції біля твердої поверхні та дослідження початкового етапу розвитку вихрової течії. Для цього необхідно розв'язати **задачу дослідження**, яка складається з наступних задач:

- 1) Огляд сучасних моделей вторинних циркуляцій та визначення їх проблематики.
- 2) Формулювання та побудова концептуальної моделі розвитку вторинних течій у придонному шарі.
- 3) Розробка математичної моделі до сформульованої задачі.
- 4) Застосування чисельних методів для відповідної математичної моделі.
- 5) Моделювання задачі за допомогою чисельних методів, аналіз результатів на коректність.

Об'єктом дослідження є вторинні циркуляції у придонній області при інерційному обертанні рідини.

Предметом дослідження є математичні методи дослідження та сучасні чисельні методи розв'язку задач гідродинаміки, пов'язаних з вторинними циркуляціями.

При розв'язанні поставлених завдань використовувались такі

методи дослідження: рівняння математичної фізики та загальні підходи до розв'язання задач з гідродинаміки; чисельні методи для розв'язку дифференціальних рівнянь у часткових похідних, ефективні програмні засоби для обробки даних та алгоритми виконання операцій лінійної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів:

1) Розроблена двовимірна чисельна модель окремо для примежової області рідини, яка може бути використана як параметризація придонної області при моделюванні течії в усій області з рідиною, що значно підвищує ефективність обчислень шляхом збільшення просторового дозволу сітки біля твердої границі

2) Розроблена спрощена аналітична модель придонної області вторинної течії, яка дозволяє оцінити інтегральні динамічні характеристики течій поблизу границь на початковому етапі розвитку вторинної циркуляції, такі як середня швидкість висхідного руху.

Практичне значення результатів полягає у тому, що сформульований та протестований на коректність підхід дозволяє спростити моделі, що розглядають вторинні циркуляції при інерційному обертанні рідини. Таким чином підвищується гнучкість моделей, адже при потребі розрахунку лише динаміки у примежевих шарах, обчислення може бути значно прискорене, а використання розробленої моделі для отримання граничних умов призводить до економії обчислювальних потужностей.

1 МОДЕЛЮВАННЯ ВТОРИННОЇ ЦИРКУЛЯЦІЇ ПРИ ІНЕРЦІЙНОМУ ОБЕРТАННІ РІДИНИ

Задачі пов'язані з обертанням рідини часто виникають в багатьох природних і технічних системах, починаючи від атмосфери і океанів до турбомашин і гідравлічних систем. Інерційне обертання рідини у таких системах призводить до виникнення явища, що називається вторинною циркуляцією.

Одним із ключових понять, пов'язаних із вивченням вторинних циркуляцій, є поняття циркуляції. Циркуляція визначає інтегральну міру вихрового руху всередині деякої замкнутої області рідини. Вона є важливим параметром для аналізу динаміки рідини та дозволяє оцінити вихрову активність у системі та пов'язані з нею явища, такі як перенесення забруднень, зважених намулів тощо. Вторинна циркуляція є вихровим рухом, який виникає усередині рідини, але на відміну від первинної циркуляції, яка утворюється внаслідок безпосереднього впливу зовнішніх сил, вторинна циркуляція виникає в результаті взаємодії інерційних сил і сил тертя всередині рідини. Її наявність може суттєво змінювати загальну динаміку рідини. Поява вторинних циркуляцій пов'язана з наявністю значного градієнта швидкості всередині рідини, що виникає внаслідок нерівномірного розподілу швидкостей всередині системи [1].

Дослідження вторинних циркуляцій має важливе практичне значення для багатьох областей, включаючи аеродинаміку, гідродинаміку, морську та атмосферну динаміку, а також для проектування та оптимізації технічних систем. Вторинні циркуляції можуть впливати на теплообмін, масообмін і перемішування всередині рідини, а також формування течій і потоків. Розуміння та оцінка цих процесів дозволяє покращити ефективність та надійність технічних пристроїв, а також

передбачати та контролювати поведінку рідини у різних ситуаціях. Таким чином, вивчення вторинних циркуляцій при інерційному обертанні рідини має актуальність і важливість як фундаментальної науки, так практичних додатків.

У цьому розділі далі докладніше опишемо приклади вторинних циркуляцій у природних та інженерних системах, а також наслідки, які викликає це явище. Також обґрунтуємо і доведемо виникнення вторинних циркуляцій при інерційному обертанні з формальної точки зору. Зрештою, сформулюємо актуальну задачу для подальшого розв'язку.

1.1 Вторинні течії, як прояв закону збереження циркуляції

Насамперед покажемо, що існування вторинних циркуляцій можна довести аналітично. Для цього згадаємо важливі закони гідродинаміки та розглянемо деякий вигнутий потік рідини.

Взагалі кажучи, у гідродинаміці існує дві основні міри обертання рідини - це циркуляція і завихреність. циркуляція - це інтегральна, скалярна величина, що є макроскопічною мірою обертання для скінченної площі рідини. У свою чергу завихреність - це диференціальна характеристика, векторне поле, що задане в будь-якій точці рідини відповідно.

Для нестисливої рідини в потенційному полі сил справедлива теорема про збереження циркуляції швидкості, вона ж теорема Томпсона (W. Thomson, 1869). Це аналог закону збереження кутового моменту у класичній механіці [1, 2].

За визначенням, **завихреність (vorticity)** швидкості це $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, тобто:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Можемо пов'язати її з циркуляцією наступним чином. Розглянемо

елементарний контур $(\delta x, \delta y)$ (рисунок 1.1):

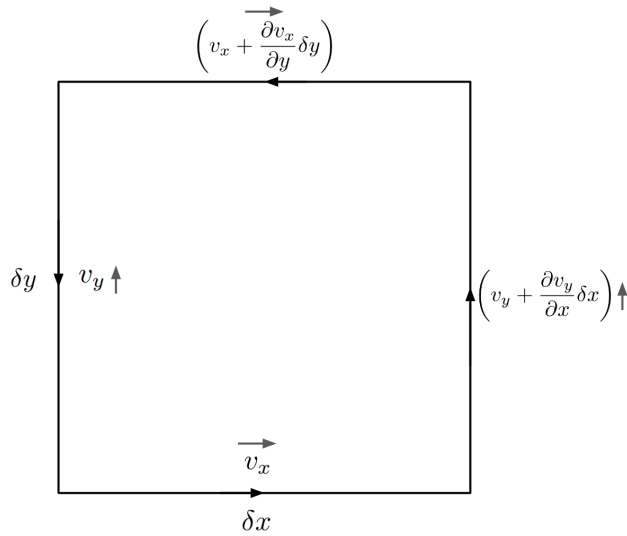


Рисунок 1.1 – Елементарний контур циркуляції $\vec{v}$ в площині ХоУ

Тоді деякий приріст δ циркуляції C буде дорівнювати:

$$\delta C = v_x \delta x - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \right) \delta x - v_y \delta y + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \right) \delta y = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \delta y$$

Тобто, при $\delta \rightarrow 0$, отримали ω_z складову завихренності:

$$\frac{\delta C}{\delta x \delta y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega_z$$

Аналогічно для інших компонент. Взагалі кажучи, цей самий зв'язок можна отримати, користуючись теоремою Стокса.

Спочатку розглянемо рівномірний потік рідини. Вважаємо рідину нестисливою, на яку діють лише потенційні сили, а саме сила тяжіння.

Вважатимемо, що в рідині відсутні вертикальні та радіальні швидкості, а тангенціальна швидкість залежить тільки від висоти через тертя з дном. Тоді існує ненульовий вектор циркуляції швидкості:

$$\vec{\omega} = \left(-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}, 0, 0 \right)$$

Далі потік повертає по радіусу R (рисунок 1.2), у точках A и A' вектора циркуляції, як і раніше, містяться тільки радіальні компоненти і

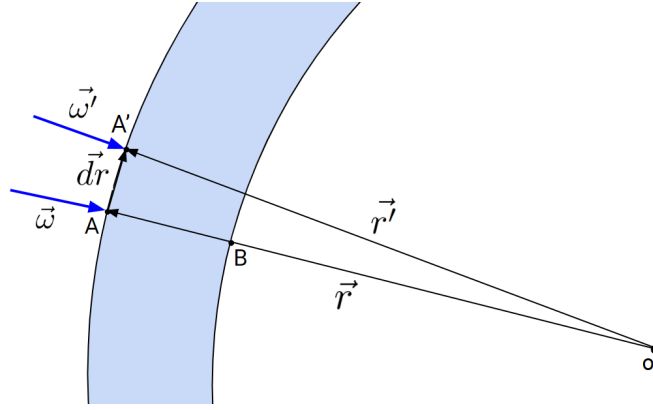


Рисунок 1.2 – Зміна вектора циркуляції швидкості

дорівнюють $-\frac{\partial v_\phi}{\partial z} \vec{r}$ и $-\frac{\partial v_\phi}{\partial z} \vec{r}'$ відповідно.

Для достатньо малих dr , можемо вважати, що dr лежить на дотичній до кривої в точці A. Отже, можемо виразити ω' через ω :

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \cdot dr \vec{e}_\phi$$

Виходячи з припущень раніше, циркуляція має зберігатися, тобто $\vec{\omega} = \text{const}$. Звідси випливає, що доданок у формулі для $\vec{\omega}'$ має бути скомпенсован деяким

$$\omega_{\text{curv}} = \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \cdot dr \vec{e}_\phi$$

так, щоб:

$$\omega = \omega' + \omega_{\text{curv}}$$

Незалежно від величини цього додаткового вектора, його напрям завжди однаковий. Отже, існує циркуляція у площині AB (рисунок 1.3).

Таким чином показали існування вторинних потоків та їх якісний характер [3].

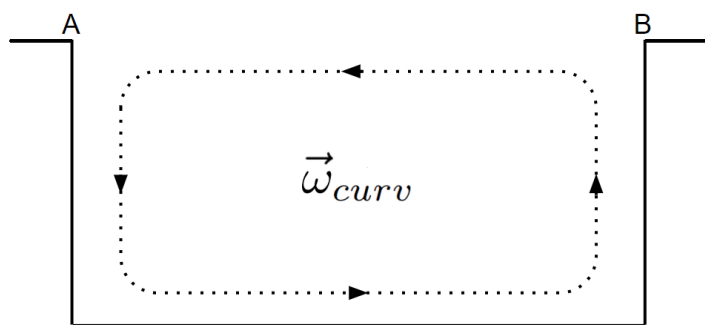


Рисунок 1.3 – Циркуляція у перерізі вздовж АВ

1.2 Вторинні течії у прикладних задачах

Вторинні течії у вигнутих каналах та трубах

Важливим прикладом вторинних циркуляцій у прикладних задачах є рух рідини у вигнутих каналах (річки, канали тощо). Відомо, що русла річок схильні до утворення звивистої форми замість течії найкоротшим шляхом. Насправді, це явище пояснюється поперечними до напрямку потоку циркуляціями, що виникають через некомпенсовану градієнтом тиску відцентрову силу. Таким чином, у тілі потоку виникають горизонтальні та вертикальні швидкості, внаслідок яких розмивається зовнішня відносно центра повороту стінка каналу. [4]

Експериментальні дані та результати чисельного моделювання чітко показують виникнення та характер таких циркуляцій у викривлених потоках. У роботі [5] представлено декілька результатів чисельного моделювання у вигляді розподілу вертикальних швидкостей у перерізі викривленого за радіусом потоку. Можна бачити якісний характер явища: зростання вертикальних швидкостей поблизу стінок, причому у дальньої відносно центру обертання стінки швидкість спрямована вниз.

Важливим наслідком вторинних потоків в каналі є те, що з часом це призводить до формування певного профілю русла (рисунок 1.4). Це змушує включати ефект вторинних циркуляцій у розрахунки для гідросистем, через значущість його побічних ефектів, таких як ерозія

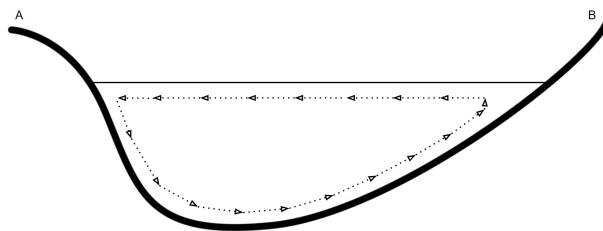


Рисунок 1.4 – Схематичний малюнок профілю каналу, що утворюється через поперечні потоки

стінок каналу, його розмив або навпаки наноси [6, 7].

Особливо важливим цей ефект стає у разі штучних гідровузлів (греблі, гідроелектростанції, інженерні вузли, і т.д.), де важлива довговічність та відповідність характеристикам, а швидкості потоків можуть бути набагато вищими. У сучасних проектах гідровузлів поперечна циркуляція не лише враховується та контролюється, а навіть створюється штучна, що має специфічну форму, для отримання більш сприятливого характеру розмивів та наносів [8].

Аналогічний характер має течія рідини всередині вигнутих труб. Градієнт тиску і відцентрова сила повинні перебувати в рівновазі, при цьому найбільший тиск виникає у зовнішньої стінки труби і найменший у внутрішньої. Рідина поблизу верхньої та нижньої стінок труби рухається повільніше, ніж поблизу центру через в'язкість і, як наслідок, вимагає меншого градієнта тиску щоб збалансувати відцентрову силу. Отже, виникає вторинний потік, при якому рідина у верхній та нижній стінках труби рухається всередину до центру кривизни, а рідина поблизу центру потоку рухається назовні.

Таким чином, усередині труби у поперечному перерізі формуються дві критичні точки, які є центрами циркуляцій швидкості.

