

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

КУРСОВА РОБОТА

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Укладачі: О.І. Толочко, С.М. Пересада., Б.І. Приймак

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Островерхов М. Я.*, док. техн. наук, проф., завідувач кафедри теоретичної електротехніки факультету електроенерготехніки та автоматики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Бур'ян С. О.*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 10 від 20.06.2022 р.)*

Навчальний посібник призначений для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр" спеціальності 141 "електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціалізації "електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність" денної, прискореної та заочної форм навчання при виконанні ними курсової роботи з дисципліни «Теорія автоматичного керування». Курсова робота складається з двох частин: 1) аналіз лінійних неперервних динамічних систем; 2) синтез регулятора стану повного порядку для лінійного неперервного динамічного об'єкту. До кожної з частин надано 50 варіантів завдань. У навчальному посібнику наведені основні теоретичні відомості та методичні рекомендації до виконання курсової роботи і застосування інструментів програмного пакету MATLAB для моделювання, виконання розрахунків та перевірки адекватності отриманих результатів.

Реєстр. № НП 21/22-711. Обсяг 7,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АФЧХ – амплітудно-фазова частотна характеристика;
АЧХ – амплітудно-частотна характеристика;
ДР – диференційне рівняння
ДЧХ – дійсна частотна характеристика;
ЛАЧХ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика;
ЛФЧХ – логарифмічна фазо-частотна характеристика;
МО – математичний опис;
МР – модальний регулятор;
ПП – перехідний процес;
ПФ – передавальна функція;
ОК – об’єкт керування;
ОР – об’єкт регулювання;
РС – регулятор стану;
САК – система автоматичного керування;
СГК – середньо геометричний корінь;
СМК – система модального керування;
СС – структурна схема;
ТАК – теорія автоматичного керування;
УЧХ – уявна частотна характеристика;
ФЧХ – фазо-частотна характеристика;
ХП – характеристичний поліном;
ХЧ – характеристична частота.

.

УКРАЇНО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ

Україномовний термін	Англomовний термін
алгоритм керування	control algorithm
амплітуда	magnitude
вагова функція (характеристика)	impulse response
власні значення	eigenvalues
замкнений контур	closed loop
зворотний зв'язок	feedback
знаменник	denominator
керування	control
коефіцієнт демпфування	damping ratio (factor, coefficient)
нулі	zeros
об'єкт керування (регулювання)	plant, control object
передавальна (передатна) функція	transfer function
перерегулювання	overshot, overshoot
перехідна функція (характеристика)	step response
перехідні процеси	transients
полюси	poles
простір стану	state space
прямий зв'язок	feedforward
розімкнений контур	open loop
система автоматичного керування	automatic control system
смуга пропускання	bandwidth
характеристичне рівняння	characteristic equation, eigenvalue equation
характеристичний поліном	characteristic polynomial
час досягнення максимуму	peak time
час досягнення усталеного значення	rise time
час перехідного процесу	steady state time
частота зрізу	cut-off frequency
частота пропускання	bandwidth frequency
чисельник	numerator

ЗМІСТ

Перелік скорочень.....	3
Україно-англійський словник основних термінів	4
Вступ.....	8
Частина I. Аналіз лінійної неперервної динамічної системи.....	10
1. Завдання до частини I.....	10
2. Перетворення структурних схем лінійних систем.	16
2.1. Основні правила еквівалентних структурних перетворень	16
2.2. Приклад перетворення досліджуваної системи	20
2.3 Перевірка правильності еквівалентних перетворень в середовищі пакету <i>MATLAB</i>	23
3. Аналіз систем за їх передавальними функціями	27
3.1. Застосування передавальних функцій у поліноміальній формі.....	27
3.2. Застосування передавальних функцій у вигляді розкладення на нулі-полюси	32
3.3. Застосування передавальних функцій у вигляді суми передатних функцій елементарних ланок	34
4. Аналіз систем за розташуванням нулів-полюсів	37
4.1. Вплив полюсів на якість перехідних процесів.....	37
4.2. Визначення показників якості перехідних функцій аперіодичної та коливальної ланок за розташуванням полюсів.....	42
4.3. Аналіз досліджуваної системи за розташуванням нулів-полюсів	47
5. Частотний аналіз неперервних систем	51
5.1. Основні визначення.....	51
5.2. Способи побудови частотних характеристик в середовищі пакету <i>MATLAB</i>	53
5.2.1. Використання базових функцій пакету <i>MATLAB</i>	53
5.2.2. Використання функцій <i>Control System Toolbox</i> та <i>Signal Toolbox</i> пакету <i>MATLAB</i>	55

5.3. Визначення запасів стійкості замкнених систем за діаграмами	
Бode і Найквіста розімкненої системи	57
5.3.1. Загальна характеристика критеріїв стійкості та її показників ..	57
5.3.2. Визначення запасів стійкості за діаграмами Бode	59
5.3.3. Визначення запасів стійкості за діаграмами Найквіста.....	63
5.4. Побудова асимптотичних ЛЧХ.....	67
5.4.1. Побудова ЛЧХ вручну.....	68
5.4.2. Побудова АЛАЧХ в середовищі пакету MATLAB	71
5.5. Зв'язок частотних характеристик зі статичними та динамічними	
властивостями неперервних лінійних динамічних систем	79
5.5.1. Зв'язок між АЧХ і ФЧХ та усталеною реакцією систем на	
синусоїдальні сигнали.....	79
5.5.2. Зв'язок між виглядом АЛАЧХ та якістю перехідних процесів	84
6. Аналіз систем автоматичного керування в часовій області.....	88
6.1. Загальна характеристика перехідних процесів	88
6.2. Характеристика типових входних сигналів та реакцій на них	89
6.3. Побудова реакцій САК на типові входні сигнали.....	91
6.4. Характеристика та визначення показників якості перехідних	
процесів.....	94
Частина II. Синтез модального регулятора для лінійного об'єкту	
регулювання.....	101
7. Завдання до частини II	101
8. Основні поняття про простір станів	106
8.1. Математичний опис систем автоматичного керування у	
просторі станів	106
8.2. Перевірка об'єктів на керованість та спостережуваність.....	108
8.3. Отримання рівнянь стану з передавальних функцій	110
8.4. Отримання передавальних функцій з рівнянь стану	116
9. Метод модального керування	117

10. Стандартні характеристичні поліноми та їх застосування при синтезі систем модального керування	121
10.1. Загальні відомості	121
10.2. Поліноми з біноміальними коефіцієнтами	123
10.3. Поліноми Батерворта.....	125
10.4. Поліноми Бесселя	130
10.5. Вибір характеристичної частоти стандартних поліномів.....	132
10.6. Формування стандартних поліномів у середовищі пакету <i>MATLAB</i>	134
11. Приклад синтезу системи модального керування	136
11.1. Постановка задачі синтезу	136
11.2. Опис об'єкту керування у просторі стану	136
11.3. Перевірка керованості об'єкту.....	138
11.4. Визначення характеристичного поліному замкненої системи..	139
11.5. Синтез модального регулятора	140
11.6. Перевірка синтезованої системи на відповідність заданим показникам якості	144
Список літератури	147
Додаток А Вимоги до оформлення пояснювальної записки	149
Додаток Б Функції <i>Control System Toolbox</i> пакету <i>MATLAB</i>	151
Додаток В. Логарифмічні частотні характеристики елементарних співмножників передавальних функцій	152

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр" спеціальності 141 "електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціалізації "електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність" усіх форм навчання при виконанні ними курсової роботи з дисципліни "Теорія автоматичного керування" (ТАК). Курсова робота з ТАК складається з двох частин.

Перша частина присвячена аналізу лінійних неперервних систем.

При її виконанні студенти набувають практичних навичок з еквівалентних перетворень структурних схем неперервних систем автоматичного керування (САК), необхідних для отримання результуючих передавальних функцій, навчаються визначати стійкість систем та запаси стійкості різними методами, отримувати реакції САК на типові вхідні сигнали, оцінювати показники якості перехідних процесів та точності в усталених режимах роботи, будувати частотні характеристики та карти розташування нулів-полісів, розуміти взаємозв'язок між результатами різних видів аналізу.

Друга частина присвячена синтезу регулятора стану повного порядку для лінійного неперервного об'єкта керування з умов забезпечення бажаних динамічних та статичних показників якості САК. При її виконанні студенти засвоюють принципи модального керування, ідею поліноміального синтезу, що полягає у забезпеченні бажаного розташування полісів замкненої системи на комплексній площині шляхом застосування стандартних характеристичних поліномів, а також набувають практичного досвіду використання інструментів програмного пакету *MATLAB* для автоматизації розрахунків, необхідних при реалізації процедури синтезу систем модального керування.

В навчальному посібнику докладно висвітлено методики розрахунків, що стосуються усіх розділів типового завдання, а також наведено перелік посилань, де можна знайти більш детальні відомості з розглянутих питань.

Значну увагу приділено англomовній термінології, що сприятиме підвищенню мобільності студентів та полегшенню користування сучасним програмним забезпеченням, зокрема програмним пакетом *MATLAB*.

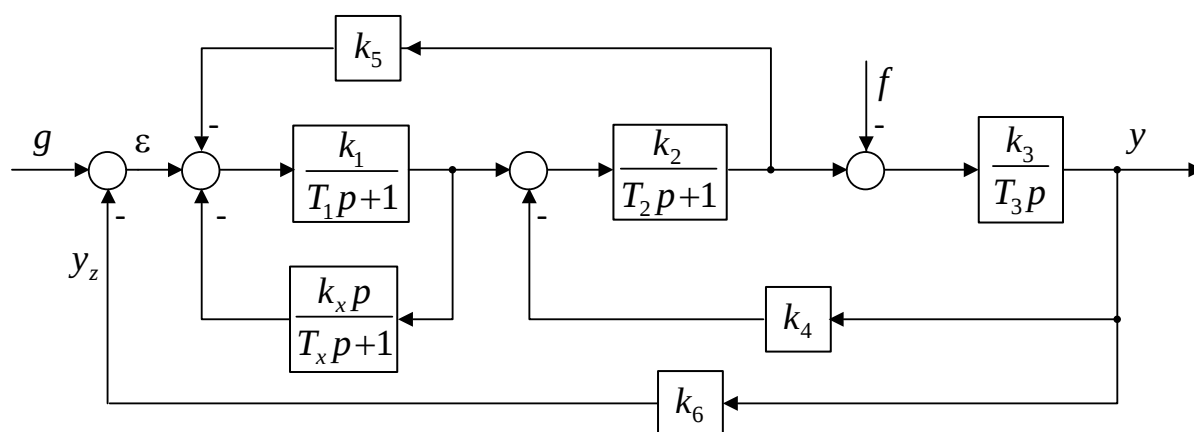
Враховуючи, що це перша курсова робота, яку виконують студенти, у додатку А сформульовані вимоги до оформлення звіту та наведено приклад оформлення титульної сторінки. Крім цього, для більш ефективного виконання завдань курсової роботи, у додатку Б подано перелік основних функцій розділу *Control System Toolbox* програмного пакету *MATLAB* та основні правила їх використання, а у додатку В представлені логарифмічні амплітудні та фазові частотні характеристики елементарних співмножників передавальних функцій.

ЧАСТИНА І

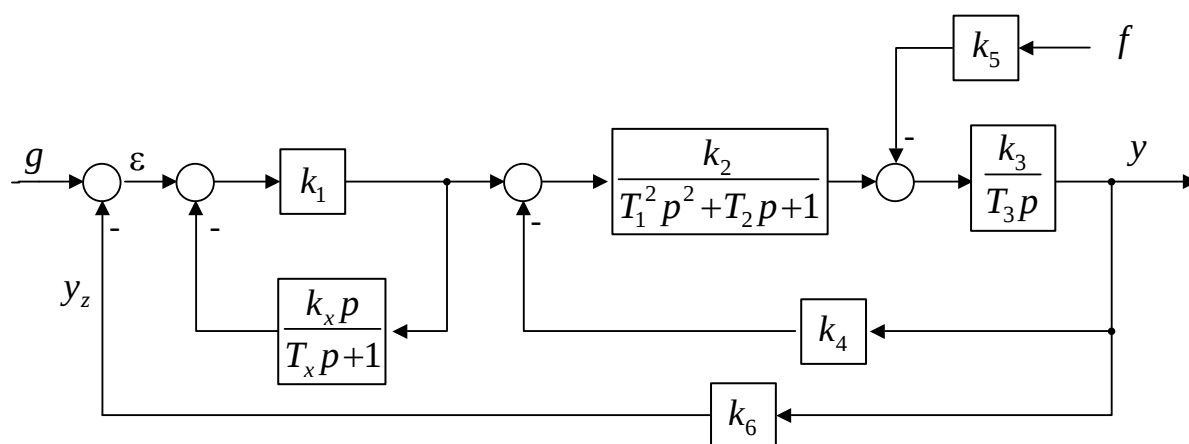
АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

1 ЗАВДАННЯ ДО ЧАСТИНИ І

Варіанти структурних схем (СС) досліджуваних систем зображені на рис. 1.1 та рис. 1.2, а їх параметри (коефіцієнти підсилення та сталі часу) наведені в табл. 1.1 та 1.2.

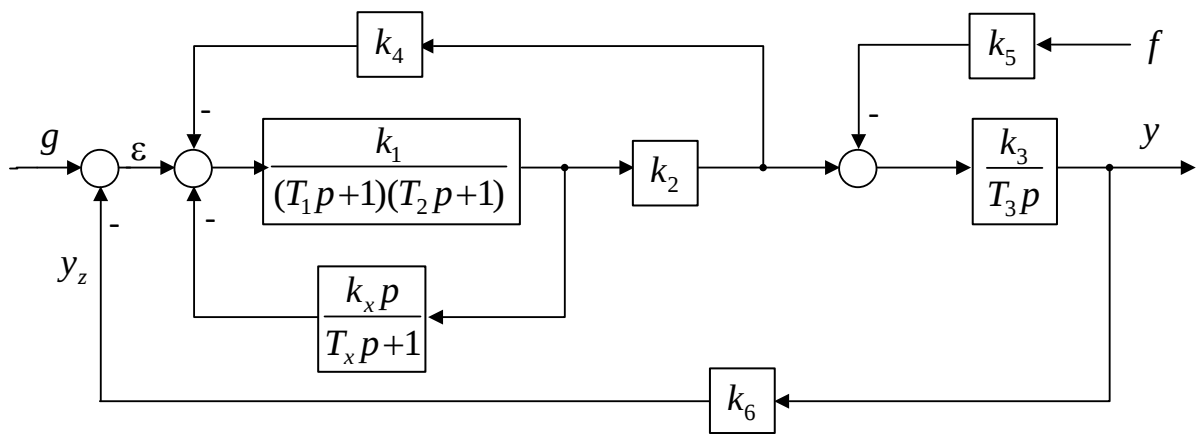


а)

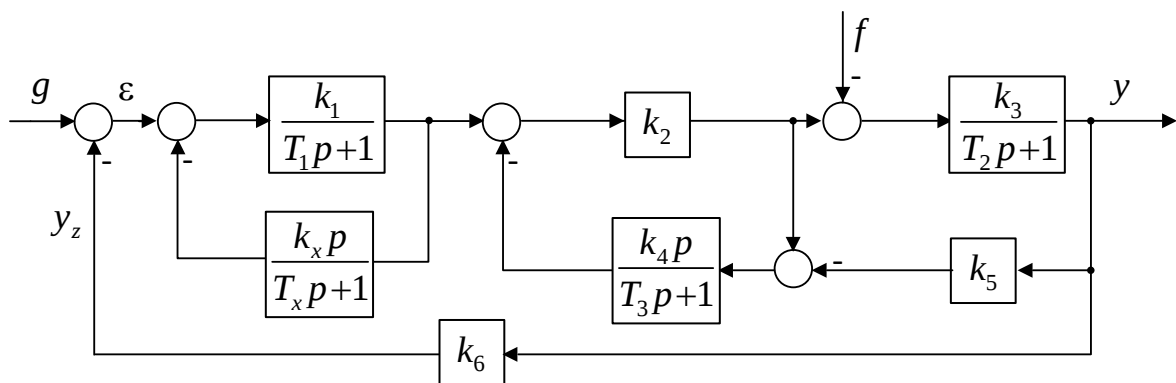


б)

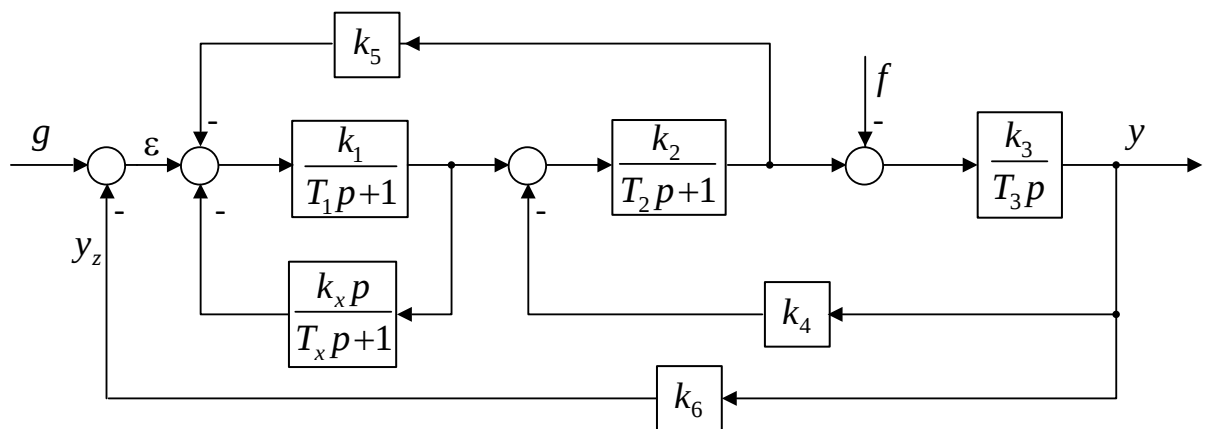
Рис. 1.1. Структурні схеми досліджуваних систем:
а) варіанти 1-10, б) варіанти 11-20



а)



б)



в)

Рис. 2.1. Структурні схеми досліджуваних систем:
а) варіанти 21-30, б) варіанти 31-40, в) варіанти 41-50

На структурних схемах позначені такі сигнали: g – керувальна дія; f – збурювальна дія; y – керована (вихідна) величина; y_z – сигнал головного (зовнішнього) зворотного зв'язку; ε – помилка керування.

Таблиця 1.1. Варіанти досліджуваних систем та значення їх параметрів

Номери варіантів	T_1 , с	T_2 , с	T_3 , с	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
1;11;21;31;41	0.20	0.10	0.05	100	0.5	1.0	0.05	0.20	0.10
2;12;22;32;42	0.10	0.05	0.10	90	0.5	4.0	0.10	0.10	0.02
3;13;23;33;43	0.30	0.20	0.25	80	1.0	5.0	0.02	0.30	0.05
4;14;24;34;44	0.15	0.05	0.20	70	0.3	1.0	0.05	0.40	0.10
5;15;25;35;45	0.50	0.20	0.25	60	1.0	4.0	0.04	0.50	0.05
6;16;26;36;46	0.25	0.10	0.20	50	0.8	1.0	0.30	0.60	0.06
7;17;27;37;47	0.10	0.05	0.04	50	0.5	2.0	0.10	0.10	0.07
8;18;28;38;48	0.40	0.10	0.25	40	0.5	0.5	0.30	0.20	0.25
9;19;29;39;49	0.30	0.10	0.25	80	0.5	2.0	0.02	0.25	0.10
10;20;30;40;50	0.20	0.50	0.10	20	0.8	1.0	0.1	0.30	0.10

Таблиця 2.2. Значення параметрів k_x , T_x для різних варіантів САК

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_x , с	0,5	0,1	0,5	0,1	0,5	0,2	1	0,5	0,5	0,5
T_x , с	1	1	0,2	0,5	1	1	3	0,25	0,25	0,25
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k_x , с	2,5	0,1	1	0,5	50	5	2	10	2	1
T_x , с	0,1	0,1	0,5	1	1	1,5	1	4	1	3
Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k_x , с	1	0,1	0,5	0,1	0,5	1	0,1	5	1	0,2
T_x , с	1	0,1	0,5	0,1	0,25	1,5	0,1	4	1	0,1
Варіант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
k_x , с	0,1	0,2	0,2	1	0,5	1	1	0,1	1	0,5
T_x , с	0,2	0,5	0,1	10	1	2	1	1	2	0,5
Варіант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
k_x , с	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2	1
T_x , с	0,2	0,1	0,5	0,1	1	0,1	0,1	0,1	1	0,1

Завдання складається з таких пунктів:

1. Знайти передавальну (передатну) функцію (ПФ) розімкненої системи та ПФ замкненої системи в поліноміальній формі до вихідного сигналу та до сигналу зворотного зв'язку замкненого контуру за керувальною та збурювальною діями шляхом послідовних еквівалентних перетворень заданої структурної схеми. Виконати перевірку перетворень, користуючись інструментами пакету *MATLAB*.

2. Знайти ПФ розімкненої та замкненої систем у формі розкладення на нулі та полюси.

3. Знайти ПФ замкненої системи у вигляді розкладення на суму простих дробів.

4. Зі знайдених передавальних функцій визначити:

- коефіцієнт підсилення розімкненої системи або порядок астатизму замкненої системи за керуванням;
- коефіцієнти підсилення замкненої системи за керуванням та за збуренням;
- швидкісну похибку та добротність системи за швидкістю;
- нулі та полюси замкненої системи.

5. Виконати аналіз властивостей системи при відпрацюванні керуючої дії за розташуванням нулів та полюсів замкненої системи на комплексній площині, а саме:

- визначити нулі, полюси, їх коефіцієнти демпфування та власні частоти (амплітуди);
- побудувати карту розташування нулів-полюсів на комплексній площині
- визначити домінуючий полюс або домінуючу пару комплексно спряжених полюсів, побудувати карту розташування тих нулів і полюсів, що більш-менш істотно впливають на якість перехідних процесів.
- зробити висновок щодо стійкості системи та визначити приблизно показники якості перехідної функції за керуванням.

6. Проаналізувати частотні характеристики системи, а саме:

- побудувати дійсну, уявну, амплітудну і фазову частотні характеристики (ДЧХ, УЧХ, АЧХ і ФЧХ) замкненої системи за керуючою дією;
- встановити зв'язок між амплітудою та фазою усталених реакцій системи на синусоїдальний сигнал керування і відповідними точками АЧХ і ФЧХ;
- з АЧХ визначити частоту пропускання системи та приблизне значення перерегулювання перехідної функції;
- вибрати на АЧХ замкненої системи 2 точки з суттєво різними амплітудами і побудувати реакції системи на синусоїдальні сигнали керування одиничної амплітуди і двома обраними частотами; порівняти амплітуди і фази вихідних сигналів з відповідними значеннями на АЧХ та ФЧХ;
- побудувати діаграми Боде і Найквіста розімкненої системи;
- визначити частоту зрізу розімкненої системи та запаси стійкості за амплітудою та за фазою і частоти, на яких вони визначаються;
- до точної логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ) розімкненої системи додати асимптотичну ЛАЧХ;
- за асимптотичною ЛАЧХ визначити приблизно показники якості перехідних процесів замкненої системи;
- порівняти показники якості та точності, отримані з аналізу ЛАЧХ з відповідними показниками, визначеними в попередніх пунктах.

7. Проаналізувати статичні та динамічні властивості системи у часовій області, а саме:

- побудувати перехідну та вагову функції за керуючою дією та за збуренням, виявити зв'язки між показниками їх якості;
- визначити тип перехідних процесів, порядок астатизму за керуванням та за збуренням, показники якості перехідних функцій та показники точності відпрацювання сигналу керування в усталених режимах;
- визначити реакцію системи на почергову та одночасну стрибкоподібну зміну сигналів керування та збурення (у першому випадку збурення

змінювати тільки після закінчення перехідного процесу за керуванням);
пояснити, що таке принцип суперпозиції;

- побудувати графіки сигналу зворотного зв'язку системи та похибки керування за лінійної зміни сигналу керування; визначити добротність системи за швидкістю.

2 ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Досліджувана система відноситься до класу неперервних *лінійних стаціонарних систем (LTI-systems, або Linear Time Invariant systems)*. При дослідженні таких систем важливо вміти перетворювати їх структурні схеми до форми, найбільш зручної для аналізу, наприклад, до схеми з одним зворотним зв'язком. Така схема дає можливість знайти як передавальну (передатну) функцію (ПФ) розімкненої системи, необхідну для визначення запасів стійкості за діаграмами Боде і Найквіста, так і ПФ замкненої системи за керуванням та за збуренням, необхідні для визначення нулів і полюсів системи, розрахунку перехідних та вагових функцій, частотних характеристик тощо. Перетворення повинні бути еквівалентними, тобто вихідна і перетворена система повинні мати однакові властивості.

2.1 Основні правила еквівалентних структурних перетворень

Перелічимо *основні правила еквівалентних перетворень* [1, 4, 5, 7-9].

1. *Послідовно з'єднані ланки (Series Connection)* можна замінити однією ланкою, ПФ якої дорівнює добутку передавальних функцій окремих ланок (див. рис. 2.1):

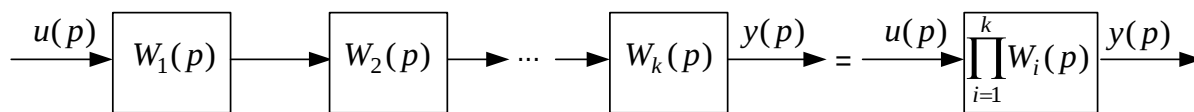


Рис. 2.1. Еквівалентне перетворення послідовно з'єднаних ланок

Якщо ПФ кожної ланки задано в поліноміальній формі

$$W(p) = \frac{H(p)}{G(p)}, \quad (2.1)$$

то ПФ k послідовно з'єднаних ланок матиме вигляд

$$W(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)\dots H_k(p)}{G_1(p)G_2(p)\dots G_k(p)}, \quad (2.2)$$

2. Кілька *паралельно з'єднаних ланок (Parallel Connection)*, можна замінити однією ланкою, ПФ якої дорівнює сумі передавальних функцій цих ланок (рис. 2.2):

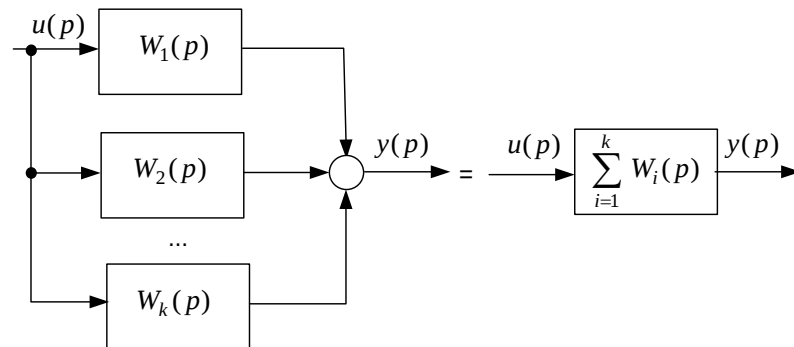


Рис. 2.2. Еквівалентне перетворення паралельно з'єднаних ланок

Наприклад, ПФ двох паралельно з'єднаних ланок з ПФ виду (2.1) можна визначити за формулою

$$W(p) = \frac{H_1(p)}{G_1(p)} + \frac{H_2(p)}{G_2(p)} = \frac{H_1(p)G_2(p) + H_2(p)G_1(p)}{G_1(p)G_2(p)}. \quad (2.3)$$

3. Ланку з ПФ прямого каналу $W_{\Pi}(p)$, охоплену каналом зворотного зв'язку (33) з передавальною функцією $W_{33}(p)$, що утворюють *замкнений контур (Closed Loop)*, можна замінити ланкою з ПФ $W_3(p)$ (див. рис. 2.3), в якій знак плюс відповідає *від'ємному зворотному зв'язку (Negative Feedback)*, а знак мінус – *додатному 33 (Positive Feedback)*:

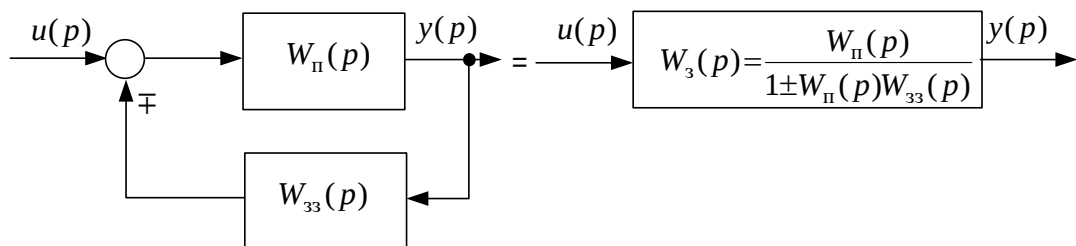


Рис. 2.3. Еквівалентне перетворення систем зі зворотним зв'язком

Надалі ми будемо розглядати тільки контури, замкнені від'ємними 33, тому що *контури з додатним 33 зазвичай є нестійкими*, тобто

$$W_3(p) = \frac{W_{\Pi}(p)}{1 + W_{\Pi}(p)W_{33}(p)}. \quad (2.4)$$

Оскільки вираз

$$W_p(p) = W_{\Pi}(p)W_{33}(p) \quad (2.5)$$

являє собою ПФ *розімкненого контуру (Open Loop)*, то ПФ замкненого контуру можна записати у вигляді

$$W_3(p) = \frac{W_{\Pi}(p)}{1 \pm W_p(p)}. \quad (2.6)$$

Щоб не отримувати при таких перетвореннях 4-х поперхові дроби, доцільно визначити загальний вигляд результуючої ПФ через поліноми в чисельнику та в знаменнику складових ПФ. Тобто, якщо позначити

$$W_{\Pi}(p) = \frac{H_{\Pi}(p)}{G_{\Pi}(p)}, \quad W_{33}(p) = \frac{H_{33}(p)}{G_{33}(p)}, \quad (2.7)$$

то

$$W_3(p) = \frac{H_{\Pi}(p)G_{33}(p)}{G_{\Pi}(p)G_{33}(p) + H_{\Pi}(p)H_{33}(p)}. \quad (2.8)$$

Можна розглянути окремі випадки формул (2.7), (2.8), що досить часто зустрічаються на практиці:

- якщо $H_{\Pi}(p)=1$, то

$$W_3(p) = \frac{G_{33}(p)}{G_{\Pi}(p)G_{33}(p) + H_{33}(p)}; \quad (2.9)$$

- якщо $H_{33}(p)=1$, то

$$W_3(p) = \frac{H_{\Pi}(p)G_{33}(p)}{G_{\Pi}(p)G_{33}(p) + H_{\Pi}(p)}; \quad (2.10)$$

- якщо $H_{\Pi}(p)=1$ та $H_{33}(p)=1$, то

$$W_3(p) = \frac{G_{33}(p)}{G_{\Pi}(p)G_{33}(p) + 1}; \quad (2.11)$$

- для контуру з одиничним зворотним зв'язком ($H_{33}(p)=1$ та $G_{33}(p)=1$)

$$W_3(p) = \frac{H_{\Pi}(p)}{G_{\Pi}(p) + H_{\Pi}(p)}. \quad (2.12)$$

4. Алгебраїчні суматори і вузли (точки знімання сигналів) можна переносити через ланки за ходом чи проти ходу сигналу. При перенесенні

суматора через ланку $W_i(p)$ зі входу деякої ланки на її вихід вхідні сигнали суматора слід помножити на $W_i(p)$; при перенесенні суматора у зворотному напрямку його вхідні сигнали треба розділити на $W_i(p)$ (див. рис. 2.4, 2.5).

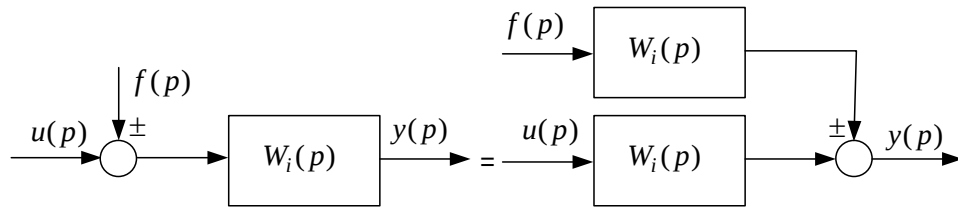


Рис. 2.4. Еквівалентне перенесення суматора зі входу ланки на її вихід

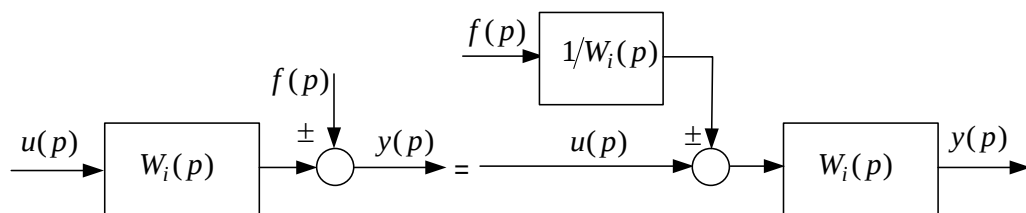


Рис. 2.5. Еквівалентне перенесення суматора з виходу ланки на її вхід

При перенесенні вузла через ланку з передавальною функцією $W_i(p)$ за ходом сигналу перенесений сигнал треба розділити на $W_i(p)$, а при перенесенні вузла у зворотному напрямку перенесений сигнал треба помножити на $W_i(p)$ (див. рис. 2.6).

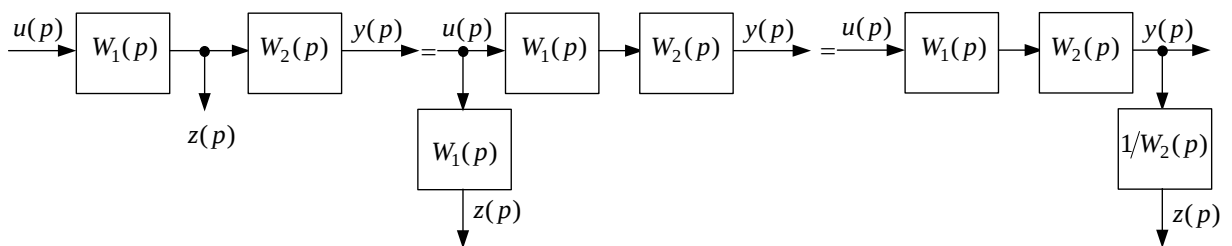


Рис. 2.6. Еквівалентні перенесення вузлів

Щоб уникнути помилок, пропонується креслити структурні схеми після кожного етапу перетворення та вказувати на них позначення еквівалентних ланок, які виникають у результаті перетворення.

2.2 Приклад перетворення досліджуваної системи

Приклад 2.1. Перетворити структурну схему на рис. 1.1а до одноконтурної та визначити ПФ розімкненої системи та ПФ замкненої системи за завданням g та за збуренням f , при $k_1 = 40$; $T_1 = 0,2$; $k_2 = 0,5$; $T_2 = 1$; $k_3 = 1$; $T_3 = 2$; $k_4 = 0,4$; $k_5 = 0,25$; $k_6 = 0,2$; $k_x = 0,8$; $T_x = 0,25$ (див. рис. 2.7).

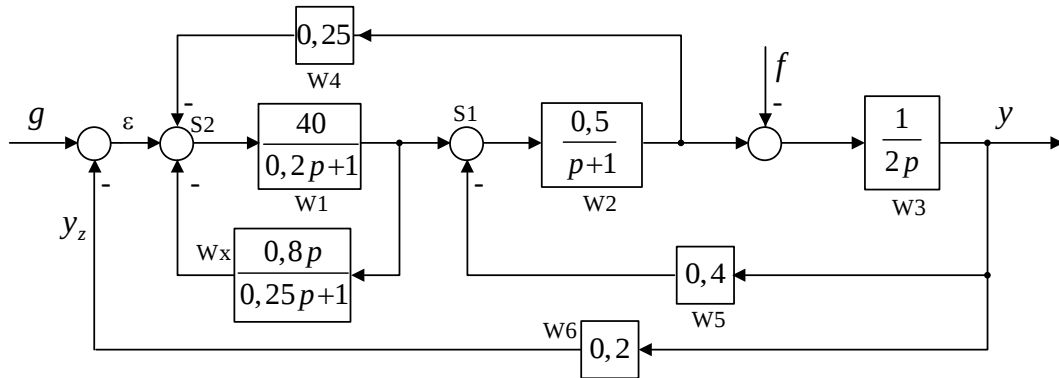


Рис. 2.7. Вихідна структурна схема до прикладу 2.1

Визначимо еквівалентну передавальну функцію замкненого контуру, утвореного ланками $W1$ і Wx :

$$W_{1x}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_x(p)} = \frac{40(0,25p + 1)}{(0,2p + 1)(0,25p + 1) + 32p} = \frac{40(0,25p + 1)}{0,05p^2 + 32,45p + 1}.$$

Позначимо

$$G_{1x}(p) = 0,05p^2 + 32,45p + 1.$$

Тоді

$$W_{1x}(p) = \frac{40(0,25p + 1)}{G_{1x}(p)}.$$

Для ліквідації перехреснування зворотних зв'язків перенесемо суматор $S1$ через ланку $W1x$, приєднавши до ланки $W5$ послідовно ланку x ПФ, зворотною до $W1x$:

$$W_{1xz}(p) = \frac{1}{W_{1x}(p)} = \frac{G_{1x}(p)}{40(0,25p + 1)}.$$

В результаті отримаємо структурну схему, зображену на рис. 2.8а.

Тепер знайдемо ПФ послідовно з'єднаних ланок W_{1xz} та W_5 і ПФ замкненого контуру, утвореного блоками W_{1x} , W_2 та W_4 :

$$W_{1xz5}(p) = W_{1xz}(p)k_5 = \frac{G_{1x}(p)}{100(0,25p+1)};$$

$$W_{1x24}(p) = \frac{W_{1x}(p)W_2(p)}{1+k_4W_{1x}(p)W_2(p)} = \frac{20(0,25p+1)}{G_{1x}(p)(p+1)+5(0,25p+1)} = \frac{20(0,25p+1)}{G_{1x24}(p)},$$

де

$$G_{1x24}(p) = (0,05p^2 + 32,45p + 1)(p+1) + 5(0,25p+1) = 0,05p^3 + 32,5p^2 + 34,7p + 6.$$

Отримана у такий спосіб СС зображена на рис. 2.8б.

Далі перенесемо збурення через блок W_{1xz4} , додавши до нього ланку

$$W_{1xz4z}(p) = \frac{1}{W_{1x24}(p)} = \frac{G_{1x24}(p)}{20(0,25p+1)},$$

як це показано на рис. 2.8в.

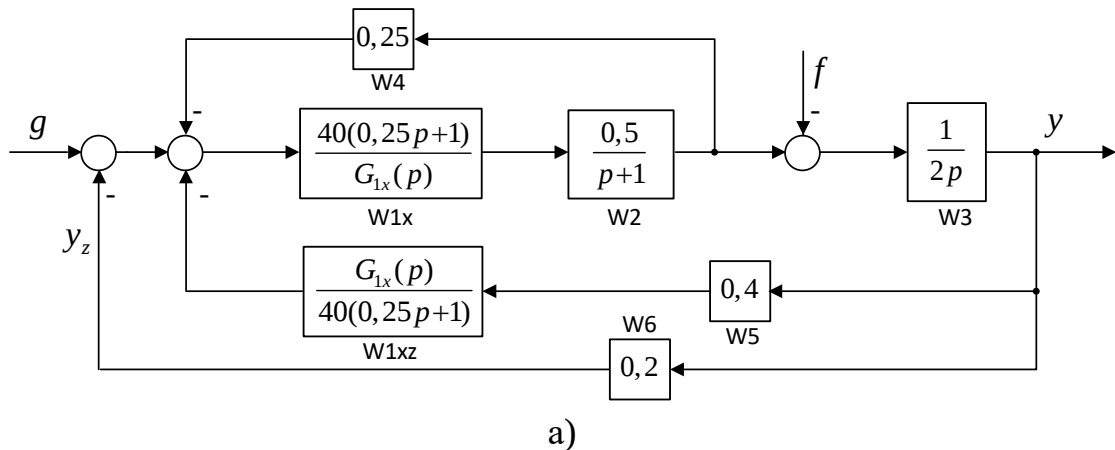
Тепер можна знайти ПФ розімкненої системи:

$$W_p(p) = \frac{W_{1x24}(p)W_3(p)}{1+W_{1x24}(p)W_3(p)W_{1xz5}}k_6 = \frac{100(0,25p+1) \cdot 0,2}{10pG_{1x24}(p) + G_{1x}(p)}.$$

Після підстановок та перетворень маємо

$$W_p(p) = \frac{5p+20}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 92,45p + 1}. \quad (2.13)$$

Тоді заключну перетворену СС можна представити у вигляді рис. 2.8г.



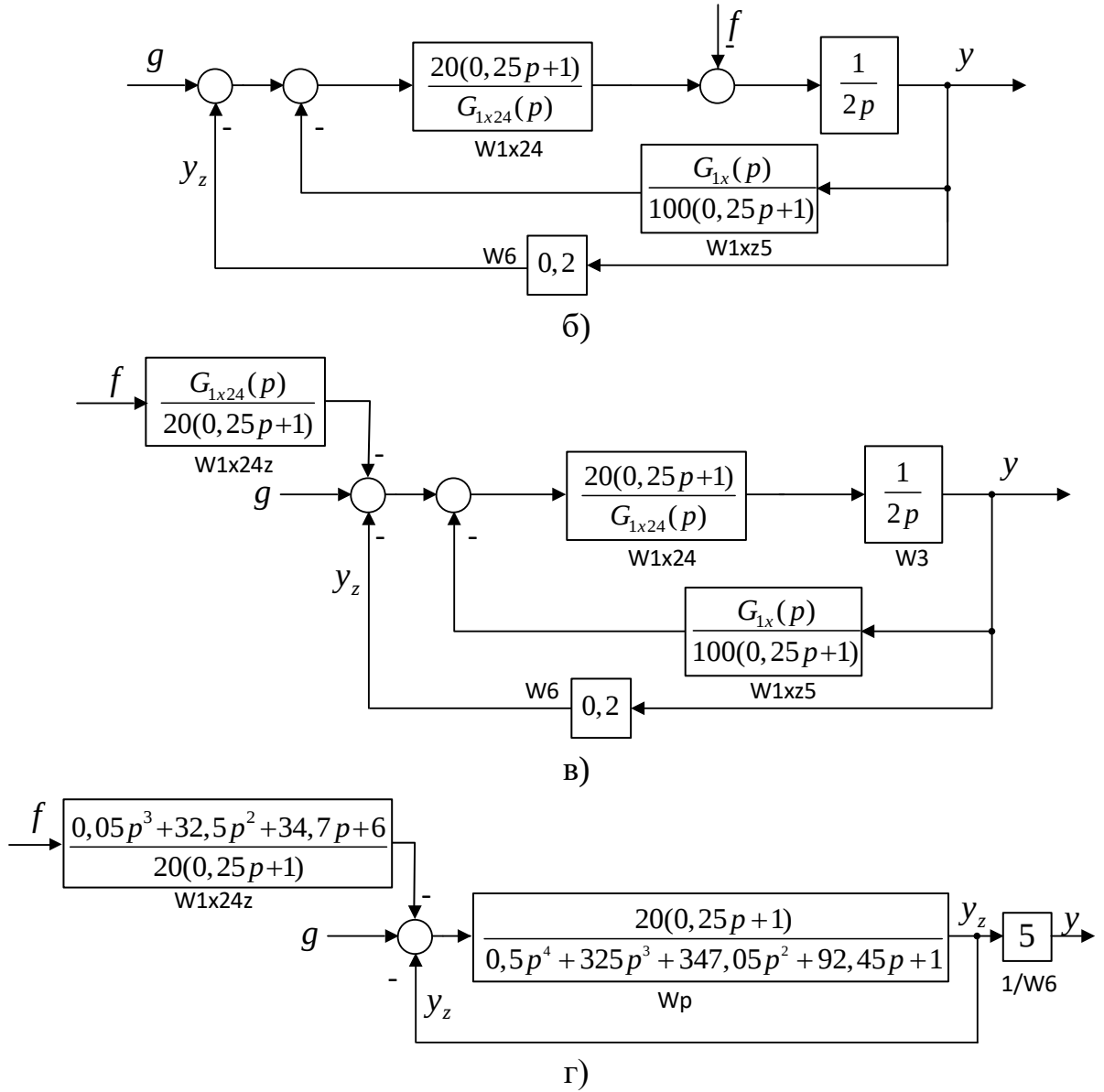


Рис. 2.8. Послідовність еквівалентних перетворень вихідної структурної схеми

З останньої СС легко знаходяться передавальні функції замкненої системи за задавальною дією та за збуренням:

$$W_{31}^g(p) = \frac{y_z(p)}{g(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{5p + 20}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21}; \quad (2.14)$$

$$W_3^g(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{W_{31}^g(p)}{k_6} = \frac{25p + 100}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21}; \quad (2.15)$$

$$W_{31}^f(p) = \frac{y_z(p)}{f(p)} = \frac{G_{1x}(p)}{5p + 20} \cdot W_{31}^g(p) = -\frac{0,05p^3 + 32,5p^2 + 34,7p + 6}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21}; \quad (2.16)$$

$$W_3^f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = \frac{W_{31}^f(p)}{k_6} = -\frac{5(0,05p^3 + 32,5p^2 + 34,7p + 6)}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21}. \quad (2.17)$$

2.3 Перевірка правильності еквівалентних перетворень в середовищі пакету *MATLAB*

Для перевірки правильності отриманих результатів скористаємося *MATLAB* та його графічним середовищем імітаційного моделювання *Simulink* [12, 13]. Для цього складаємо Simulink-модель вихідної системи, входи та вихід якої помічаємо відповідними портами, як це показано на рис. 2.9, і зберігаємо її у файлі з будь-яким дозволенним в середовищі *MATLAB* ім'ям, наприклад, SysPort, до якого *MATLAB* автоматично додає розширення slx.

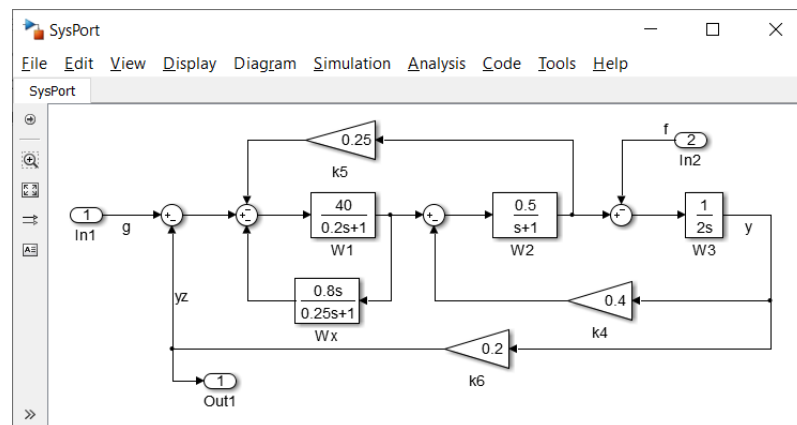


Рис. 2.9. Simulink-модель замкненої системи для визначення її математичного опису

Для перевірки ПФ розімкненої системи складаємо аналогічну модель розімкненої системи, для чого розмикаємо основний зворотний зв'язок, прибираємо відповідний елемент зрівняння, відкидаємо вхідний порт для збурення та відповідний суматор (див. рис. 2.10).

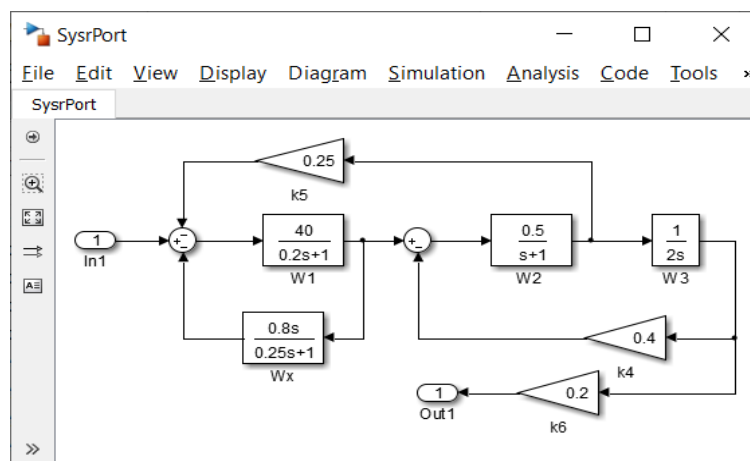


Рис. 2.10. Simulink-модель розімкненої системи для визначення її математичного опису

Для знаходження ПФ системи у замкненому та розімкненому станах за моделями рис. 2.9 та 2.10 складаємо програму

Програма SysTF

```
clc, clear all, close all
% Замкнена система:
[A, B, C, D] = linmod ('SysPort');
sys = ss (A, B, C, D);
set (sys, 'InputName', {'g', 'f'}, 'OutputName', 'yz')
sys_tf = tf (sys)
[numg, den] = ss2tf (A, B, C, D, 1)
numf = ss2tf (A, B, C, D, 2)
% Розімкнена система:
[A, B, C, D] = linmod ('SysrPort');
sysr = ss (A, B, C, D);
sysr_tf = tf (sysr)
[numr, denr] = tfdata (sysr, 'v')
```

В результаті її виконання отримуємо

sys_tf =

From input "g" to output "yz":

$$\frac{10 s + 40}{s^4 + 650 s^3 + 694.1 s^2 + 194.9 s + 42}$$

From input "f" to output "yz":

$$\frac{-0.1 s^3 - 65 s^2 - 69.4 s - 12}{s^4 + 650 s^3 + 694.1 s^2 + 194.9 s + 42}$$

Continuous-time transfer function.

numg =

0	0	0	10	40
---	---	---	----	----

den =

1	650	694.1	194.9	42
---	-----	-------	-------	----

numf =

0	-0.1	-65	-69.4	-12
---	------	-----	-------	-----

den =

1	650	694.1	194.9	42
---	-----	-------	-------	----

sysr_tf =

$$\frac{10 s + 40}{s^4 + 650 s^3 + 694.1 s^2 + 184.9 s + 2}$$

Continuous-time transfer function.

```

numr =
    0    0    0    10    40
denr =
    1   650   694.1  184.9    2

```

Як бачимо, результати виконання еквівалентних перетворень, виконаних вручну та за допомогою ЕОМ збігаються.

Функції *ss* та *tf*, які є складовими **Control System Toolbox** (див. додаток Б), утворюють *лінійні стаціонарні об'єкти (LTI-objects)* у формі **State Space** – **Простір Стану** та **Transfer Function Polynomial** – **Поліноміальна Передавальна Функція**, що належать до елементів об'єктно-орієнтованого програмування **MATLAB**. Користуючись функцією *ss2tf* іншого розділу **MATLAB** – **Signal Toolbox** можна отримати безпосередньо коефіцієнти поліному у чисельнику (**numerator**) та знаменнику (**denominator**) ПФ. Точно такий же результат можна отримати при виконанні функцій *tfdata* (*sys {out, in}*), де *out*, *in* – номери вихідного та вхідного портів відповідно:

```

[numg, den] = tfdata (sys {1,1})
[numf, den] = tfdata (sys {1,2})

```

Спростити процес перетворень можна шляхом застосування в **MATLAB** символічних інструментів **Symbolic Extended Toolbox**:

Програма SymsTransform

```

clc
syms p
w1 = 40/(0.2*p+1); w2 = 0.5/(p+1); w3 = 1/(2*p);
k4 = 0.25; k5 = 0.4; k6 = 0.2;
wx=0.8*p/[0.25*p+1];

w1x = w1/(1+w1*wx);
w1x = simplify (w1x);
disp (blanks(1)'), disp('w1x='), pretty(w1x)

w1xz5 = k5/w1x;
w1xz5 = simplify (w1xz5);
disp (blanks(1)'), disp('w1xz5='), pretty(w1xz5)

w1x24 = w1x*w2/(1+k4*w1x*w2);
w1x24 = simplify (w1x24);
disp (blanks(1)'), disp ('w1x24='), pretty (w1x24)

```

```

wr = (w1x24*w3/(1+w1x24*w3*w1xz5))*k6;
wr = simplify (wr);
disp (blanks(1)'), disp ('wr='), pretty(wr)

```

```

wg =wr /(1+wr);
wg = simplify (wg);
disp (blanks(1)'), disp ('wg='), pretty (wg)

```

```

wf = wg/w1x24;
wf = simplify (wf);
disp (blanks(1)'), disp ('wf='), pretty (wf)

```

Результати виконання програми мають вигляд:

$$w1x=$$

$$\frac{200 p + 800}{p^2 + 649 p + 20}$$

$$w1xz5=$$

$$\frac{p^2 + 649 p + 20}{500 (p + 4)}$$

$$w1x24=$$

$$\frac{-100 p + 400}{p^3 + 650 p^2 + 694 p + 120}$$

$$wr=$$

$$\frac{100 p + 400}{10 p^4 + 6500 p^3 + 6941 p^2 + 1849 p + 20}$$

$$wg=$$

$$\frac{100 p + 400}{10 p^4 + 6500 p^3 + 6941 p^2 + 1949 p + 420}$$

$$wf=$$

$$\frac{p^3 + 650 p^2 + 694 p + 120}{10 p^4 + 6500 p^3 + 6941 p^2 + 1949 p + 420}$$

3 АНАЛІЗ СИСТЕМ ЗА ЇХ ПЕРЕДАВАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Передавальні функції можуть бути записані у трьох формах: у поліноміальній (***Transfer Function Polynomial***), у вигляді розкладення на нулі-полюси (***Zero-Pole-Gain***) та у вигляді розкладення на прості дробки (***Partial-Fraction Decomposition***).

3.1 Застосування передавальних функцій у поліноміальній формі

Поліноміальна форма впливає з математичного опису лінійної неперервної динамічної системи з одним входом $u(t)$ та одним виходом $y(t)$ у вигляді звичайного диференційного рівняння (ДР) n -го порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} A_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_0 y(t) = \\ = B_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + B_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + B_1 \frac{du(t)}{dt} + B_0 u(t), \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для того, щоб записати ДР в операторній формі, оператор диференціювання замінюють оператором Лапласа, а змінні величини, які є функціями часу, – зображеннями цих величин, тобто

$$\frac{d}{dt} \rightarrow p, \quad u(t) \rightarrow u(p), \quad y(t) \rightarrow y(p). \quad (3.2)$$

В результаті операція диференціювання замінюється операцією множення оператора Лапласа на зображення змінної величини

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow p \cdot y(p), \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \rightarrow p^2 \cdot y(p), \quad \dots \quad (3.3)$$

а ДР перетворюється на алгебраїчне рівняння:

$$\begin{aligned} A_n p^n \cdot y(p) + A_{n-1} p^{n-1} \cdot y(p) + \dots + A_1 p \cdot y(p) + A_0 \cdot y(p) = \\ = B_m p^m \cdot u(p) + B_{m-1} p^{m-1} \cdot u(p) + \dots + B_1 p \cdot u(p) + B_0 \cdot u(p). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Винесемо зображення вихідної та вхідної величин у рівнянні (3.4) за дужки. В результаті отримаємо:

$$(A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_1 p + A_0) \cdot y(p) = (B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + B_1 p + B_0) \cdot u(p). \quad (3.5)$$

З такого операторного рівняння легко визначається передавальна функція, як відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + B_1 p + B_0}{A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_1 p + A_0}. \quad (3.6)$$

Саме у такому вигляді знайдені ПФ (3.13)-(3.16) досліджуваної системи.

Поліном у знаменнику ПФ (denominator) називають характеристичним поліномом, а поліном у чисельнику ПФ (numerator). – поліномом дії.

В MATLAB такий об'єкт утворюється функцією

tf (num, den)

Наприклад, при виконанні оператора

ob1 = tf ([5 2], [8 4 3 1])

отримуємо

```
ob1 =
      5 s + 2
-----
 8 s^3 + 4 s^2 + 3 s + 1
```

Continuous-time transfer function.

Рівняння

$$G_n(p) = A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_1 p + A_0 = 0 \quad (3.7)$$

називають **характеристичним рівнянням (Characteristic equation, Eigenvalue equation)**, а його корені – **полюсами системи (Poles)**:

$$\mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T. \quad (3.8)$$

Корні рівняння

$$H_m(p) = B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + B_1 p + B_0 = 0 \quad (3.9)$$

називають **нулями системи (Zeros)**:

$$\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T. \quad (3.10)$$

Нулі та полюси в можна знайти за допомогою функції :

$$P = \text{roots}(\text{den}), \quad Z = \text{roots}(\text{num})$$

де num, den – вектори коефіцієнтів поліномів у чисельнику та знаменнику ПФ, упорядковані за зменшенням степеня оператора Лапласа.

Наприклад, при виконанні програми

$$P = \text{roots}([8 \ 4 \ 3 \ 1])$$

$$Z = \text{roots}([5 \ 2])$$

отримуємо

$$P = \begin{aligned} &-0.060201 + 0.57068i \\ &-0.060201 - 0.57068i \\ &-0.3796 + 0i \end{aligned}$$

$$Z = -0.4$$

Поліноміальні ПФ часто нормують за вільними членами поліномів (або при їх відсутності за коефіцієнтами при молодших степенях оператору Лапласа):

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = k \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}. \quad (3.11)$$

де

$$a_i = \frac{A_i}{A_0}, \quad b_i = \frac{B_i}{B_0}, \quad k = \frac{B_0}{A_0}. \quad (3.12)$$

В ПФ (3.11) в явному вигляді присутній коефіцієнт підсилення системи k в усталеному режимі, який, згідно з *теоремою про усталене значення*, розраховується за формулою

$$k = \frac{y_\infty}{u_\infty} = W(p) \Big|_{p=0}. \quad (3.13)$$

ПФ (2.13), (2.14), (2.16) системи, розглянутої у прикладі 2.1, у формі (3.11) мають вигляд:

$$W_p(p) = 20 \cdot \frac{0,25p + 1}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 92,45p + 1}; \quad (3.14)$$

$$W_{31}^g(p) = \frac{y_z(p)}{g(p)} = \frac{20}{21} \cdot \frac{5p + 20}{(0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21) / 21} =$$

$$= 0,95 \cdot \frac{0,25p+1}{0,024p^4+15,48p^3+16,53p^2+4,64p+1}; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} W_{31}^f(p) &= \frac{y_z(p)}{f(p)} = -\frac{6}{21} \cdot \frac{(0,05p^3+32,5p^2+34,7p+6)/6}{(0,5p^4+325p^3+347,05p^2+97,45p+21)/21} = \\ &= -0,29 \cdot \frac{0,0083p^3+5,42p^2+5,78p+1}{0,024p^4+15,48p^3+16,53p^2+4,64p+1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Якщо вихідний сигнал є сигналом зовнішнього зворотного зв'язку замкненої системи ($y(t)=y_z(t)$), що безпосередньо порівнюється з сигналом завдання $u(t)$, то при $k_g=1$ похибка керування за задавальною стрибкоподібною дією в усталеному режимі дорівнює 0, тобто

$$k_g=1 \rightarrow y_{z\infty}=u_{\infty}, \quad \varepsilon_{\infty}=u_{\infty}-y_{z\infty}=0. \quad (3.17)$$

Така система називається **астатичною за керуванням**. Це можливо тільки тоді, коли розімкнена система має хоча б 1 нульовий полюс.

При $k_g < 1$ система є **статичною за керуванням**. Її коефіцієнти підсилення до сигналу зворотного зв'язку та до похибки керування визначаються через коефіцієнт підсилення розімкненої системи за формулами

$$k_g = \frac{y_{z\infty}}{u_{\infty}} = \frac{k_p}{k_p+1} < 1, \quad k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\infty}}{u_{\infty}} = 1 - k_g = \frac{1}{k_p+1}. \quad (3.18)$$

З ПФ (3.14)-(3.16) досліджуваної системи впливає

$$\begin{aligned} k_p=20; \quad k_g &= \frac{y_{z\infty}}{u_{\infty}} = \frac{k_p}{k_p+1} = \frac{20}{20+1} = 0,95; \quad k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\infty}}{u_{\infty}} = \frac{1}{k_p+1} = \frac{1}{21} = 0,05; \\ k_f &= \frac{y_{z\infty}}{u_{\infty}} = \frac{-6}{21} = -0,29. \end{aligned} \quad (3.19)$$

З виконаних розрахунків випливає, що досліджувана система є статичною і за керуванням і за збуренням. Похибка керування складає близько 5%, тобто точність відпрацювання задавальної дії досить висока:

$$\varepsilon_g = \frac{g - y_{z\infty}}{g} \cdot 100\% = (1 - 0,95) \cdot 100\% = 5\%.$$

Статизм за збуренням дорівнює

$$\Delta_f = \frac{|y_{z\infty}|}{f} = \frac{|-0,29|}{1} = 0,29.$$

За принципом суперпозиції при одночасній дії керування та збурення

$$y_{z\infty} = k_g g_{\infty} + k_f f_{\infty} = 0,95g_{\infty} - 0,29f_{\infty};$$

$$y_{\infty} = \frac{y_{z\infty}}{k_6} = 4,76g_{\infty} - 1,45f_{\infty}.$$

ПФ (3.11) допомагає також визначити усталене запізнення сигналу зворотного зв'язку від сигналу завдання, що змінюється у часі за лінійним законом. При $k_g=1$ та $u(t)=u_{lin}(t)=t$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{lin}(p)}{u_{lin}(p)} &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + 1}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1} \right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{(a_n - b_n)p^n + \dots + (a_1 - b_1)p}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1} = \\ &= \frac{(a_n - b_n)p^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\tau_{\infty} = \left[\frac{(a_n - b_n)p^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1} \right]_{p=0} = (a_1 - b_1). \quad (3.21)$$

Маючи усталене запізнення τ_{∞} , можна визначити добротність за швидкістю K_v (див. п.6.4) як

$$K_v = \frac{1}{\tau_{\infty}} = \frac{1}{a_1 - b_1}. \quad (3.22)$$

При $k_g < 1$ (статична система) похибка не має усталеного значення, а буде постійно збільшуватися.

Ще одна форма запису поліноміальної ПФ отримується шляхом нормування її поліномів за коефіцієнтами при старших степенях оператора Лапласа

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = K \frac{p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}, \quad (3.23)$$

де

$$\alpha_i = \frac{A_i}{A_0} = \frac{a_i}{a_n}, \quad \beta_i = \frac{B_i}{B_m} = \frac{b_i}{b_m}, \quad K = \frac{B_m}{A_n} = k \frac{b_m}{a_n}. \quad (3.24)$$

Така форма є зручною при переході до математичного опису системи у просторі стану та при розкладанні поліномів на множники за відомими нулями та полюсами ПФ.

3.2 Застосування передавальних функцій у вигляді розкладення на нулі-полюси

ПФ у форматі **Zero-Pole-Gain** отримують з ПФ (3.23), користуючись властивістю тотожної рівності поліномів

$$p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (3.25)$$

$$p^m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0 = (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n). \quad (3.26)$$

Після підстановки (3.25) та (3.26) у (3.19) отримуємо

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (3.27)$$

Щоб проаналізувати зв'язок між ПФ (3.27) та (3.23), згадаємо основні властивості алгебраїчних рівнянь з дійсними коефіцієнтами:

- рівняння степені n має n коренів, які можуть бути як дійсними, так і комплексними;
- кожний комплексний корінь має комплексно спряжену пару, отже, рівняння непарного порядку мають хоча б один дійсний корінь;
- **добуток комплексно-спряжених коренів є поліномом другого порядку з дійсними коефіцієнтами**, у якому згідно з теоремою Вієта вільний член дорівнює добутку коренів, коефіцієнт при першому степені оператора Лапласа – сумі коренів з протилежним знаком, а коефіцієнт при другому степені оператора Лапласа дорівнює 1.

Нехай система має два комплексно спряжених полюси,

$$p_{1,2} = -\lambda \pm j\beta = \omega_k e^{\pm j\varphi}, \quad (3.28)$$

де

$$\omega_k = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} \quad (3.29)$$

– *модуль полюсів*, який називають їх *власною або характеристичною частотою (frequency)*;

$$\varphi = \arctg \left| \frac{\beta}{\lambda} \right| \quad (3.30)$$

– *фазовий кут пари комплексно-спряжених коренів (angle)*.

Тоді

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_k e^{j\varphi} \cdot \omega_k e^{-j\varphi} = \omega_k^2 = \lambda^2 + \beta^2, \quad (3.31)$$

$$p_1 + p_2 = (-\lambda + j\beta) + (-\lambda - j\beta) = -2\lambda, \quad (3.32)$$

а характеристичний поліном матиме вигляд:

$$G_2(p) = (p - p_1) \cdot (p - p_2) = p^2 - (p_1 + p_2)p + p_1 \cdot p_2 = p^2 + 2\lambda p + \omega_k^2. \quad (3.33)$$

В *MATLAB* такий об'єкт утворюється функцією

$$\text{obj} = \text{zpk} (Z, P, K)$$

Наприклад, при виконанні оператора

$$\text{ob2} = \text{zpk} ([-1], [-5; -2+4j; -2-4j], 3)$$

отримуємо

$$\begin{array}{r} \text{ob2} = \\ 3 (s+1) \\ \hline (s+5) (s^2 + 4s + 20) \end{array}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

В отриманому об'єкті

$$(s^2 + 4s + 20) = (s + 2 + 4j)(s + 2 - 4j)$$

Таку форму ПФ зручно використовувати для побудови асимптотичних логарифмічних частотних характеристик (ЛЧХ), тому що вільні члени у множниках ПФ є частотами спряження асимптотичних ЛЧХ, ланки першого порядку змінюють кут нахилу асимптотичної амплітудної ЛЧХ на ± 20 дБ/дек., а ланки другого порядку – на ± 40 дБ/дек. (знак “+” відповідає ланкам у чисельнику ПФ, а знак “-” – ланкам у знаменнику).

Оператор

$$\text{ob2_tf} = \text{tf} (\text{ob2})$$

перетворює ПФ у поліноміальну форму:

ob2_tf =

$$\frac{3s + 3}{s^3 + 9s^2 + 40s + 100}$$

Continuous-time transfer function.