Важливий наслідок звідси, що цей ефект змінює осьову швидкість. Рідина, що швидко рухається, постійно транспортується до зовнішньої

стінки, а уповільнена рідина переноситься до внутрішньої, тобто частина енергії руху витрачається на вторинні циркуляції. Виникнення в'язкого примежового шару на внутрішній стінці призводить до зменшення потоку через трубу [9].

Ще одним прикладом є системи охолодження лопаток турбін, а, загалом кажучи, будь-які системи з каналами, що обертаються. У випадку систем охолодження, головним параметром є їхня продуктивність. Виявляється, що задля її розрахунку доводиться керуватися як цілком очевидними параметрами, тобто площею каналу і швидкістю потоку, так і враховувати характер течії речовини.

Оскільки канал знаходиться в полі дії сил через обертання, у ньому виникають поперечні осі течії, характер яких схожий з попереднім прикладом.

Такі течії можуть бути як сприятливими, так і шкідливими, але в цілому вважається, що використання спеціально-організованих вторинних течій перспективний спосіб підвищити ефективність системи [10].

Вторинні циркуляції у атмосферних системах

У явища вторинної циркуляції є важливий аналог в системі атмосфери, а саме циркуляція повітря і пов'язані з ним вертикальні рухи. Відмінністю є те, що обертання рідини в даному випадку слід інтерпретувати як наслідок обертання землі, таким чином кутова швидкість постійна, тоді як радіус кривизни має значно більший масштаб. Також для розгляду атмосферних явищ вносить складність необхідність використання відносної, неінерційної системи відліку і, відповідно, необхідності враховувати силу Коріоліса як наслідок.

У системі низького тиску (low-pressure system) ділянки атмосфери повітря поза примежового шару, тобто у вільній атмосфері (на відстанях від поверхні Землі понад 1 км), діють сили, що компенсують одна одну -

сила Коріоліса і внутрішній градієнт тиску. В силу цього, є циркуляція, повітря обертається циклонічно та вектори швидкостей вітру паралельні ізобарам. Але в примежовому шарі, де тертя з поверхнею стає значним і знижує швидкість циркуляції, виникає некомпенсована сила. Таким чином, повітря перестає рухатися тільки паралельно ізобарам і рухається до центру низького тиску. Аналогічна картина виникає для антициклонів, через в'язкий примежовий шар виникає вторинна циркуляція, і, отже, радіальні швидкості, спрямовані від центру [3, 11].

Класичний експеримент

З метою вивчення вторинних циркуляцій та впливу в'язкого примежового шару часто проводяться експериментальні дослідження. Згадаємо найбільш класичний експеримент, з циліндричною ємністю, що обертається, який демонструє виникнення вторинних циркуляцій шляхом спостережуваних радіальних швидкостей.

Спочатку експерименту ємність наповнена рідиною і їй надано обертання з постійною кутовою швидкістю так, щоб рух рідини всередині був подібний до руху твердого тіла (риснок 1.5: а). Після чого в рідину поміщаються об'єкти, що дозволяють спостерігати зміну швидкостей надалі.

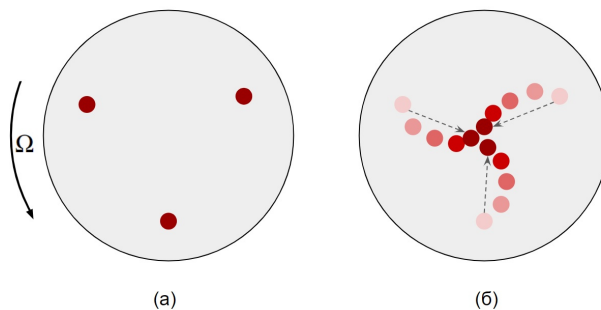


Рисунок 1.5 – Схема експеримента

Після уповільнення обертання в ємності виникає в'язкий примежовий

шар поблизу стінок і дна, через різну швидкість рідини і ємності, внаслідок чого можна спостерігати рух частинок у напрямку до центру (риснок 1.5: б), що свідчить про циркуляції рідини всередині примежового шару [11, 12].

1.3 Сучасні дослідження вторинних циркуляцій

Як було зазначено вище, ефект вторинних циркуляцій часто враховується у розрахунку в багатьох моделях прикладних задач. У якості прикладу можна навести масштабну роботу [5] 2010 року про детальне чисельне моделювання турбулентних криволінійних течій у відкритих каналах на основі науково-прикладних, чисельних та експериментальних досліджень.

Однак, відомою і актуальною проблемою гідродинамічних моделей залишається обчислення динамічних характеристик поблизу твердої границі обчислювальної області. Для вирішення цієї проблеми розроблені різні методи. Наприклад, у згадуваній роботі використовується метод зануреної межі (IBM). Альтернативним рішенням може бути використання нерегулярних сіток і значне збільшення їх кроку поблизу граничної області. У підсумку подібні модифікації призводять до ускладнення моделі і, відповідно, до значного часу обчислень або вимог до обчислювальних ресурсів. І тому метою роботи є розробка спрощених моделей аналізу структури вторинних циркуляцій біля твердої поверхні та дослідження початкового етапу розвитку вихрової течії, що виникає після припинення обертання ємності з рідиною.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі було надано детальний опис явища вторинних циркуляцій, та сформульований погляд на нього з точки зору законів збереження. Були розглянуті приклади прикладних задач у різних

галузях природничих наук, де вторинні потоки відіграють важливу роль, а також на прикладі побічних наслідків було показано важливість явища. Таким чином було продемонстровано актуальність проблеми. Також, на прикладі сучасних досліджень явища вторинних циркуляцій були описані проблеми у побудові чисельних моделей, що враховують вторинні циркуляції, і таким чином поставлена мета роботи.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВТОРИННИХ ЦИРКУЛЯЦІЙ У ПРИДОННОМУ ШАРУ

2.1 Основні рівняння гідродинаміки та загальні припущення

Перш ніж переходити до побудови моделі, необхідно з'ясувати, які дані та закони необхідні для розв'язку будь-якої подібної задачі у загальному випадку. Інакше кажучи, які величини мають бути відомі і в якій кількості, щоб однозначно знати стан об'єкта, що досліджується? Цей крок необхідний, оскільки він дозволить ясно розуміти, які припущення в умовах і законах можна застосувати для спрощення рішення, і як ці припущення впливають на точність та якість моделі загалом.

Розглядаємо задачу з рухом рідини, тобто з галузі гідродинаміки. Оскільки гідродинаміка використовує макроскопічний підхід, то крім поля швидкості $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, необхідно знати також термодинамічні величини. Однак відомо, що двох таких величин буде достатньо для визначення тих, що залишилися, отже, для повного визначення стану рідини необхідно задати 5 величин (3 з них становить швидкість у вигляді вектора в 3-вимірному просторі), щільність і тиск:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$\rho(x, y, z, t)$$

$$P(x, y, z, t)$$

Далі визначимо закони руху [1]. Першим рівнянням можемо ввести один із законів збереження, тобто рівняння нерозривності. Його легко отримати з інтегральних співвідношень, користуючись зв'язком інтеграла по замкненій площі та обмеженого об'єму.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Для нестискаємої рідини, яку ми і розглядаємо, очевидно рівняння набуває вигляду:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.1)$$

Наступним законом буде рівняння сил або рівняння Ейлера:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{F} \quad (1.2)$$

Тут врахували зовнішню силу $\vec{F}$, що діє на одиницю об'єму.

Перш ніж перейти до наступного рівняння, нагадаємо, що циркуляцією називається інтеграл C :

$$C = \oint_C \vec{v} d\vec{r}$$

У фізичному сенсі, циркуляція характеризує міру обертального руху. Наприклад, для диска, що обертається з кутовою швидкістю ω , циркуляція для контуру $r = r_0$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{v} \times \vec{r} \\ C &= \oint_{r=r_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi\omega r^2 \end{aligned}$$

Таким чином, міра обертання:

$$\mu = \frac{C}{S_c} = \frac{C}{\pi r^2} = 2\omega$$

Вважаючи, що ентропія стала (теплообмін рідини з оточуючим середовищем відсутній), сили потенційні і $\rho = const$, можемо отримати ще один закон збереження користуючись теоремою Стокса - збереження циркуляції швидкості, що випливає з інтегральних характеристик, рівняння (2):

$$= \oint_L \vec{v} d\vec{l} = const$$

На практиці використовують закон збереження циркуляції у диференціальному вигляді, тому у загальному випадку вектор завихреності рідини і відповідний закон визначаються наступним чином:

$$\vec{\omega} = rot(\vec{v}) \quad \vec{\omega} = const \quad (1.3)$$

Важливо зазначити, що наведені вище рівняння справедливі для ідеальної рідини, тобто в якій відсутня в'язкість. Вводячи в'язкість, необхідно врахувати дисипативні процеси, що відбуваються всередині рідини в силу тертя шарів з різними швидкостями. Виходячи з припущень про лінійну залежність компонент тензора напруги від перших похідних швидкості і, відповідно, ізотропності рідини, шляхом перетворення рівняння (2), можемо отримати його узагальнення для випадку нестискаємої в'язкої рідини:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \nabla) \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} \quad (1.4)$$

Рівняння (4) – т.зв. рівняння Нав'є-Стокса [1, 2, 13].

Крім основних рівнянь необхідно також сформулювати підхід до розв'язання задачі та детальніше зупиниться на припущеннях, зокрема, якими параметрами можна і не можна знехтувати та як це вплине на якість підсумкової моделі. Для цього розглянемо деякі прийняті поняття та підходи до розв'язання задач з гідродинаміки та визначимо, які з них застосовні та які припущення щодо спрощення задачі можливо зробити.

Нестисливість. Стисливість - це здатність середовища змінювати обсяг під дією зовнішніх сил тиску. Оскільки будемо розв'язувати задачу тільки для рідини, її стисливість надзвичайно мала, тому можемо вважати її нестисливою. Але майбутню модель можна розширити і для газів виходячи з припущення щодо його нестисливості. Щоб задовільнити

це, характерна швидкість течії повинна бути значно менше швидкості звука у середовищі, тоді газ можна вважати нестисливим з добрим наближенням.

Ідеальна рідина. Ідеальною рідиною називають нестисливу рідину з відсутніми силами тертя. Зважаючи на це рівняння руху значно спрощуються, тому теорія ідеальної рідини добре вивчена і в деяких задачах дає цілком задовільні результати, наприклад, для хвильового руху. Однак у разі задач на взаємодію рідини з тілами, зневажа тертям стає абсолютно неприйнятною з точки зору якості передбачення. Наприклад, так виник т.зв. парадокс Даламбера, який стверджує, що сила опору тіла в потоці ідеальної рідини дорівнює нулю. У ідеальної рідини потік ковзає по межах, тобто відсутні сили, спрямовані дотично до потоку.

Стосовно розглядаємої задачі, тертя відіграє важливу роль поблизу межі потоку: незважаючи на малу в'язкість рідини (вода), що розглядається, градієнти швидкості поблизу меж потоку досить великі, щоб нехтувати ними.

В'язкість. В'язкість рідини характеризує величину опору переміщенню її частин одна відносно одної. Внаслідок цього, при обтіканні тіла потоком, рідина поблизу меж *прилипає* до стінок, в результаті встановлюється деякий розподіл дотичних швидкостей, загалом кажучи, дотична швидкість стає величиною, залежною від відстані до стінки тіла. З математичної точки зору, врахування в'язкості підвищує порядок диференціальних рівнянь, у результаті виникає необхідність у більшій кількості крайових умов.

Розглянемо розподіл дотичних швидкостей на прикладі задачі з течією рідини між пластинами, т.зв. рух чистого зсуву. Нехай рідина протікає між двома нескінченно довгими пластинами, причому одна нерухома, а друга рухається паралельно собі зі швидкістю V . Емпірично встановлено, що розподіл швидкостей має лінійний характер, тобто:

$$u(y) = \frac{y}{h}V$$

Отже, до рідини повинна бути прикладена сила, дотична напрямку руху, що врівноважує силу тертя. Ця сила пропорційна швидкості V і обернено пропорційна відстані між пластинами. При цьому, коефіцієнт пропорційності μ представляє фізичну характеристику середовища - динамічний коефіцієнт в'язкості.

$$F = \mu \frac{du}{dy}$$

Також у гідродинаміці прийняте визначення для кінематичного коефіцієнта в'язкості ν , який у подальшому також будемо використовувати:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

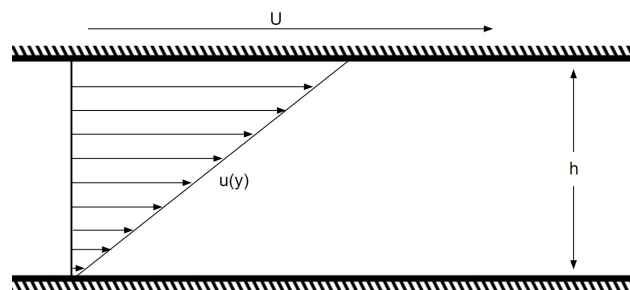


Рисунок 2.1 – Рух рідини між двома паралельними стінками.

Надалі будемо користуватися цими міркуваннями для встановлення розподілу дотичних швидкостей поблизу меж потоку.

Примежовий шар. Як було зазначено раніше, в'язкість впливає на характер руху рідини поблизу твердих стінок. Навіть попри малу в'язкість, градієнти швидкості у примежовому шарі великі.

Проте для великого класу задач виходячи з міркувань теорії тонкого примежового шару можна припустити, що це істотно лише

безпосередньо поблизу межі, тобто у деякому тонкому шарі. Таким чином, усередині цього тонкого шару рідина розглядається як в'язка, а в основному потоці її можна вважати ідеальною.