Перетворимо у форму (3.26) ПФ розімкненої (2.13) та замкненої (2.14) системи за допомогою операторів

```
sysr_zp = zpk (sysr)
sysg_zp = zpk (sys {1,1})
```

В результаті отримаємо

sysr_zp =

$$\frac{10 (s+4)}{(s+648.9) (s+0.6114) (s+0.4465) (s+0.01129)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

sysg_zp =

From input "g" to output "yz":

$$\frac{10 (s+4)}{(s+648.9) (s+0.7936) (s^2 + 0.2756s + 0.08156)}$$

$$W_p(p) = 10 \cdot \frac{p + 4}{(p + 649)(p + 0.61)(p + 0.45)(p + 0.011)}; \quad (3.34)$$

$$W_{31}^g(p) = \frac{y_z(p)}{g(p)} = 10 \cdot \frac{p + 4}{(p + 649)(p + 0.79)(p^2 + 0.28p + 0.081)}. \quad (3.35)$$

3.3 Застосування передавальних функцій у вигляді суми передавальних функцій елементарних ланок

ПФ у форматі **Partial-Fraction Decomposition** при відсутності кратних полюсів має вигляд:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{R_1}{(p - p_1)} + \frac{R_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{R_n}{(p - p_n)}. \quad (3.36)$$

Перетворення Transfer Function Polynomial $\rightarrow$ Partial-Fraction Decomposition виконує в **MATLAB** функція

[R, P] = residue (num, den)

Наприклад, при виконанні оператора

[R, P] = residue ([3 3], [1 9 40 100])

отримаємо:

R =
-0.48 + 0i
0.24 - 0.195i
0.24 + 0.195i

P =
-5 + 0i
-2 + 4i
-2 - 4i

За цими даними складаємо ПФ

$$W(p) = \frac{-0,48}{p+5} + \frac{0,24-0,195j}{p+2-4j} + \frac{0,24+0,195j}{p+2+4j}$$

Щоб позбавитись від комплексних чисел, об'єднаємо 2 останні ланки з комплексно спряженими полюсами і коефіцієнтами в одну:

$$W(p) = \frac{-0,48}{p+5} + \frac{0,48p+2,52}{p^2+4p+20}. \quad (3.37)$$

Цю операцію можна здійснити в *MATLAB* за допомогою таких операторів:

```
den_k = conv ([1 -P(2)], [1 -P(3)])  
num_k = conv ([1 -P(2)], R(3))+conv ([1 -P(3)], R(2))
```

що дають результат

```
den_k =  
1      4      20  
num_k =  
0.48    2.52
```

У такий спосіб ми перетворюємо вихідну поліноміальну функцію довільного порядку у суму дробів першого та другого порядків. Оскільки для аперіодичної і коливальної ланки відомі аналітичні вирази для перехідної та вагової функцій

$$h_a(t) = k(1 - e^{-\lambda_a t}), \quad (3.24 \text{ } 38)$$

$$h_k(t) = k \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\beta t) + \frac{\lambda}{\beta} \sin(\beta t) \right) \right], \quad (3.25 \ 39)$$

$$w_k(t) = h_k'(t) = k \frac{\omega_k^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad (3.26 \ 40)$$

то за принципом суперпозиції перехідну функцію досліджуваної системи можна знайти як суму функцій (3.24)-(3.26) з відповідними коефіцієнтами. Наприклад, ПФ (3.23) відповідатиме така перехідна функція

$$h(t) = -\frac{0,48}{5} (1 - e^{-5t}) + \frac{2,52}{20} \left[1 - e^{-2t} \left(\cos(4t) + \frac{2}{4} \sin(4t) \right) \right] + \frac{0,48}{20} \cdot \frac{20}{4} e^{-2t} \sin(4t).$$

Після зведення подібних маємо

$$h(t) = 0,03 + 0,096e^{-5t} + e^{-2t} (-0,126 \cos(4t) + 2,337 \sin(4t)). \quad (3.27 \ 41)$$

Отже, ПФ у форматі *Partial-Fraction Decomposition* зазвичай використовують для виведення аналітичних виразів перехідних функцій.

За наведеною методикою можна отримати у форматі *Partial-Fraction* ПФ (2.14) та (2.16):

$$W_g(p) = \frac{2,4 \cdot 10^{-5}}{p+649} + \frac{0,1}{p+0,79} + \frac{-0,1p+0,067}{p^2+0,28p+0,081} \quad (3.42)$$

$$W_f(p) = -\frac{0,36 \cdot 10^{-9}}{p+649} + \frac{0,007}{p+0,79} - \frac{0,1p+0,024}{p^2+0,28p+0,081}. \quad (3.43)$$

4 АНАЛІЗ СИСТЕМ ЗА РОЗТАШУВАННЯМ НУЛІВ-ПОЛЮСІВ

4.1 Основні параметри полюсів та їх вплив на якість перехідних процесів

Як вже відзначалося раніше, нулі та полюси системи можуть бути як дійсними, так і комплексно спряженими.

Розглянемо спочатку систему з одиничним коефіцієнтом підсилення, яка не має нулів, а *має тільки полюси з від'ємними дійсними частинами, що є необхідною умовою стійкості*:

$$p_a = -\lambda_a, \quad p_k = -\lambda \pm j\beta = \omega_k e^{\pm j\varphi} \quad (4.1)$$

Таку систему, як показано у пункті 4.2, можна представити у вигляді послідовного з'єднання аперіодичних і коливальних ланок

$$W_a(p) = \frac{1}{T_a p + 1} = \frac{\lambda_a}{p + \lambda_a}, \quad (4.2)$$

$$W_k(p) = \frac{1}{T_k^2 p^2 + 2\xi T_k p + 1} = \frac{\omega_k^2}{p^2 + 2\xi \omega_k p + \omega_k^2}, \quad (4.3)$$

де

$$\lambda_a = \frac{1}{T_a} \quad (4.4)$$

– модуль (власна частота) дійсного полюса;

$$\omega_k = \frac{1}{T_k} = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} \quad (4.5)$$

– модуль (власна частота) комплексно-спряжених полюсів;

$$\xi = \frac{\lambda}{\omega_k}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.6)$$

– *коефіцієнт демпфування (damping ratio) коливальної ланки.*

Якщо система має r дійсних та l пар комплексно-спряжених полюсів, то її характеристичний поліном має вигляд

$$G_n(p) = \prod_{i=1}^r (p + \lambda_{ai}) \cdot \prod_{j=1}^l (p^2 + 2\lambda_{kj} p + \omega_{kj}^2) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad (4.7)$$

де

$$n=r+2l. \quad (4.8)$$

На рис. 4.1 зображено розташування одного дійсного полюса і однієї пари комплексно-спряжених полюсів на комплексній площині та позначені їх основні параметри.

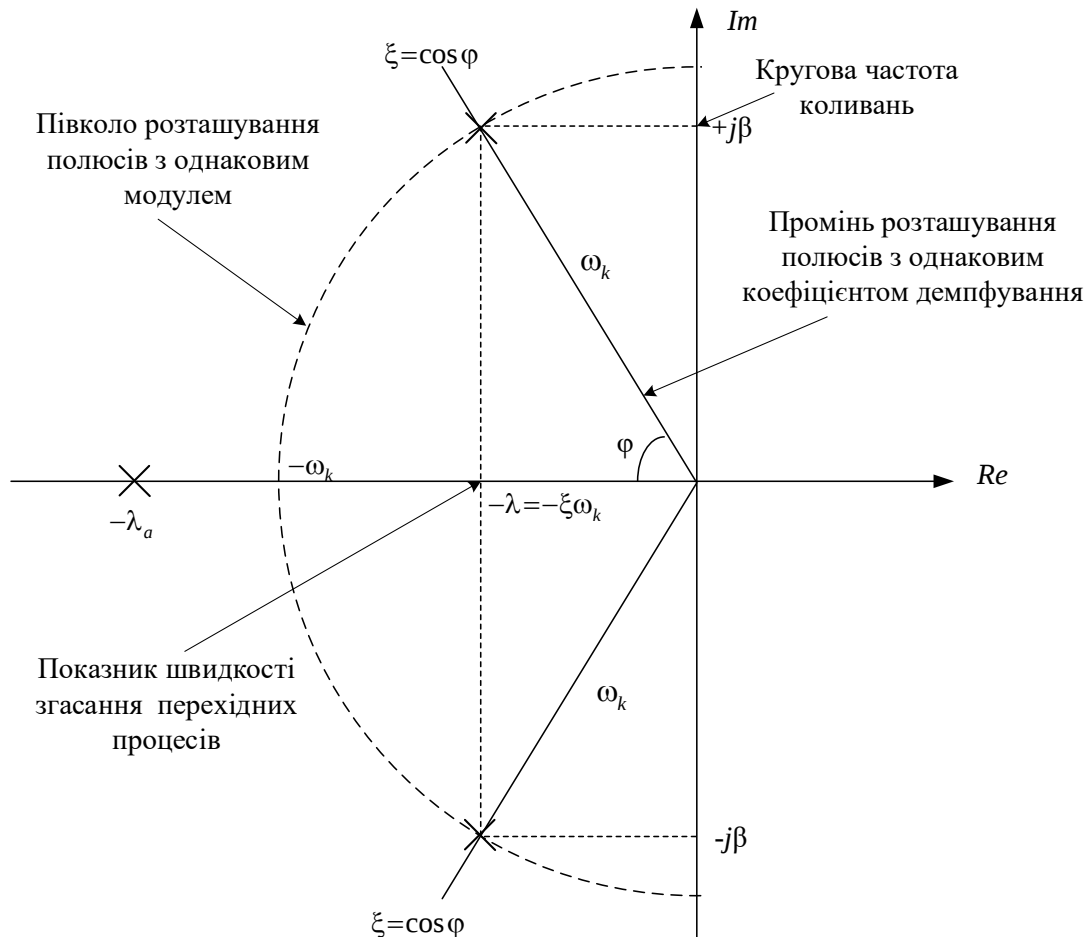


Рис. 4.1. Розташування полюсів на комплексній площині

Як бачимо, полюс аперіодичної ланки розташований на дійсній осі в точці $-\lambda_a$, а полюси коливальної ланки – на перетині півкола з радіусом ω_k і променів, розташованих під кутами $\pm\varphi=\pm\arccos(\xi)$ до дійсної осі.

В пакеті *MATLAB* параметри полюсів визначаються функцією *damp*, аргументами якої є або лінійний динамічний об'єкт або його характеристичний поліном. Наприклад, при виконанні програми

```
den=[1 4 8 8 4 1];
```

[A, Ksi, P]=damp (den);
damp (den)
Lambda = real (P)
Betta = imag (P)

отримуємо

Eigenvalue	Damping	Frequency
-1.12e+00 + 1.31e+00i	6.51e-01	1.72e+00
-1.12e+00 - 1.31e+00i	6.51e-01	1.72e+00
-1.00e+00	1.00e+00	1.00e+00
-3.78e-01 + 4.41e-01i	6.51e-01	5.81e-01
-3.78e-01 - 4.41e-01i	6.51e-01	5.81e-01

(Frequencies expressed in rad/TimeUnit)

Lambda =
-1.1217
-1.1217
-1.0000
-0.3783
-0.3783

Betta =
1.3066
-1.3066
0
0.4406
-0.4406

З аналізу рис. 4.1 випливає спосіб градуювання карти розташування нулів-полісів променями однакових коефіцієнтів демпфування. Для цього треба (див. рис. 4.2)

- побудувати у лівій півплощині комплексної площини півколо довільного радіусу ω_0 ;
- поділити радіус півкола на дійсній осі на рівні відрізки;
- із кожної точки ділення провести прямі, паралельні уявній осі, до перетину з півколом;
- побудувати промені, що проходять через центр координат і точки перетину.

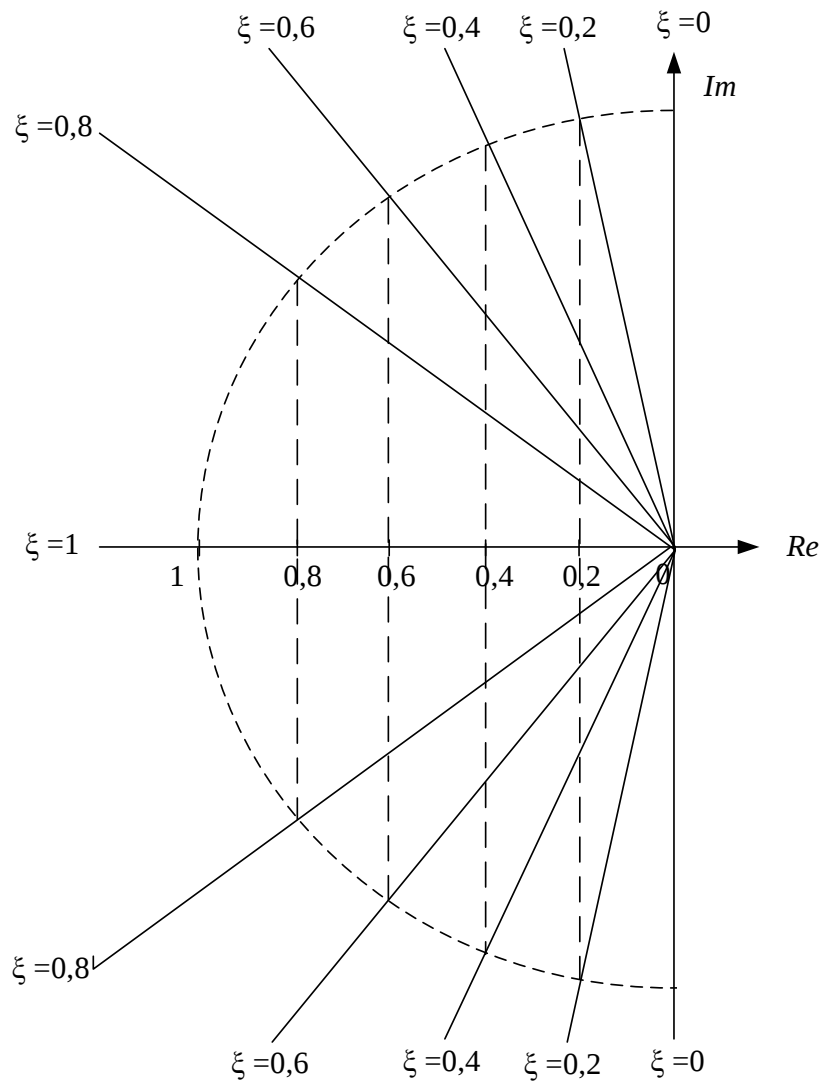


Рис. 4.2. Градування карти розташування нулів-полісів лініями однакового демпфування

Таке градування застосовує при побудові карти нулів-полісів функція pzmap. Наприклад, при виконанні оператора

```
obj = tf ([1 1], [1 4 8 4 1])
```

```
[P, Z] = pzmap (obj)
```

```
pzmap (obj), grid on
```

отримуємо

```
obj =
```

```
      s + 1
```

```
-----  
s^4 + 4 s^3 + 8 s^2 + 4 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
P =
```

```
-1.7071 + 1.7071i
```

$-1.7071 - 1.7071i$
 $-0.2929 + 0.2929i$
 $-0.2929 - 0.2929i$
 $Z =$
 -1

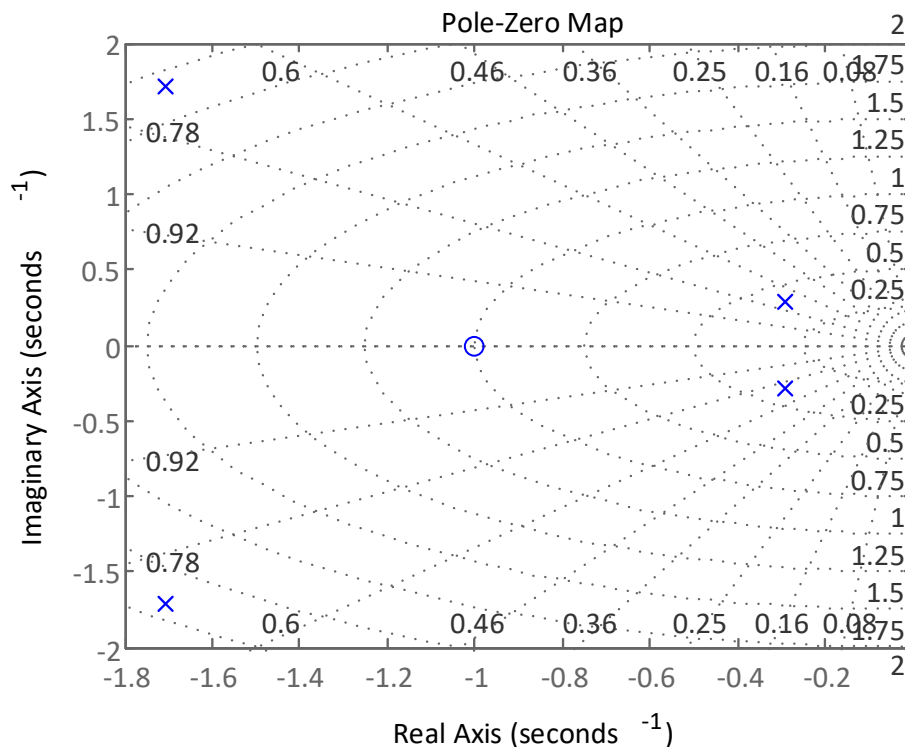


Рис. 4.3. Карта розташування полюсів об'єкта $tf([1 \ 1], [1 \ 4 \ 8 \ 4 \ 1])$

Перше, що можна проаналізувати за розташуванням полюсів, це **стійкість системи (Stability)**.

Відомо, що у **стійкій системі (Stable System)** усі полюси розташовуються у лівій півплощині комплексної площини, тобто дійсні частини усіх полюсів є від'ємними.

Якщо хоча б одна пара комплексно-спряжених полюсів системи розташована на уявній осі (має нульові дійсні частини), то система знаходиться на межі стійкості.

Крім дослідження на стійкість, з розташування нулів та полюсів можна отримати деяку інформацію і про якість перехідних процесів. Відомо, що **форма кожної із складових перехідного процесу залежить тільки від кута φ , тобто від коефіцієнта демпфування ξ . Від модулів полюсів залежить тільки масштаб часу (швидкодія) окремої складової перехідного процесу:**

чим більший модуль, тим швидше ця складова досягає усталеного значення.

Кожний полюс системи впливає на якість її перехідних процесів, але ступінь їх впливу залежить від відстані полюсів від уявної осі: чим менше ця відстань, тим більший його внесок у перебіг перехідного процесу. Тому при аналізі систем зазвичай виділяють **домінуючий дійсний полюс** або **домінуючу пару комплексно-спряжених полюсів** за критерієм найбільшої близькості їх до уявної осі і аналізують властивості системи першого або другого порядку, яка приблизно відображає властивості досліджуваної системи.

4.2 Визначення показників якості перехідних функцій аперіодичної та коливальної ланок за розташуванням полюсів

Щоб визначити зв'язок між параметрами домінуючих полюсів та показниками якості перехідних процесів, проаналізуємо рівняння і вигляд перехідних функцій аперіодичної та коливальної ланок з одиничними коефіцієнтами підсилення, що мають ПФ (4.2) та (4.3).

ПФ (4.2) відповідає перехідна функція

$$h_a(t) = 1 - e^{-\lambda_a t}. \quad (4.9)$$

Графік цієї функції у відносному часі $h_a(\lambda_a t)$ зображено на рис. 4.4. На ньому показані значення перехідної функції в моменти часу, кратні сталій часу T_a , з аналізу яких визначають **час перехідного процесу (steady state time)** з точністю перехідної функції 5% і 2%:

$$t_{sa(5\%)} = 3T_a = 3/\lambda_a, \quad t_{sa(2\%)} = 4T_a = 4/\lambda_a. \quad (4.10)$$

Таку методику застосовують, тому що перехідна функція (4.9) досягає усталеного значення $h_{a\infty} = 1$ при $t_s = \infty$.

На рис. 4.3 зображені також дотичні до перехідної функції в моменти часу, кратні сталій часу аперіодичної ланки, через час T_a завжди перетинають лінію усталеного значення.

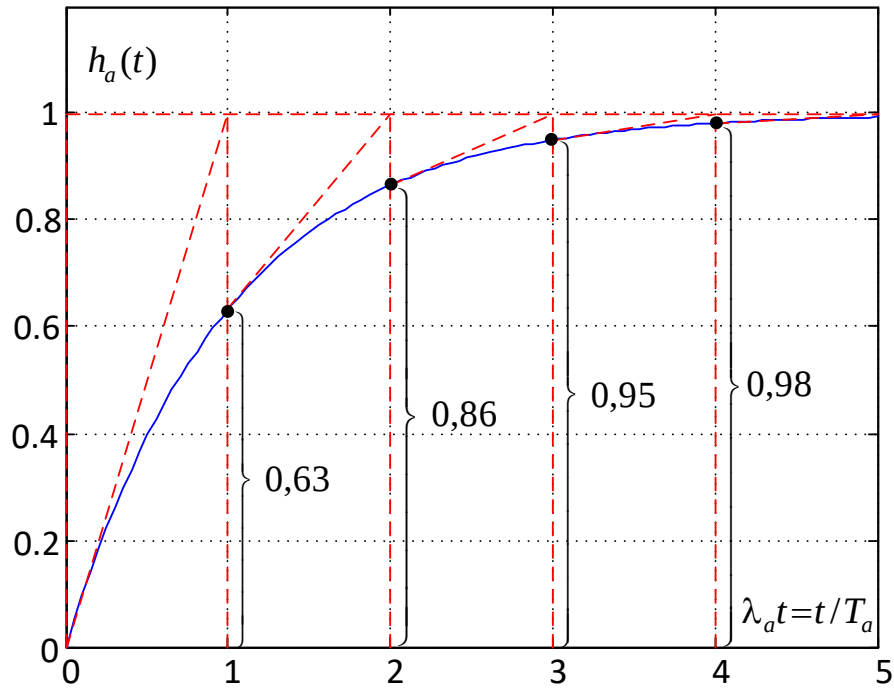


Рис. 4.4. Перехідна функція аперіодичної ланки

Ця властивість впливає з наступних рівнянь:

$$h_a'(t) = \lambda_a e^{-\lambda_a t}, \quad h_a(t) + T_a h_a'(t) = 1 - e^{-\lambda_a t} + T_a \lambda_a e^{-\lambda_a t} = 1. \quad (4.11)$$

Її часто застосовують для експериментального визначення сталої часу аперіодичної ланки.

ПФ (4.3) відповідає перехідна функція

$$h_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\beta t) + \frac{\lambda}{\beta} \sin(\beta t) \right), \quad (4.12)$$

або з урахуванням рівнянь (4.5) та (4.6)

$$h_k(t) = 1 - e^{-\xi \omega_k t} \left(\cos\left(\omega_k \sqrt{1-\xi^2}\right) t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_k \sqrt{1-\xi^2}\right) \right). \quad (4.13)$$

Графік перехідної функції (4.13) при $\xi=0,25$ і $\omega_k=1$ та огинаючих її експонент

$$e_{1,2}(t) = 1 \pm e^{\frac{-\lambda \omega_k t}{\beta}} \quad (4.14)$$

представлено на рис. 4.5.

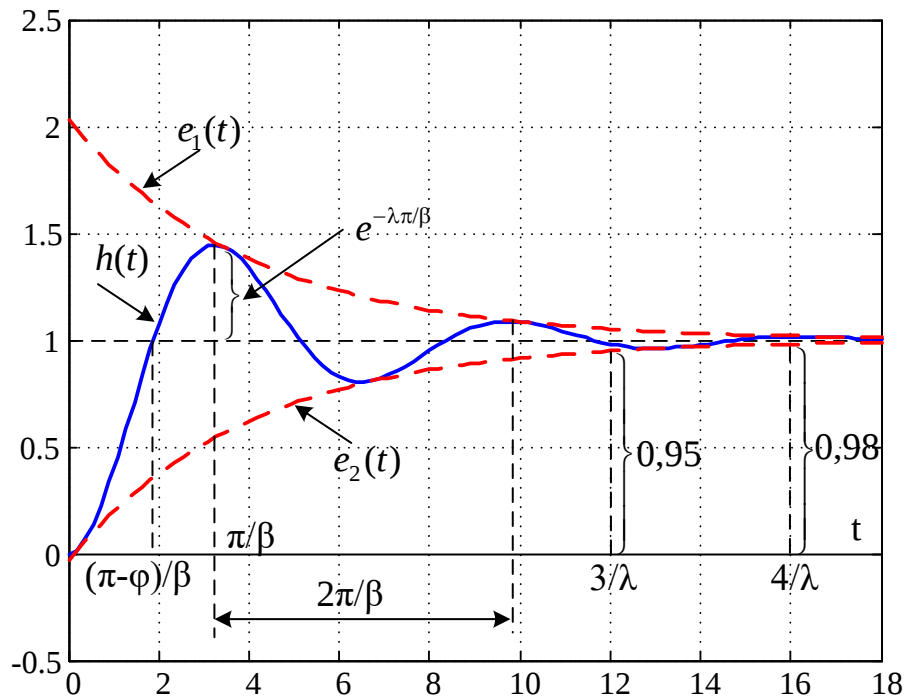


Рис. 4.5. Перехідна функція коливальної ланки та її огинаючих експонент

При коливальному характері перехідного процесу показників якості перехідних процесів значно більше, ніж при аперіодичному. Крім *часу перехідного процесу (steady state time)*, який визначається за рівняннями, аналогічними до (4.10):

$$t_{sk(5\%)} = 3T_k = 3/\lambda, \quad t_{sk(2\%)} = 4T_k = 4/\lambda \quad (4.15)$$

до них відносяться:

- *період коливань*

$$T = \frac{2\pi}{\beta}; \quad (4.16)$$

- *час досягнення перехідною функцією максимального значення (peak time)*, що дорівнює половині періоду коливань:

$$t_m = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\beta}; \quad (4.17)$$

- *час першого узгодження перехідної функції з усталеним значенням (rise time)*, що визначається з рівняння $h_k(t_r) = 1$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\beta}, \quad \varphi = \arctg \frac{|\beta|}{|\lambda|}; \quad (4.18)$$

- ***перерегулювання перехідної функції у процентах (overshot або overshoot in percent)***

$$\sigma \approx \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\beta}\right) = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right). \quad (4.19)$$

Отже, визначивши домінуючий полюс або домінуючу пару комплексно-спряжених полюсів, можна приблизно оцінити показники перехідних процесів системи в цілому. Точність оцінювання буде тим більше, чим більше відношення відстані домінуючих полюсів від уявної осі до відстаней від неї інших полюсів.

Сімейство перехідних функцій коливальних ланок з різними коефіцієнтами демпфування показано на рис. 4.7, з якого видно, що зі зменшенням коефіцієнту демпфування збільшуються перерегулювання та час перехідного процесу, але дещо зменшується період коливань, час досягнення першого максимуму та час першого перетину перехідною функцією усталеного значення. При $\xi \rightarrow 1$ комплексно-спряжена пара полюсів вироджується у пару кратних дійсних полюсів, а перехідна функція має аперіодичний характер. При $\xi = 0$ комплексно-спряжена пара полюсів розташовується на уявній осі, тобто на межі стійкості, а перехідна функція здійснює не загасаючі коливання.

Щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб усі її полюси розташовувалися у лівій півплощині комплексної площини, тобто дійсні частини усіх полюсів повинні бути від'ємними.

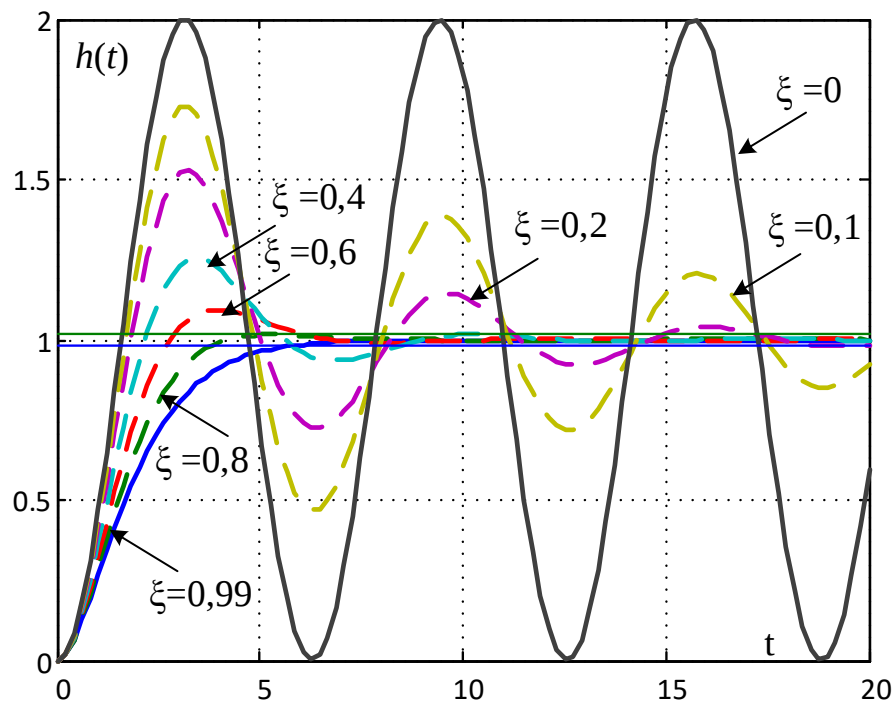


Рис. 4.7. Сімейство перехідних функцій коливальних ланок з різними коефіцієнтами демпфування

Графік залежності перерегулювання коливальної ланки σ від коефіцієнту демпфування ξ , побудований за формулою (4.19) зображено на рис. 4.8.

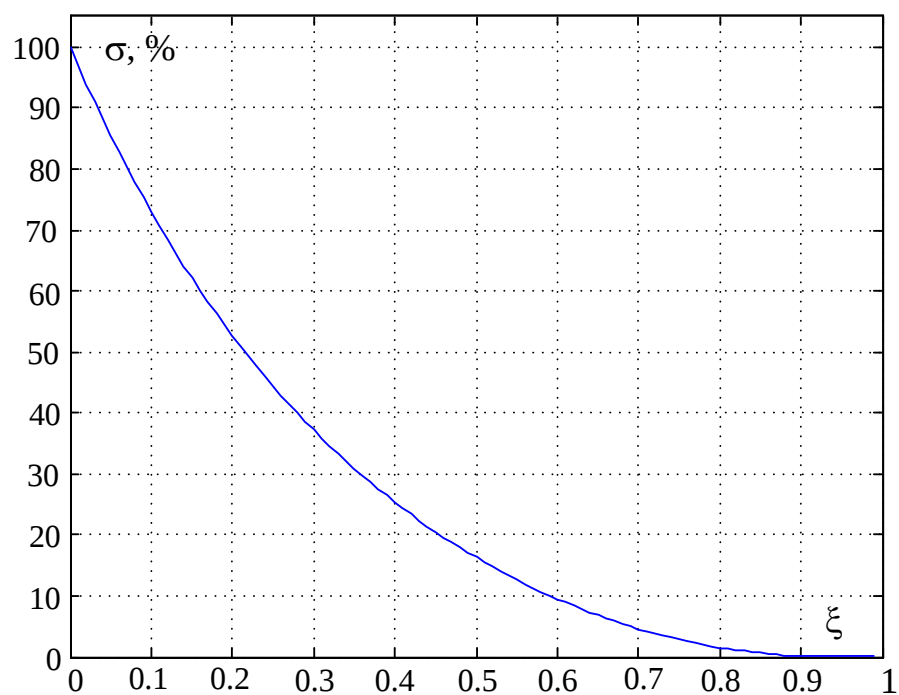


Рис. 4.8. Графік залежності перерегулювання коливальної ланки від коефіцієнту демпфування

4.3 Аналіз досліджуваної системи за розташуванням нулів-полісів

Проаналізуємо властивості досліджуваної системи з визначеною раніше ПФ

$$W_{31}^g(p) = \frac{y_z(p)}{g(p)} = \frac{5p + 20}{0,5p^4 + 325p^3 + 347,05p^2 + 97,45p + 21}$$

за розташуванням нулів-полісів,

Спочатку проаналізуємо значення нулів-полісів та їх параметри і перевіримо систему на стійкість, для чого розробимо таку програму:

```
clc, clear all, close all
den = [0.5 325 347.05 97.45 21];
P = roots (den)
num = [5 20];
Z = roots (num)
[Ap,Ksi]=damp (den)
damp (den)
if all (real(P) < 0), disp ('Система є стійкою'),
    elseif any (real(P) > 0), disp ('Система є нестійкою')
end
if any (abs(real(P)) < eps), disp ('Система знаходиться на межі стійкості')
end
```

В результаті її виконання отримаємо

```
Z =
-4
P =
-648.93 + 0i
-0.79358 + 0i
-0.13778 + 0.25015i
-0.13778 - 0.25015i
Ap =
648.93
0.79358
0.28558
0.28558
Ksi =
1
1
0.48246
0.48246
```

Eigenvalue	Damping	Frequency
-6.49e+02	1.00e+00	6.49e+02
-7.94e-01	1.00e+00	7.94e-01
-1.38e-01 + 2.50e-01i	4.82e-01	2.86e-01
-1.38e-01 - 2.50e-01i	4.82e-01	2.86e-01

(Frequencies expressed in rad/TimeUnit)

Система є стійкою.

Аналіз знаків дійсних частин полюсів (усі вони від'ємні) свідчить про стійкість системи.

З аналізу параметрів полюсів та нулів випливає:

- система має 2 дійсних полюси, що розташовуються на відстані 648,93 рад/с та 7,94 рад/с від уявної осі та одну пару комплексно-спряжених полюсів на відстані 0,138 рад/с, яка згідно з визначенням і є домінуючою;
- дійсний полюс з модулем 648,93 рад/с практично не впливає на перебіг перехідних процесів;
- система має один дійсний нуль з модулем 8 рад/с, відстань якого від уявної осі майже у 60 разів більша ніж відстань від неї домінуючих полюсів; тому впливом цього нуля на якість перехідного процесу можна знехтувати.

З результатів аналізу параметрів нулів та полюсів видно, що при побудові карти їх розташування на комплексній площині нуль і полюс з найбільшим модулем слід відкинути (інакше ми просто не побачимо на графіках домінуючі полюси).

Отже, після такого аналізу можна доповнити останню програму приблизним розрахунком показників якості перехідних процесів за формулами (4.15)-(4.19) та побудовою картою розташування полюсів, що більш-менш істотно впливають на динамічні властивості системи:

```
lambda = -real (P(3));
beta = imag (P(3));
T = 2*pi/betta
tm = T/2
phi = atan (betta/lambda), tr = (pi-phi)/betta
```

```

ts5 = 3/lambda, ts2 = 4/lambda
sigma = exp (-lambda*pi/betta)*100
Z = [], P(1) = []
figure (1)
compass (P), grid on,
title ('Радіус-вектори полюсів')
figure (2)
pzmap (P, Z), grid on, axis equal

```

При виконанні цього доповнення отримуємо:

```

T =
    25.118
tm =
    12.559
phi =
    1.0673
tr =
    8.2922
ts5 =
    21.773
ts2 =
    29.031
sigma =
    17.721
Z =
    []
P =
    -0.79358 + 0i
    -0.13778 + 0.25015i
    -0.13778 - 0.25015i

```

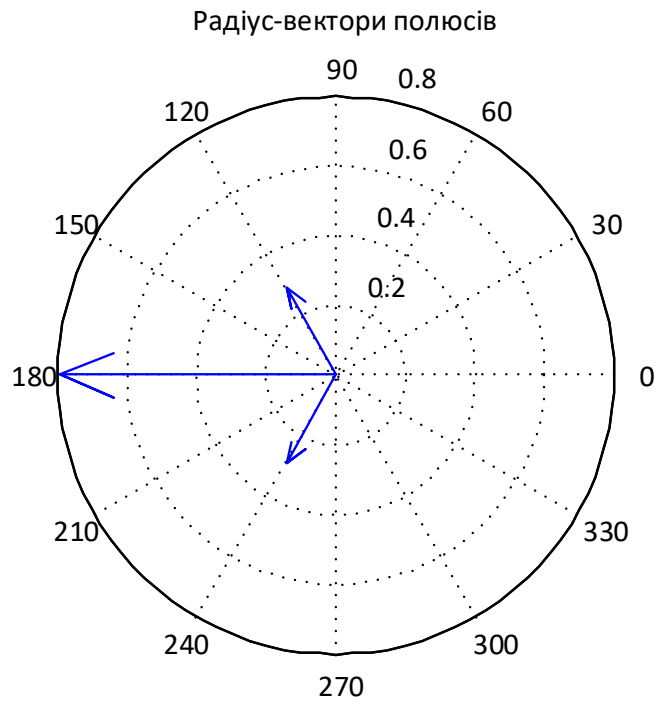


Рис. 4.9. Радіус-вектори суттєвих полюсів досліджуваної системи у полярній системі координат

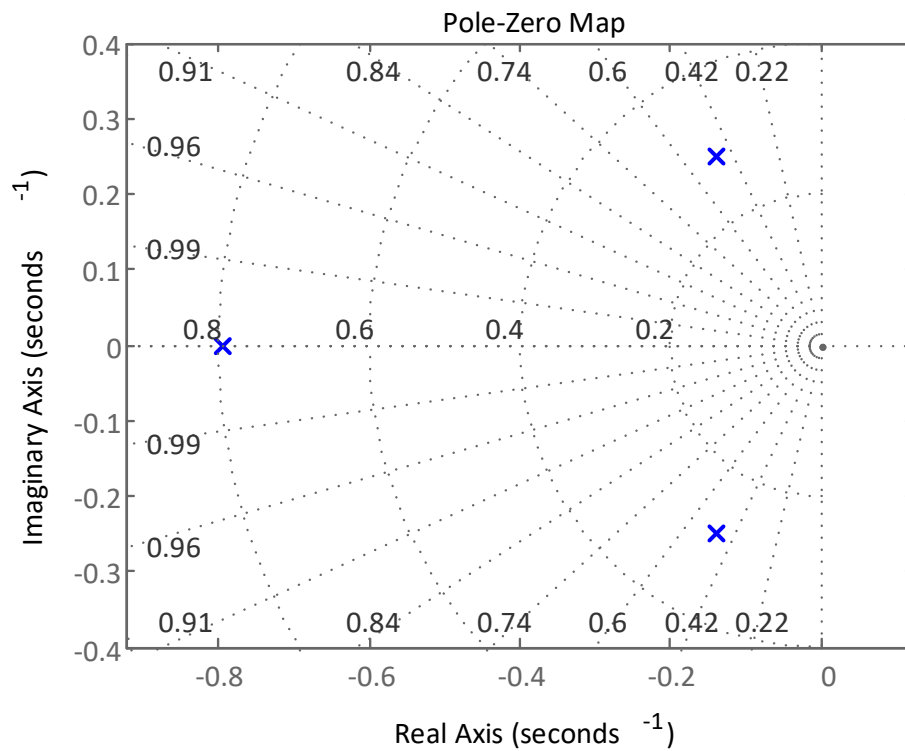


Рис. 4.10. Карта розташування суттєвих полюсів з градуюванням за амплітудами полюсів та їх коефіцієнтами демпфування

5 ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ

5.1 Основні визначення

Важливу роль в аналізі динамічних систем відіграють характеристики, що отримані на основі математичного опису у частотній області. Для визначення частотних характеристик (ЧХ) необхідно знайти частотну передавальну функцію.

Частотну передавальну функцію $W(j\omega)$ системи можна отримати підстановкою $s = j\omega$ у звичайну передавальну функцію системи. При фіксованому значенні ω частотна ПФ є комплексним числом, і може бути представлена в алгебраїчній та показниковій формах:

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (5.1)$$

де

$$U(\omega) = \operatorname{Re}(W(j\omega)) = A(\omega)\cos(\phi) \quad (5.2)$$

– *дійсна частотна характеристика (ДЧХ);*

$$V(\omega) = \operatorname{Im}(W(j\omega)) = A(\omega)\sin(\omega) \quad (5.3)$$

– *уявна (МЧХ) частотна характеристика (УЧХ);*

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad (5.4)$$

– *амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);*

$$\phi(\omega) = \arg(W(j\omega)) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \quad (5.5)$$

– *фазо-частотна характеристика (ФЧХ).*

Після підстановки в алгебраїчну форму виразів (5.2) та (5.3) отримуємо запис частотної ПФ у тригонометричній формі:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot [\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)], \quad (5.6)$$

Графічне зображення комплексного числа у вигляді радіуса-вектору наведено на рис. 5.1.

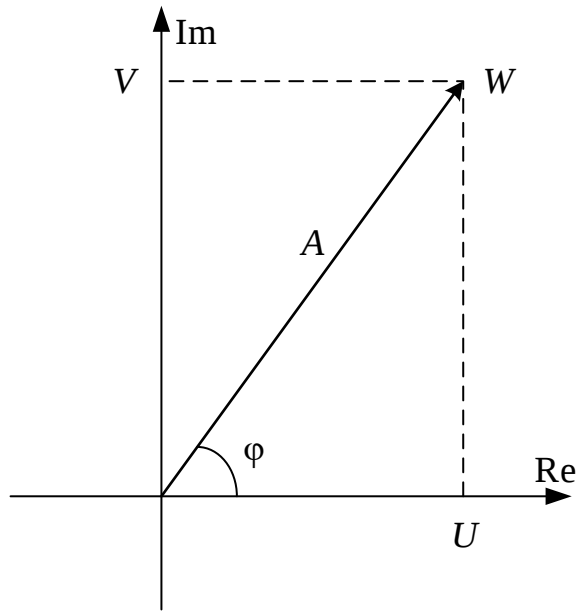


Рис. 5.1. Геометрична інтерпретація комплексного числа

АЧХ показує, як пропускає система сигнал різноманітної частоти. Оцінка пропускання робиться за відношенням амплітуд вихідної та вхідної величин в усталеному режимі. ФЧХ показує усталені значення фазових зсувів, що вносить система на різноманітних частотах.

Геометричне місце точок вектору $W(j\omega)$ на комплексній площині, тобто залежність $V(\omega)(U(\omega))$ у Декартових координатах, або $A(\omega)(\varphi(\omega))$, у полярних координатах при зміні частоти ω від 0 до ∞ , називається **амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ)** або **частотним годографом Найквіста**. Амплітудно-фазова характеристика дає можливість наочно представити для кожної частоти вхідної дії відношення амплітуд вихідної та вхідної величин і зсув фаз між ними. За виглядом діаграми Найквіста розімкненої системи можна визначити чи є відповідна замкнена система стійкою та знайти запаси стійкості за амплітудою та за фазою.

Широке практичне значення має **логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)**

$$L(\lg \omega) = 20 \lg A(\lg \omega), \quad (5.7)$$

що відповідає вимірюванню амплітуди у децибелах (дБ).

У парі з ЛАЧХ аналізують *логарифмічну фазо-частотну характеристику (ЛФЧХ)* $\varphi(\lg \omega)$. *Логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ)* називають *діаграмами Бode (Bode diagram)*.

За допомогою *ЛЧХ розімкнених систем* можуть бути визначені такі властивості замкнених систем, як частота зрізу, резонансні частоти, коефіцієнт передачі, запаси стійкості за амплітудою і фазою. Вони ж дають можливість приблизно оцінити швидкодію і перерегулювання замкненої системи.

Поряд з точними ЛАЧХ, розрахованими за формулою (5.7) часто розглядають так звані асимптотичні ЛАЧХ, що являють собою кусково-лінійну апроксимацію точної ЛАЧХ, яка змінює свій кут нахилу при частотах спряження на $\pm 20k$ дБ/дек, де коефіцієнт k – ціле число.

5.2 Способи побудови частотних характеристик в середовищі пакету MATLAB

5.2.1 Використання базових функцій пакету MATLAB

Для розрахунку комплексної ПФ, по-перше, необхідно створити вектор частот. Для побудови ДЧХ, УЧХ, АЧХ і ФЧХ його доцільно зробити рівномірно розподіленим впродовж лінійної осі на інтервалі $\omega \in [0 \dots \omega_k]$ за допомогою оператора

$$w = \text{linspace}(0, w_k);$$

або

$$w = 0:dw:w_k;$$

Якщо ПФ системи має невисокий порядок, то далі позначаємо

$$p = j \cdot w;$$

і підставляємо розраховану змінну p у ПФ, використовуючи поелементні математичні операції. Наприклад, якщо $W(p) = 10 / (0,2 p^2 + 0,3 p + 1)$, то вектор комплексних чисел, що змінюють свої значення у функції частоти, отримують виконанням оператора

$$W = 10 ./ (0.2 * p.^2 + 0.3 * p + 1);$$

Для ПФ більш високого порядку, для яких вже знайдені коефіцієнти поліномів чисельника num та знаменника den, краще застосувати функції, що здійснюють операції зі степеневими поліномами:

$$H = \text{polyval}(\text{num}, p);$$

$$G = \text{polyval}(\text{den}, p);$$

$$W = H ./ G;$$

Розрахувати параметри отриманих комплексних чисел за формулами (5.2)-(5.5) можна за допомогою функцій real, imag, abs, angle:

$$U = \text{real}(W); \quad V = \text{imag}(W);$$

$$A = \text{abs}(W); \quad \text{Phi} = \text{angle}(W);$$

$$\text{Phi_deg} = \text{Phi} ./ \pi * 180;$$

Останній оператор перетворює фазу в радіанах у фазу в градусах.

За результатами наведених розрахунків можна побудувати перелічені вище ЧХ у такий спосіб:

$$\text{figure}(1), \text{plot}(w, U, w, V), \text{legend}('ДЧХ', 'МЧХ')$$

$$\text{figure}(2), \text{subplot}(2,1,1), \text{plot}(w, A), \text{grid on}, \text{title}('АЧХ')$$

$$\text{subplot}(2,1,2), \text{plot}(w, \text{Phi_deg}), \text{grid on}, \text{title}('ФЧХ')$$

Для побудови діаграм Боде, які найчастіше будують для розімкнених систем, елементи вектору частот рівномірно розподіляють впродовж логарифмічної осі на інтервалі $\lg(\omega_{\log}) \in [d_0 \dots d_k]$, що відповідає діапазону частот $\omega_{\log} \in [10^{d_0} \dots 10^{d_k}]$, для чого застосовують функцію logspace:

$$w_lg = \text{logspace}(d0, dk);$$

а графіки будують у напівлогарифмічних осях функцією semilogx:

$$p_lg = j * w_lg;$$

$$Hr = \text{polyval}(\text{num_r}, p_lg);$$

$$Gr = \text{polyval}(\text{den_r}, p_lg);$$

$$Wr = Hr ./ Gr;$$

$$Ar = \text{abs}(Wr); \quad L = 20 * \log_{10}(Ar);$$

$$\text{Phir} = \text{angle}(Wr); \quad \text{Phir_deg} = \text{Phir} ./ \pi * 180;$$

$$\text{figure}(3), \text{subplot}(2,1,1), \text{semilogx}(w_lg, L), \text{grid on}, \text{title}('ЛАЧХ')$$

$$\text{subplot}(2,1,2), \text{plot}(w_lg, \text{Phir_deg}), \text{grid on}, \text{title}('ЛФЧХ')$$

Через те, що при використанні логарифмічної осі частот точка, що відповідає $\omega = 0$, знаходиться зліва у нескінченості ($\lg 0 = -\infty$), нижня межа діапазону частот при побудові ЛЧХ має не нульове, а достатньо мале але скінченне значення.

АФЧХ можна будувати як в Декартових, так і в полярних координатах:

`plot (U, V), axis equal`

`polar (A, Phi)`

Найскладнішим в даному випадку є формування вектору частот, який в ідеалі повинен мати діапазон від 0 до ∞ . Щоб годограф змінювався плавно, необхідно дуже ретельно підбирати значення частот і переходити до границь змінних, щоб розрахувати їх значення при $\omega \rightarrow \infty$.

5.2.2 Використання функцій *Control System Toolbox* та *Signal Toolbox* пакету *MATLAB*

У розділах *Control System Toolbox* та *Signal Toolbox* знаходяться функції, які в багатьох випадках спрощують побудову і розрахунок частотних характеристик. Обов'язковим вхідним (правобічним) параметром цих функцій повинен бути *LTI*-об'єкт *sys* у будь-якій формі або його параметри, що визначають математичний опис системи.

Функції без лівосторонніх (вихідних) параметрів

`bode (sys)`

`nyquist (sys)`

`bode (sys, w)`

`nyquist (sys, w)`

одразу будують діаграми Боде і Найквіста без збереження у пам'яті результатів їх розрахунку. Частота *w* у списку вхідних аргументів може бути задана вектором рівномірно розподіленим у логарифмічному масштабі таким чином: `w = logspace (log10(w0), log10(wk))` або `{w0, wk}`. За замовчанням він назначається автоматично на підставі аналізу параметрів моделі.

Описані вище функції можна застосовувати з лівосторонніми параметрами:

`[mag, phase, w] = bode (sys)`

`[re, im, w] = nyquist (sys)`

`[mag, phase] = bode (sys, w)`

`[re, im] = nyquist (sys, w)`

У цьому разі вони тільки розраховують дані для побудови ЧХ, а користувач використовує цю інформацію для побудови будь-яких ЧХ у будь-якому вигляді.

Вихідні параметри розглянутих функцій *mag* (від англ. *Magnitude* – амплітуда) та *phase* – фаза в градусах, *re*, *im* – дійсна та уявна складові частотної ПФ є тривимірними масивами розміром “кількість виходів” × “кількість входів” × “довжина вектору частот”, що треба враховувати при застосуванні цих параметрів при побудові ЧХ.

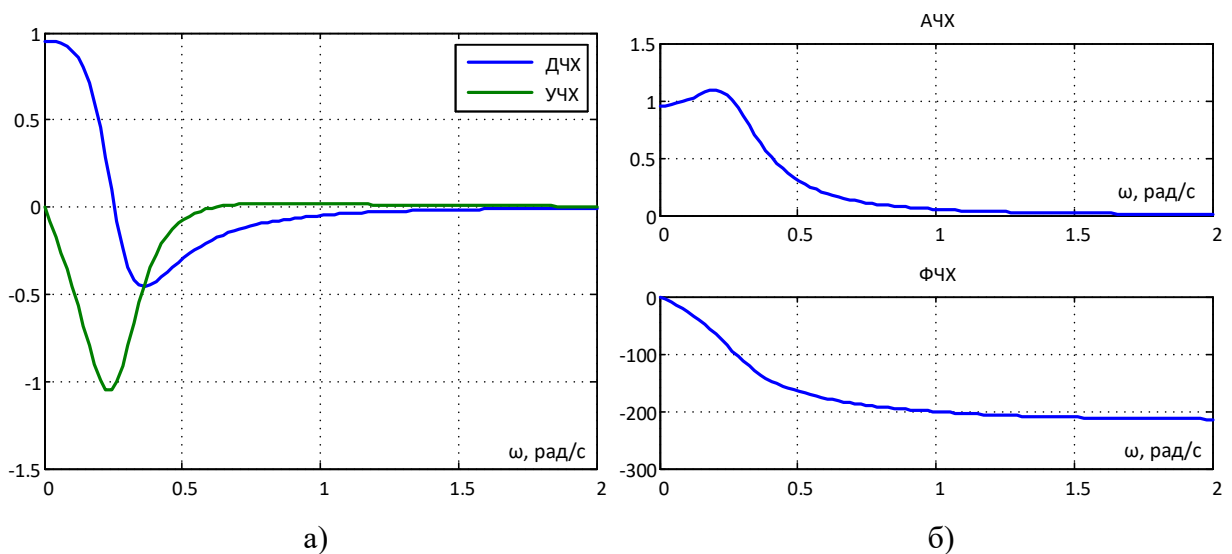
Для побудови ЧХ досліджуваної системи можна доповнити програму *SysTF*, наведену у підрозділі 3.1, операторами

```
w = linspace (0, 2);
[U, V] = nyquist (sys(1,1), w);
figure (1)
plot (w, U(:), w, V(:), 'LineWidth', 2), grid on, legend ('ДЧХ','УЧХ')

[Mag, Phi_deg] = bode (sys(1,1), w);
figure (2)
subplot (2,1,1), plot (w, Mag(:), 'LineWidth', 2), grid on, title ('АЧХ')
subplot (2,1,2), plot (w, Phi_deg(:), 'LineWidth', 2), grid on, title ('ФЧХ')

figure (3), bode (sysr, {1e-3 1e4}), grid on
figure (4), nyquist (sysr), grid on
```

В результаті отримаємо графіки, зображені на рис. 5.1.



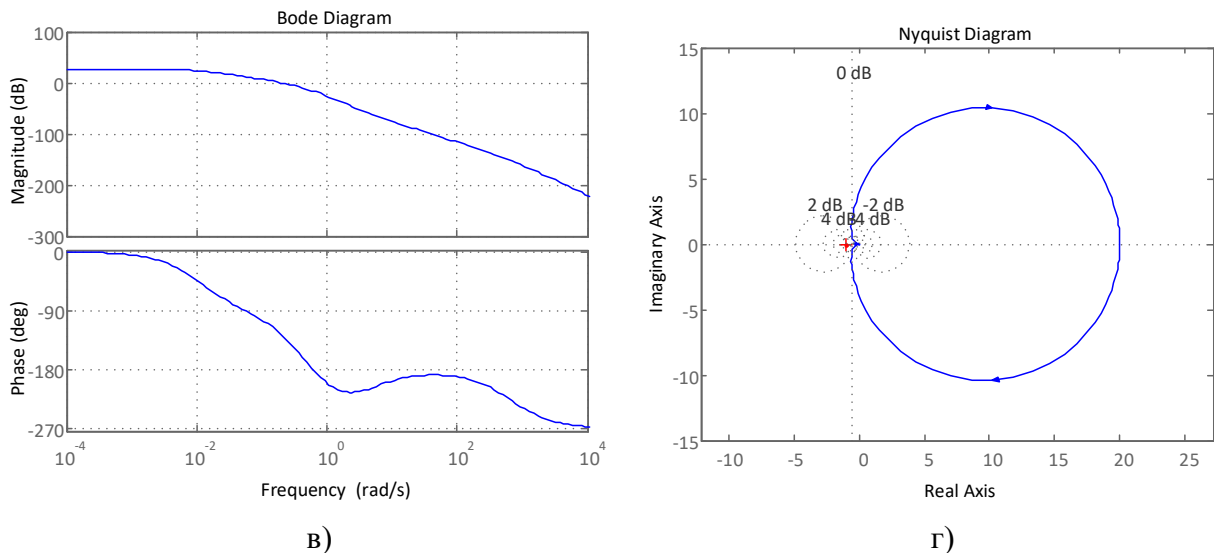


Рис. 5.2. Частотні характеристики досліджуваної системи:
 а) ДЧХ і УЧХ замкненої системи; б) АЧХ і ФЧХ замкненої системи;
 в) діаграми Боде розімкненої системи; г) діаграма Найквіста розімкненої системи

5.3 Визначення запасів стійкості замкнених систем за діаграмами Боде і Найквіста розімкненої системи

5.3.1 Загальна характеристика критеріїв стійкості та її показників

Визначення стійкості САК є важливим етапом їх дослідження, який можна виконувати декількома способами.

До *критеріїв стійкості* належать *кореневий, алгебраїчні (наприклад, критерій Рауса-Гурвіца, Ляпунова-Шіпара) та частотні (критерій Михайлова і Найквіста у звичайній та логарифмічній формах)*. Для визначення стійкості в наш час актуальність алгебраїчних критеріїв істотно зменшилась. Те ж саме можна сказати і про частотний критерій Михайлова, який в зарубіжних літературних джерелах взагалі не розглядається.

Основним критерієм можна вважати кореневий, тому що він напряду пов'язаний з визначенням стійкості і за наявності сучасного програмного забезпечення його можна застосувати найшвидше. Цей спосіб вже розглянуто у підрозділах 4.1, 4.3.

Але визначення лише самого факту стійкості системи недостатньо.

В умовах експлуатації параметри системи з будь-яких причин можуть змінюватися в деяких межах. Для електромеханічних об'єктів такими причинами можуть бути старіння ізоляції, температурні коливання, ефект насичення сталі, особливості кінематичних схем тощо. Коливання параметрів можуть привести до втрати стійкості системи, якщо вона працює поблизу від межі стійкості. Тому намагаються спроектувати систему керування так, щоб вона працювала подалі від межі стійкості. Ступінь цього віддалення називають **запасом стійкості**.

Розрізняють запаси стійкості за підсиленням, за амплітудою і за фазою, які можна знайти шляхом аналізу діаграм Боде і Найквіста розімкнених систем.

Охарактеризуємо основні параметри, що використовуються при визначенні показників стійкості.

Частота зрізу ω_z (англ. cut-off frequency) – це частота, де значення ЛАЧХ розімкненої системи дорівнює 0 дБ, тобто **точка перетину ЛАЧХ з віссю частоти**, або частота, при якій амплітуда АФЧХ дорівнює 1, тобто

$$L_p(\omega_z)=0, \quad A_p(\omega_z)=1 \quad (5.8)$$

Запас стійкості за амплітудою ΔL , дБ – це значення ЛАЧХ розімкненої системи на частоті, де її ФЧХ востаннє перетинає рівень -180° :

$$\Delta L = L_p(\omega) \Big|_{\varphi_p(\omega)=-180^\circ}. \quad (5.9)$$

Запас стійкості за підсиленням g – це відношення 1 до значення АФЧХ розімкненої системи A_g у точці, де вона востаннє перетинає дійсну від'ємну піввісь, тобто фаза має значення -180° :

$$A_g = A_p(\omega) \Big|_{\varphi_p(\omega)=-180^\circ}, \quad g = \frac{1}{A_g}. \quad (5.10)$$

Зв'язок між запасами стійкості за амплітудою та за підсиленням має вигляд

$$\Delta L = 20 \lg(g) = 20 \lg\left(\frac{1}{A_g}\right), \quad g = 10^{\Delta L/20}. \quad (5.11)$$

Запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ – це відстань ЛФЧХ розімкненої системи від значення -180° на частоті зрізу, або кут між від’ємною піввіссю дійсної осі АФЧХ розімкненої системи і радіусом вектором, проведеним через точку перетину АФЧХ з колом одиничного радіусу:

$$\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_3)|. \quad (5.12)$$

5.3.2 Визначення стійкості та запасів стійкості за діаграмами Бode

Про стійкість замкнутої системи та про запас стійкості можна судити за взаємним розташуванням ЛАЧХ і ЛФЧХ відповідної розімкнутої системи.

Логарифмічний критерій стійкості формулюється двома способами:

1. Якщо система стійка в розімкненому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб ЛАЧХ перетинала вісь абсцис раніше, ніж ЛФЧХ в останній раз перетинає лінію -180° , іншими словами на частоті зрізу ω_3 , для якої $L(\omega_3)=0$, фаза за модулем повинна бути меншою за 180° :

$$|\varphi(\omega_3)| < 180^\circ. \quad (5.13)$$

2. Якщо розімкнута система нестійка і її характеристичне рівняння має r коренів у правій півплощині, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при додатній ЛАЧХ кількість перетинів фазовою характеристикою рівня $-\pi$ знизу догори була на $r/2$ раз більшою ніж кількість перетинів у зворотному напрямі.

Перше формулювання ілюструють ЛЧХ на рис. 5.3, де фазові характеристики 1 і 4 відповідають стійкій замкнутій системі, ЛФЧХ 3 – нестійкій системі, а ЛФЧХ 4 – системі, що перебуває на межі стійкості. Графіки характеристик, зображені на рис. 5.4а, відповідають стійкій замкнутій системі при $r = 1$, а на рис. 5.4б – при $r = 2$.

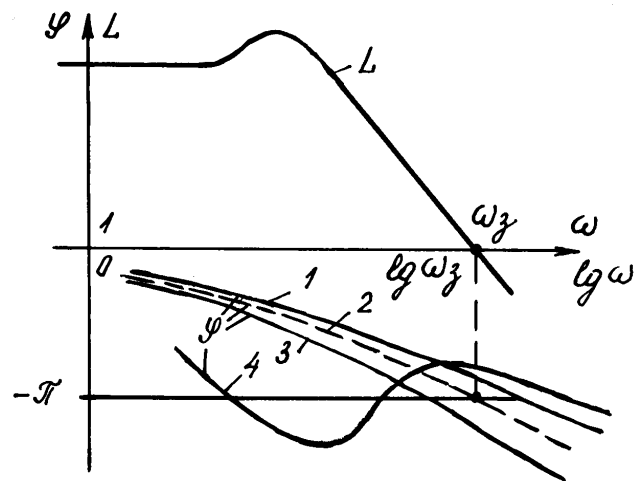


Рис. 5.3. Ілюстрації до першого формулювання логарифмічного критерія стійкості

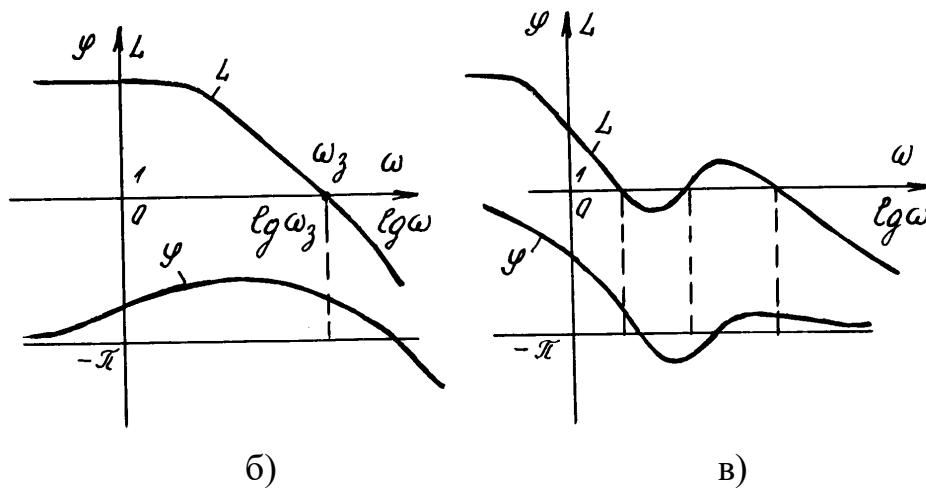


Рис. 5.4. Ілюстрації до другого формулювання логарифмічного критерія стійкості

Для визначення запасів стійкості за діаграмами Боде в середовищі пакету *MATLAB* призначена функція *margin*, яку можна застосовувати тільки для об'єктів з одним входом та одним виходом (*SISO-objects*).

Наприклад, при додаванні до програми аналізу досліджуваної системи SysTF операторів

```
figure(5), margin(sysr)
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sysr)
```

отримуємо графік рис. 3.5 та числові дані

```
Gm =
    6.6618
Pm =
```

54.4891
 $W_{cg} =$
 0.6221
 $W_{cp} =$
 0.1966

де G_m – безрозмірний запас стійкості за коефіцієнтом підсилення g ; P_m – запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ у градусах; W_{cg} – частота ω_φ , при якій фаза досягає рівня -180° ; W_{cp} – частота зрізу ω_3 .

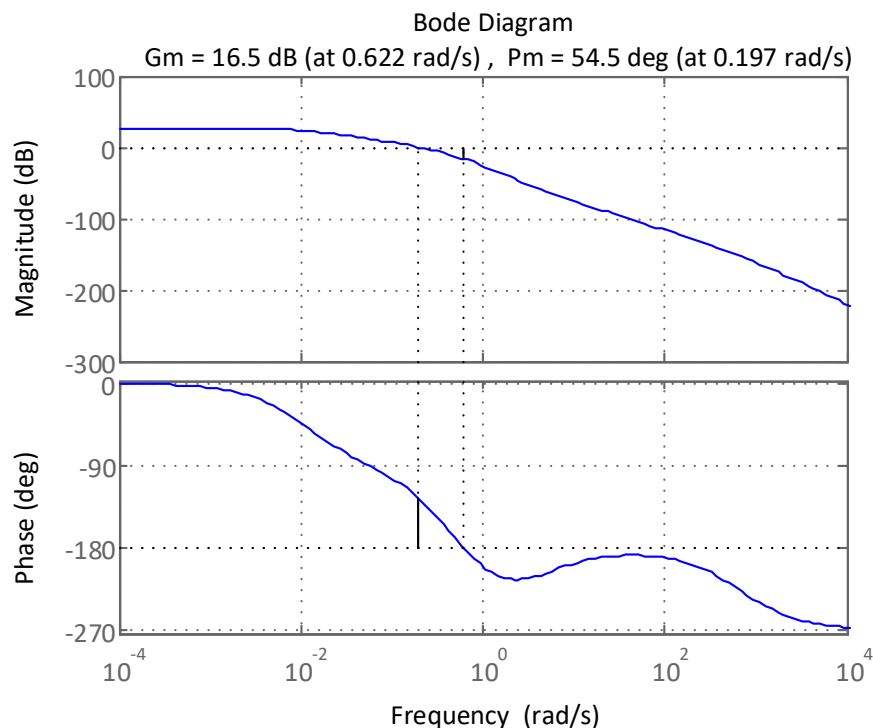


Рис. 5.5. Результат виконання функції `margin (sysr)`

На рис. 5.5 параметр з ім'ям G_m є запасом стійкості не за коефіцієнтом, а за амплітудою в децибелах ΔL . Тому його значення при виконанні функції `margin (sysr)` та оператора `[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin (sysr)` не збігаються (див. формули (5.11)).

Щоб графіки рис. 5.5, отримані при виконанні функції `margin (sysr)` стали більш зрозумілими, їх можна дещо переробити у графічному редакторі, як це показано на рис. 5.6.

Значення запасу за амплітудою у відносних (безрозмірних) одиницях (параметр g) є більш інформативним, тому що воно показує, у скільки

раз ще можна підвищити коефіцієнт підсилення розімкненої системи, щоб замкнена система досягла межі стійкості.

При проектуванні САК запас стійкості за фазою рекомендується вибирати не меншим 30° - 45° . Запас стійкості за амплітудою повинен бути не меншим 6 дБ, що відповідає можливному збільшенню коефіцієнта передачі розімкнутої системи у 2 рази ($20\lg(2)\approx 6$).

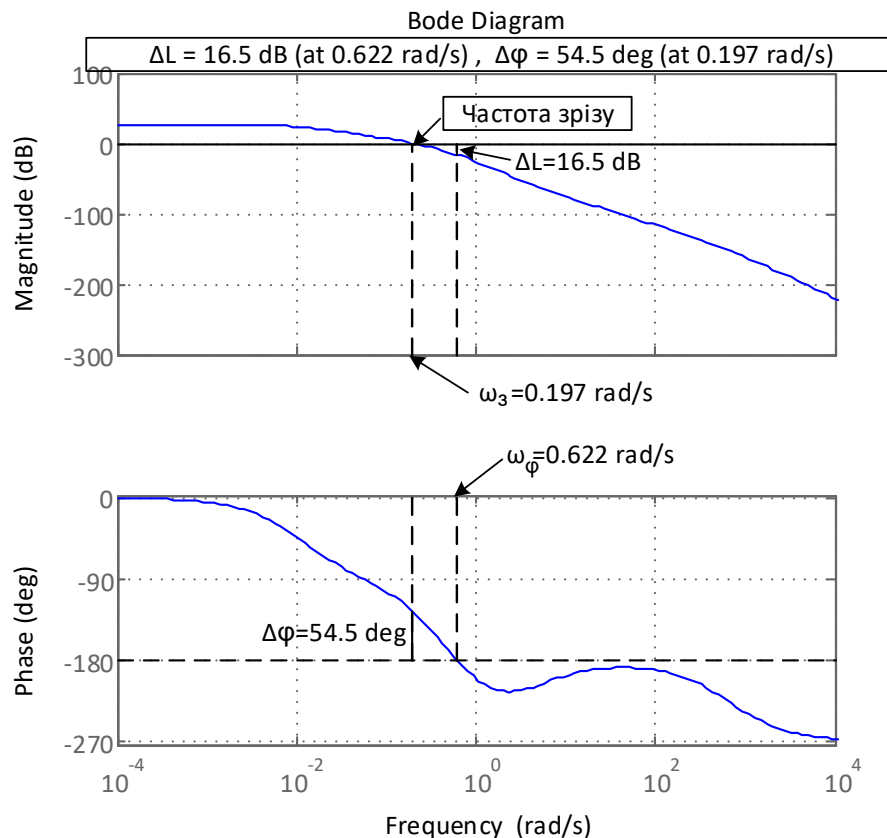


Рис. 5.6. Діаграми Боде після обробки їх у графічному редакторі

В сучасних версіях пакету *MATLAB* запаси стійкості можна отримати і з діаграм Боде, побудованих за допомогою функції *bode (sysr)*. Для цього необхідно викликати контекстуальне меню правою клавішею миші в середині одного з двох графічних вікон, виділити в ньому функцію *Characteristics* і обрати в ній опцію *All stability Margins*. В результаті на графіку з'являться жирні точки на ЛАЧХ та ЛФЧХ, що відповідають запасам стійкості. Після цього треба клацнути лівою клавішею миші у цих точках і отримати значення запасів стійкості, як це показано на рис. 5.7.