Звідси можна сформулювати граничні умови для дотичної швидкості v : у точці межі $y = 0$ швидкість повинна обертатися в нуль, у точці y_b - наприкінці примежового шару, швидкість можна вважати приблизно рівною швидкості в основному потоці $v(y_b) \approx v$. Важливо, що це сильне спрощення, й у ряді випадків не відповідає дійсності; примежовий шар може значно товщати, або відриватися від межі, втім, це виходить за рамки розглядаємої задачі. Тому в даному випадку буде важливо лише визначити розмір примежового шару, оскільки ми розглядатимемо рух саме в ньому.

Більше того, через тонкість примежового шару можна вважати, що вертикальна (тобто нормальна до шару) компонента швидкості буде мала в порівнянні з дотичною компонентою, це впливає хоча б із рівняння нерозривності (1.1), записаного для випадку двовимірного руху:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

Через товщину шару, градієнт горизонтальної швидкості досить великий, що робить похідну по вертикальній швидкості незначною. Звідси впливає, що всередині примежового шару можемо розглядати у першому наближенні лише горизонтальні швидкості v .

Розподіл тиску у даній роботі покладається гідростатичним, що вірно для більшості випадків рухів у навколишньому середовищі [1, 2, 14, 15]. Тобто вважаємо:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

2.2 Математична модель

Відповідно до поставленої мети, маємо задачу побудувати модель вторинних циркуляцій у придонному шарі рідини яка дозволяє оцінити розподіл швидкостей у шарі та швидкості на верхній межі придонного шару, для, як приклад, подальшого використання цих величин як нових граничних умов для моделі основного потоку.

2.2.1 Рівняння вільної поверхні

Насамперед опишемо деякі очевидні міркування: складемо рівняння вільної поверхні, не враховуючи примежовий шар. Нехай дано циліндр (R , H), який рівномірно обертається з кутовою швидкістю Ω .

Знехтуємо перехідними процесами в процесі розкручування, тобто вважаємо, що обертання рідини подібне до обертання твердого тіла. Будемо використовувати підхід балансу сил. Розглянемо сили, що діють на деяку ділянку об'єму рідини, що визначається dV .

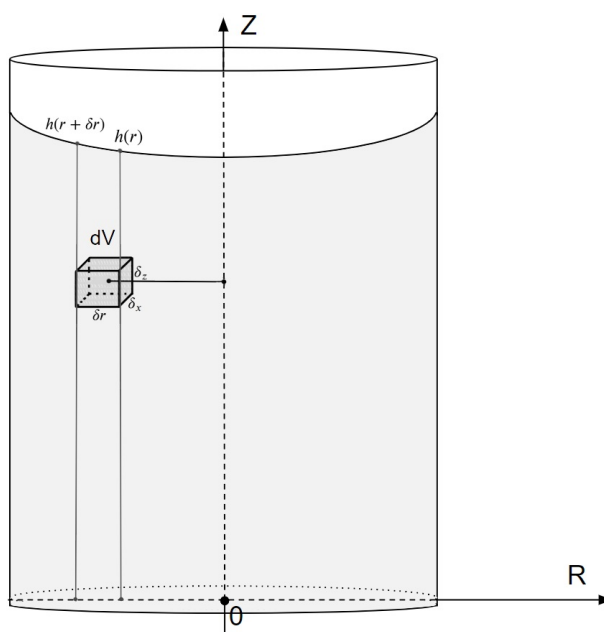


Рисунок 2.2 – Ділянка об'єму dV усередині рідини

Припускаємо, що ділянка знаходиться на деякій висоті $z = \text{const.}$ Тоді на одиницю об'єму діють 2 сили, відцентрова сила F_c і зміна тиску δP . В силу симетрії тиск залежить тільки від радіальної координати.

Знаємо, що P для ділянки об'єму:

$$\delta P = -\rho g \cdot (h(r + \delta r) - h(r))\delta_x \delta_z$$

,

Відцентрова сила може бути виражена через швидкість наступним чином:

$$F_c = \rho \cdot \Omega^2 r \delta_x \delta_z \delta r$$

Після чого отримаємо рівняння:

$$\rho g(h(r + \delta r) - h(r))\delta_x \delta_z = -\rho \cdot \Omega^2 r \delta_x \delta_z \delta r$$

Тут лівим членом виступає сила, що виникає через зміну тиску в радіальному напрямку. Правий член є доцентровою силою, (обидві на ділянку об'єму в загальному випадку).

Звідси отримуємо диференціальне рівняння вільної поверхні:

$$g \frac{dh}{dr} = -\Omega^2 r \quad (2.1)$$

2.2.2 Параметризація динаміки висоти примежового шару

Насамперед нас цікавить глибина примежового шару. З метою спрощення завдання скористаємося принципом симетрії, тобто вважатимемо, що швидкості не залежать від тангенціальної компоненти θ через радіальну симетрію задачі. У такому випадку достатньо буде розглянути осьовий переріз циліндра.

Маємо наступні граничні умови:

$$u(0) = 0, u(\delta) = U = \Omega r$$

Тут друга умова передбачає, що швидкість обертання рідини не змінюється за межами примежового шару, що виконується на достатньо коротких проміжках часу після припинення дії обертальної сили.

Запишемо рівняння (4) Нав'є-Стокса для u компоненти:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla u + \nu \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + f_u$$

Як було зазначено раніше, вертикальними швидкостями в граничному шарі можемо знехтувати. Для подальшого спрощення застосуємо метод аналізу масштабів. Масштаб швидкості для даної задачі $U = \Omega R$. Тоді масштаб радіального градієнту швидкості $\frac{\partial v}{\partial r} = \Omega$. Можна очікувати, що радіальна швидкість v вторинної циркуляції, яка виникне біля дна, буде $v \ll U$. Масштаб адвективного доданку $v \frac{\partial v}{\partial r} \ll \Omega^2 R$. Масштаб вязкого доданку: $\nu \frac{\partial^2 U}{\delta^2} = \nu \frac{\Omega^2 R}{\delta^2}$. Отже радіальною адвекцією поздовжньої швидкості можна знехтувати коли виконується умова:

$$\Omega^2 R < \nu \frac{\Omega R}{\delta^2}, \Rightarrow \delta < \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \quad (2.2)$$

Це буде відбуватись, коли час після припинення примусового обертання буде достатньо малим.

Отже, отримуємо спрощене рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

Також вважаємо розподіл тангенціальної компоненти швидкості в граничному шарі лінійним, тоді можемо виразити $u(z)$ для $0 \leq z \leq \delta$:

$$u(z) = \frac{U}{\delta} z \quad (2.4)$$

таким чином:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\delta} = \frac{U}{\delta}$$

З іншого боку, можемо встановити зв'язок між збільшенням швидкості і δ відповідно:

$$d\delta = du \frac{\delta}{U} \quad (2.5)$$

Вважаючи, що шар досить малий, оцінимо другу похідну в рівнянні (2.3) приблизно за допомогою різницевої апроксимації. Тоді отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx -\nu \frac{U}{\delta^2} \quad (2.6)$$

Тоді з рівнянь (2.5) і (2.6) отримаємо рівняння для товщини прилежого шару, що залежить від часу:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\nu}{\delta}$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\delta(t) = \sqrt{2\nu t} \quad (2.7)$$

2.2.3 Аналітична оцінка середньої вертикальної швидкості

Розглянемо деяку точку А (рисунок 2.3). Як було встановлено в попередньому параграфі, у придонному шарі виникає сила, спрямована до осі обертання, тобто існують радіальні швидкості, спрямовані до осі. Також очевидно, що у точці $r = \pm R$ і $r = 0$ радіальні швидкості дорівнюють нулю.

Звідси випливає [16], що існує деяка точка А, для котрої:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

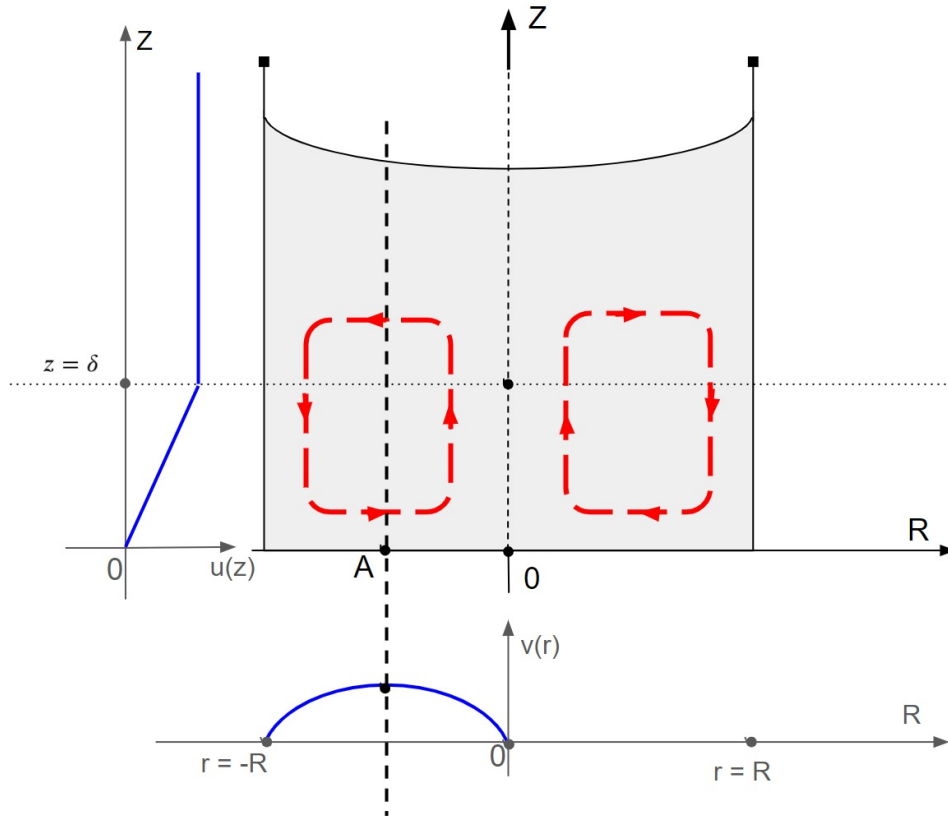


Рисунок 2.3 – Концептуальна модель динаміки рідини у циліндрі та деяка точка А.

З рівняння нерозривності (1.1), встановлюється такий зв'язок із вертикальною швидкістю - у точках $r < A$ вертикальна швидкість $w(z) > 0$ і навпаки, для всіх точок $r > A$, $w(z) < 0$. Звідси випливає [16], що у цій точці А:

$$w(z_A) = 0$$

Далі, зважаючи на малий розмір розглядаємих інтервалів часу, припустимо також квазістаціонарність процесу.

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx 0$$

Тепер можемо скласти рівняння радіальної швидкості $v = v(r, z)$ для множини точок (r_b, z) :

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z} - \frac{u^2}{r} + \Omega^2 r = 0 \quad (2.8)$$

Тут $\Omega^2 r$ - градієнт тиску (2.1)

$\frac{u^2}{r}$ - відцентрова сила, що діє на частку.

Граничні умови визначимо виходячи з того ж припущення про тонкий примежовий шар:

$$v(0) = 0, v(\delta) = 0$$

З метою спрощення, припустимо, що $u(z)$ залежить лінійно від z , скористаємося співвідношенням (7), тоді рівняння (12) набуває вигляду:

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z} + f_v = 0 \quad (2.9)$$

У якому член f_u дорівнює різниці градієнта тиску і зовнішньої сили

$$f_v = \Omega^2 r \left(1 - \frac{z^2}{\delta^2} \right) \quad (2.10)$$

Оскільки поставлена задача не тільки отримати рівняння руху для подальших наближених обчислень, а також отримати деякий аналітичний розв'язок, необхідно скласти рівняння, яке можна розв'язати аналітично. Це дозволить згодом здійснити порівняння з результатами чисельних методів. З цією метою проінтегруємо отримане рівняння (2.9):

$$-\nu \frac{\partial v}{\partial z} + C = \Omega^2 r \left(z - \frac{z^3}{3\delta^2} \right)$$

Проінтегруємо вдруге:

$$-\nu v(z) + Cz = \Omega^2 r \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12\delta^2} \right)$$

Константа C визначається з граничних умов:

$$C\delta = \Omega^2 r \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{12} \right) = \frac{5}{12} \Omega^2 r \delta^2 \Rightarrow C = \frac{5}{12} \Omega^2 r \delta$$

Отримали рівняння для v компоненти швидкості:

$$v(z) = \frac{\Omega^2 r}{\nu} \left(\frac{1}{12\delta^2} z^4 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{5\delta}{12} z \right)$$

Щоб отримати чисельну оцінку середньої вертикальної швидкості, проінтегруємо отримане рівняння по замкнутій площі, користуючись фактично рівнянням нерозривності в інтегральному вигляді.

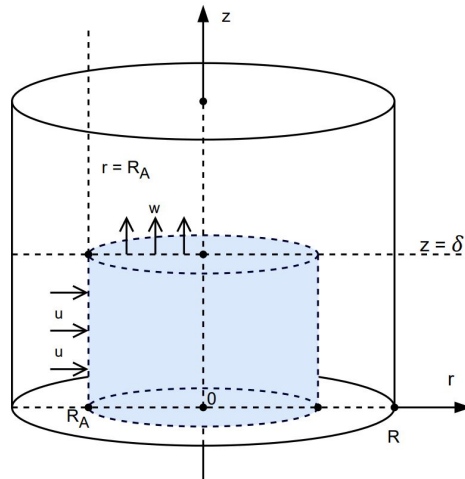


Рисунок 2.4 – Потік швидкості через циліндр

Розглянемо циліндр, радіуса $R = R_A$ (рисунок 2.4). Тоді потік радіальної швидкості через бічні стінки дорівнюватиме потоку вертикальної швидкості через верхню основу. Використовуючи інтегрування за циліндром, ми користуємося законом збереження. Потік через бічну поверхню дорівнює потоку через основу, тому що немає джерел; цей крок аналогічний до використання теореми Гауса у електродинаміці, якщо всередині поверхні немає зарядів.