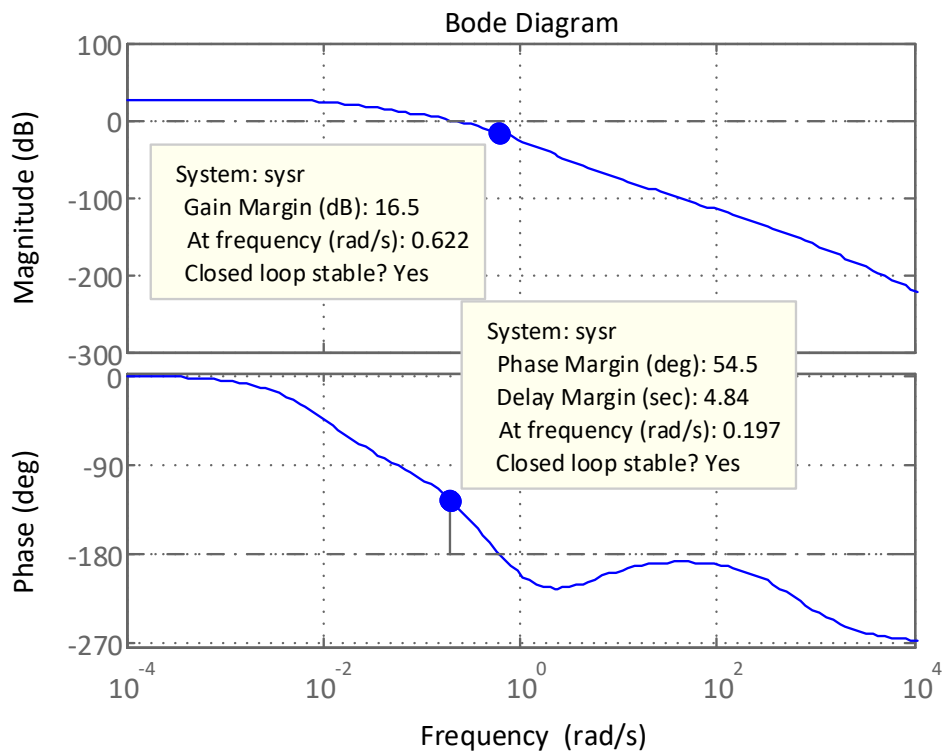


Рис. 5.7. Діаграми Боде після застосування контекстуального меню

Якщо ЛФЧХ не перетинає лінію -180° , то запас стійкості за амплітудою дорівнює ∞ . Запас стійкості за фазою дорівнює ∞ , коли $L_p(0) \leq 0$ та відповідно $A_p(0) \leq 1$, тобто ЛАЧХ не перетинає вісь частот, а АФЧХ не перетинає коло одиничного радіуса з центром в початку координат.

5.3.3 Визначення стійкості та запасів стійкості за діаграмами Найквіста

У найпростішому варіанті *критерій стійкості Найквіста* можна сформулювати так: *замкнена система є стійкою, якщо годограф Найквіста розімкненої системи не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.*

За критерієм Найквіста, чим далі АФЧХ розімкненої системи проходить від критичної точки $(-1; j0)$, тим більше запас стійкості.

Запас стійкості за підсиленням $g=1/A_g$ характеризує відстань годографа АФЧХ розімкнутої системи від критичної точки в напрямку дійсної осі (див. рис. 5.8).

Щоб запас стійкості за підсиленням був достатнім ($g \geq 2$, $A_g \leq 0,5$), відрізок OB на рис. 5.8 повинен бути не більшим за відрізок BC або за половину відрізка OC ($OB \leq BC$).

Зі зростанням коефіцієнта передачі розімкнутої системи k_p зростає амплітуда кожної точки АФЧХ, і при деякому значенні $k_p = k_m$ АФЧХ пройде через критичну точку та попаде на межу стійкості, а при $k_p > k_m$ замкнута система стане нестійкою.

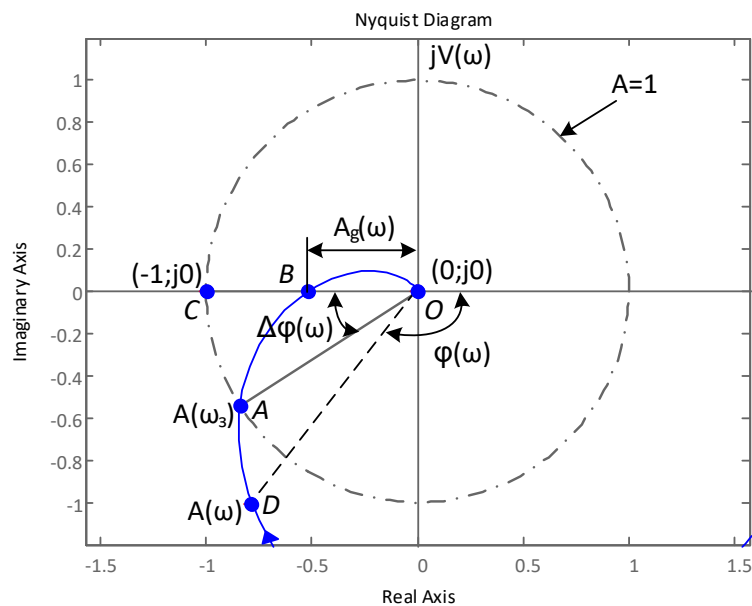


Рис. 5.8. Визначення запасів стійкості за АФЧХ розімкнутої системи

Запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ характеризує кутову відстань годографа АФЧХ розімкнутої системи від критичної точки по дузі кола одиничного радіусу до точки перетину його з годографом Найквіста.

Запас стійкості за фазою визначає на який кут слід повернути АФЧХ розімкненої системи, щоб замкнена система досягла межі стійкості.

Літерою D на рис. 5.8 позначено довільну точку АФЧХ.

Для **визначення запасів стійкості** за допомогою годографа Найквіста необхідно виділити на ньому 3 точки: точку A , в якій амплітуда АФЧХ дорівнює 1, і точку B , у якій фаза має значення -180° , та точку O – початок

координат. Перша точка є точкою перетину АФЧХ з колом одиничного радіусу з центром у початку системи координат O , а друга – точкою перетину АФЧХ з уявною віссю.

Тоді запас стійкості за фазою визначатиметься як кут між радіусом вектором OA та від'ємною піввіссю дійсної осі, а запас стійкості за амплітудою – як відношення 1 до амплітуди у точці B , з якого можна визначити і запас стійкості у децибелах.

Оскільки, визначення запасів стійкості за діаграмою Найквіста відбувається в околі точки $(-1; j0)$, то масштаб побудованого годографу Найквіста необхідно збільшити.

Наприклад, для досліджуваної системи можна виконати таку послідовність операторів:

```
figure (6), nyquist (sysr),  
axis ([-1.2 1.2 -1.2 1.2]),  
grid on, axis equal
```

Після встановлення в отриманому графіку за допомогою контекстуального меню режиму *All stability Margins*, у такий же спосіб, як для діаграм Боде, та внесення деяких позначень у середовищі графічного редактора *Visio* отримуємо графік рис. 5.9. Контекстуальне меню дозволяє за бажанням прибрати з графіка верхню гілку годографу, побудовану для від'ємних значень частот.

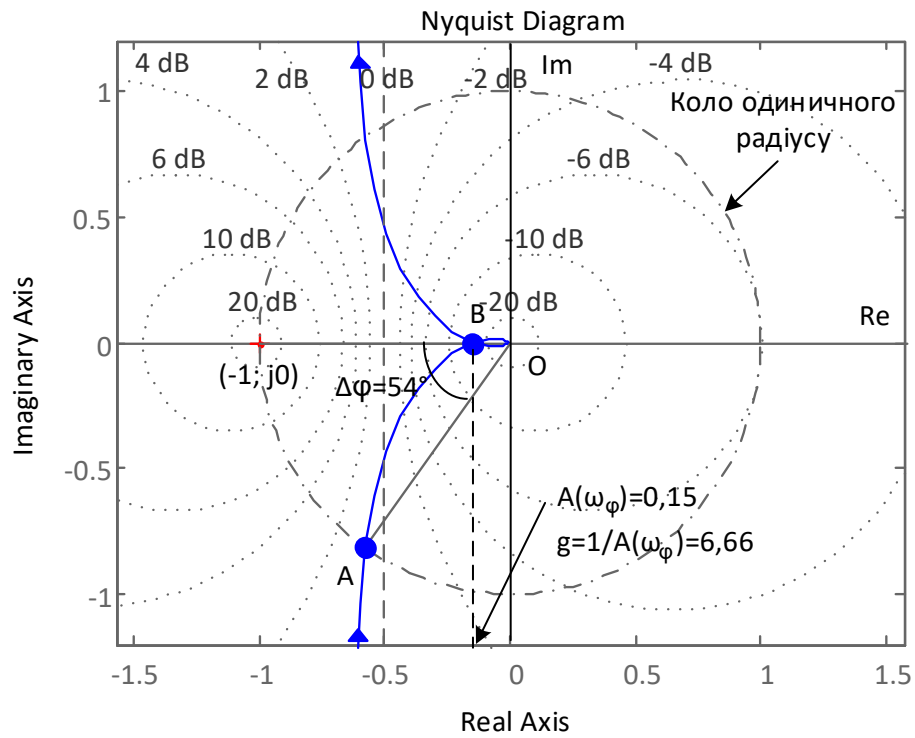


Рис. 5.9. Діаграма Найквіста в околі точки $[-1, j0]$

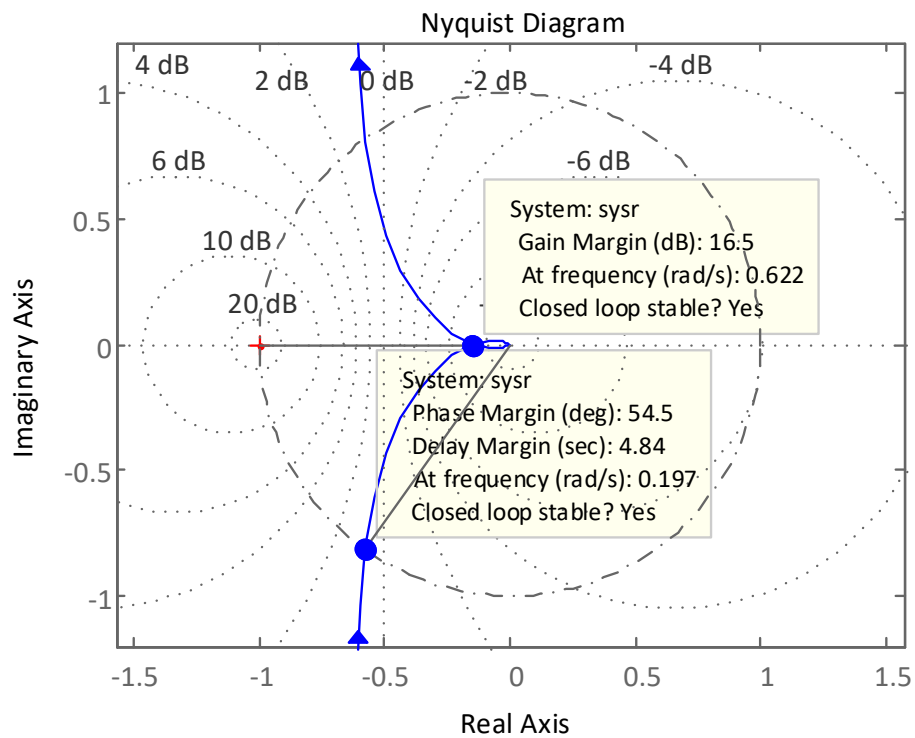


Рис. 5.10. Діаграма Найквіста в околі точки $[-1, j0]$
з текстовою інформацією про запаси стійкості

У контекстувальному меню діаграми Найквіста слід ще звернути увагу на функцію *Show*, яка може прибирати верхню гілку годографа, отриману

при від'ємних частотах, функцію *Zoom on -1,0* та функцію *Properties*, в якій можна змінювати такі параметри графіка як *Labels, Limits, Units* та *Style*.

На годографі Найквіста можна клацнути лівою клавiшею миші у точках А і В щоб отримати текстову інформацію про запаси стійкості, як це показано на рис. 5.10.

На діаграмах Найквіста нанесені кола рівних значень логарифмічних амплітуд, що будуються за формулами:

$$(u + C)^2 + v^2 = R^2, \quad (5.14)$$

$$C = \frac{A^2}{A^2 - 1}, \quad R = \frac{A}{A^2 - 1}, \quad A = 10^{L/20}. \quad (5.15)$$

5.4 Побудова асимптотичних ЛАЧХ

Для побудови точної ЛАЧХ можна застосувати будь-який програмний засіб з розвиненим графічним інтерфейсом, здатний оперувати з комплексними числами, як це показано у попередньому підрозділі. Але, щоб отримати уявлення про якість перехідних процесів в замкненій системі частотним методом, треба побудувати саме асимптотичну, а не точну ЛАЧХ розімкненої системи. Її особливість полягає у кусково-лінійній апроксимації точної характеристики дотичними до неї прямими з коефіцієнтами нахилу

$$k_n = \pm 20k, \text{ дБ/дек}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.16)$$

Абсциси точок зламу збігаються з частотами (амплітудами) ненульових полюсів та нулів досліджуваної системи з розімкненим зовнішнім зворотним зв'язком.

Вручну асимптотична ЛАЧХ (АЛАЧХ) будується значно швидше за точну, тому що потребує значно менше розрахунків. Але алгоритм побудови АЛАЧХ є набагато складнішим. Може саме з цієї причини відомі програмні засоби отримують у своєму складі готові програмні модулі, призначені для розрахунку та побудови тільки точних ЛАЧХ.

5.4.1 Побудова ЛЧХ вручну

Для побудови ЛЧХ вручну необхідно скористатися передавальною функцією, що складається з добутку ПФ елементарних ланок не вище другого порядку, наприклад,

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4^2 p^2 + T_5 p + 1)}.$$

У цьому випадку є справедливими такі співвідношення:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega), \quad (5.17)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad (5.18)$$

де $L_i(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ – ЛАЧХ і ЛФЧХ окремих ланок відповідно. Асимптотичні ЛАЧХ (АЛАЧХ) та ЛФЧХ елементарних ланок наведені у багатьох джерелах, у тому числі в додатку В цього посібника.

ЛАЧХ зазвичай будують одразу без побудови ЛАЧХ окремих ланок. Для цього спочатку знаходять усі частоти спряження АЛАЧХ $\omega_i = 1/T_i$ та їх десяткові логарифми $\lg \omega_i = \lg(1/T_i)$ і відкладають їх на логарифмічній осі частот. Потім розраховують значення характеристики на частоті $\omega = 1$ за формулою

$$L(\omega) \Big|_{\substack{\omega=1 \\ \lg \omega=0}} = L(1) = 20 \lg k, \quad (5.19)$$

і через точку з координатами $[1, L(1)]$ проводять пряму лінію з нахилом $20(m - v)$ дБ/дек, де m – кількість диференціювальних ланок; v – кількість інтегрувальних ланок. Отже, у більшості випадків АЛАЧХ розімкненої системи починається з ділянки з нахилом 0 дБ/дек (статична система), –20 дБ/дек (двократно-інтегруюча система, або система з астатизмом другого порядку) або –40 дБ/дек (однократно-інтегруюча система, тобто система з астатизмом першого порядку). Початкова ділянка АЛАЧХ обмежується праворуч найменшою частотою спряження $\omega_{\min} = \lg(1/T_{i_{\max}})$. Ліворуч її

можна продовжувати до $\lg(0)=-\infty$ але зазвичай обмежують початком попередньої декади ($\omega_0 < \omega_{i\min}$).

Наступні прямолінійні ділянки АЛЧХ розташовуються між найближчими одна до одної частотами спряження, а останню ділянку продовжують від максимальної частоти спряження $\omega_{i\max} = \lg(1/T_{i\min})$ до початку наступної декади ($\omega_k > \omega_{i\max}$).

На кожній частоті спряження коефіцієнт нахилу АЛАЧХ змінюється у відповідності з типом динамічної ланки, до якої вона належить, а саме: на -20 дБ/дек для аперіодичної ланки, на -40 дБ/дек для коливальної ланки, на $+20$ дБ/дек для форсувальної ланки 1-го порядку і на $+40$ дБ/дек для форсувальної ланки 2-го порядку.

Приклад 5.1. Побудувати вручну АЛАЧХ системи з заданою ПФ

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_4^2 p^2 + T_7 p + 1)(T_5 p + 1)(T_6 p + 1)} = \frac{40(0,02 p + 1)(0,1 p + 1)(0,5 p + 1)}{(0,04 p^2 + 0,2 p + 1)(2,5 p + 1)(0,05 p + 1)}$$

Визначимо, чи є поліном другого порядку у знаменнику передавальної функції елементарним. Корені поліному $0,04 p^2 + 0,2 p + 1$ $p_{1,2} = -2,5 \pm j4,33$ – комплексно спряжені, тому співмножник $1/(0,04 p^2 + 0,2 p + 1)$ є елементарним. АЛАЧХ розімкнутої системи будемо у такій послідовності.

1. Розраховуємо частоти спряження та їх десяткові логарифми

$$\omega_1 = \frac{1}{0,02} = 50; \quad \omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10; \quad \omega_3 = \frac{1}{0,5} = 2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{\sqrt{0,04}} = 5; \quad \omega_5 = \frac{1}{2,5} = 0,4; \quad \omega_6 = \frac{1}{0,05} = 20;$$

$$\lg \omega_1 = \lg \frac{1}{0,02} = 1,7; \quad \lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0,1} = 1; \quad \lg \omega_3 = \lg \frac{1}{0,5} = 0,3;$$

$$\lg \omega_4 = \lg \frac{1}{\sqrt{0,04}} = 0,7; \quad \lg \omega_5 = \lg \frac{1}{2,5} = -0,4; \quad \lg \omega_6 = \lg \frac{1}{0,05} = 1,3;$$

сортуюмо отримані масиви за збільшенням

$$\lg(\Omega_s) = [-0,4 \ 0,3 \ 0,7 \ 1 \ 1,3 \ 1,7];$$

доповнюємо їх межами частотного діапазону

$$\Omega_{sr} = [\omega_0 \ \omega_5 \ \omega_3 \ \omega_4 \ \omega_2 \ \omega_6 \ \omega_1 \ \omega_k] = [0,1 \ 0,4 \ 2 \ 5 \ 10 \ 20 \ 50 \ 100];$$

$$lg(\Omega_{sr}) = [-1 \ -0,4 \ 0,3 \ 0,7 \ 1 \ 1,3 \ 1,7 \ 2];$$

і відкладаємо на осі абсцис.

2. Розраховуємо амплітуду початкової ділянки АЛАЧХ, яка матиме нахил 0 дБ/дек $L_0 = 20 \lg 40 = 32$ дБ, тому що розімкнута система не містить інтегровальних і диференціювальних ланок (ПФ не містить співмножників p та $1/p$).

3. Проводимо відрізок прямої, паралельно до осі абсцис, на рівні L_0 на інтервалі $\lg \omega_0 < \lg \omega < \lg \omega_{\min}$; $-1 < \lg \omega < -0,4$; $0,1 < \omega < 0,4$ ($\omega_{\min} = \omega_5$ – мінімальна частота спряження).

5. На першій (мінімальній) частоті спряження нахил АЛАЧХ змінюється на -20 дБ/дек, і становить $0 + (-20) = -20$ дБ/дек, тому що найбільша стала часу $T = 2,5$ с належить елементарному співмножнику $1/(2,5p + 1)$. На частоті $\omega_3 = 2$ рад/с, відбувається другий злам характеристики. Її нахил становитиме $-20 + 20 = 0$ дБ/дек через те, що стала часу $0,5$ належить співмножнику $(0,5p + 1)$. Наступний злам відбувається на частоті $\omega_4 = 5$ рад/с, яка визначається співмножником $1/(0,04p^2 + 0,2p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на -40 дБ/дек і становить $0 + (-40) = -40$ дБ/дек. Черговий злам відбувається на частоті $\omega_2 = 10$, яка визначається співмножником $(0,1p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на $+20$ дБ/дек і становить -20 дБ/дек. На частоті $\omega_6 = 20$ рад/с також відбувається злам і нахил характеристики становитиме -40 дБ/дек. На частоті $\omega_1 = 50$ рад/с відбувається останній злам і нахил характеристики становитиме $-40 + 20 = -20$ дБ/дек.

Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 = \\ &= \operatorname{arctg}(0,02\omega) + \operatorname{arctg}(0,1\omega) + \operatorname{arctg}(0,5\omega) - \operatorname{arctg} \frac{0,2\omega}{1-0,04\omega^2} - \\ &- \operatorname{arctg}(2,5\omega) - \operatorname{arctg}(0,05\omega).\end{aligned}$$

Отримані у такий спосіб АЛАЧХ та ЛФЧХ зображені на рис. 5.11.

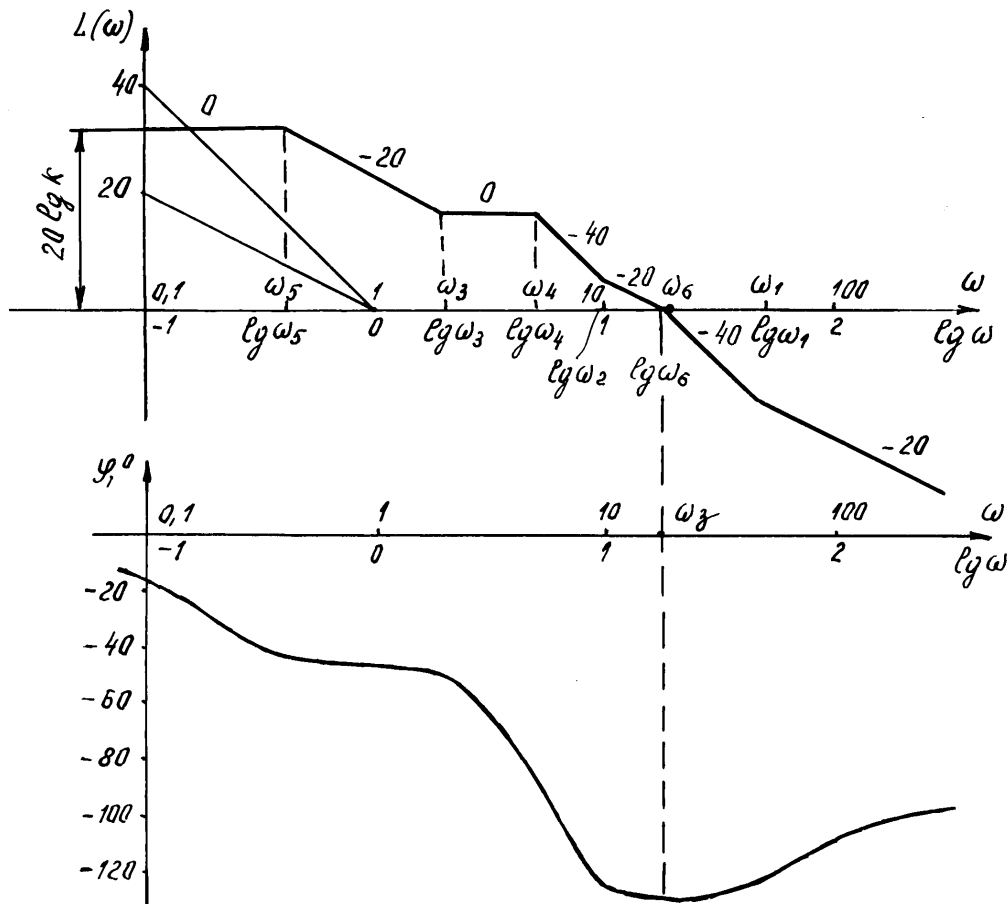


Рис. 5.11. АЛАЧХ та ЛФЧХ до прикладу 5.1

Для астатичних систем і систем з кратними полюсами та (або) нулями порядок побудови ЛЧХ дещо змінюється.

5.4.2 Побудова АЛАЧХ в середовищі пакету MATLAB

Для побудови АЛАЧХ ПФ неперервної системи зручно представити у вигляді розкладення на нулі-полюси (див. підрозділ 3.2), тобто:

$$W(p) = K \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}, \quad (5.20)$$

Вільні члени у множниках чисельника та знаменника ПФ (z_i , $i=1,2,...,m$ та p_j , $j=1,2,...,n$) є частотами спряження асимптотичних ЛЧХ. Ланки першого порядку змінюють кут нахилу АЛАЧХ на ± 20 дБ/дек., а ланки другого порядку – на ± 40 дБ/дек. (знак “+” відповідає ланкам у чисельнику ПФ, а знак “-” – ланкам у знаменнику).

Алгоритм розв’язання поставленої задачі у самому загальному вигляді можна розбити на декілька етапів.

1. Визначення параметрів ПФ (5.9) $\mathbf{P}=[p_1, p_2, ..., p_n]$, $\mathbf{Z}=[z_1, z_2, ..., z_m]$ і K .

2. Розрахунок кількості нейтральних (нульових) полюсів k_{p0} и нулів k_{z0} , вилучення їх із загального списків та визначення кута нахилу початкової ділянки АЛАЧХ в децибелах/декаду, враховуючи, що кожна диференційна ланка (кожний нейтральний нуль) змінює цей кут на $+20$ дБ/дек., а кожна інтегральна ланка (кожний нейтральний полюс) – на -20 дБ/дек:

$$k_{n0}=20(k_{z0}-k_{p0}). \quad (5.21)$$

3. Визначення амплітуд (частот) ненульових полюсів та нулів, які у сукупності утворюють вектор частот спряження лінійних ділянок АЛАЧХ:

$$\omega_{pi}=|p_i|, \quad \omega_{zj}=|z_j|, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{\Omega}_s = [\omega_{p1}, \omega_{p2}, ..., \omega_{p,n1}, \omega_{z1}, \omega_{z2}, ..., \omega_{z,m1}] = [\omega_{s1}, \omega_{s2}, ..., \omega_{s,m1+n1}], \quad (5.23)$$

де

$$n_1=n-k_{p0}, \quad m_1=m-k_{z0}. \quad (5.24)$$

4. Створення відповідного до вектору частот спряження $\mathbf{\Omega}_s$ вектору зміни коефіцієнтів нахилів ділянок АЛАЧХ із n_1 елементів -20 дБ/дек та m_1 елементів $+20$ дБ/дек:

$$\Delta \mathbf{k}_n = 20[-1, -1, ..., -1, 1, 1, ..., 1]. \quad (5.25)$$

5. Сортування векторів $\mathbf{\Omega}_s$ и $\Delta \mathbf{k}$ за зростанням частот спряження.

6. Визначення коефіцієнтів нахилів ділянок АЛАЧХ, що починаються з частоти ω_{si}

$$k_{ni}=k_{n,i-1}+\Delta k_{ni}, \quad i=1,2,...,m1+n1. \quad (5.26)$$

7. Знаходження у векторі Ω_s кратних (однакових) частот, які утворюються при наявності у системі комплексно-спряжених нулів та полюсів, і виключення першої з кожної пари.

8. Виключення з вектору коефіцієнтів нахилів k_n елементів, що відповідають розташуванню виключених кратних частот спряження.

9. Визначення меж діапазону частот ω_0 та ω_k при побудові АЛАЧХ шляхом округлення десяткових логарифмів від першої частоти спряження до найближчого цілого числа з нестачею, а останньої частоти спряження – до найближчого цілого з надлишком.

10. Формування вектору абсцис табличної АЛАЧХ шляхом доповнення вектору Ω_s , отриманого після виконання пункту 7, зліва початковою частотою ω_0 , а справа – кінцевою частотою ω_k :

$$\Omega_t=[\omega_0, \Omega_s, \omega_k]. \quad (5.27)$$

11. Формування вектору нахилів табличної АЛАЧХ за формулою

$$k_n=[k_{n0}, k_{n1}, ..., k_{n,end}, k_{n,end}], \quad (5.28)$$

де *end* – порядковий номер останніх елементів табличної функції.

12. Визначаємо, який коефіцієнт підсилення k_f система мала би при відсутності нейтральних полюсів та нулів (фіктивне підсилення):

$$k_f = K \frac{\prod_{j=1}^{m1} \omega_{zj}}{\prod_{i=1}^{n1} \omega_{pi}}. \quad (5.29)$$

13. Визначення фіктивної частоти зрізу при наявності нейтральних нулів або полюсів, тобто частоти фіктивного перетину початкової ділянки АЛАЧХ з віссю частот:

$$\omega_{zf}=(k_f)^{-1/k_{n0}}. \quad (5.30)$$

14. Розрахунок значення АЛАЧХ L_0 на початковій ділянці для статичної системи ($k_{n0}=0$), для якої значення фіктивного коефіцієнту

підсилення збігається з реальним коефіцієнтом підсилення в усталеному режимі

$$k = k_f, \quad L_0 = 20 \lg k. \quad (5.31)$$

15. Розрахунок початкової логарифмічної амплітуди АЛАЧХ при наявності нейтральних нулів або полюсів

$$L_0 = -k_{n0} \lg \frac{\omega_{zf}}{\omega_0}. \quad (5.32)$$

16. Розрахунок ординат АЛАЧХ в інших вузлах табличної функції:

$$L_i = L_{i-1} + k_{n,i-1} (\lg \omega_i - \lg \omega_{i-1}) = L_{i-1} + k_{n,i-1} \lg \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}}, \quad i=1, 2, \dots, \text{end}. \quad (5.33)$$

17. Побудова АЛАЧХ за отриманою таблицею абсцис (логарифмів частот) та ординат (логарифмів амплітуд в децибелах) досліджуваної характеристики).

Наведемо m -функцію, розроблену за описаним вище алгоритмом.

```
function [wBL, La, wc] = bode_as21 (sys, w0, wk)

[Z, P, K] = zpndata (sys, 'v'); % Визначення нулів та полюсів
wp = abs (P); % Амплітуди (частоти) полюсів
kp = length (P); n = kp; % Кількість полюсів
wz = abs(Z); % Амплітуди (частоти) нулів
kz = length(Z); m = kz; % Кількість нулів

% Вилучення із масиву частот нульових (нейтральних) полюсів та нулів:
ip0 = find (wp == 0); % Порядкові номери нейтральних нулів та полюсів
iz0 = find (wz == 0); % Порядкові номери нейтральних нулів та полюсів
wp (ip0) = []; wz (iz0) = [];
kp0 = length (ip0); kz0 = length (iz0); n1 = n - kp0; m1 = m - kz0;
kn0 = (kz0 - kp0) * 20; % Кількість нейтральних нулів та полюсів

w = [wz', wp']; % Об'єднання частот спряження в один вектор-рядок
dkn = [ones(1, kz-kz0), -ones(1, kp-kp0)]*20; % Визначення зміни нахилів ЛАЧХ
% кожній частоті

[ws, is] = sort (w); % Сорткування частот спряження за зростанням
dkns = dkn (is); % Перестановка змін нахилів відповідно до перестановки
% частот
kns = kn0 + cumsum (dkns); % Накопичення нахилів ЛАЧХ зі врахуванням
% нахилу початкової ділянки
% Об'єднання кратних частот:
```

```

ik = find (diff (ws) ==0);
ws (ik) = [];
kns (ik) = [];

kf =K* prod (wz) / prod (wp);      % Фіктивний коефіцієнт підсилення
wf = kf ^ (-20/kn0);              % Фіктивна частота зрізу

% Визначення діапазона частот за замовчанням
if nargin ==1 % Якщо діапазон частот не задано користувачем при зверненні
    % до функції
    wsl = log10(ws);                % Логарифми частот спряження
    if kn0==0, wl_min = wsl(1); else wfl = log10(wf); wl_min = min (wfl, wsl(1)); end
    wl0 = floor(wl_min); wlk=ceil(wsl(end)); % Логарифми меж діапазону частот
    w0=10^wl0; wk=10^wlk;          % Діапазон частот
end

if kn0 == 0
    L0 = 20 * log10 (kf);
else
    L0 = - kn0 * log10 (wf / w0);
end

% Формування таблиці для побудови АЛАЧХ:
wt = [w0 ws wk];                  % Приєднання до частот спряження граничних
                                   % частот
wtl = log10 (wt);                  % Логарифми об'єднаного вектору частот
d_wl = diff (wtl);                 % Різниці між логарифмами сусідніх частот
knt = [kn0 kns kns(end)];          % Приєднання до вектору коефіцієнтів нахилу
                                   % початкового та кінцевого елементів

% Розрахунок ординат АЛАЧХ:
kt = length (wt); La = zeros (1, kt); La(1) = L0;
for i = 2 : kt
    La(i) = La(i-1) + knt (i-1) * d_wl (i-1);
end

ic = find (La (1 : kt-1) .* La (2 : kt) < 0);
% Пошук частоти зрізу методом зворотного інтерполювання
wcl = interp1 (fliplr (La(ic : ic+1)), fliplr (wtl (ic : ic+1)), 0);
wc=10^wcl;
[A, fi, wl] = bode (sys,{w0,wk}); % Розрахунок амплітуд, фаз та частот для
                                   % побудови точних частотних характеристик
A = A(:); fi = fi(:);              % Позбавлення від зайвих індексів
L = 20*log10(A);                   % Розрахунок амплітуди в дБ
figure, semilogx (wl, L, wt, La, '--', 'LineWidth', 1.5 ), grid on, hold on % Точна ЛАЧХ
                                   % та АЛАЧХ

semilogx ([w0,wk], [0 0], 'k')    % Вісь частот
for i = 2 : kt-1

```

```

semilogx ([wt(i) wt(i)], [0 La(i)], 'r--', 'LineWidth',1.5) % Проекції точок спряження
% на вісь частот
end
Lmax = max (L); Lmin = min(L);
ylim ([Lmin-10 Lmax+10])
xlabel ('lg (omega)')
ylabel ('20lg |W (j*omega)|')
legend ('ЛАЧХ', 'АЛАЧХ')
end

```

Основним формальним вхідним параметром наведеної функції є лінійний неперервний динамічний об'єкт *sys*, який може бути створений за його математичним описом у просторі стану (*State Space*) або у вигляді ПФ.

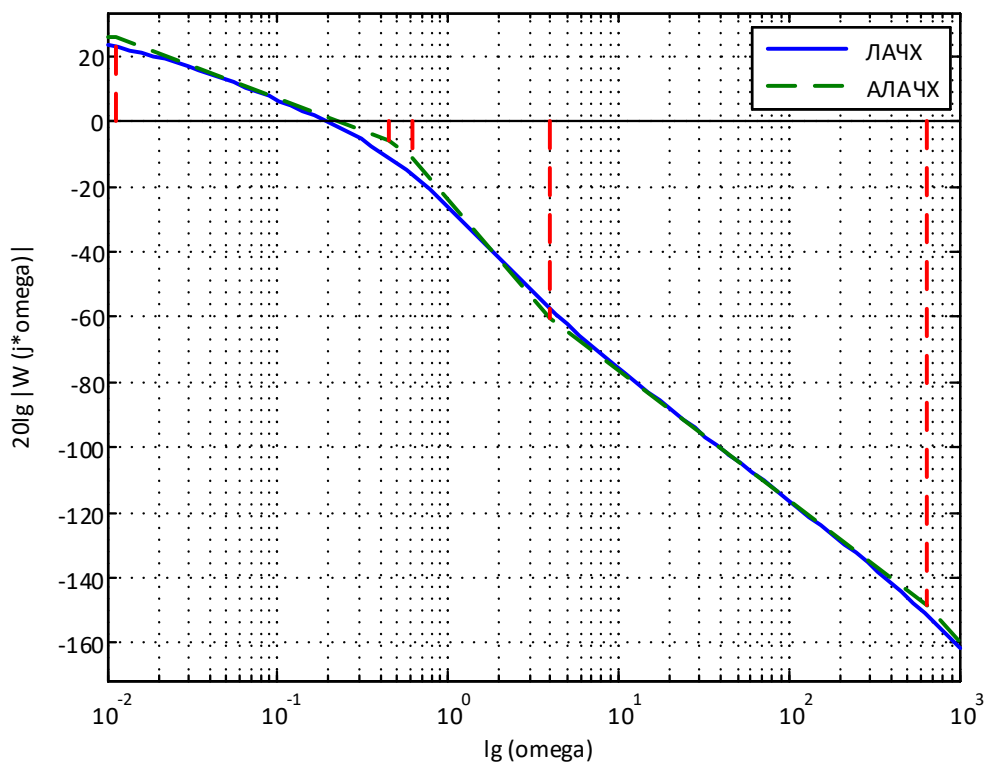
Асимптотична та точна ЛАЧХ системи рис. 2.10, отримані при зверненні до розробленої функції користувача у вигляді

`bode_as21 (sys_r)`

зображені на рис. 5.12а.

Якщо деякі деталі оформлення отриманих графіків або діапазон частот за замовчанням не задовольняють користувача, то він може отримати додатково результати розрахунку АЛАЧХ в числовому вигляді зверненням

`[wt, knt, wlt, Lt, wc] = bode_as21 (sys_r, omega0, omega_k)`



a)

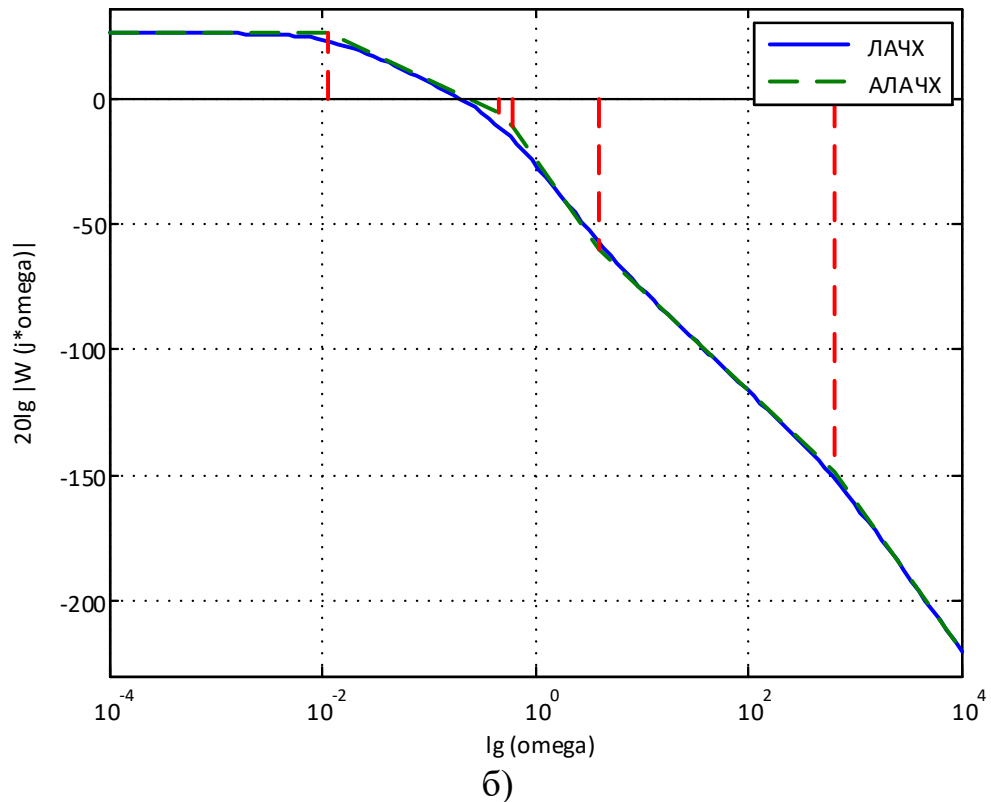


Рисунок 5.12. Точна та асимптотична ЛАЧХ системи рис. 2.10:

а) в діапазоні частот за замовчуванням;

б) в заданому діапазоні частот

де w_t , $k_n t$, $w_l t$, L_t - вектори частот, їх логарифмів, коефіцієнтів нахилу і амплітуд в децибелах відповідно, w_c - частота зрізу АЛАЧХ, та скористатися цими результатами на свій смак. Наприклад, за допомогою звернення

$$[w_t, w_l t, k_n t, L_t, w_c] = \text{bode_as21}(\text{sysr}, 1e-4, 1e4)$$

можна розширити діапазон частот і отримати АЛАЧХ рис. 5.12б.

Крім того, ще отримаємо й числові результати:

```

w_t =
    0.0001    0.01129    0.44651    0.61136         4    648.93    10000
w_l t =
    -4    -1.9473    -0.35016    -0.2137    0.60206    2.8122         4
k_n t =
     0     -20     -40     -60     -40     -60     -60
L_t =
    26.021    26.021    -5.9222    -11.381    -60.326    -148.73    -220
w_c =
    0.2258
  
```

З рис. 5.12 видно, що асимптотична і точна ЛАЧХ дуже близькі одна до одної, але на АЛАЧХ чітко видно частоти спряження, в кожній з яких коефіцієнт нахилу може змінюватися на ± 20 дБ/дек або на ± 40 дБ/дек.

При розрахунку фазових характеристик для співмножників другого порядку досить часто припускаються помилок при визначенні кутів, які перевищують за абсолютною величиною 90° . Щоб уникнути можливих помилок, необхідно мати на увазі наступне.

Для коливальної ланки з передавальною функцією $1/(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)$ фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

При збільшенні частоти від 0 до $1/T_1$ значення $\varphi(\omega)$ змінюється від 0 до -90° .

При частоті $\omega > 1/T_1$ вираз $T_2 \omega / (1 - T_1^2 \omega^2)$ стає від'ємним і

$$\varphi = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

У цьому разі значення кутів слід вибирати не в першому квадранті (від 0 до $+90^\circ$), а в третьому (від -90° до -180°). Наприклад, якщо при розрахунку

$$\frac{T_2 \omega}{T_1^2 \omega^2 - 1} = 0,364,$$

чому відповідає кут у першій чверті $\alpha = 20^\circ$, то $\varphi(\omega)$ слід визначати за формулою

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \alpha = -160^\circ.$$

Для співмножника $T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ фазова характеристика

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

При $0 \leq \omega \leq 1/T_1$ значення кутів треба вибирати в першій чверті в інтервалі від 0 до $+90^\circ$, а при $\omega > 1/T_1$, коли

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{T_1^2 \omega^2 - 1},$$

значення кутів слід вибирати у другій чверті у межах від $+90^\circ$ до $+180^\circ$. Нехай $T_2\omega/(T_1^2\omega^2 - 1) = 0,364$, тоді $\varphi(\omega) = +180^\circ - 20^\circ = +160^\circ$.

Якщо АЛАЧХ і ЛФЧХ побудовані правильно, то граничне значення фазової характеристики $-(n-m)\frac{\pi}{2}$ при $\omega \rightarrow \infty$ повинне узгоджуватись з граничним нахилом амплітудної характеристики $-(n-m) 20$ дБ/дек.

Наприклад, якщо граничний нахил ЛАХ дорівнює -60 дБ/дек, то граничне значення фазової характеристики повинно становити -270° .

5.5 Зв'язок частотних характеристик неперервних лінійних динамічних систем з їх статичними та динамічними властивостями

Частотні характеристики дають змогу не тільки визначити запаси стійкості системи, але й отримати інформацію про її статичні властивості і приблизно оцінити якість перехідних процесів. Зокрема, АЧХ і ФЧХ замкненої системи дозволяють визначити усталену реакцію динамічних систем на синусоїдальний сигнал, по АЧХ замкненої системи можна приблизно розрахувати перерегулювання перехідної функції, по ДЧХ окремих ланок можна приблизно розрахувати перехідний процес для відомого вхідного сигналу методом трапецієподібних характеристик, АЛАЧХ розімкненої системи дає можливість визначити приблизно вигляд перехідної функції та показники її якості.

5.5.1 Зв'язок між АЧХ і ФЧХ та усталеною реакцією систем на синусоїдальні сигнали

Якщо подавати на вхід будь-якої лінійної динамічної системи синусоїдальний вхідний сигнал

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi_u), \quad (5.34)$$

то в усталеному режимі вихідний сигнал також набуде синусоїдальної форми і матиме ту ж саму частоту, що і вхідний сигнал. Але амплітуда та фаза вихідної синусоїди в усталеному режимі

$$y(t) = y_m(\omega) \sin(\omega t + \varphi_y(\omega)), \quad (5.35)$$

відрізнятимуться від відповідних показників вхідної синусоїди і прийматимуть різні значення в залежності від частоти вхідного сигналу.

АЧХ являє собою залежність від частоти відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного, або амплітуди вихідного сигналу при одиничній амплітуді вхідного ($u_m = 1$), тобто

$$A(\omega) = \frac{y_m}{u_m}(\omega) = y_m(\omega)|_{u_m=1}, \quad (5.36)$$

а **ФЧХ** – різницю між фазами цих сигналів, або фазу вихідного сигналу при нульовій фазі вхідного ($\varphi_u = 0$), тобто

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_u = \varphi_y(\omega)|_{\varphi_u=0}. \quad (5.37)$$

Розглянемо ще раз АЧХ та ФЧХ досліджуваної системи з рис. 5.16. Позначимо на АЧХ точку резонансного максимуму $[\omega_p, A(\omega_p)]$, в якій АЧХ має максимальне значення і визначимо по ФЧХ фазу при цій частоті $\varphi(\omega_p)$, як це показано на рис. 5.13.

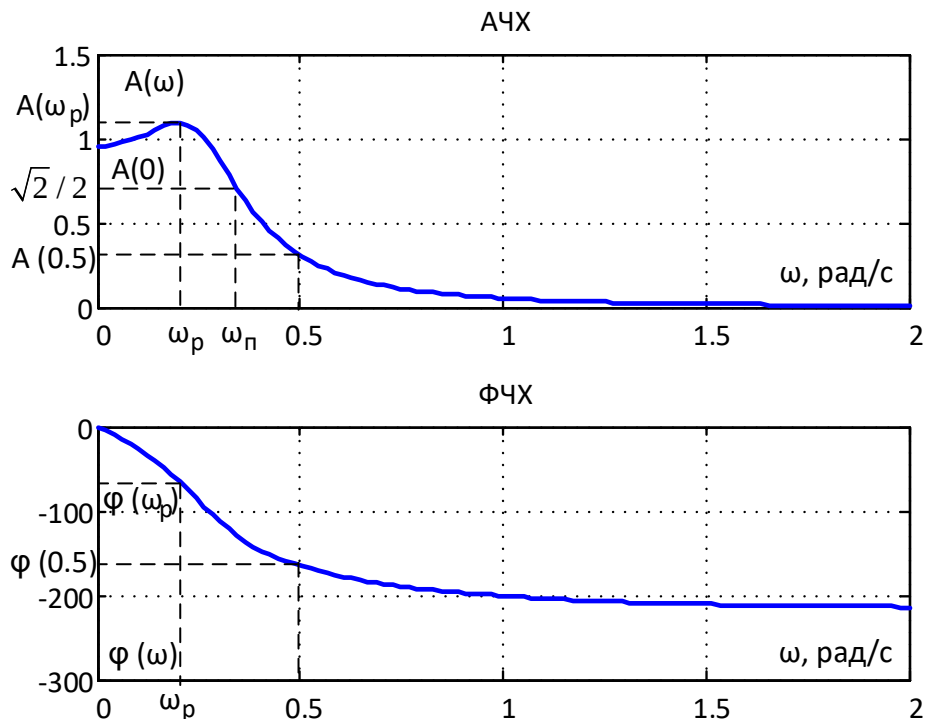


Рис. 5.13. АЧХ та ФЧХ для дослідження зв'язку між ними та усталеною реакцією системи на синусоїдальний вплив

Виберемо довільно ще одну частоту $\omega = 0.5$, на якій амплітуда и фаза значно відрізняються від цих параметрів при $\omega = \omega_p$. З графіків рис. 5.13 отримуємо:

$$\omega_p = 0,2; \quad M_p = A(\omega_p) / A(0) = 1,1 / 0,95 = 1,158; \quad \varphi(\omega_p) = -65^\circ;$$

$$A(0,5) = 0,3; \quad \varphi(0,5) = -166^\circ; \quad A(0) = 0,95.$$

Величина резонансного максимуму M_p впливає на перерегулювання перехідної функції, на коливальність перехідних процесів та на запас стійкості за фазою. Зокрема, перерегулювання можна оцінити шляхом розрахунку його за емпіричною формулою

$$\sigma \approx 1,3 \frac{M_p - 1}{M_p}, \quad (5.38)$$

а запас по фазі – за іншою емпіричною формулою

$$\Delta\varphi \approx \arcsin\left(\frac{1}{M_p}\right). \quad (5.39)$$

Значення резонансного максимуму M_p та частоти, на якій він досягається ω_p , для замкненої системи sysz в середовищі MATLAB можна знайти як інфінітивну норму за допомогою функції norm:

$$[M_p, \omega_p] = \text{norm}(\text{sysz}, \text{Inf})$$

Значення перерегулювання, розраховане за формулою (5.38), для досліджуваної системи складає 17,7%, а запас стійкості по фазі, розрахований за формулою (5.39), – 1,04 рад, або 60°, що не набагато відрізняється від значення, знайденого за діаграмами Боде та Найквіста (16,5% та 54,5°, див. рис. 5.6, 5.8).

Тепер подаємо на вхід моделі системи рис. 2.10 по черзі сигнали:

$$g_1(t) = \sin(0t + \pi / 2) = 1 = \text{const}, \quad (5.40)$$

$$g_2(t) = \sin(\omega_p t) = \sin(0,2t), \quad (5.41)$$

$$g_3(t) = \sin(0,5t). \quad (5.42)$$

В результаті симуляції отримаємо графіки рис. 5.14-5.16.

З рис. 5.13 бачимо, що усталене значення перехідної функції збігається з початковим значенням АЧХ, а перерегулювання складає 16,5%, тобто абсолютна похибка значення, розрахованого за формулою (5.32), складає 1,2%, що є цілком задовільно для приблизної оцінки цього параметру.

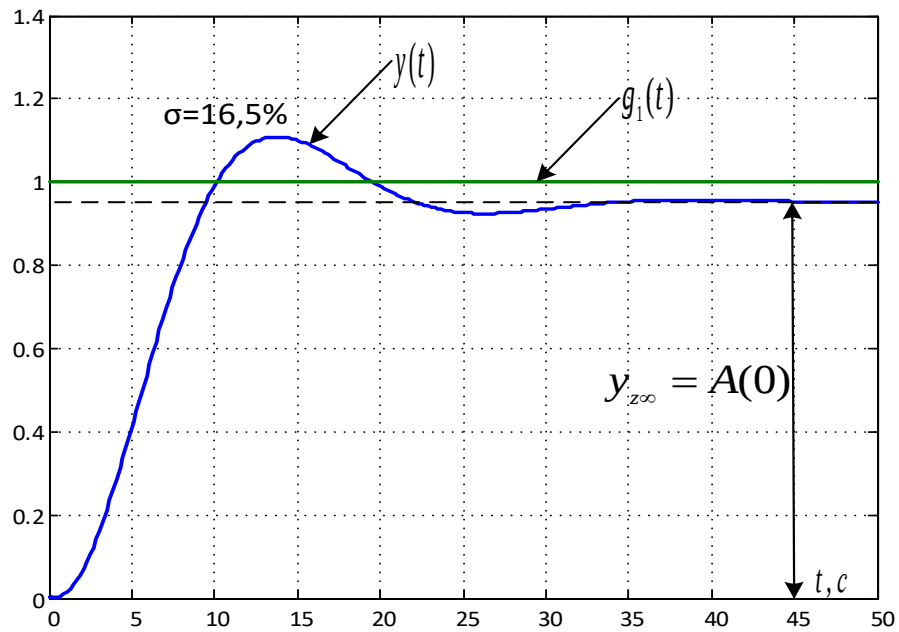


Рис. 5.14. Реакція досліджуваної системи на сигнал (5.40)

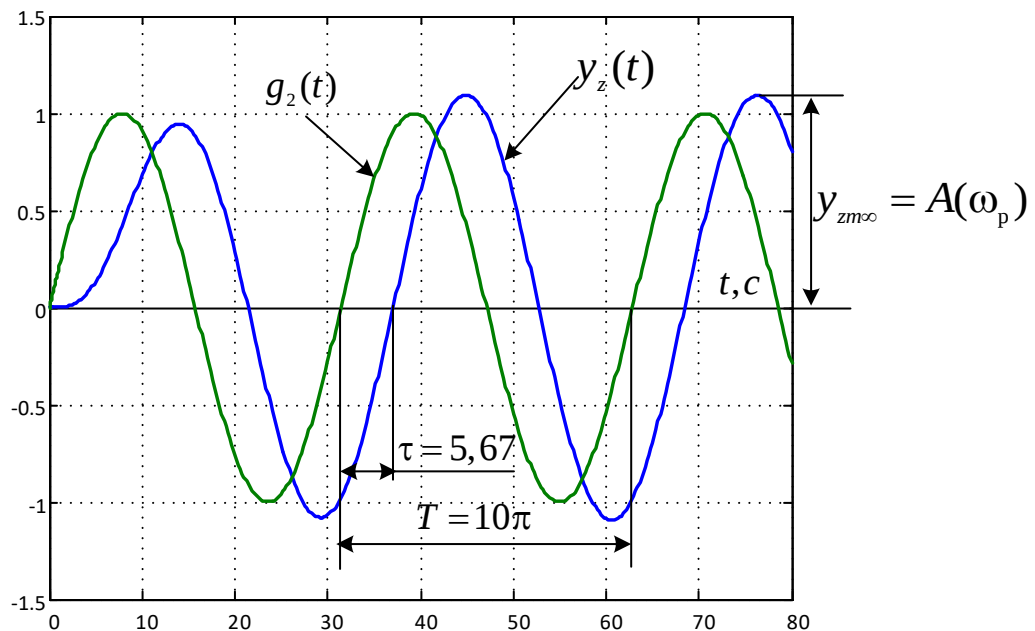


Рис. 5.15. Реакція досліджуваної системи на сигнал (5.41)

З порівняння графіків рис. 5.15 і 5.16 видно, що при однаковій амплітуді і нульовому зсуву фази вхідного сигналу, амплітуда і фаза вихідного сигналу в усталеному режимі змінюється в широкому діапазоні в залежності від частоти вхідного сигналу у відповідності з АЧХ та ФЧХ замкненої системи. Період усталених коливань визначається виразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (5.43)$$

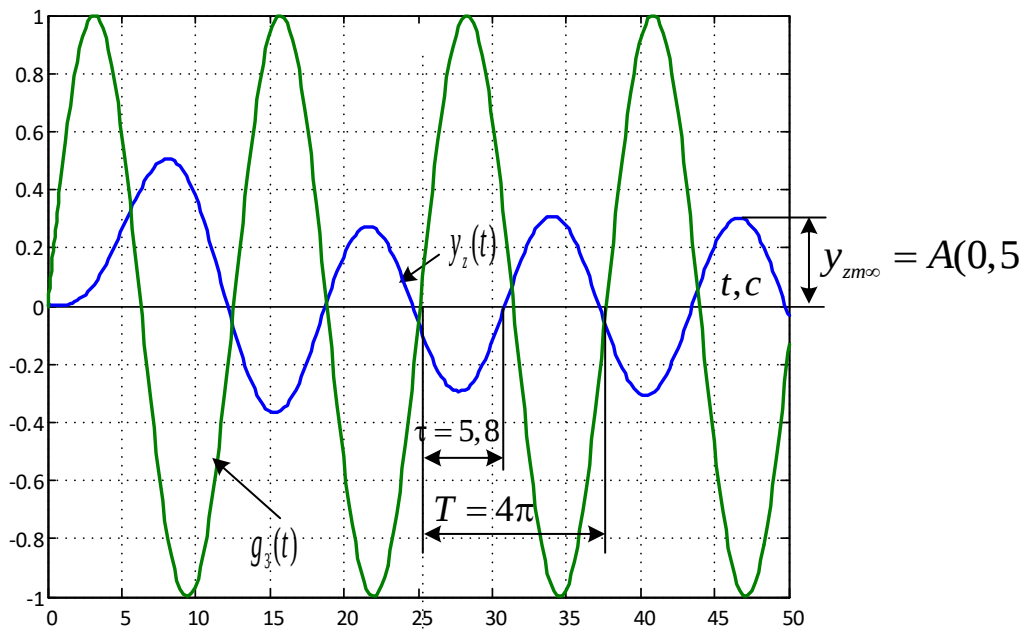


Рис. 5.16. Реакція досліджуваної системи на сигнал (5.42)

Знайдене з графіків запізнення вихідного сигналу від вхідного в усталеному режимі дає змогу розрахувати фазовий зсув вихідної синусоїди відносно вхідної з пропорції

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\tau\omega}{2\pi} = \frac{\varphi(\omega)}{360} . \quad (5.44)$$

Розраховані у такий спосіб фази збігаються з відповідними значеннями ФЧХ.

Задачею будь-якої системи автоматичного керування є відпрацювання з мінімальним спотворенням вхідного низькочастотного сигналу та максимально можливе послаблення високочастотних сигналів, які є перешкодами. З такої позиції *замкнена САК повинна мати властивості фільтра низьких частот. Межу між високими і низькими частотами*

*називають частотою пропускання ω_n , а діапазон частот $[0, \omega_n]$ – смугою пропускання. Частота та смуга пропускання – це досить умовні поняття. Зазвичай **смугою пропускання називають діапазон частот, у якому амплітуда вихідного сигналу є не меншою, ніж $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$ від амплітуди вхідного сигналу**, як це показано на АЧХ рис. 5.12, тобто*

$$A(\omega_n) = \sqrt{2} / 2. \quad (5.45)$$

В *MATLAB* цю частоту *wp* можна знайти за допомогою функції *bandwidth*:

wp = bandwidth (sysz)

5.5.2 Зв'язок між виглядом АЛАЧХ та якістю перехідних процесів

За виглядом АЛАЧХ розімкненої системи можна зробити висновки не тільки про стійкість замкненої системи, але й про якість перехідних процесів.

Для аналізу ЛАЧХ умовно розбивають на 3 частини: середньочастотну (СЧ) (приблизно 2 октави в околі частоти зрізу), низькочастотну (НЧ) (ліворуч від середньочастотної) та високочастотну (ВЧ) (праворуч від середньочастотної). ВЧ-частина визначає початок перехідного процесу, НЧ-частина впливає на кінець перехідного процесу та усталений режим, а СЧ-частина визначає такі параметри як перерегулювання, час наростання перехідної функції до максимального значення тощо.

Щоб якість перехідних процесів у замкненій системі була більш-менш задовільною, її АЛАЧХ повинна мати в області частоти зрізу протяжну ділянку з нахилом -20 дБ/дек. Ділянки з більшим нахилом повинні бути віднесені від частоти зрізу на одну октаву.

Чим більше у ВЧ-частині АЛАЧХ ділянок з нахилом більшим, ніж -20 дБ/дек, тим більша затримка перехідної функції на її початку та її коливальність.

Ділянки з нахилом більше, ніж -20 дБ/дек, у НЧ-діапазоні приводять до значного перерегулювання, яке збільшується при наближенні цих ділянок до частоти зрізу.

Наявність ділянок з нахилом 0 дБ/дек в НЧ-діапазоні свідчить про затягування перехідної функції при наближенні її до усталеного значення.

Ділянки з додатним нахилом в ЛАЧХ взагалі є небажаними.

Як уже відзначалося вище, якщо АЛАЧХ починається з ділянки з нахилом 0 дБ/дек, то система є статичною, тобто такою, що відпрацьовує стрибкоподібний вхідний сигнал з усталеною похибкою, а при лінійному вхідному сигналі похибка з часом лінійно наростає. Якщо АЛАЧХ починається з ділянки з нахилом -20 дБ/дек, то система є астатичною 1-го порядку, яка відпрацьовує стрибкоподібний вхідний сигнал без похибки, а лінійний – з усталеною похибкою. Якщо АЛАЧХ починається з ділянки з нахилом -40 дБ/дек, то система є астатичною 2-го порядку; вона відпрацьовує без похибки як стрибкоподібний, так і лінійний вхідні сигнали.

Найбільший вплив на динамічні властивості системи мають ділянки ЛАЧХ, наближені до частоти зрізу. Чим далі знаходиться ділянка АЛАЧХ від частоти зрізу у бік як нижніх, так і високих частот, тим більше підстав для нехтування впливом цих ділянок на якість перехідних процесів.

При розгляданні вигляду ЛАЧХ ділянки з нахилом 0 дБ/дек будемо позначати цифрою 1, з нахилом -20 дБ/дек – цифрою 1, з нахилом -40 дБ/дек – цифрою 2, з нахилом -60 дБ/дек – цифрою 3 і т.д.

Розглянемо систему, АЛАЧХ якої має вигляд 0-1-2-1-2-3 (рис. 5.17).

З цієї АЛАЧХ можна приблизно визначити такі параметри перехідної функції:

- *час запізнення наростання перехідної функції на початковій ділянці*

$$t_3 \approx \frac{1}{\omega_{1B}} + \frac{1}{\omega_{2B}} ; \quad (5.46)$$

- *час першого узгодження перехідної функції з усталеним значенням (rise time)*

$$t_r \approx \frac{1,5 \div 2}{\omega_3} ; \quad (5.41)$$

- **час досягнення перехідною функцією максимального значення (peak time)**

$$t_m \approx \frac{3 \div \pi}{\omega_3}; \quad (5.42)$$

- **перерегулювання перехідної функції (overshot)** можна визначити через запас стійкості по фазі за емпіричною формулою Еклсбі

$$\sigma \approx \frac{\arctg \left(1,45 \frac{1}{\sin \Delta \varphi} - 0,45 \right)}{45^\circ} - 1 \quad (5.47)$$

або за більш простою формулою

$$\sigma \approx 1 - \sin(\Delta \varphi); \quad (5.48)$$

- **час затухання перерегулювання**, викликаного наявністю в низькочастотній частині АЛАЧХ ділянки з нахилом -40 дБ/дек, яке в більшості випадків має аперіодичний характер

$$t_{3\sigma} \approx \frac{2}{\omega_{1H}}; \quad (5.49)$$

- **час усталення перехідного процесу (steady state time)**

$$t_s \approx \frac{3}{\omega_3} + \frac{2}{\omega_{1H}}; \quad (5.50)$$

- **похибку регулювання**

$$\Delta y = \frac{1}{1+k_p}; \quad k_p = 10^{\frac{L(0)}{20}}. \quad (5.51)$$

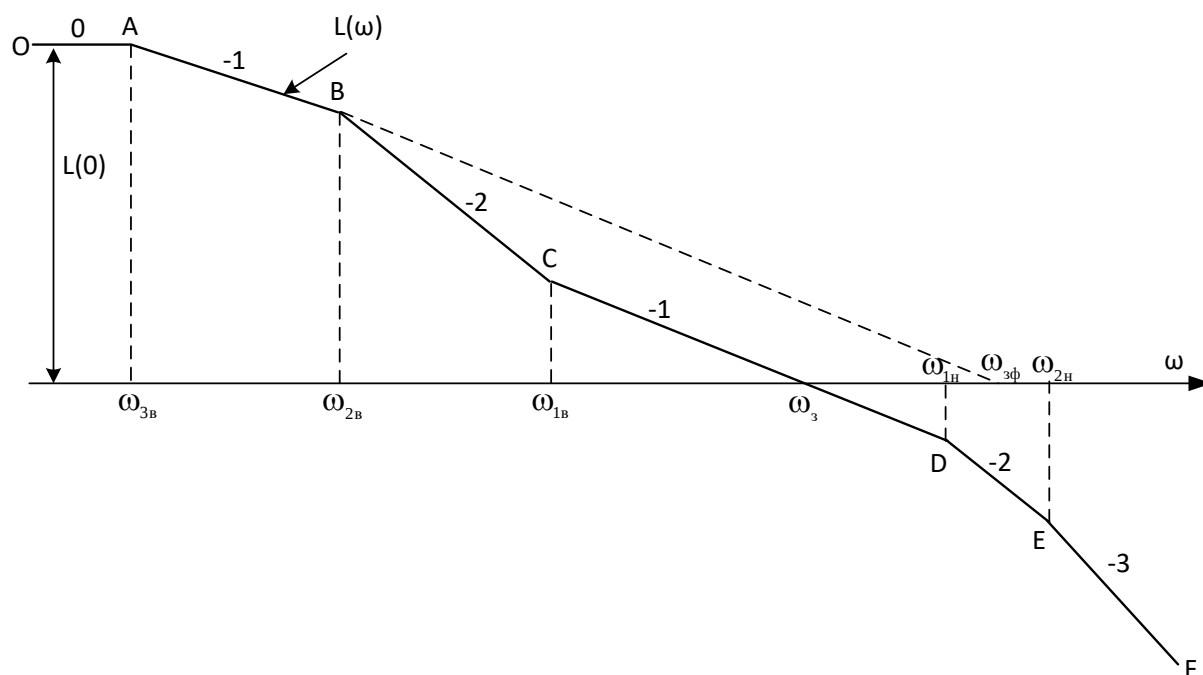


Рис. 5.17. АЛАЧХ розімкненої системи 0-1-2-1-2-3

Звичайно наведені формули не враховують наявності резонансних сплесків ЛАЧХ у точках спряження АЛАЧХ і можуть дещо змінюватися в залежності від наявності та порядку чергування ділянок АЛАЧХ з різними коефіцієнтами нахилу.

Деякі з показників якості перехідної функції досліджуваної системи рис. 2.7, розраховані за наведеними вище формулами, мають такі значення:

$$t_r \approx \frac{1,5 \div 2}{0,226} \approx 8 \div 9; \quad t_r \approx \frac{3 \div \pi}{0,226} \approx 13 \div 14; \quad \sigma \approx 1 - \sin(54,5^\circ) \approx 0,18 = 18\%.$$

6 АНАЛІЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

6.1 Загальна характеристика перехідних процесів

Перехідні процеси (Transients) – це зміна сигналів у часі. Перехідні процеси (ПП) виникають при зміні вхідних сигналів (керувань або збурень) як *реакція (Response)* на них та при виведенні системи зі стану рівноваги (реакція на ненульові початкові умови).

В усталеному режимі (Steady State) реакції сигналів набувають сталого характеру: при реакції на стрибкоподібний сигнал вони вже не змінюються у часі (тобто їх похідні стають нульовими), при реакції на синусоїдальний сигнал стає незмінною амплітуда і фаза коливань, при реакції на лінійний сигнал не змінюється похідна від вихідного сигналу, тобто швидкість його наростання.