Шукатимемо середню вертикальну швидкість $\langle w \rangle$ через верхню основу.

$$\Phi_\delta = \int_R \int_Z u(z, r) dz dr = \Phi_o = \pi R^2 \langle w \rangle$$

$$2\pi R \int_0^\delta u(z, R) dz = \pi R^2 \langle w \rangle \Rightarrow \langle w \rangle = \frac{7\Omega^2 \delta^3}{60\nu} \quad (2.11)$$

Таким чином, отримали оцінку середньої вертикальної швидкості. Слід зазначити, що оцінка (2.11) справедлива для середньої швидкості через площу горизонтального перерізу між точкою А та центром обертання. А оскільки у т. А вертикальна швидкість дорівнює нулю, і на більших відстанях від центру змінює знак на протилежний, отримана оцінка характеризує інтегральну середню швидкість висхідного руху. Бачимо, що швидкість пропорційна товщині примежового шару та кутової швидкості обертання рідини, і обернено-пропорційна в'язкості.

2.2.4 Рівняння для радіальних швидкостей у придонному шарі

Продовжимо розглядати осьовий переріз. Як було зазначено раніше, користуємося підходом "тонкого примежового шару". Виходячи з усіх припущень, загальне рівняння для всієї області перерізу набуває вигляду:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f_v \quad (2.12)$$

2.2.5 Рівняння для вертикальної швидкості

Для отримання середньої висхідної швидкості проінтегруємо потік швидкості через бічну поверхню циліндру, обмеженого колом радіусом $r = r_A$ (рисунок 2.4). Прирівняємо потік через бічну поверхню потоку маси через верхню поверню циліндру, де $\langle w_A \rangle$ - середня вертикальна швидкість по площі верхньої грані, обмеженою колом радіусом r_A . Прирівнюючи ці два вирази отримуємо:

$$2\pi r_A \int_0^\delta v(r, z) dz = \pi r_A^2 \langle w_A \rangle \Rightarrow \langle w_A \rangle = \frac{2}{r_A} \int_0^\delta v(r, z) dz \quad (2.13)$$

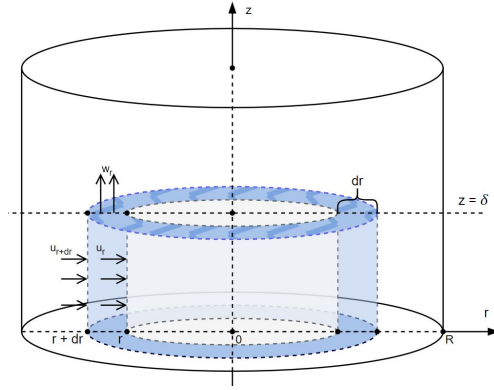


Рисунок 2.5 – Потік швидкості через кільце

Для обчислення вертикальної компоненти швидкості на верхній межі придонного шару $\langle w_R^\delta \rangle$, тобто де $z = \delta$, розглянемо потік швидкості через фігуру, утворену перетинами двох двома концентричних циліндрів (рисунок 2.5). Отже, виходячи з принципів збереження маси, маємо наступне співвідношення:

$$\langle w_R^\delta \rangle \cdot \pi((R + dr)^2 - R^2) = 2\pi(R + dr) \int_0^\delta v(R + dr, z) dz - 2\pi R \int_0^\delta v(R, z) dz \quad (2.14)$$

де $\langle w_R^\delta \rangle$ - середня вертикальна швидкість через кільце внутрішнього радіусу R та шириною dr .

Висновки до розділу 2

У цьому розділі була розроблена математична модель до поставленої задачі, побудована наближена формула для визначення висоти примежового шару, а також визначені рівняння, що пов'язують вертикальну та радіальні швидкості, які необхідні для оцінки

вертикальних швидкостей.

3 ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

3.1 Кінцево-різницевий метод

Маємо нелінійне диференціальне рівняння конвекції-дифузії. Найбільш стандартним та поширеним методом для розв'язку даного класу задач є метод кінцевих різниць. Зупинимось на різницевому методі з декількох причин.

3.1.1 Різницеві апроксимації

Побудуємо прямокутну сітку розміру $N \times M$

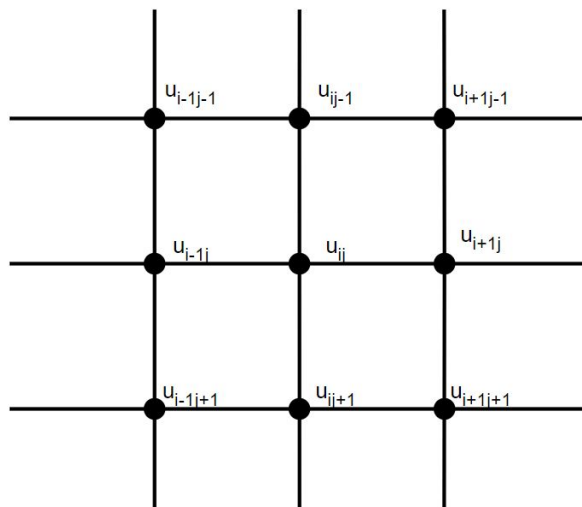


Рисунок 3.1 – Обчислювальна сітка

Крок сітки:

$$h_r = R/N, \quad h_z = \delta/M$$

Будемо використовувати триточковий шаблон.

Різницеві апроксимації наведені нижче. Використовуємо різницю

назад для конвекційного члена та центральну різницю для дифузійного.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_z^2}$$

Діапазон індексів:

$$0 \leq i < N, \quad 0 \leq j < M$$

Дискретизовані граничні умови:

$$v_{0,j} = v_{N-1,j} = v_{i,0} = v_{i,M-1} = 0$$

Розв'язуємо рівняння на дуже короткому проміжку часу $t = \tau$, тому похідну для похідної за часом використовуємо апроксимацію першого порядку:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v}{\tau}$$

Фактично, використаний підхід схожий з методом прямих, де похідна у результаті замінена на неперервну апроксимацію [18].

Отримане різницеве рівняння:

$$\frac{v_{i,j}}{\tau} + v_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r} - \frac{\mu}{h_z^2} (v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}) = \Omega^2 (i h_r) \left(1 - \frac{(j h_z)^2}{\delta^2} \right) \quad (3.1)$$

У результаті отримали систему з $N \cdot M$ нелінійних рівнянь, що утворюють три-діагональну матрицю, тобто використовуємо неявну схему.

3.1.2 Алгоритмізація чисельного методу

Для розв'язку нелінійних рівнянь застосовується метод простих ітерацій, номер ітерації позначений індексом n . Збіжність контролюється за допомогою норми різниці між $v_{i,j}^{n+1}$ і $v_{i,j}^n$.

$$\frac{v_{i,j}^{n+1}}{\tau} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{h_r} - \frac{\mu}{h_z^2} (v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}) = \Omega^2(ih_r) \left(1 - \frac{(jh_z)^2}{\delta^2}\right)$$

Для розв'язку системи рівнянь вводиться одновимірна індексація змінних:

$$k = i \cdot M + j$$

Як наслідок, формуються матриці коефіцієнтів A, B розмірностями $NM \times NM$ і $NM \times 1$ відповідно.

Таким чином встановлюється відповідність:

$$A_{k,k} = v_{i,j}, \quad A_{k,k-1} = v_{i,j-1}, \quad A_{k,k+1} = v_{i,j+1}, \quad A_{k,k-M} = v_{i-1,j}$$

3.1.3 Оцінка точності різницевих апроксимацій

Розкладемо функцію $v(r, z)$ в околі вузла (i, j) у ряд Тейлора, припускаючи, що похідні вищих порядків існують. Використовуємо розкладання 3 та 5 порядку точності за координатами r, z відповідно.

$$v(r_{i\pm 1}, z_j) = v(r_i, j_i) \pm h_r v_r(r_i, y_j) + \frac{1}{2} h_r^2 v_{rr}(r_i, y_j) + O(h^3)$$

$$v(r_i, z_{j\pm 1}) = v(r_i, j_i) \pm h_z v_z(r_i, y_j) + \frac{1}{2} h_z^2 v_{zz}(r_i, y_j) \pm$$

$$\pm \frac{1}{6} h_z^3 v_{zzz}(r_i, y_j) + \frac{1}{24} h_z^4 v_{zzzz}(r_i, y_j) + O(h^5)$$

Тепер підставимо у використані апроксимації:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \approx v_r(r_i, z_j) - \frac{1}{2} h_r v_{rr}(r_i, z_j) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \approx v_{zz}(r_i, z_j) + \frac{1}{24} h_z^2 v_{zzzz}(r_i, z_j) + O(h^3)$$

Звідси очевидно, що схема має точність першого порядку за просторовою координатою r і другого за координатою z .

Також, легко оцінити точно апроксимації похідної за часом:

$$v(\tau) \approx v_t(\tau) + O(\tau^2) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v(\tau)}{\tau} + O(\tau)$$

Таким чином, схема має точність:

$$O(\tau + h_r + h_z^2)$$

3.1.4 Стійкість різницевої схеми

Стійкість схеми можна довести в лінійному наближенні, лінеаризуючи по множнику v перед апроксимацією похідної, що береться на поточному ітераційному кроці. Для цього скористаємося принципом максимуму [18].

Перш за все, лінеарізуємо рівняння вводячи постійну швидкість адвекції $a > 0$. Запишемо рівняння (3.1) у канонічному вигляді:

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2} \right) v_{i,j} - \frac{2\nu}{h_z^2} v_{i,j-1} - \frac{2\nu}{h_z^2} v_{i,j+1} - \frac{a}{h_r} v_{i-1,j} = f_{i,j}$$

Звідси отримуємо коефіцієнти α_k заданого дискретного оператора:

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2} \right)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\nu}{h_z^2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{a}{h_r}$$

Згідно принципу максимуму, схема рівномірно-стійка на початкових даних та за правою частиною, якщо відповідно виконуються наступні рівності[18]:

$$(1 + C\tau)|\alpha_0| \geq \sum_{k \neq 0} |\alpha_k|, \quad C = \text{const} \quad (3.2)$$

$$|\alpha_0| - \sum_{k \neq 0} |\alpha_k| \geq \frac{\lambda}{\tau}, \quad \lambda = \text{const} > 0 \quad (3.3)$$

Дійсно, після підстановки коефіцієнтів у (3.2), (3.3) можна побачити, що схема стійка за початковими даними та правою частиною у будь-яких співвідношеннях вузлів i, j :

$$(1 + \tau) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2} \right) \geq \frac{a}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2}$$

$$\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2} - \frac{a}{h_r} - \frac{2\nu}{h_z^2} > \frac{\lambda}{\tau} \Rightarrow \lambda = 1 > 0$$

Проте варто зазначити, що для від'ємного коефіцієнта адвекції $a < 0$ схема стає нестійкою.

Дійсно, після підстановки у (3.2) бачимо, що неможливо підібрати таку константу λ , щоб задовільнити отримане співвідношення, адже ліва частина залежить від швидкості переносу a .

$$\frac{1}{\tau} - 2\frac{a}{h_r} > \frac{\lambda}{\tau}$$

У такому випадку схему можна модифікувати, вводячи

апроксимацію направлених різниць:

$$v \frac{\partial v}{\partial r} \approx g(u_{i,j}) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r} + g(-u_{i,j}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r}$$

Де функція g визначена наступним чином:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Але, як показали подальші розрахунки, отриманий розподіл v однонаправлений (від краю до центру), і тому можна обмежитись апроксимацією, наведеною раніше.

3.1.5 Монотонність наближеного розв'язку

Математичне визначення монотонності дав Годунов: чисельна схема, в якій вектор стану на наступному кроці x_{n+1} виражається через вектор стану на поточному кроці через матрицю переходу S : $x_{n+1} = S \cdot x_n$ монотонна тоді і тільки тоді, коли усі елементи матриці S додатні. Відповідно схема, запис якої має вигляд: $A \cdot x_{n+1} = b(x_n)$ монотонна тоді, коли усі елементи матриці, оберненої до A додатні [19].

З фізичної точки зору ця властивість гарантує, що рішення, отримане за допомогою різницевої схеми, не містить осциляцій або нереалістичних значень. Тобто, якщо розв'язання початкової задачі задовольняє деяким фізичним обмеженням, то монотонна різницева схема зберігає ці обмеження.

Відповідно до теореми про монотонність для рівняння перенесення, тільки схеми першого порядку точності можуть бути монотонними. Отже, щоб уникнути осциляцій, використовуватимемо схему першого порядку [18].

Різницеве рівняння (3.1) можна записати у матричному вигляді

$A \cdot v = B$. При цьому легко бачити, що коли $v > 0$, матриця є строго діагонально панівною, адже для будь-яких вузлів значення на головній діагоналі завжди невід’ємне та більше, ніж на побічних, тобто:

$$a_{k,k} = \frac{1}{\tau} + \frac{v_{i,j}^n}{h_r} + \frac{2\nu}{h_z^2}$$

$$a_{k,k-1} = a_{k,k+1} = -\frac{\nu}{h_z^2}$$

$$a_{k,k-M} = -\frac{v_{i,j}^n}{h_r}$$

При цьому бачимо, що значення на побічних діагоналях недодатні. За визначенням [20], деяка матриця A є M -матрицею, якщо вона строго діагонально панівна та $\forall i \neq j : a_{i,j} \leq 0$. З цього випливає, що матриця A є M -матрицею. Тоді, за визначенням M -матриці, випливає [20] що матриця A є оборотною та всі її коефіцієнти додатні. Отже, матриця A задовольняє умові монотонності, тому різницева схема (3.1) є монотонною.