За характером перехідний процес може бути *монотонним, аперіодичним, аперіодичним з перерегулюванням та коливальним*. У стійких системах перехідні процеси є збіжними, вони збігаються до деякого скінченного усталеного значення. У нестійких системах перехідні процеси є розбіжними, вони прямують до нескінченності. Для систем, що знаходяться на межі стійкості, властивими є перехідні процеси у вигляді незатухаючих гармонічних коливань з постійною амплітудою.

Монотонними називають перехідні процеси, у яких відхилення керованої величини $y(t)$ від усталеного значення y_{∞} плавно зменшується без зміни знаку похідної dy/dt (криві 1 на рис. 6.1).

Аперіодичними називають перехідні процеси, у яких відсутні гармонічні складові. Це частковий випадком монотонного перехідного процесу.

Аперіодичними процесами з перерегулюванням називають перехідні процеси, у яких керована величина набуває усталеного значення після

одного, двох або більше коливань з різними періодами (негармонічні коливання) за наявності перерегулювання (крива 3 на рис. 6.1а).

Коливальними називають перехідні процеси, у яких в існують гармонічні коливання зі сталим періодом (криві 2 на рис. 6.1). Коливальні перехідні процеси властиві САК, у передавальних функціях яких є хоча б одна пара комплексно-спряжених полюсів.

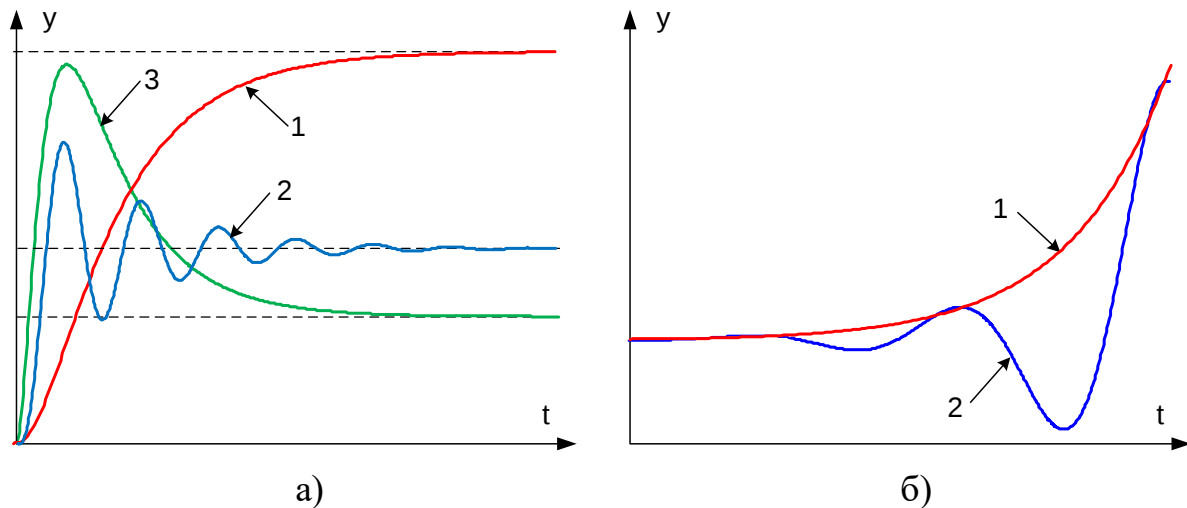


Рис. 6.1. Приклади збіжних (а) та розбіжних (б) перехідних процесів: 1 – монотонний; 2 – коливальний; 3 – аперіодичний з перерегулюванням

6.2 Характеристика типових вхідних сигналів та реакцій на них

Вигляд перехідного процесу залежить від характеру дії, що його викликає. До основних типових вхідних сигналів належать:

- **одинична функція Хевісайда**, (стрибоподібний сигнал одиничної амплітуди)

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0; \end{cases} \quad (6.1)$$

- **δ -функція Дірака δ** (імпульс, амплітуда якого прямує до нескінченності, тривалість прямує до нуля, а площа дорівнює одиниці)

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \text{ \& } t > 0, \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad (6.2)$$

- **лінійний сигнал**, що змінюється з одиничною швидкістю

$$l(t) = \int_0^t 1(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t & \text{при } t \geq 0; \end{cases} \quad (6.3)$$

- **синусоїдальний сигнал** з одиничною амплітудою

$$s(t) = \sin(\omega t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (6.4)$$

де ω – кругова частота синусоїдального сигналу, T – період синусоїди.

Реакцію САК на синусоїдальний сигнал та зв'язок її усталених параметрів з АЧХ та ФЧХ замкненої системи розглянуто в пункті 5.5.1.

Вигляд перших 3-х типових вхідних сигналів (6.1)-(6.3), реакції на які ми будемо досліджувати в даному розділі, показано на рис. 6.1.

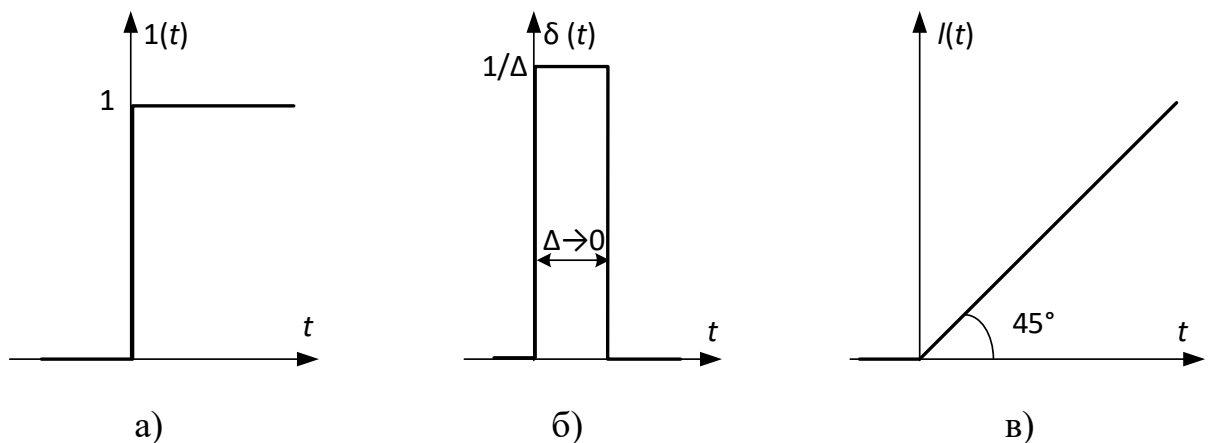


Рис. 6.1. Типові вхідні сигнали: а) одинична функція Хевісайда; б) δ -функція Дірака; в) лінійний сигнал з одиничним коефіцієнтом

Реакцію системи на одиничну функцію Хевісайда називають **перехідною функцією (характеристикою) $h(t)$ (Step Response)**, а реакцію на δ -функцію Дірака – **ваговою функцією (характеристикою) $w(t)$ (Impulse Response)**. Реакцію на лінійну функцію (6.3) позначимо $s(t)$.

Із взаємозв'язку між розглянутими типовими вхідними сигналами (6.1)-(6.3) випливає зв'язок між реакціями САК на ці сигнали:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (6.5)$$

$$s(t) = \int_0^t h(t) dt. \quad (6.6)$$

6.3 Побудова реакцій САК на типові вхідні сигнали

З аналізу формул, наведених у попередньому підрозділі, випливає таке:

- щоб отримати перехідну функцію системи за керуванням або за збуренням в середовищі *Simulink*, достатньо на відповідний вхід *Simulink*-моделі замкненої САК встановити блок *Step* з параметрами *Step Time* = 0, *Initial Value* = 0, *Final Value* = 1, виконати симуляцію та візуалізувати бажаний вихідний сигнал;
- для визначення реакції на лінійний сигнал замість блоків *Step* треба використати блоки *Ramp* з параметрами *Slope* = 1, *Step Time* = 0, *Initial Output* = 0.

Складніше отримати вагові функції, тому що δ -функцію Дірака можна сформувати тільки з великою похибкою. Але з врахуванням рівняння (6.5) можна із останньої вихідної ланки виділити інтегратор і візуалізувати його вхідний сигнал, який дорівнює похідній від вихідного сигналу.

Ще простіше скористатися функціями *step*, *impulse* та *lsim* папки *Control Toolbox*:

```
tk = 60;
t = linspace (0, tk);
y = step (sys, t); k = dcgain (sys)
hg = y(:,1); hf = y(:,2); eh = 1-hg;
y = impulse (sys, t);
wg = y(:,1); wf = y(:,2);
tl = t'; u = tl;
sg = lsim (sys (1,1), u, tl); el = u-sg;
figure (1)
plot (t, [hg wg], 'Linewidth', 2), hold on
plot ([0, tk], [1 1]*k(1), '--'),
plot ([0, tk], [1 1]*0.95*k(1), '--'),
plot ([0, tk], [1 1]*1.05*k(1), '--'), grid
figure (2)
plot (t, [hf,wf], 'Linewidth', 2), hold on
plot ([0, tk], [1 1]*k(2), '--'), grid
figure (3)
plot (tl, [u, sg, el], 'LineWidth', 2), grid
```

В результаті виконання цієї програми для системи рис. 2.7 отримаємо графіки рис. 6.2-6.4.

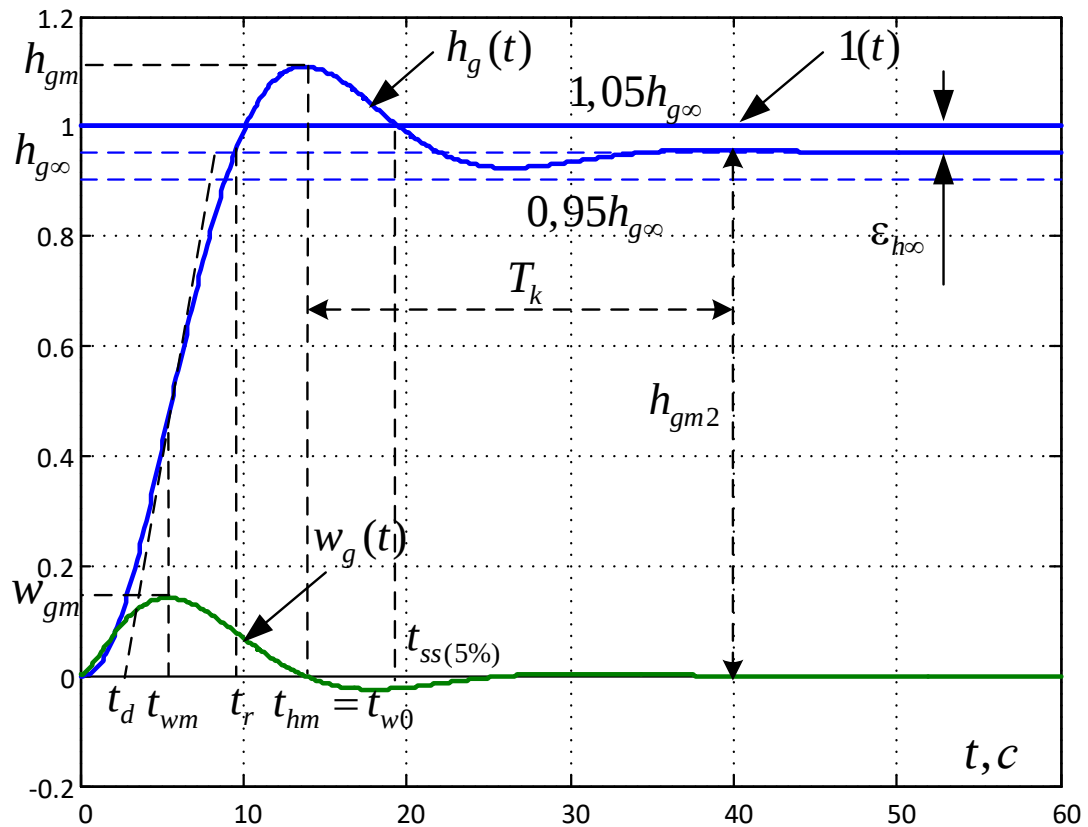


Рис. 6.2. Перехідна та вагова функції системи рис. 2.7 за керуванням

На графіках рис. 6.2-6.3 відображено зв'язок між параметрами перехідної та вагової функції, а саме:

- час досягнення ваговою функцією екстремуму t_{wm} відповідає часу перегину перехідної функції;
- час досягнення перехідною функцією екстремуму відповідає часу перетину ваговою функцією осі абсцис t_{w0} .

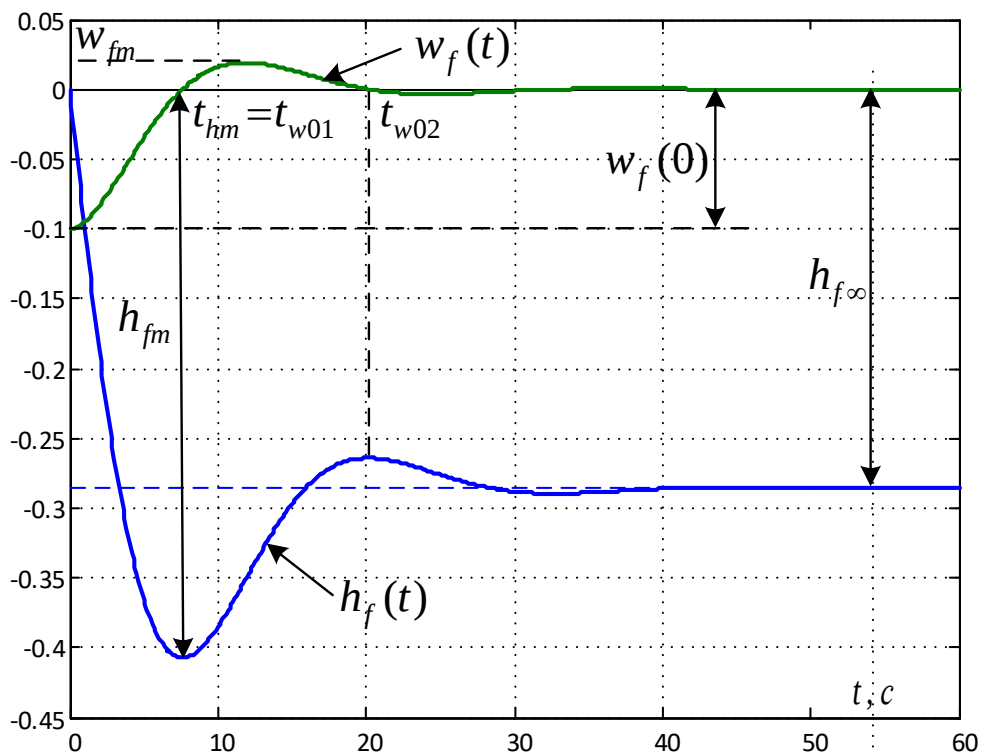


Рис. 6.3. Перехідна та вагова функції системи рис. 2.7 за збуренням

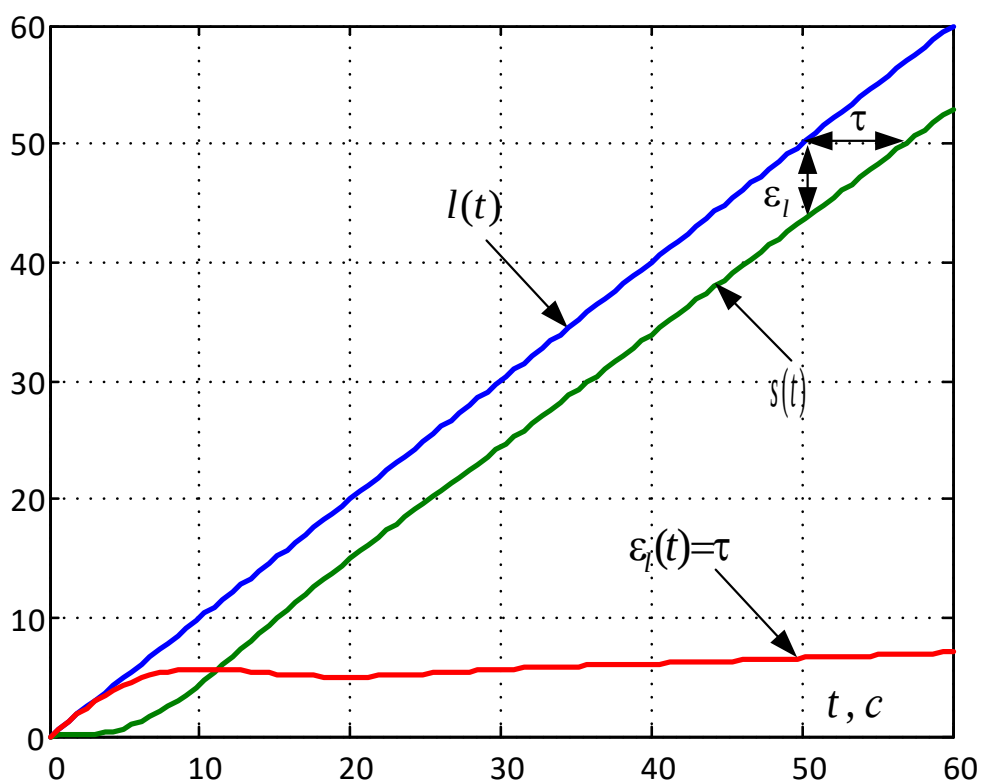


Рис. 6.4. Лінійне керування з одиничною швидкістю (6.3), реакція на нього та похибка керування (швидкісна похибка)

Час запізнення перехідної функції Delay Time t_d визначається як час перетину дотичної до перехідної функції у точці її першого перегину з віссю абсцис.

6.4 Характеристика та визначення показників якості перехідних процесів

Для будь-якої перехідної функції можна визначити такі показники якості:

- час запізнення t_d ;
- час перехідного процесу з точністю перехідної функції $\pm 5\%$ ($t_{ss5\%}$) або $\pm 2\%$ ($t_{ss2\%}$).

З перехідної функції за керуванням визначають **усталену похибку в абсолютних одиницях та статизм за керуванням у процентах**:

$$\varepsilon_{g\infty} = 1 - y_{zg\infty}, \quad \Delta_{g\infty} = \frac{\varepsilon_{g\infty}}{g_{\infty}} \cdot 100\% \quad (6.7)$$

Якщо $\varepsilon_{g\infty} = 0$, то систему називають **астатичною за керуванням**, інакше – **статичною за керуванням**.

Перехідна функція за збуренням $h_f(t)$ є реакцією системи на одиничний стрибок збурювальної дії. Якщо усталене значення перехідної функції $h_{f\infty} = 0$, то система є **астатичною за збуренням**, інакше – **статичною за збуренням**.

Статизм за збуренням розраховують як відношення усталеного відхилення виходу, спричиненого дією постійного збурення $f = \text{const}$, до величини збурення:

$$\Delta_{f\infty} = \frac{\Delta y_{zf\infty}}{f} = \frac{|h_{f\infty}|}{f}. \quad (6.8)$$

Для кращого розуміння цього визначення на рис. 6.5 показано перехідний процес, отриманий при таких вхідних сигналах

$$g(t)=1(t), \quad f(t)=1(t-\tau), \quad \tau > t_{ss2\%}, \quad (6.9)$$

тобто збурення змінювалося стрибком після закінчення перехідного процесу за керуванням.

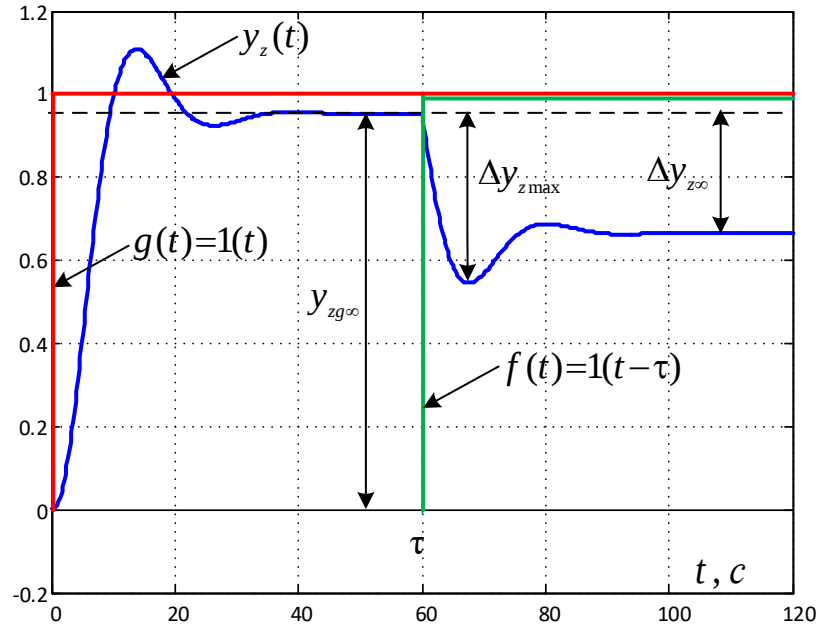


Рис. 6.5. Перехідні процеси в системі рис. 2.7 під дією входніх сигналів (6.9)

Слід прийняти до уваги таке:

- якщо в одноконтурній системі інтегратор розташований до точки прикладання збурення, то система буде астатичною і за керуванням, і за збуренням;
- якщо інтегратор в такій системі розташований після точки прикладання збурення, то система буде астатичною за керуванням, але статичною за збуренням;

Для пояснення **принципу суперпозиції** на рис. 6.5 зображено перехідний процес при одночасній дії на досліджувану систему сигналів керування та збурення у вигляді одиничних функцій Хевісайда: $g(t)=f(t)=1(t)$.

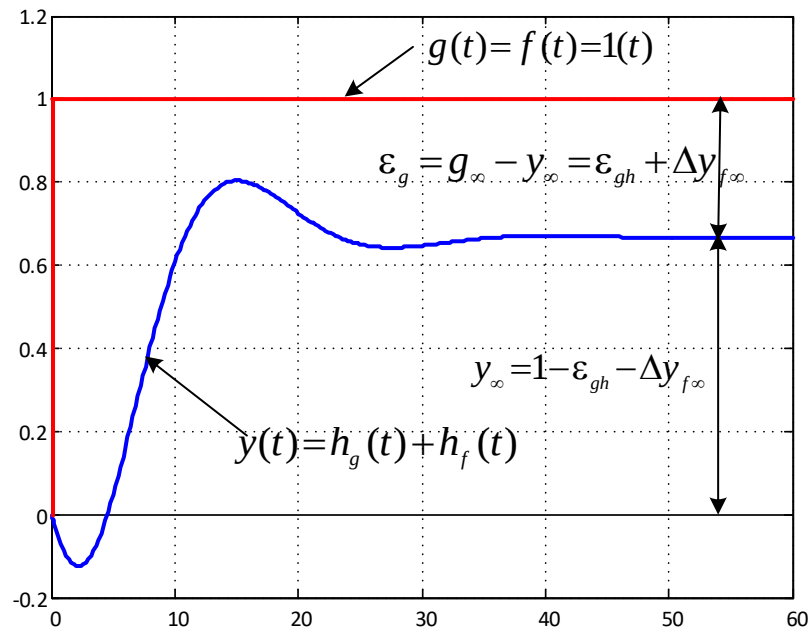


Рис. 6.5. Перехідний процес при одночасній зміні сигналів керування та збурення

Для коливальної перехідної функції за керуванням визначають ще такі показники якості:

- період коливань T_k ;
- час першого узгодження перехідної функції з усталеним значенням t_r ;
- величини першого та другого максимумів h_{gm} , h_{gm2} ;
- перерегулювання

$$\sigma = \frac{h_{gm} - h_{g\infty}}{h_{g\infty}} \cdot 100\%; \quad (6.10)$$

- кількість коливань за час перехідного процесу n_k ;
- ступінь затухання

$$\psi = \left(1 - \frac{h_{gm2} - h_{g\infty}}{h_{gm} - h_{g\infty}} \right) \cdot 100\%. \quad (6.11)$$

Для вагових функцій, як правило, визначають тільки початкове $w(0)$ та максимальне значення w_m і час його досягнення t_{wm} .

При розгляді реакції на лінійний сигнал керування (6.3) зазвичай основну увагу звертають на похибку керування

$$\varepsilon_l(t) = l(t) - s(t) = \int_0^t \varepsilon_h(t) dt, \quad (6.12)$$

Якщо лінійний сигнал $l(t) = vt$ змінюється з одиничною швидкістю $v = \text{const} = 1$, то величина похибки $\varepsilon_l(t)$ чисельно дорівнює часу запізнення τ реакції системи (див. рис. 6.4). У цьому разі усталену похибку $\varepsilon_{l\infty}(t)$ називають **швидкісною похибкою системи**, а відношення швидкості до швидкісної похибки – **добротністю за швидкістю**:

$$K_v = v / \varepsilon_{l\infty} = 1 / \tau_{\infty}. \quad (6.13)$$

Слід зазначити, що похибка керування $\varepsilon_{l\infty}(t)$ змінюється пропорційно швидкості зміни лінійного сигналу, а запізнення τ_{∞} залишається незмінним для будь-якої швидкості за лінійного керування.

Якщо система є статичною за керуванням ($\varepsilon_{h\infty} \neq 0$), то, як випливає із (6.12), швидкісна похибка її неперервно зростає ($\varepsilon_{l\infty} \rightarrow \infty$), а $K_v \rightarrow 0$.

Визначити перелічені вище показники якості можна безпосередньо з отриманих графіків. Але при наявності числових даних розрахункові більшості з них можна організувати програмно.

Наприклад, визначити максимуми вагових та перехідних функцій за керуванням та за збуренням і часи досягнення цих максимумів можна такими операторами:

$$\begin{aligned} [wgm, iwgm] &= \max(wg), & twgm &= t(iwgm) \\ [wfm, iwfm] &= \max(wf), & twfm &= t(iwfm) \\ [hgm, ihgm] &= \max(hg), & thgm &= t(ihgm) \\ [hfm, ihfm] &= \max(hf), & thfm &= t(ihfm) \end{aligned}$$

Після цього можна знайти точку перегину перехідної функції за керуванням hgr та час запізнення цієї функції td :

$$\begin{aligned} hgr &= hg(iwgm) \\ td &= (wgm * twgm - hgr) / wgm \end{aligned}$$

Визначити початкові значення вагових функцій $wg0$, $wf0$ та усталені значення перехідних функцій можна так:

$$\begin{aligned} wg0 &= wg(1), & wf0 &= wf(1) \\ k &= dcgain(sys); & hgy &= k(1), & hfy &= k(2) \end{aligned}$$

після чого легко розраховується перерегулювання:

$$\text{sig} = (\text{hgm} - \text{hgy}) / \text{hgy}$$

Пошук часу першого узгодження перехідної функції з усталеним значенням виконується у такий спосіб:

$$\text{ii} = \text{find}(\text{hg} \geq \text{hgy}); \quad \text{ir} = \text{ii}(1); \quad \text{tr} = \text{t}(\text{ir})$$

Виконання наведених вище операторів для досліджуваної системи дає такий результат.

```
wgm =  
    0.1415  
iwgm =  
    10  
twgm =  
    5.4545  
wfm =  
    0.0192  
iwfm =  
    21  
twfm =  
   12.1212  
hgm =  
    1.1087  
ihgm =  
    24  
thgm =  
   13.9394  
hfm =  
    0  
ihfm =  
    1  
thfm =  
    0  
hgp =  
    0.4756  
td =  
    2.0927  
hgm =  
    1.1087  
ihgm =  
    24  
thgm =  
   13.9394  
wg0 =  
    0  
wf0 =  
   -0.1000  
k =
```

0.9524 -0.2857
 hgy =
 0.9524
 hfy =
 -0.2857
 sig =
 0.1641
 tr =
 9.6970

Аналізуючи отримані графіки та числові результати, можна досить ретельно охарактеризувати якість перехідних процесів у досліджуваній системі рис. .

Отже, перехідні процеси рис. 6.2-6.5 є коливальними з періодом коливань $T_k = 26,3$ с, перерегулюванням перехідної функції (6.10)

$$\sigma = \frac{h_{gm} - h_{g\infty}}{h_{g\infty}} \cdot 100\% = \frac{1,11 - 0,95}{0,95} \cdot 100\% = 16,4\%$$

і ступенем затухання (6.11)

$$\psi = \left(1 - \frac{h_{gm2} - h_{g\infty}}{h_{gm} - h_{g\infty}} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{0,96 - 0,95}{1,11 - 0,95} \right) \cdot 100\% = 93,8\%.$$

Максимальне значення похідної $(dh_g / dt)_{\max} = w_{gm} = 0,14 \text{ с}^{-1}$.

Система є статичною за керуванням і за збуренням.

Статизм за керуванням згідно з формулою (6.7) складає

$$\Delta_{g\infty} = \frac{\varepsilon_{g\infty}}{g_{\infty}} \cdot 100\% = \frac{0,05}{1} \cdot 100\% = 5\%,$$

а статизм за збуренням (6.8) дорівнює

$$\Delta_{f\infty} = \frac{\Delta y_{z\infty}}{f} = \frac{0,29}{1} = 0,29.$$

Оскільки система статична, то її добротність за швидкістю $K_v = 0$ і за лінійного завдання похибка буде неперервно зростати $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Основні часові показники для перехідної функції за керуванням складають: час запізнення $t_d = 2,1$ с; час першого перегину $t_p = 5,45$ с; час

наростання до усталеного значення $t_r = 9,7 \text{ с}$; час досягнення максимуму $t_{gm} = 13,9 \text{ с}$; час перехідного процесу $t_{ss5\%} = 19,5 \text{ с}$.

Перехідна функція за збуренням досягає максимуму за модулем $h_{fm} = 0,41$ в момент часу $t_{fm} = 7,88 \text{ с}$, а максимальне значення похідної $(dh_f / dt)_{\max} = w_{fm} = -0,1 \text{ с}^{-1}$ спостерігається при $t = 0$.

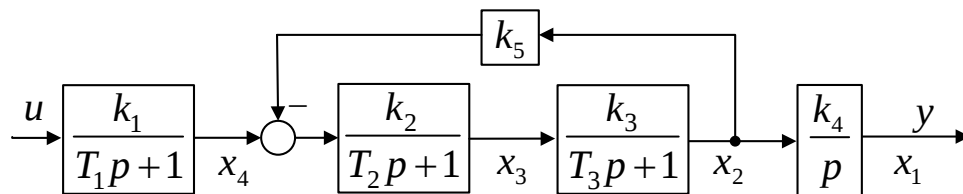
ЧАСТИНА II

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТУ

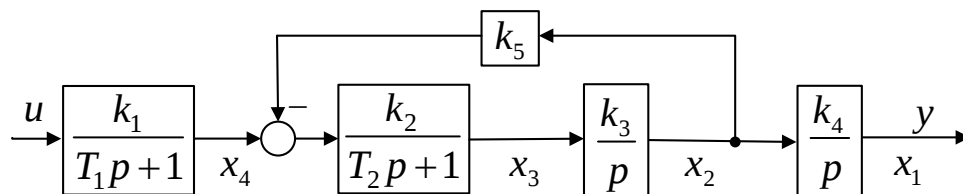
7 ЗАВДАННЯ ДО ЧАСТИНИ II

Здійснити синтез модального регулятора стану для об'єкта, що відповідає варіанту завдання. Провести дослідження показників якості синтезованої системи модального керування та зробити висновок щодо їх відповідності вихідним вимогам до системи.

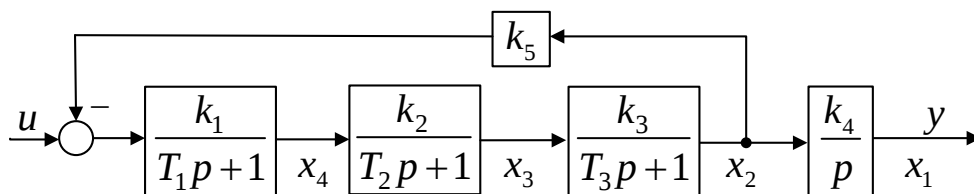
Варіанти структурних схем об'єктів регулювання (ОР) зображені на рис. 7.1-7.3, а їх параметри наведені в табл. 1.1.