З фізичної точки зору також можна сказати, що адвекція визначає напрямок поширення інформації, в той же час дифузія не має спрямування та поширюється вільно. Використання центральної різниці веде до того, що інформація поширюється в обох напрямках (оскільки для обчислення використовується попереднє і наступне значення), що порушує фізичний сенс адвекції, але задовольняє його для дифузії. Отже, вибір різницевої схем виправданий з фізичної точки зору.[27]

3.1.6 Різницеві апроксимації для рівнянь вертикальних швидкостей

Рівняння (2.13) може бути дискретизоване за допомогою різницевої апроксимації у внутрішніх вузлах області $0 < i < N$, $0 < j < M$:

$$\langle w_A^i \rangle = \frac{2h_z}{r_i} \sum_{j=0}^{M-1} v_{i,j} \quad (3.4)$$

Рівняння (2.14) може бути дискретизоване за допомогою різницевих апроксимацій у внутрішніх вузлах області $0 < i < N$, $0 < j < M$ з шириною кільця, відповідно, $2h_r$:

$$\begin{aligned} \langle w_i^\delta \rangle &= -\frac{h_z}{r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2} \sum_{j=0}^{M-1} (r_{i+1}v_{i+1,j} - r_{i-1}v_{i-1,j}) \Rightarrow \\ \langle w_i^\delta \rangle &= -\frac{h_z}{r_i} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{r_{i+1}v_{i+1,j} - r_{i-1}v_{i-1,j}}{2dr} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для граничних вузлів можна використати апроксимації з шириною кільця h_r :

$$\langle w_0^\delta \rangle = -\frac{h_z}{r_1} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{r_1v_{1,j} - r_0v_{0,j}}{dr} \quad (3.6)$$

$$\langle w_{N-1}^\delta \rangle = -\frac{h_z}{r_{N-1}} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{r_{N-1}v_{N-1,j} - r_{N-2}v_{N-2,j}}{dr} \quad (3.7)$$

3.2 Метод скінченних об'ємів (Finite-volume method)

Метод скінченних об'ємів широко використовується в гідродинаміці, одним із ранніх прикладів формального використання можна навести роботу [22] Лос-Аламоського інституту. Автори розробили МАС-метод (метод маркерів та комірок) для аналізу нестисливих рідин. Згодом, завдяки перевагам методу він став популярним для аналізу задач, пов'язаних з рухом рідини та іншими явищами адвекції-дифузії.

Метод скінченних об'ємів заснований на протилежному від різницевого методу підході, він забезпечує виконання фізичного закону, що лежить в основі вихідного диференціального рівняння на деякому

скінченному об'ємі, а не на математичній точності рішення як такого. Це забезпечує так зване рішення у слабкій формі.

Звідси впливає головна перевага методу, він забезпечує дотримання законів збереження, що лежать в основі даного диференціального рівняння на кінцевій обчислювальній області. [21, 23]

Також метод дозволяє використовувати нерегулярні сітки, що мають складну форму, наприклад, часто використовується полігональна сітка. Крім цього, розроблені методи високого порядку, що є, власне, також методами кінцевого об'єму. У тому числі монотонні методи, пристосовні для нелінійних рівнянь і, отже, позбавлені осциляцій, т.зв. TVD методи. Одним із прикладів TVD методу є використання лімітера потоку (flux limiter), який запобігає появі локальних екстремумів. [25, 26].

Втім, у цьому розділі обмежимося простими різницевиими апроксимаціями другого порядку для потоку.

3.2.1 Необхідні перетворення рівнянь

Для початку запишемо вихідні рівняння у найбільш загальному вигляді. Перейдемо до координат (x, y) , оскільки розглядаємо рух у площині. Тоді радіальна r координата переходить у горизонтальну x , вертикальна z у y і, відповідно, радіальна швидкість u є швидкістю за віссю x , вертикальна w належить осі y , будемо надалі позначати її як v . Позначимо зовнішні сили (отримані в попередньому розділі) як f_u, f_v . При цьому, f_u отримана у рівнянні (2.9), а f_v визначена наступним чином:

$$f_v = -\frac{g}{\rho}$$

Отже, вихідні рівняння для площини мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \Delta u + f_u$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\Delta v + f_v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Перетворимо адвекційні члени для спрощення подальших операцій:

$$\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}\end{aligned}$$

Перетворимо рівняння на консервативну форму, інтегруючи за деяким об'ємом dV :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_V \frac{\partial u^2}{\partial x} dV - \int_V \frac{\partial vu}{\partial y} dV + \nu \int_V \Delta u dV + \int_V f dV$$

$$\int_V \frac{\partial v}{\partial t} dV = - \int_V \frac{\partial uv}{\partial x} dV - \int_V \frac{\partial v^2}{\partial y} dV + \nu \int_V \Delta v dV + \int_V f dV$$

Використовуючи теорему Гауса про зв'язок інтеграла за об'ємом та замкнутою поверхнею, перетворимо отримані рівняння:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \oint_S u^2 d\vec{S} - \oint_S v u d\vec{S} + \nu \oint_S \nabla u d\vec{S} + \int_V f dV \quad (3.8)$$

$$\int_V \frac{\partial v}{\partial t} dV = - \oint_S u v d\vec{S} - \oint_S v^2 d\vec{S} + \nu \oint_S \nabla v d\vec{S} + \int_V f dV \quad (3.9)$$

Можна записати рівняння (3.8) та (3.9) наступним чином, Φ_A , Φ_D - адвекційний і дифузійний потоки відповідно:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \Phi_A^u + \Phi_D^u + f_u$$

$$\int_v \frac{\partial u}{\partial t} dV = \Phi_A^v + \Phi_D^v + f_v$$

3.2.2 Різницеві апроксимації

Для чисельного рішення побудуємо регулярну прямокутну сітку з комірок зі зміщеними вузлами, (staggered grid) розміру $NX \times XY$.

Домен розміром $LX \times LY$, відповідно кроки:

$$\delta x = \frac{LX}{NX}, \quad \delta y = \frac{LY}{NY}$$

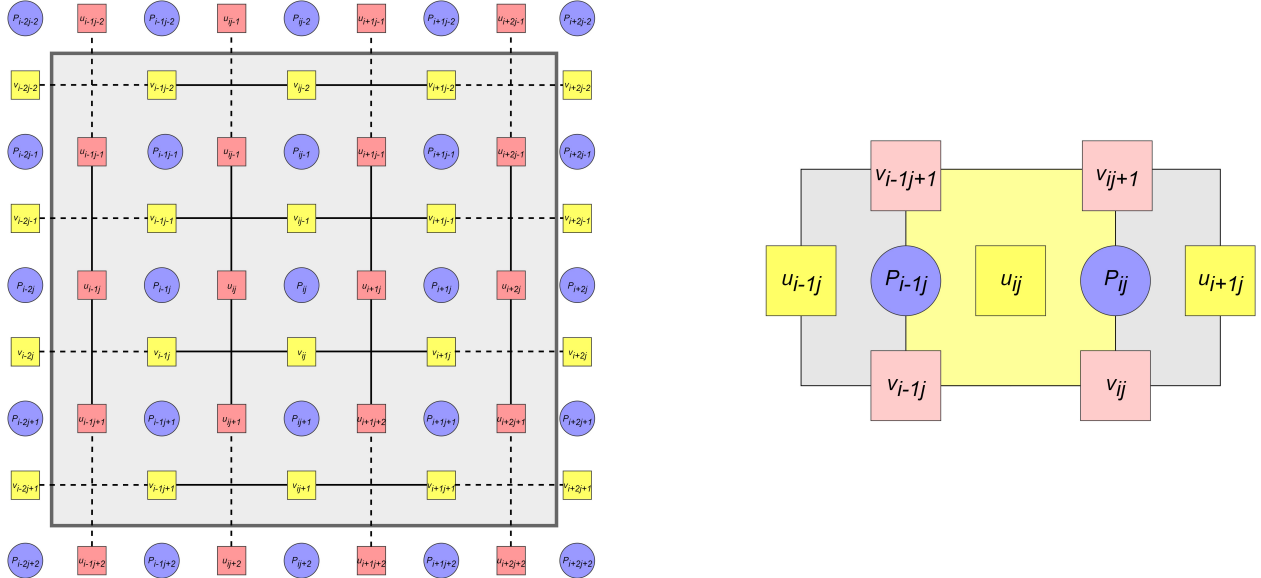


Рисунок 3.2 – Сітка зі зміщеними вузлами: обчислювальна область та одна комірка

Перейдемо до побудови апроксимацій. Для інтегралів часто достатньо одноточкової апроксимації, тому будемо її використовувати.

Для адвективного потоку, необхідно враховувати швидкості на межах комірки, (згідно з рисунком 3.2) u_w, u_e, u_n, u_s Їх можна апроксимувати з точністю другого порядку наступним чином:

$$u_e = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j}), \quad u_w = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$u_n = \frac{1}{2}(u_{i,j+1} + u_{i,j}), \quad u_s = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j-1})$$

Тепер можемо побудувати одноточкову апроксимацію:

$$\Phi_A = \delta y(u_e^2 - u_w^2) - \delta x(u_n v_n - u_s v_s)$$

Для дифузійного члена використовуємо центральну різницю:

$$\Phi_D = \frac{\delta y}{\delta x}((u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})) + \frac{\delta x}{\delta y}((u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}))$$

Як апроксимацію за часом використовуємо метод Ейлера, першого порядку:

$$u^{n+1} = u^n + \delta t \cdot (\hat{\Phi}_A^n + \hat{\Phi}_D^n + f) \quad (3.10)$$

3.2.3 Врахування закону збереження

Насправді отримані різнищеві рівняння на даному кроці не задовольняють консервативності, оскільки рівняння нерозривності не було враховано. Для розв'язку рівняння нерозривності використовуємо метод проекцій. Для цього введемо новий член негідростатичної складової тиску $p_{i,j}$ у рівняння (3.10). Таким чином, зможемо розділити рішення (тобто швидкість) на дві частини: соленоїдальну та дивергентну.

Отримаємо наступне різнищеве рівняння:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} = \hat{\Phi}_A^n + \hat{\Phi}_D^n + \vec{f} - \nabla_h p \quad (3.11)$$

Подіємо оператором дивергенції на рівняння. Щоб задовольнити рівняння нерозривності, покладемо $\nabla U^{n+1} \equiv 0$, тобто намагаємось, щоб

рішення нової ітерації задовільняло законам збереження. Тоді:

$$\nabla_h^2 p = \nabla_h U^n - \nabla_h \hat{\Phi}_A^n + \nabla_h \hat{\Phi}_D^n + f \quad (3.12)$$

Фактично отримали рівняння Ейлера. Тиск на кожній ітерації необхідний задля корекції швидкостей, щоб вони задовольняли рівнянню нерозривності. Тоді отримаємо підсумкове рівняння:

$$U^{n+1} = U^n + \delta t \cdot \nabla_h^2 p \quad (3.13)$$

Рівняння для тиску (3.12) формує систему лінійних рівнянь із тридіагональною матрицею коефіцієнтів і вирішується на кожній часовій ітерації [22, 23, 27].

3.2.4 Алгоритмізація

Для подальшого моделювання програмними засобами використовується наступна різницева апроксимація для рівняння тиску (3.12), де $\hat{u}, \hat{v}$ - відповідні значення швидкостей, отримані за допомогою (3.10) шляхом врахування потоків на поточній ітерації часу. Використовується центральна різниця для другої похідної та різниця вперед для першої.

$$\frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\delta x^2} + \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\delta y^2} = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\hat{u}_{i+1,j} - \hat{u}_{i,j}}{\delta x} + \frac{\hat{v}_{i,j+1} - \hat{v}_{i,j}}{\delta y} \right) \quad (3.14)$$

Таким чином, маємо всі необхідні рівняння для моделювання. Загально, алгоритм виглядає наступним чином:

– На кожній ітерації часу виконується:

1) Задання граничних умов для швидкостей та тиску. У якості граничних умов використовуються "уявні" комірки (на рисунку 3.2 - поза межами основної області, позначеної сірим).

2) Розрахунок потоків Φ_A , Φ_D та компонент швидкості, відповідно до рівняння (3.10)

3) Розв'язок рівняння тиску (3.14), користуючись значеннями швидкостей з попереднього кроку.

4) Оновлення значень швидкостей згідно кроку за часом за допомогою рівняння (3.13)

Висновки до розділу 3

У цьому розділі були побудовані чисельні методи розв'язку для математичної моделі. Зокрема, був використаний метод кінцевих різниць для розв'язку нелінійного рівняння адвекції-дифузії. Отримана схема була проаналізована на стійкість, монотоність та точність і, як наслідок, є коректною для даної задачі. Також був використаний метод кінцевих об'ємів для моделювання течії у площині, що дозволяє отримати детальний характер руху рідини та порівняти чисельні результати з першим методом.

4 МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Чисельні моделі, побудовані у попередньому розділі були реалізовані у вигляді функцій (методів) на мові програмування *Python* версії 3.10.0. Відповідні операції лінійної алгебри виконуються за допомогою бібліотек *numpy* версії 1.23.5, *scipy* версії 1.10.0. Візуалізація розподілів та векторних полів виконана за допомогою бібліотеки *matplotlib* версії 3.6.3.

Відповідний вихідний код складається з класів, що визначають чисельні кінцево-різницеіву та FVM моделі та додаткових функції для обчислення вертикальних швидкостей. Наведений у додатку А.

Отже, для моделювання були обрані набори геометричних та динамічних параметрів, а саме: різні значення радіусу (R), вихідної кутової швидкості (Ω) та часу (τ). Оскільки розв'язок нелінійних рівнянь припускає використання методу ітерацій, необхідно задати кількість ітерацій для кожного випадку. Підходяща кількість всановлювалася емпіричним чином так, щоб абсолютне значення похибки розв'язку набувало прийнятних значень.

4.1 Розвиток течії за часом та відповідність аналітичній оцінці

Одним із поставлених завдань роботи є аналіз розвитку вихрової течії за часом. Отже, для моделювання динаміки радіальних швидкостей були обрані постійні для всіх випадків параметри $\Omega = 4\pi$, $R = 1$. Для часу τ було обрано 6 значень з інтервалу $[0, 1]$. При цьому, висота обчислювальної області відповідає висоті примежового шару для відповідного значення τ .

Отже, на графіках нижче наведені результати моделювання. Можемо бачити, що область найбільших швидкостей переноситься з часом у

напрямку до осі. Це може бути спричинено нерівномірністю радіального розподілу градієнту тиску, який зростає пропорційно відстані від осі. Відповідно у початковий момент максимум збурення швидкості виникає біля стінки ємності. З часом цей максимум збурення переноситься у напрямку до осі під впливом самого збурення (радіальної компоненти швидкості). Слід відмітити, що радіальний розподіл збурення при цьому не тільки розмивається у вертикальному напрямку під впливом в'язкості, але й розтягується у радіальному напрямку. Останній ефект може бути пов'язаний з ефектом тейлоровської дисперсії (псевдо-дифузії), викликаній нерівномірністю розподілу радіальної швидкості біля стінки [28].

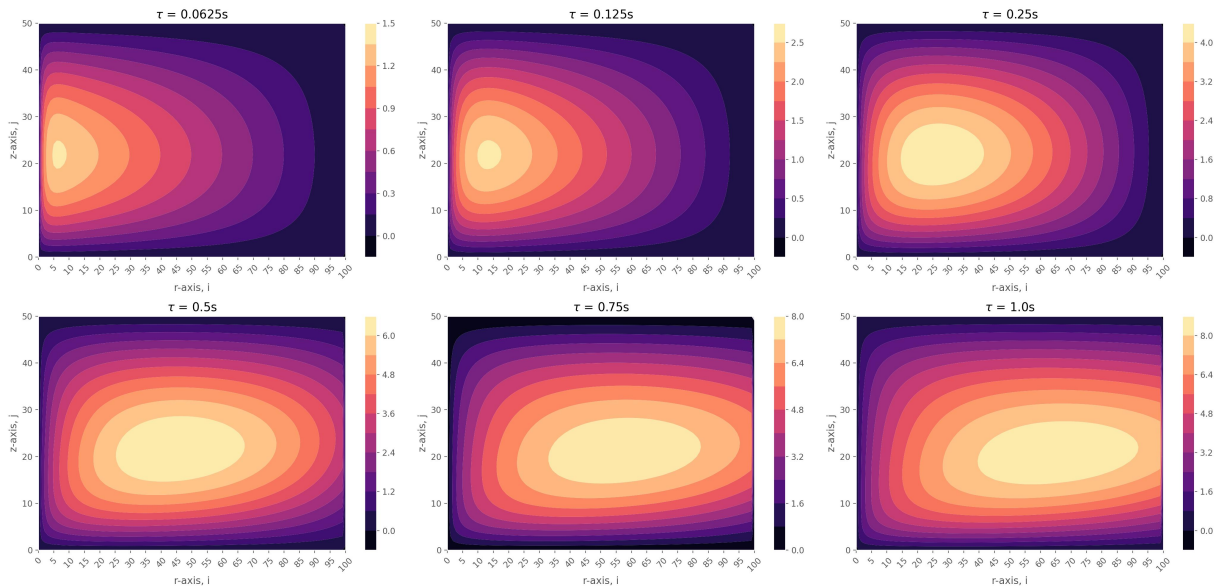


Рисунок 4.1 – Розподіл швидкостей для різних параметрів часу

Важливим буде порівняти результати чисельного моделювання з аналітичною оцінкою. Для цього використаємо апроксимацію (3.4) та аналітичну оцінку (2.11). Вибір індексу i для формули (3.4) відбувається індивідуально для кожного випадку шляхом аналізу розподілу, тобто для обраного індекса похідні за горизонтальним напрямком повинні бути близькі до нуля. Наприклад, для випадку $\tau = 0.5$ (майже симетричний розподіл), таким індексом буде $i = 48$

Таблиця 4.1 – Значення середньої вертикальної швидкості

τ	$\langle W \rangle$ аналітична, см/с	$\langle W \rangle$ чисельна, см/с	відхилення, %
0.0625	0.08	0.07	17%
0.125	0.23	0.19	16%
0.25	0.65	0.56	14%
0.5	1.84	1.56	15%
0.75	3.38	3.09	9%
1.0	5.21	4.65	11%

У таблиці 4.1 наведені значення середньої вертикальної швидкості, отримані за допомогою моделювання та аналітичної оцінки. Відхилення виглядає допустимим та викликано спрощеннями у процесі побудови аналітичної оцінки. Зростаюче значення відхилення для малих τ може бути викликано більш значним внеском нестационарної складової.

Проте, на графіках можна бачити, що немає такої строгої вертикалі, де горизонтальні похідні всюди дорівнюють нулю. Якщо розглянути абсолютне значення горизонтальних похідних для деяких випадків (рисунок 4.2), можна бачити, що замість лінії має місце крива точок екстремуму. Це також може впливати на точність оцінки.

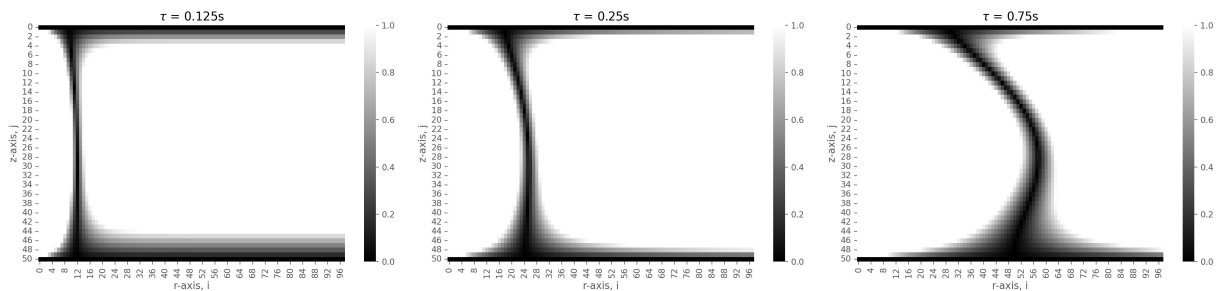


Рисунок 4.2 – Ізолінії значень горизонтальних похідних

4.2 Розподіл вертикальних швидкостей для різних параметрів часу

Згідно мети роботи, розроблена модель повинна давати змогу спростити обчислення шляхом використання результатів моделювання як початкових даних для інших моделей. Для цього у якості результату необхідно отримати розподіл вертикальних швидкостей $\langle w_i^\delta \rangle$ на верхній межі придонного шару.

Як результат, був отриман розподіл вертикальних швидкостей для $z = \delta$, що наведений на рисунку 4.3. Оскільки використані різні параметри часу, можна спростерігати динаміку розвитку течії з точки зору вертикальних швидкостей: швидкість поблизу стінки циліндру напрямлена вниз та починає зростати, згодом з'являється висхідна вертикальна швидкість поблизу центральної вісі.

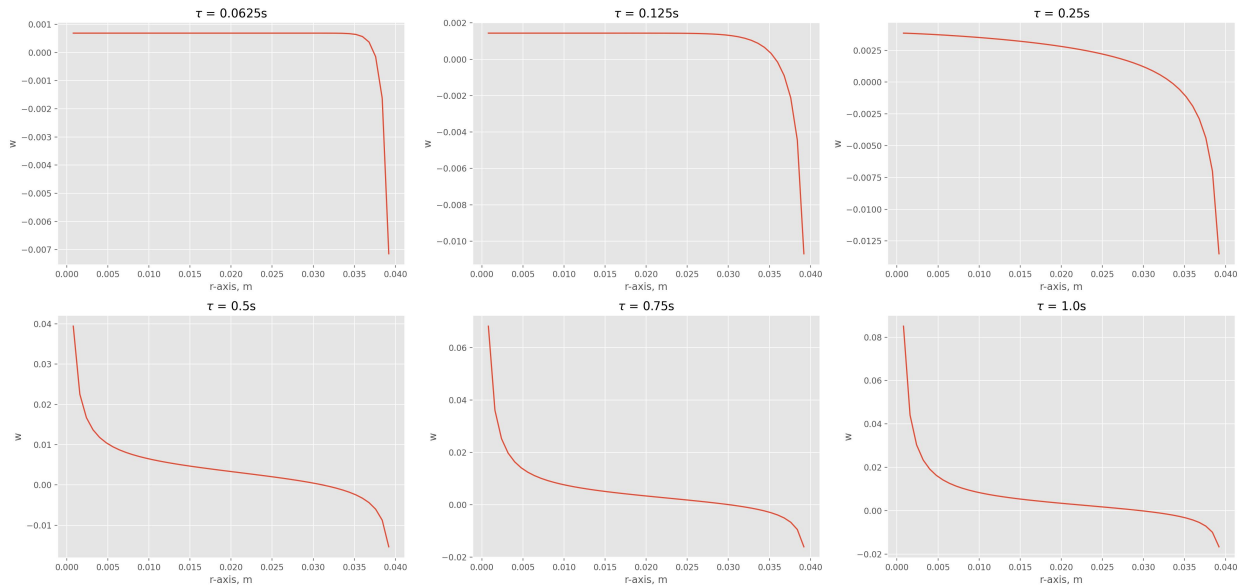


Рисунок 4.3 – Розподіл вертикальних швидкостей

4.3 Оцінка дисипації енергії, що викликана вторинною циркуляцією

В реальності вторинна циркуляція виносить придонну рідину на поверхню, що прискорює дисипацію енергії обертання. Вторинні циркуляції призводять до поперечного руху рідини у в'язкому підшарі, а наявність циркуляції спричиняє постійний перенос уповільненої через в'язкість рідини з примежового шару наверх, а потім до бічних стінок. Таким чином придонна рідина, яка вже була уповільнена обертанням знову отримує кінетичну енергію за рахунок заповільнення тієї маси води, яка була поза в'язким підшаром. Тобто відбувається дисипація енергії маси води, що обертається. Оцінка величини втрати енергії потребує окремої розробки, проте можливо зробити просту оцінку внеску циркуляції у процес дисипації енергії, шляхом розглядання часу поширення примежового шару. З рівняння (2.7) отримаємо час T_x :

$$T_x = \frac{H^2}{2\nu} \quad (4.1)$$

Для оцінки внеску циркуляції, припустимо, що рідина уповільниться подібним чином, якщо за рахунок висхідних рухів з вертикальною швидкістю W через деякий циліндр з радіусом $\frac{1}{2}R$ пройде маса рідини, що дорівнює загальній масі рідини у циліндрі. Тобто, користуємося підходом, подібним до методу оцінки середньої швидкості у розділі 2.2.3

$$W \frac{\pi R^2}{4} T_x = \pi R^2 \Rightarrow T_x = \frac{4H}{W} \quad (4.2)$$

Порівнюючи рівняння (4.1) і (4.2), очевидно що вторинні циркуляції можуть призводити до край значного уповільнення обертання. Зокрема, якщо $W = k \frac{8\nu}{H}$, то уповільнення з врахуванням циркуляції відбудеться у k раз швидше. Наприклад для води ($\nu = 10^{-6}$), та $H = 1\text{м}$, якщо середня

вертикальна швидкість дорівнює $W = 0.02 \text{ м/с}$, отримаємо час уповільнення 138 годин та 3 хвилини відповідно.

Проте, наведена оцінка дуже спрощена, адже не залежить від радіусу. Насправді за рахунок уповільнення задача значно ускладнюється, адже рівняння висоти в'язкого підшару (2.7) треба модифікувати для значних t через зміну швидкості обертання за межами в'язкого підшару.

4.4 Розподіл швидкостей для різних вихідних параметрів

Було розглянуто розподіли радіальних швидкостей для різних значень Ω . Результати моделювання наведені на рисунку 4.4. Видно, що збільшення кутової швидкості призводить до більш великих радіальних швидкостей у примежовому шарі, при цьому найбільші швидкості концентруються ближче до вісі Z .

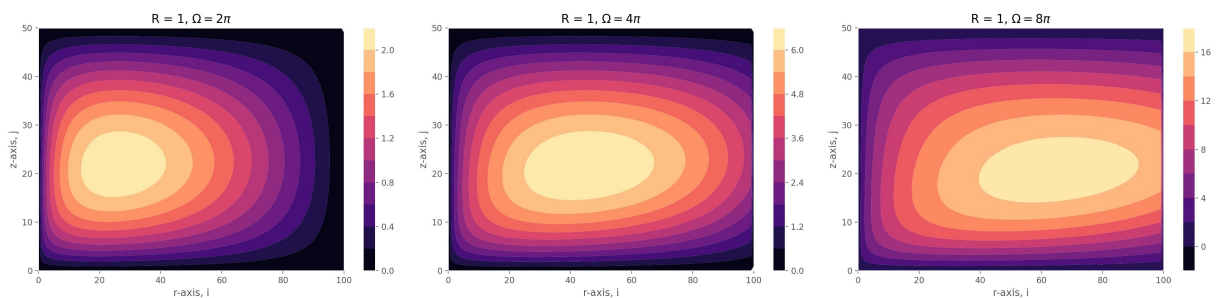


Рисунок 4.4 – Розподіл швидкостей для різних Ω

4.5 Якісний характер вихрової течії у циліндрі.

За допомогою методу скінченних об'ємів була змодельована динаміка течії у площині осьового перерізу циліндру. Для цього обчислювальна область була розширена до всього об'єму замість тільки примежової області, при цьому відцентрова сила діє тільки у придонному шарі з постійною висотою. Подібне спрощення допустиме, адже потрібно насамперед отримати якісну картину вихрової течії в усій області.

На рисунку 4.5 представлений результат моделювання з параметрами $\tau = 0.01\text{с}$, $R = 0.04\text{м}$, $H = 0.01\text{м}$, $\delta = 0.0014\text{м}$ у вигляді векторного поля швидкостей. Результат цілком збігається з припущеннями про характер течії у концептуальній моделі та з експериментальними даними, отриманими для подібних задач. Тобто у перерізі виникають дві, симетричні відносно осі, циркуляції.

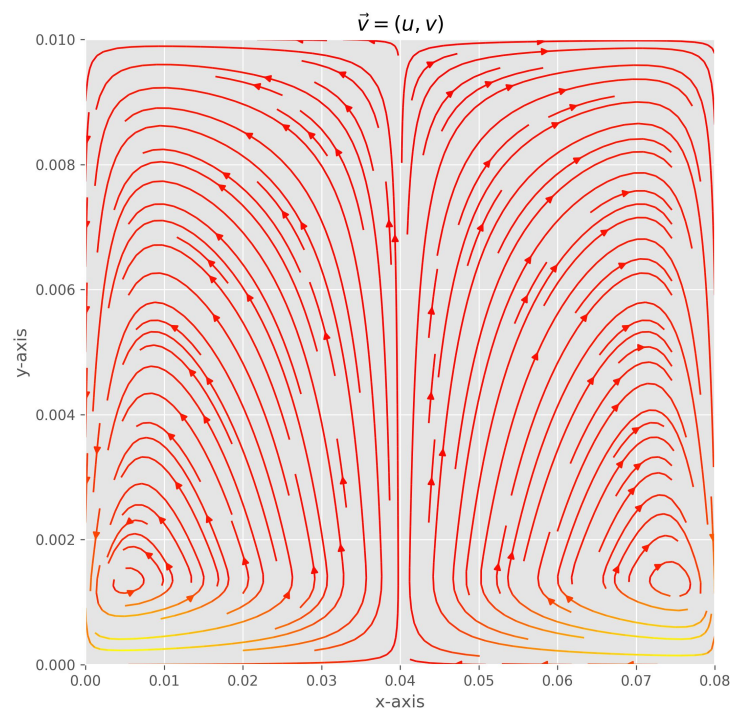


Рисунок 4.5 – Векторне поле швидкостей в осьовому перерізі циліндру

З чисельної точки зору, розподіл горизонтальних швидкостей у примежовому шарі цілком близький до розподілу, отриманого за допомогою попередньої моделі (рисунок 4.6). Проте, для даної моделі, якщо моделюється цілком вся область, виникає проблема з недостатньою щільністю сітки, тобто при спробі використати стандартних підхід до розв'язку задачі стикнулися з описаною у розділі 1 проблемою.

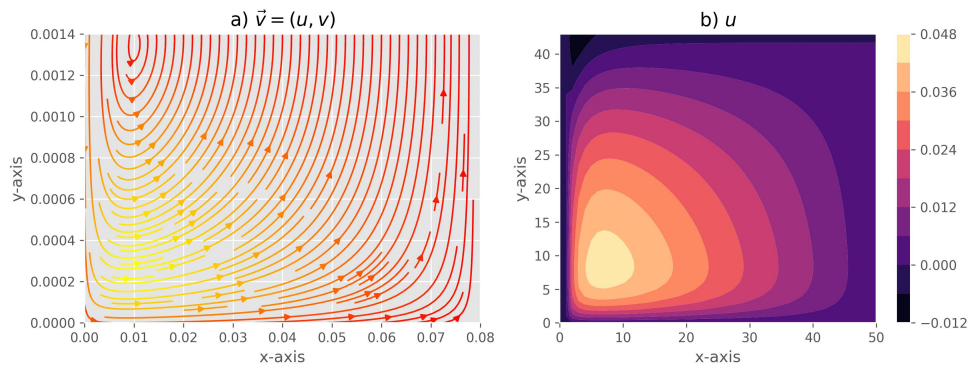


Рисунок 4.6 – Розподіл швидкостей для придонного шару: а) векторне поле, б) ізолінії горизонтальних швидкостей

Модель придонного шару, розглянуту у попередньому розділі можна використати у комбінації з моделлю течії в усій ємності з рідиною наступним чином: А) За допомогою моделі придонного шару моделюється радіальний розподіл компонент швидкості на верхній межі придонного шару; Б) Отримані у п. А розподіли використовуються в якості граничних умов у моделі течії в повній області.

ВИСНОВКИ

У роботі було проведено дослідження початкового етапу розвитку вторинних циркуляцій рідини та розроблені математичні моделі для аналізу структури вторинних циркуляції біля твердої поверхні. У ході дослідження проаналізований розвиток вихрової течії та розроблена спрощена модель вторинних циркуляцій при інерційному обертанні рідини, що дозволяє ефективно оцінити динаміку течії у в'язкому підшарі та, як наслідок, спростити обчислення для подальшого моделювання. Зокрема, огляд сучасних моделей дав змогу виявити їх недоліки і сформулювати перспективний підхід до моделювання задач, пов'язаних з вторинними течіями.

Була побудована відповідна концептуальна та математична модель та застосовані чисельні методи для моделювання задачі розвитку вторинної циркуляції внаслідок інерційного обертання ємності з рідиною. У ході моделювання було отримано та проаналізовано результати розвитку течії у придонному шарі, сформованому вторинною циркуляцією. Показано, що максимум радіальної швидкості у придонному шарі спочатку виникає біля бічної стінки ємності. Це пов'язано із зростанням початкового градієнту тиску із збільшенням відстані від осі обертання. З часом максимум розподілу зсувається у напрямку осі обертання внаслідок адвекції збурення швидкості. Для розрахованої задачі обертання циліндричної ємності радіусом і висотою 4 см описаний процес відбувається у часових межах 1 с після припинення обертання. Оцінено, що внаслідок винесення повільної придонної рідини у верхні шари та відповідної передачі імпульсу, швидкість дисипації енергії зростає більше ніж на порядок у порівнянні з випадком тільки в'язкої дисипації. Порівняння результатів моделювання з аналітичними оцінками свідчить про коректність моделі та підходу загалом. Також отриман якісний характер вихрової течії в усій області з рідиною, який

узгоджується з даними моделі придонного шару. Оскільки у результаті було отримано розподіл вертикальних швидкостей на верхній межі придонного шару, то побудована модель може бути використана як складова більш загальної моделі, шляхом надання граничних умов.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Batchelor G. K. An Introduction to Fluid Dynamics / G. K. Batchelor – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 658p.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика, т.6 «Гидродинамика» / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Физматлит, 2000. – 736с.
3. Holton J. R. An Introduction to Dynamic Meteorology. 4th ed. / James R. Holton – Netherlands, Amsterdam: Elsevier, 2004. – 535p.
4. Yogananda, C.S. The cause of the formation of meanders in the courses of rivers and of the so-called Baer's law [Електронний ресурс] / C.S. Yogananda, A. Einstein. // Resonance 2000. – vol. 5, pp. 105–108. – Режим доступу до журн.: <https://www.doi.org/10.1007/BF02839006>
5. Fikry P. L. Study on numerical simulation of flow structures in a curved open channel [Електронний ресурс] / Fikry Purwa Lugina, Tatsuhiko Uchida, Yoshihisa Kawahara // Proceedings of the 22nd IAHR-APD Congress, Sapporo, Japan, 2020. – Режим доступу: <https://www.iahr.org/library/infor?pid=7506>
6. Blanckaert K. Secondary flow in sharp open-channel bends / Blanckaert K., De Vriend H.J. // Journal of Fluid Mechanics, 2004. – vol. 498, pp. 353–380. – DOI: 10.1017/S0022112003006979
7. Бровченко І. О. Чисельні лагранжеві методи в задачах прибережної гідродинаміки / І. О. Бровченко. – дис. док. фіз.-мат. наук, ІПММС: Київ, 2017. – 370с.
8. Klovsky A. V. Generation of artificial transverse circulation in an open channel flow by submerged vanes / Alexey V. Klovsky, Dmitriy Kozlov. // J. Vestnik MGSU, 2019. – vol. 14, iss. 9, pp. 1158-1166. – DOI: 10.22227/1997-0935.2019.9.1158-1166
9. Hidesato ITO. Flow in Curved Pipes / Hidesato ITO. // JSME international journal, 1987. – vol. 30, iss. 262, pp. 543-552. – DOI: 10.1299/jsme1987.30.543

10. Seungchan B. Flow Non-Uniformity and Secondary Flow Characteristics Within a Serpentine Cooling Channel of a Realistic Gas Turbine Blade / [Seungchan Baek, Jaehyun Ryu, Myeonghwan Bang, et al.] // Journal of Turbomachinery, 2022. – vol. 144, iss. 9. – DOI: 10.1115/1.4053841
11. Tandon A. Einstein's Tea Leaves and Pressure Systems in the Atmosphere / Tandon Amit, Marshall John C. // The Physics Teacher, 2010. – vol. 48, pp. 292-298. – DOI: 10.1119/1.3393055
12. Gillis J. C. Turbulent boundary layer on a convex, curved surface [Электронный ресурс] / Gillis J. C., Johnston J. P., Kays W. M. // NASA, NTRS, 1980. – Режим доступа: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19810007897>
13. Arfken G. B. Mathematical Methods for Physicists, 6th Edition / George B. Arfken, Hans J. Weber. – Cambridge: Academic Press, 2005. – 1200p.
14. Sedov L.I. Mechanics Of Continuous Media / L.I. Sedov. – World Scientific Publishing Co. Inc., 1997. – 1368p.
15. Schlichting, H. Boundary-Layer Theory. 8th Edition / Schlichting, H., Gersten, K. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. - 799p.
16. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т.1 / Фихтенгольц Г. М. – М.: Физматлит, 2007. – 441с.
17. LeVeque J. R. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-dependent Problems / Randall J. LeVeque. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. – 356p.
18. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина, П.В. Корякин – М.: Академия, 2013. – 304с.
19. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics / Wesseling Pieter – New York: Springer, 2009. – 656p.
20. Ortega J. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables / Ortega J., Rheinboldt, W. – Cambridge: Academic Press, 2014. – 592p.
21. Versteeg K. Introduction to Computational Fluid Dynamics, An: The Finite Volume Method / K. Versteeg, W. Malalasekera. – Pearson; 2nd edition,

2007. – 520p.

22. Welch, J. E. The MAC method. A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces [Электронный ресурс] / [Welch, J. E., Harlow, F. H., Shannon, J. P., et al.] – United States, Los Alamos, LASL, 1965. – Режим доступа: <https://www.doi.org/10.2172/4563173>

23. Mazumder S. Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods / Sandip Mazumder, W. Malalasekera. – Cambridge: Academic Press, 2016. – 484p.

24. LeVeque J. R. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems / Randall J. LeVeque. – Cambridge: Cambridge University Press, 1st edition, 2002. – 580p.

25. Sohn S. A new TVD-MUSCL scheme for hyperbolic conservation laws / Sung-Ik Sohn // Computers & Mathematics with Applications, 2005. – vol. 50, iss. 1-2, pp. 231-248. – DOI:10.1016/j.camwa.2004.10.047

26. Leonard B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation / B.P. Leonard // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1979. – vol. 19, p. 59-98. – DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3

27. Saad T. Computational Fluid Dynamics course CH EN 6355 [Электронный ресурс] / Tony Saad // US, The university of Utah, 2019. – Режим доступа: <http://www.tonysaad.net/ucfd/>

28. Cushman-Roisin B. Environmental Fluid Mechanics / Benoit Cushman-Roisin. – John Wiley & Sons, Inc, 2013. – 420p.

ДОДАТОК А ТЕКСТИ ПРОГРАМ

А.1 Кінцево-різницева модель

```

class FDM():

    def __init__(self, NR: int, NZ: int, NU: float):

        self.N, self.M, self.nu = NR, NZ, NU

        # Boundary layer height estimation

    def layer_width(self, t):

        return np.sqrt(2 * self.nu * t)

    def solve(self, tau=0.125, R=1.0, Z=None, Omega=np.pi*2, iters=10):

        N, M = self.N, self.M

        NU = self.nu

        if Z == None:

            Z = self.layer_width(tau)

            print(f"Boundary level for {tau}s: Z = {Z}m")

        dr, dz = R / (N-1), Z / (M-1)

        r = lambda i: (N-i-1)*dr

        z = lambda j: j*dz

        #save params for current run

        self.r, self.z, self.dr, self.dz = r, z, dr, dz

        self.tau, self.R, self.Z, self.W = tau, R, Z, Omega

        print(f"Grid resolution Nr = {N}, Nz = {M}")

        # Au + B = 0 ~ A[k,:] = B[k] for all k

        # A[m, k] = m-th equation, k-th variable == v[i,j]

        # A[m, k-1] = m-th equation, (k-1)-th variable == v[i,j-1]

        # A[m, k+1] = m-th equation, (k+1)-th variable == v[i,j+1]

        # A[m, k-NZ] = m-th equation, (k-NZ)-th variable == v[i-1,j]

        # Create empty coefficient matrices.

        # I: NR*NZ variables (I axis) and NR*NZ equations (J axis) exist for all template (i: 0-NR, j: 0-NZ)

        A, B = np.zeros((N*M, N*M)), np.zeros(N*M)

        v = np.zeros(N*M)

        error = 0

        for it in range(iters): # Iterative approximation

            for i in range(N): # by R axis

                for j in range(M): # by Z axis

                    k = i*M + j # flat index ((i, j) => i*M + j, 2dim => 1dim)

```

```

if j==0 or j==M-1 or i==0:
    A[k, k] = 1
    continue
if i==N-1:
    A[k, k] = 1
    A[k, k-1] = 1
    continue
B[k] = Omega * Omega * r(i) * (1 - (z(j) / Z) ** 2) # free coefficient
A[k, k] = 1 / tau + 2 * NU / (dz ** 2) + v[k]/dr # v[i,j]
A[k, k-1] = -NU / (dz ** 2) # v[i,j-1]
A[k, k+1] = -NU / (dz ** 2) # v[i,j+1]
A[k, k-M] = -v[k] / dr # v[i-1,j]
#A[k, k+M] = -v[k] / dr # v[i+1,j] # upwind
# solve system of NR*NZ equations with NR*NZ variables
error = v
v = np.linalg.solve(A, B)
error = np.linalg.norm(v - error)
print(f"Iter {it+1}/{iters} done, error_delta_norm={error}")
# eq
return v.reshape((N, M)).T

```

A.2 Модель для методу кінцевих об'ємів

```

'''
Finite-volume method solver
for Navier-Stokes equation in 2D plane
with square domain
'''
class FVM():
    '''
    Init solver params
    '''
    def __init__(self, NX:int, NY:int, LX:int, LY:float, viscosity:float, dt:float):
        # grid initialization params,
        self.nx, self.ny = NX, NY
        self.nx2, self.ny2 = NX + 2, NY + 2 # will use 'ghost' cells for easier boundary handling

```

```

self.lx, self.ly = LX, LY
self.a = viscosity
self.dt, self.dx, self.dy = dt, LX/NX, LY/NY
# coordinates init, using staggered grid
# Cell centers coordinates grid
xxc = np.arange(0,self.lx,self.dx) + self.dx/2.0
yye = np.arange(0,self.ly,self.dy) + self.dy/2.0
self.xc, self.yc = np.meshgrid(xxc, yye)
# staggered coords for x, y
xs, ys = np.arange(0,self.lx+self.dx,self.dx), np.arange(0,self.ly+self.dy,self.dy)
self.xu, self.yu = np.meshgrid(xs, yye)
self.xv, self.yv = np.meshgrid(xxc, ys)
# init velocities fields
self.u, self.v = np.zeros((self.ny2, self.nx2)), np.zeros((self.ny2, self.nx2))
# External force function (default)
self.F = lambda x, y, t: 0
self.A = self.__init_pressure_matrix()

def params(self):
    print(f"grid=({self.nx}, {self.ny}), domain=({self.lx}, {self.ly})")
    print(f"dx={self.dx}, dy={self.dy}, dt={self.dt}, nu={self.a}")

def cell_center_velocities(self, u, v):
    inside = slice(1,-1) # slicer for interior valid cells
    uc = 0.5*(u[inside,2:] + u[inside,inside])
    vc = 0.5*(v[2:,inside] + v[inside,inside])
    return uc, vc

'''
Init boundary conditions
- for boundaries, functions are passed,
    top, bottom: (np.array[NX], np.array[NX]) # u, v
    left, right: (np.array[NY], np.array[NY]) # u, v
    init: (np.array[NY, NX], np.array[NY, NX]) # u, v

'''

#TODO: note, that yj=0 - top boundary for heatmap, but bottom for contourf, xi=0 - left boundary
def set_boundary_conditions(self, top, left, right, bottom, init):

```

```

self.top, self.left, self.right, self.bot = top, left, right, bottom
for i in range(1, self.nx2-1):
    for j in range(1, self.ny2-1):
        self.u[j, i] = init[0][j-1, i-1]
        self.v[j, i] = init[1][j-1, i-1]
def set_external_force(self, f):
    self.F = f

def __apply_boundary(self, u, v):
    for i in range(1, self.nx2-1):
        # top boudary
        ub, vb = self.top
        u[-1, i] = ub[i-1] - self.u[-2, i]
        v[-1, i] = vb[i-1] - self.v[-2, i]
        # bottom
        ub, vb = self.bot
        u[0, i] = ub[i-1] - self.u[1, i]
        v[1, i] = vb[i-1] - self.v[2, i]

    for j in range(1, self.ny2-1):
        # left
        ub, vb = self.left
        u[j, 1] = ub[j-1] - self.u[j, 2]
        v[j, 0] = vb[j-1] - self.v[j, 1]
        # right
        ub, vb = self.right
        u[j, 1] = ub[j-1] - self.u[j, 2]
        v[j, 0] = vb[j-1] - self.v[j, 1]

'''
Solver;
callback - f: (u, v, t, iteration) => None
pressure_callback - f: (p, t, iteration) => None
callbacks are called after each iteration
kwargs - args for external force function
'''

def solve(self, iters: int, callback = None, pressure_callback = None, **kwargs):
    u, v, dx, dy, dt = self.u, self.v, self.dx, self.dy, self.dt
    inside = slice(1,-1) # slicer for interiour valid cells

```

```

t = 0

# empty new force fiels, velociies and div
S, un, vn, div = np.zeros_like(u), np.zeros_like(u), np.zeros_like(u), np.zeros_like(u)

for it in range(1, iters + 1):
    # apply boundary conditions
    u, v = self.__apply_boundary(self.u, self.v)
    S, un, vn, div = np.zeros_like(u), np.zeros_like(u), np.zeros_like(u), np.zeros_like(u)
    # calc external forces
    for i in range(1, self.nx2-1):
        for j in range(1, self.ny2-1):
            S[j,i] = self.F((i-1)*dx, (j-1)*dy, t, **kwargs)

    # X axis fluxes calculation
    for i in range(2, self.nx2-1):
        for j in range(1, self.ny2-1):
            # cell-boundary velocities
            u_e = (u[j,i+1] + u[j,i]) / 2 # east velocity (left edge of vol. cell)
            u_w = (u[j,i] + u[j,i-1]) / 2 # west velocity (right edge of vol. cell)
            u_n = (u[j+1, i] + u[j,i]) / 2 # north - top surface
            u_s = (u[j,i] + u[j-1, i]) / 2 # south - bottom surface

            # Vertical vel.
            v_n = (v[j+1, i] + v[j+1,i-1]) / 2
            v_s = (v[j,i] + v[j, i-1]) / 2

            # Advective flux
            Fu_A = (u_e*u_e - u_w*u_w) * dy + (v_n*u_n - v_s*u_s) * dx

            # Diffusive fluxes
            Fu_D = self.a * (dx * (u[j+1, i] - 2*u[j, i] + u[j-1, i])/dy + \
                               dy * (u[j, i+1] - 2*u[j, i] + u[j, i-1])/dx)

            # mock timestep, calc u_n
            un[j,i] = u[j,i] + dt * (-Fu_A + Fu_D) /dx/dy + dt * S[j,i]

    # Y axis fluxes calculation
    for i in range(1, self.nx2-1):
        for j in range(2, self.ny2-1):
            # cell-boundary velocities
            u_e = (u[j,i+1] + u[j-1,i+1]) / 2 # east velocity (left edge of vol. cell)
            u_w = (u[j,i] + u[j-1,i]) / 2 # west velocity (right edge of vol. cell)

            # Vertical vel.
            v_e = (v[j,i+1] + v[j,i]) / 2
            v_w = (v[j,i] + v[j,i-1]) / 2

```

```

v_n = (v[j+1, i] + v[j,i]) / 2
v_s = (v[j,i] + v[j-1, i]) / 2

# Advective flux
Fv_A = (u_e*v_e - u_w*v_w) * dy + (v_n*v_n - v_s*v_s) * dx

# Diffusive fluxe
Fv_D = self.a * (dx * (v[j+1, i] - 2*v[j, i] + v[j-1, i])/dy + \
                  dy * (v[j, i+1] - 2*v[j, i] + v[j, i-1])/dx)

# mock timestep, calc v_n
vn[j,i] = v[j,i] + dt * (-Fv_A + Fv_D) /dx/dy + dt * 10

# calc div
div[inside,inside] = (un[inside, 2:] - un[inside, inside]) / dx + \
                    (vn[2:, inside] - vn[inside, inside]) / dy

# mock pressure (right term of equation)
prt_mk = div[inside, inside] / dt

# Solve equation, to obtain compensated pressure
p = np.zeros_like(u)
p[inside, inside] = self.solve_for_pressure(prt_mk)

# real timestep, with compensated velocities
u[inside, 2:-1] = un[inside, 2:-1] - dt * (p[inside, 2:-1] - p[inside, 1:-2])/dx
v[2:-1, inside] = vn[2:-1, inside] - dt * (p[2:-1, inside] - p[1:-2, inside])/dy

# update velocities, call callback, logging
self.u, self.v = u, v
t+= dt
print(f"Iter {it}/{iters}, t={t:.5f}")
if callback != None: callback(u, v, t, it)
if pressure_callback != None: pressure_callback(p, t, it)

return u.copy(), v.copy()
'''

Solves Euler equation for pressure, by
assuming that DIV(u_(n+1)) == 0

```

```

    input: pressure: np.array(ny+2, nx+2)
    out: new_pressure: np.array(ny+2, nx+2)
    '''

def solve_for_pressure(self, prt_mk, epsilon=1e-10, log=True):
    # solve with iterative algorithm
    p,status = scipy.sparse.linalg.bicg(self.A,prt_mk.ravel(),tol=epsilon)
    if log: print(f"Solved for pressure, status={status}")
    return p.reshape((self.ny, self.nx))

def __init_pressure_matrix(self):
    dx, dy, nx, ny = self.dx, self.dy, self.nx, self.ny
    domain = (ny, nx)

    ### construct pressure coefficient 3-diagonal sparse matrix
    A0 = np.zeros(domain)

    # sides of cells (same for w,e,s,n, holding constant)
    A_e, A_w = np.ones(domain) /dx/dx, np.ones(domain) /dx/dx,
    A_n, A_s = np.ones(domain) /dy/dy, np.ones(domain) /dy/dy

    # boundaries
    A_e[:, -1] = 0. # right
    A_w[:, 0] = 0. # left
    A_n[-1, :] = 0. # top
    A_s[0, :] = 0. # bottom

    # output matrix
    A0 = -(A_w + A_e + A_n + A_s)

    # counstruct
    N = nx*ny
    D0 = A0.reshape(N) # main diagonal
    DE, DW, DS, DN = A_e.reshape(N)[: -1], A_w.reshape(N)[1:], A_s.reshape(N)[nx:], A_n.reshape(N)[: -nx]

    return scipy.sparse.diags([D0, DE, DW, DN, DS], [0, 1, -1, nx, -nx], format='csr')

#### Solving pipeline
# Define domain and grid
NX, NY = 100,300
LX, LY = 2*0.04, 0.01
model = FVM(NX,NY,LX,LY, viscosity=1e-6, dt=1e-5)

# boundary conditions
zerosX, zerosY, zeros0 = (np.zeros(NX), np.zeros(NX)), \
(np.zeros(NY), np.zeros(NY)), (np.zeros((NY, NX)), np.zeros((NY, NX)))

```

```

model.set_boundary_conditions(zerosX, zerosY, zerosY, zerosX, zeros0)

# External force
def f(x, y, t, omega=2*np.pi*2):
    return omega * omega * (LX/2-x) * (1 - (y / 0.0014) ** 2) if y <= 0.0014 else 0

model.set_external_force(f)
model.params()

# run
u, v = model.solve(int(100000*0.01), callback = callback_saver)

# at cell centers
uc, vc = model.cell_center_velocities(u, v)

```

А.3 Додаткові функції для обчислення вертикальних швидкостей

```

# Analytical velocity est.
def analyticalWa(fdm: FDM, tau):
    return 7*(fdm.W**2)*(fdm.layer_width(tau) ** 3) / (60 * fdm.nu) #/ fdm.R

# Average integral vertical velocity
# IN: v - velocity, i - index, fdm - solver
# OUT: <W>, m/s

def avgWa(v, i, dz, N, R):
    return 2*np.sum(v[:, i])*dz / (1 - i / (N-1)) / R

# Average vertical velocity at the top boundary of layer, derived from continuity equation
# IN: v - velocity, i - index, fdm - solver
# OUT: W_i, m/s for i-th cell

def Wi(v, i, FDM: fdm):
    if i > 0 and i < fdm.N-1:
        return -fdm.dz*np.sum(v[:, i+1]*fdm.r(i+1) - v[:, i-1]*fdm.r(i-1)) / 2 / fdm.dr / fdm.r(i)
    elif i <= 0:
        return -fdm.dz*np.sum(v[:, 1]*fdm.r(1) - v[:, 0]*fdm.r(0)) / fdm.dr / fdm.r(0)
    elif i >= fdm.N-1:
        return -fdm.dz*np.sum(v[:, fdm.N-1]*fdm.r(fdm.N-1) - v[:, fdm.N-2]*fdm.r(fdm.N-2)) / \
            fdm.dr / fdm.dr

```