а)



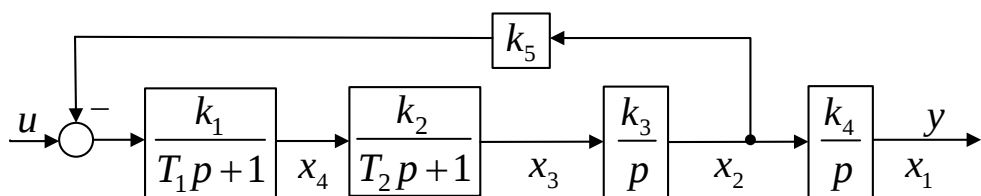
б)



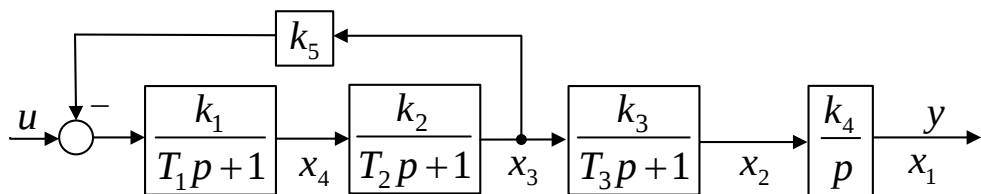
в)

Рис. 7.1. Структурні схеми об'єктів регулювання:

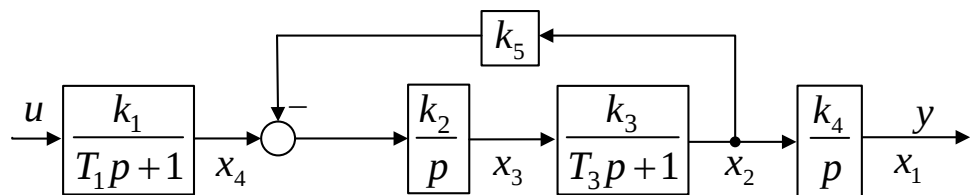
а) варіанти 1-5, б) варіанти 6-10, в) варіанти 11-15



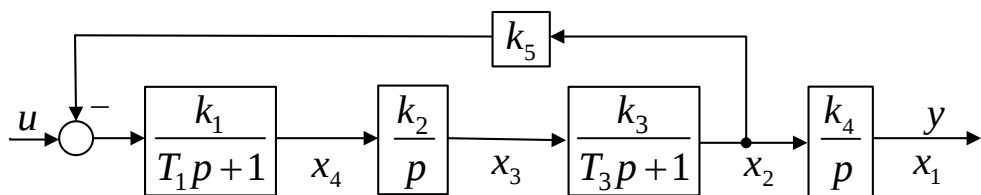
а)



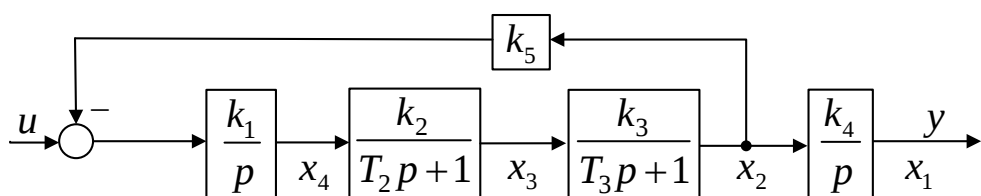
б)



в)



г)

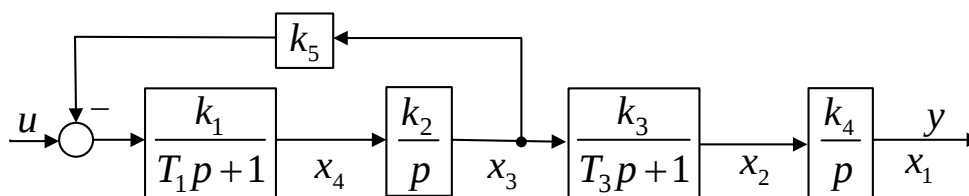


д)

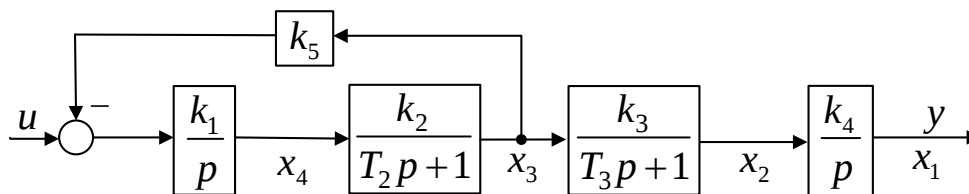
Рис. 7.2. Структурні схеми об'єктів регулювання:

а) варіанти 16-20, б) варіанти 21-25, в) варіанти 26-30,

г) варіанти 31-35, д) варіанти 36-40



а)



б)

Рис. 7.3. Структурні схеми об'єктів регулювання:

а) варіанти 41-45, б) варіанти 46-50

На рис. 7.1-7.3 позначені: u – вхідний сигнал; y – вихідний сигнал; x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – змінні стану.

Задача полягає у синтезі системи модального керування з умов забезпечення заданих показників якості перехідних процесів, наведених в табл. 7.1: t_{ss} – час перехідного процесу з точністю перехідної функції 5%; σ – перерегулювання перехідної функції; K_v – добротність за швидкістю; ω_n – частота пропускання.

Для розв'язання цієї задачі необхідно послідовно виконати такі завдання:

1. Скласти математичний опис (МО) об'єкта у просторі станів. Виконати перевірку створеного МО шляхом порівняння вагових функцій вихідного об'єкта та об'єкта з МО у просторі станів. Визначити, чи є ОР керованим.

2. За заданими показниками якості обрати бажаний стандартний характеристичний поліном замкненої системи та визначити його середньо геометричний корінь (СГК), а саме:

- побудувати перехідні функції систем з характеристичними поліномами Ньютона, Бесселя та Батерворта 4-го порядку з одиничним коефіцієнтом підсилення та одиничним СГК;
- проаналізувати отримані перехідні функції та обрати один із трьох проаналізованих стандартних поліномів з умови забезпечення бажаного перерегулювання;
- визначити СГК характеристичного полінома з умови забезпечення бажаної добротності за швидкістю;
- визначити відносний час перехідного процесу та значення СГК характеристичного полінома з умови забезпечення бажаної швидкодії;
- побудувати АЧХ системи з обраним ХП у відносних одиницях;
- визначити СГК з умови забезпечення бажаної частоти пропускання;
- обрати максимальне значення СГК із значень, отриманих з умов досягнення різних показників якості.

3. Синтезувати модальний регулятор та розробити модель системи модального керування.

4. Перевірити синтезовану систему на відповідність заданим показникам якості, для чого

- отримати перехідну функцію і впевнитись у тому, що час перехідного процесу та перерегулювання не перевищують заданих значень;
- отримати реакцію синтезованої системи на лінійний сигнал та впевнитись у тому, що час запізнення вихідного сигналу від вхідного в усталеному режимі не перевищує значення $1/K_v$;
- отримати реакцію синтезованої системи на синусоїдальний сигнал з частотою, що дорівнює заданій частоті пропускання, та впевнитись у тому, що амплітуда вихідного сигналу в усталеному режимі складає не менш, ніж 0,707 від амплітуди вхідного сигналу.

Бажані показники якості для різних варіантів завдання зведені у табл. 7.1.

Таблиця 7.1. Варіанти завдання для синтезу системи модального керування

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{ss5\%,c}$	0.1	0.3	0.15	0.25	0.2	0.2	0.3	0.15	0.25	0.1
$\sigma, \%$	0	2	15	0	5	12	0	8	20	0
K_v, c^{-1}	25	10	30	12	12	15	10	25	12	30
ω_n, c^{-1}	40	20	40	25	20	35	12	50	15	70
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t_{ss5\%,c}$	0.25	0.15	0.3	0.1	0.2	0.2	0.1	0.3	0.15	0.25
$\sigma, \%$	6	13	0	7	18	0	4	16	0	7
K_v, c^{-1}	12	25	10	30	15	15	30	10	25	15
ω_n, c^{-1}	25	35	20	40	35	20	70	15	50	15
Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t_{ss5\%,c}$	0.2	0.3	0.15	0.25	0.1	0.1	0.3	0.15	0.25	0.2
$\sigma, \%$	18	0	3	19	0	2	15	0	6	22
K_v, c^{-1}	15	10	25	12	30	25	10	30	12	12
ω_n, c^{-1}	35	12	50	15	70	40	20	40	25	20
Варіант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$t_{ss5\%,c}$	0.2	0.1	0.3	0.15	0.25	0.25	0.15	0.3	0.1	0.2
$\sigma, \%$	0	5	15	0	6	16	0	7	17	0
K_v, c^{-1}	15	30	10	25	15	12	25	10	30	15
ω_n, c^{-1}	20	70	15	50	15	25	35	20	40	35
Варіант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$t_{ss5\%,c}$	0.25	0.15	0.3	0.1	0.2	0.1	0.3	0.15	0.25	0.2
$\sigma, \%$	8	18	0	5	25	0	4	21	0	6
K_v, c^{-1}	12	25	10	30	15	25	10	30	12	12
ω_n, c^{-1}	25	35	20	40	35	40	20	40	25	20

8 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ПРОСТІР СТАНІВ

8.1 Математичний опис систем автоматичного керування у просторі станів

Вище ми використовували спосіб математичного описання динамічних систем, що ґрунтується на передавальних функціях. Проте в ТАК широко застосовується альтернативний спосіб описання систем, який має назву *метод змінних стану* і описує систему у просторі станів [1-4, 11-13].

Важливою властивістю методу змінних стану є можливість описувати як *одномірні (SISO – Single Input Single Output)* так і *багатомірні (MIMO – Many Inputs Many Outputs)* системи.

Отже, нехай довільна неперервна стаціонарна динамічна система n -го порядку має k входів та r виходів.

Тоді вона може бути описана у просторі стану системою лінійних диференціальних рівнянь (ДР) у нормальній формі Коші

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (8.1)$$

з початковими умовами

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.2)$$

та лінійним матричним рівнянням виходу

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (8.3)$$

де

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ – вектор змінних стану;

$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_r]^T$ – вектор вихідних сигналів;

$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k]^T$ – вектор вхідних сигналів;

$\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$ – вектор початкових умов (*Initial conditions*);

$\mathbf{A}$ – матриця стану розміром $n \times n$;

$\mathbf{B}$ – матриця входу розміром $n \times k$;

C – матриця виходу розміром $r \times n$;

D – матриця обходу розміром $r \times k$, яка характеризує прямий (пропорційний) зв'язок між входом і виходом.

Елементами усіх матриць для лінійних стаціонарних систем є постійні коефіцієнти.

Отже, *рівняння стану лінійної стаціонарної САК являють собою систему n диференціальних рівнянь (ДР) 1-го порядку в нормальній формі Коші, в якій ліві частини є похідними 1-го порядку від змінних стану, а праві частини є лінійною комбінацією змінних та вхідних сигналів.*

Множину усіх значень вектору стану $\mathbf{x}(t)$ на деякому інтервалі часу $\Delta t = t_k - t_0$ називають простором станів.

Для систем з одним входом ($k = 1$) матриці **B** і **D** вироджуються у вектори-стовпці:

$$\mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T, \quad \mathbf{D} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T. \quad (8.4)$$

Для SISO-систем ($k = 1, r = 1$) – матриця **B** залишається вектором-стовпцем, матриця **C** стає вектором-рядком розміром $1 \times n$, а матриця **D** вироджується у скаляр:

$$\mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T, \quad \mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], \quad \mathbf{D} = d. \quad (8.5)$$

Залежні змінні у ДР (8.1) називають змінними стану. Їх кількість дорівнює кількості ДР і називається порядком системи. Якщо скласти на основі рівнянь стану скалярну структурну схему, то *усі змінні стану будуть розташовані на виходах інтеграторів.*

Зауважимо, що для SISO-систем, у яких порядок поліному в чисельнику ПФ є меншим за порядок характеристичного поліному прямий зв'язок входу з виходом системи відсутній, тобто $d=0$.

Для переходу до операторної форми запису рівнянь (8.1), (8.2) в них треба замінити операцію диференціювання операцією множення на оператор Лапласа p :

$$p\mathbf{x}(p) = \mathbf{A}\mathbf{x}(p) + \mathbf{B}\mathbf{u}(p), \quad (8.6)$$

$$y(p) = Cx(p) + Du(p). \quad (8.7)$$

Математичному опису у формі (8.6), (8.7) відповідає векторно-матрична структурна схема, що зображена на рисунку 8.1.

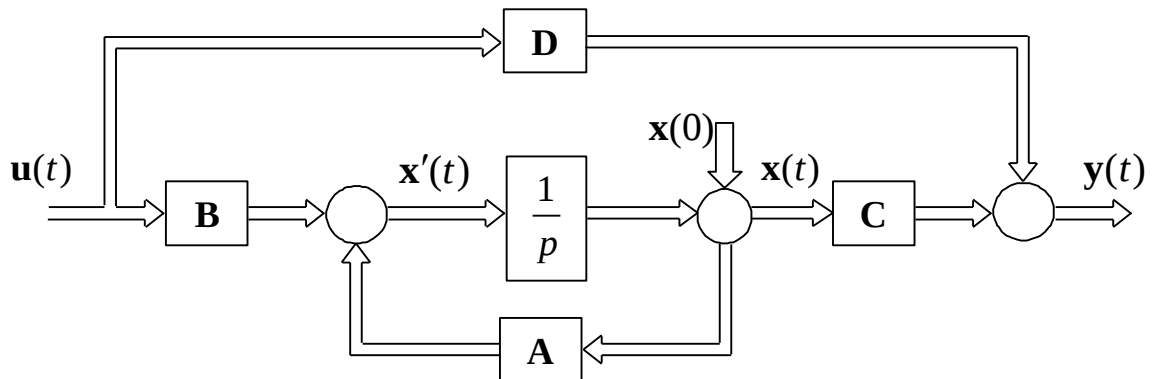


Рис. 8.1. Структурна схема МІМО-системи у просторі стану

8.2 Перевірка об'єктів на керованість та спостережуваність

Керованість (controllability) та **спостережуваність (observability)** належать до фундаментальних властивостей динамічних систем. Для дослідження цих властивостей використовується математичний опис у просторі стану.

Постановка та розв'язок задачі синтезу системи модального керування для конкретного об'єкта має сенс тільки в тому випадку, коли існує принципова можливість переводу його із заданого початкового стану в бажаний кінцевий стан за обмежений час з використанням припустимого керування. Визначення можливості такого переводу складає зміст поняття керованості, яке уперше було введено Р. Калманом.

Система називається керованою, якщо для будь-яких моментів часу t_0 і t_1 , де $t_1 > t_0$, та будь-яких заданих станів $\mathbf{x}_0$ і $\mathbf{x}_1$ існує керуюча дія $\mathbf{u}(t)$, ($t_0 \leq t \leq t_1$), що переводить початковий стан $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ у кінцевий $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Згідно з **першою теоремою Калмана** лінійна n -вимірна система, що описується рівнянням (8.6), є керованою тоді і тільки тоді, коли блочна матриця

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (8.8)$$

розміру $n \times nr$ має ранг, що дорівнює n , тобто

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = n. \quad (8.9)$$

Матриця $\mathbf{Q}_c$ називається **матрицею керованості**. Для одновимірного об'єкту матриця керованості є квадратною ($n \times n$).

Нагадаємо, що ранг матриці дорівнює найвищому порядку її мінорів, що не дорівнюють нулю.

Поняття спостережуваності пов'язано з можливістю визначення змінних стану за результатами вимірювання вихідних та вхідних сигналів протягом кінцевого проміжку часу.

Система називається спостережуваною, якщо існує таке значення часу t_1 , що за відомою інформацією про вихід $\mathbf{y}(t)$ і вхід $\mathbf{u}(t)$ системи на інтервалі $(t_0 \leq t \leq t_1)$ можна визначити всі складові вектору змінних стану $\mathbf{x}(t)$.

Проблема спостережуваності виникає тому, що в реальних об'єктах часто піддається вимірюванню лише його вихід $\mathbf{y}(t)$ і вхід $\mathbf{u}(t)$. Проте для керування необхідне використання зворотних зв'язків за змінними стану. Якщо змінні стану фізично не вимірюються, то їх оцінюють за допомогою пристрою, що називається **спостерігачем стану**. Отримані оцінки використовують у зворотних зв'язках системи.

Умова спостережуваності лінійної стаціонарної системи, що описується рівняннями (8.6), (8.7), визначається за **другою теоремою Калмана**: система повністю спостережувана тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності $\mathbf{Q}_o$ розміру $n \times nr$ (для одновимірної системи $n \times n$)

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

дорівнює n .

8.3 Отримання рівнянь стану з передавальних функцій

Для того, щоб отримати математичний опис системи у просторі станів зі структурної схеми, її треба деталізувати. *Деталізована структурна схема, яку ще називають структурною схемою у просторі станів*, має у своєму складі тільки один тип неперервної динамічної ланки: інтегратор $(1/p)$. Крім інтеграторів, деталізовані структурні схеми лінійних динамічних систем можуть складатися ще тільки з пропорційних ланок та алгебраїчних суматорів.

Деталізовані структурні схеми легко утворюються з математичного опису системи у нормальній формі Коші, або відповідним перетворенням передавальної функції (ПФ).

Наприклад, з ПФ загального вигляду без нулів

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{H(p)}{G(p)} = \frac{1}{p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0} \quad (8.11)$$

можна отримати ДР n -го порядку в операторній формі, яке розв'язане відносно старшої похідної:

$$p^n y(p) = u(p) - \alpha_{n-1}p^{n-1}y(p) - \dots - \alpha_1 p y(p) + \alpha_0 y(p). \quad (8.12)$$

Після введення позначень

$$x_1(p) = y(p), \quad x_2(p) = p y(p), \quad \dots, \quad x_{n-1}(p) = p^{n-2} y(p), \quad x_n(p) = p^{n-1} y(p) \quad (8.13)$$

Операторне ДР (8.12) можна перетворити у систему ДР першого порядку в нормальній формі Коші

$$\begin{cases} p x_1(p) = x_2(p), \\ p x_2(p) = x_3(p), \\ \dots \\ p x_{n-1}(p) = x_n(p), \\ p x_n(p) = u(p) - \alpha_{n-1} x_n(p) - \dots - \alpha_1 x_2(p) - \alpha_0 x_1(p). \end{cases} \quad (8.14)$$

Рівняння виходу знаходимо з першого із позначень (8.13):

$$y(p) = x_1(p). \quad (8.15)$$

Скалярним рівнянням стану (8.14) та виходу (8.15) відповідають матричні рівняння:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + du, \end{cases} \quad (8.16)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \quad d=0. \quad (8.17)$$

На основі скалярних рівнянь (8.14) та (8.15) легко побудувати деталізовану структурну схему, зображену на рис. 8.2. ПФ цієї СС має вигляд (8.11).

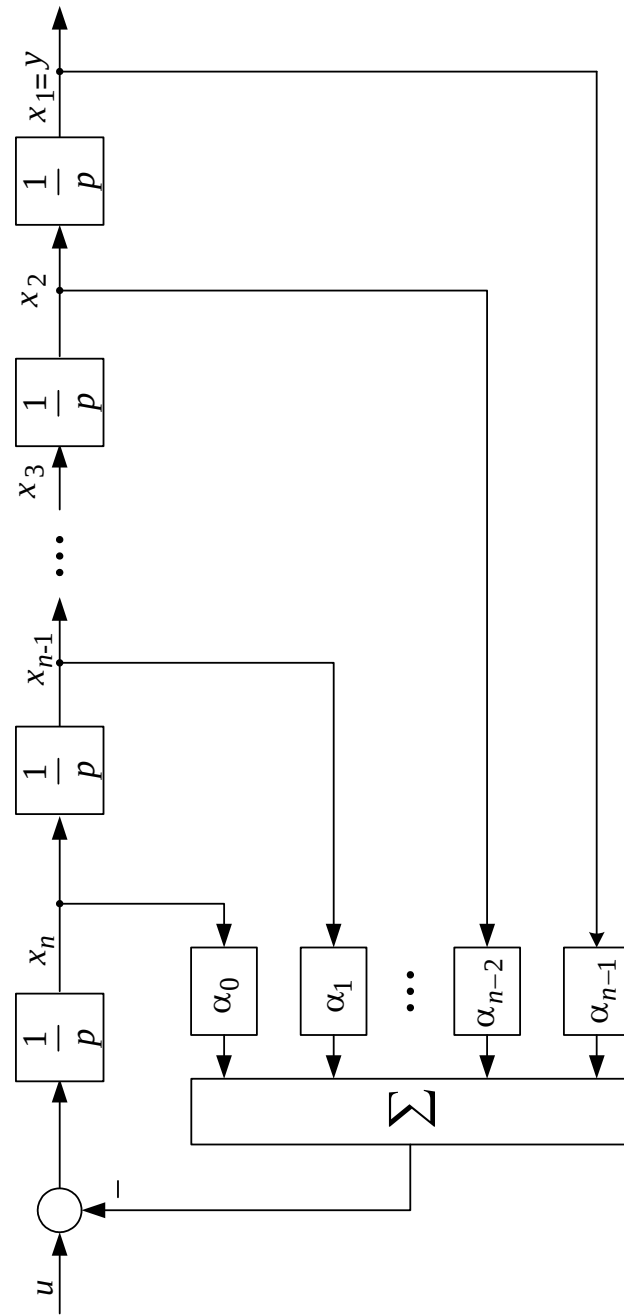


Рис. 8.2. Скалярна структурна схема у просторі станів системи з передавальною функцією (8.11)

За наявності у ПФ загального вигляду n нулів

$$W_1(p) = \frac{y_1(p)}{u(p)} = \frac{H(p)}{G(p)} = \frac{\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0} \quad (8.18)$$

вихідний сигнал $y_1(p)$ можна отримати з вихідного сигналу $y(p)$ системи рис. 8.2 за формулою

$$y_1(p) = \beta_0 y(p) + \beta_1 p y(p) + \dots + \beta_{n-1} p^{n-1} y(p) + \beta_n p^n y(p),$$

або з урахуванням позначень (8.10)

$$y_1(p) = \beta_0 x_1(p) + \beta_1 x_2(p) + \dots + \beta_{n-1} x_n(p) + \beta_n (u - \alpha_0 x_1(p) - \alpha_1 x_2(p) - \dots - \alpha_{n-1} x_n(p)). \quad (8.19)$$

У цьому разі параметри **A**, **B** і рівнянь стану та виходу (8.15) залишаються незмінними (8.16), а вектор **C** придбає вигляд

$$\mathbf{C}_1 = [\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \quad \dots \quad \beta_{n-2} - \beta_n \alpha_{n-2} \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}] \quad (8.20)$$

Деталізована структурна схема системи з ПФ (8.15), побудована згідно з ДР (8.14) та рівнянням виходу (8.16) при $m=n$ зображена на рис. 8.3.

Деталізовані схеми рис. 8.2 та рис. 8.3 і матричні рівняння (8.15) з параметрами (8.17), (8.20) представлені у **канонічній формі керованості**. Параметри математичного опису у такій формі можуть бути визначеними з параметрів ПФ за наведеними формулами. Це безперечна перевага канонічних форм. Їх недоліком є те, що втрачається інформація про проміжні вихідні змінні, присутні в СС, що складається з багатьох довільних ПФ невисокого порядку.

Слід відзначити, що кожна структурна схема може мати декілька варіантів її деталізації і відповідно стільки ж видів математичного опису у просторі станів, яким відповідає одна і та ж ПФ. Наприклад, якщо пронумерувати змінні стану на СС 8.2 та 8.3 у зворотному порядку, то матриця стану **A** та вектор входу **B** також відобразяться згори донизу, а вектор виходу **C** – справа наліво.

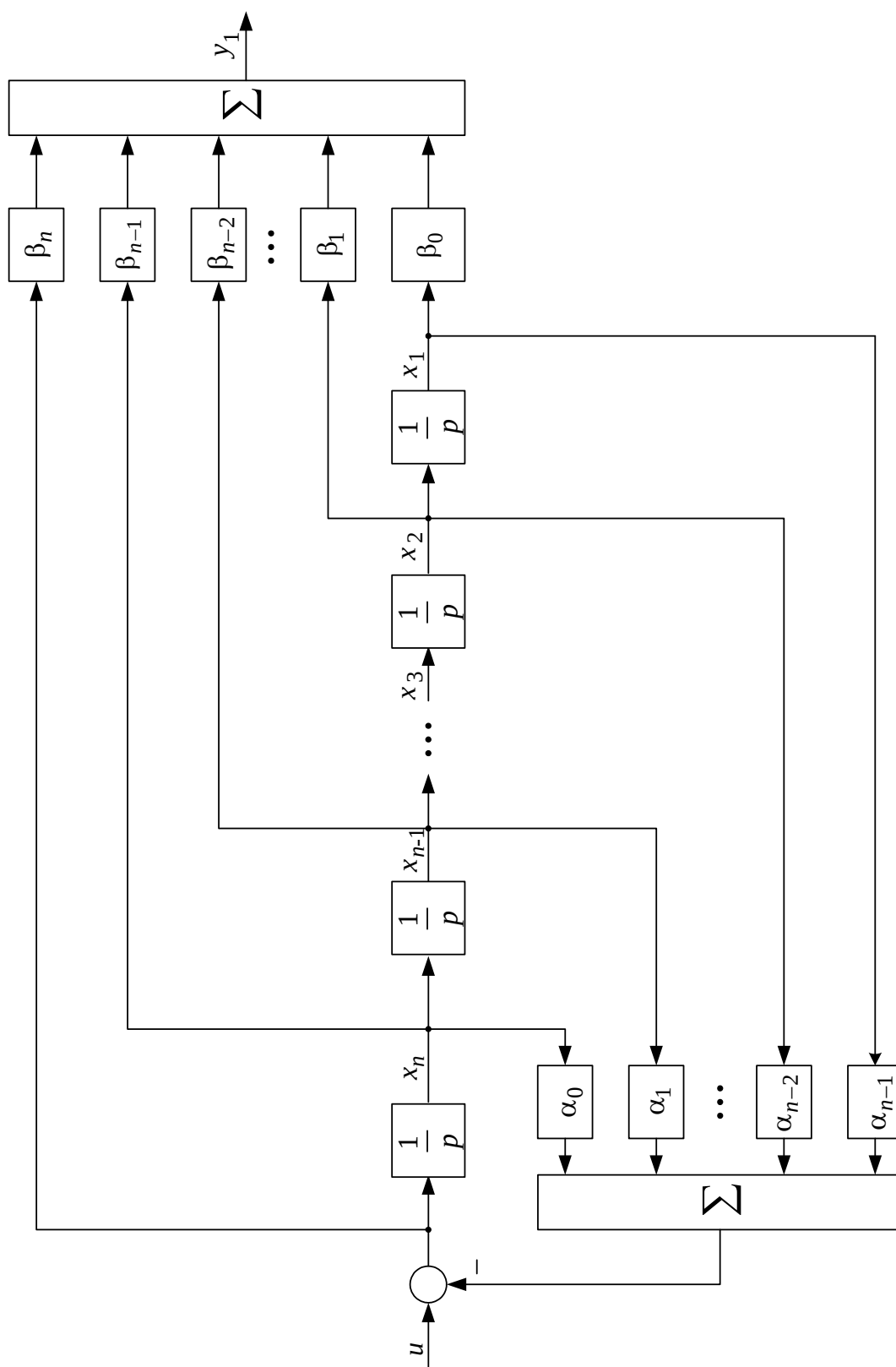
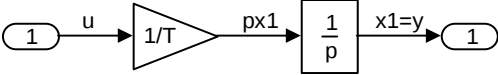
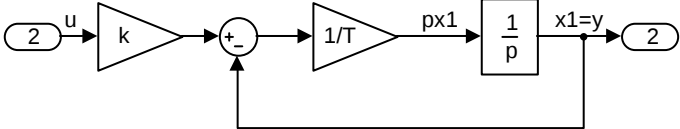
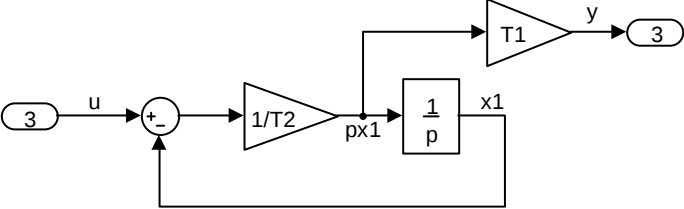
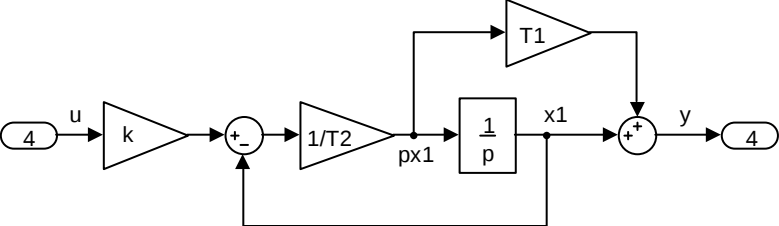
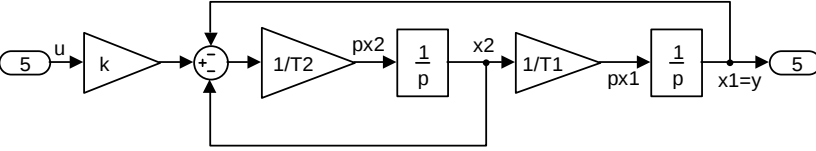
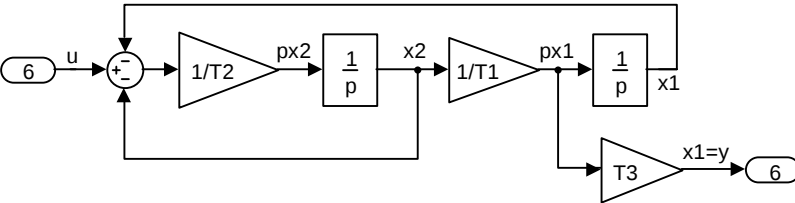


Рис. 8.3. Скалярна структурна схема у просторі станів системи з передавальною функцією (8.11)

Для неперервних динамічних блоків першого-другого порядків можна запропонувати деталізовані структурні схеми, подані в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 Деталізовані структурні схеми ланок 1-го та 2-го порядків

Вихідна передавальна функція	Перетворена передавальна функція	Деталізована структурна схема
$\frac{1}{Tp}$	$\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{p}$	
$\frac{k}{Tp+1}$	$k \cdot \frac{\frac{1}{Tp} + 1}{\frac{1}{Tp} + 1}$	
$\frac{T_1p}{T_2p+1}$	$\frac{\frac{1}{T_2p} + 1}{\frac{1}{T_2p} + 1} \cdot T_1p$	
$k \frac{T_1p+1}{T_2p+1}$	$k \left(\frac{1}{T_2p+1} + \frac{T_1p}{T_2p+1} \right)$	
$\frac{1}{T^2p^2+2\xi Tp+1} = \frac{1}{T_1T_2p^2+T_1p+1}$	$\frac{\frac{1}{T_1p(T_2p+1)}}{\frac{1}{T_1p(T_2p+1)} + 1}$	
$\frac{T_3p}{T_1T_2p^2+T_1p+1}$	$\frac{T_3p}{T_1T_2p^2+T_1p+1}$	
...	...	...

8.4 Отримання передавальних функцій з рівнянь стану

Перенесемо у рівнянні стану (8.6) перший доданок у правій частині ліворуч та визначимо матричну передавальну функцію від керування до вектору стану розміром $n \times k$:

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(p) = \mathbf{B}\mathbf{u}(p), \quad (8.21)$$

$$\mathbf{x}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(p), \quad (8.22)$$

$$\mathbf{W}_x(p) = \frac{\mathbf{x}(p)}{\mathbf{u}(p)} = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\text{Adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B}. \quad (8.23)$$

В наведених вище рівняннях $\mathbf{I}$ – одинична діагональна матриця розміром $n \times n$.

Підстановкою (8.22) в рівняння виходу (8.7) отримаємо

$$\mathbf{y}(p) = [\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(p),$$

звідкіля визначимо матричну передавальну функцію від керування до виходу розміром $r \times k$:

$$\mathbf{W}_y(p) = \frac{\mathbf{y}(p)}{\mathbf{u}(p)} = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{Adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (8.24)$$

З рівнянь (8.23), (8.24) випливає, що характеристичний поліном залежить тільки від елементів матриці стану і пов'язаний з нею залежністю

$$G(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (8.25)$$

Матрицю $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ називають *характеристичною матрицею*, а корені характеристичного рівняння (нулі характеристичного полінома) – полюсами (*Poles*) системи або *власними числами (Eigen Value) матриці стану*:

$$\mathbf{P} = \text{roots}(\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})) = \text{eig}(\mathbf{A}). \quad (8.26)$$

9 МЕТОД МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Принцип модального керування [1-3, 11-13] полягає у забезпеченні бажаного розташування полюсів замкнутої системи шляхом застосування регулятора у вигляді набору пропорційних зворотних зв'язків за кожною змінною стану об'єкта керування. Термін «модальне керування» пояснюється тим, що полюси передавальної функції системи дорівнюють власним значенням (модам) її матриці стану, які визначають складові вільного руху системи.

Викладемо загальну процедуру синтезу системи модального керування. Розглянемо лінійний одновимірний об'єкт керування n -го порядку, який описується рівняннями стану

$$\begin{cases} p\mathbf{x}(p) = \mathbf{A}\mathbf{x}(p) + \mathbf{B}u(p), \\ y(p) = \mathbf{C}\mathbf{x}(p). \end{cases} \quad (9.1)$$

де вхід $u(t)$ та вихід $y(t)$ є скалярними величинами. Будемо вважати, що усі змінні стану об'єкта вимірюються. Задача синтезу полягає у визначенні бажаного розташування коренів характеристичного рівняння замкнутої системи на комплексній площині та знаходження коефіцієнтів регулятора, які забезпечують таке розташування. При цьому бажане розташування полюсів вибирається з огляду на забезпечення потрібних показників якості керування.

Система модального керування (СМК) – це система з регулятором стану повного порядку (Full-Order State Space Controller), тобто система, замкнена за повним вектором стану.

Зворотні зв'язки за кожною із змінних стану x_i з індивідуальними коефіцієнтами K_i віднімаються від вхідного сигналу замкненої системи $g(t)$. Така система є окремим випадком систем з паралельною корекцією, в яких всі зворотні зв'язки збігаються в одну точку. Характерною особливістю СМК є те, що вони замикаються за усіма змінними стану. Отже, сумарний сигнал зворотного зв'язку можна розрахувати за формулою

$$y_3 = K_1 x_1 + K_2 x_2 + \dots + K_n x_n = [K_1, K_2, \dots, K_n] \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \mathbf{Kx}. \quad (9.2)$$

При $g(t) = 0$ призначення системи зводиться до того, щоб після пуску відпрацювати ненульові початкові умови і далі підтримувати вектор стану і вихідну змінну рівними нулю, а закон керування для модального регулятора має вигляд

$$u = -\mathbf{Kx}. \quad (9.3)$$

Звідси бачимо, що сигнал керування, який подається на вхід об'єкта, є лінійною комбінацією всіх змінних стану.

При наявності вхідного сигналу ($g(t) \neq 0$)

$$u = g - \mathbf{Kx}. \quad (9.4)$$

Рівнянням (9.26) та (9.29) відповідає структурна схема замкненої системи, яка зображена на рис. 9.1.

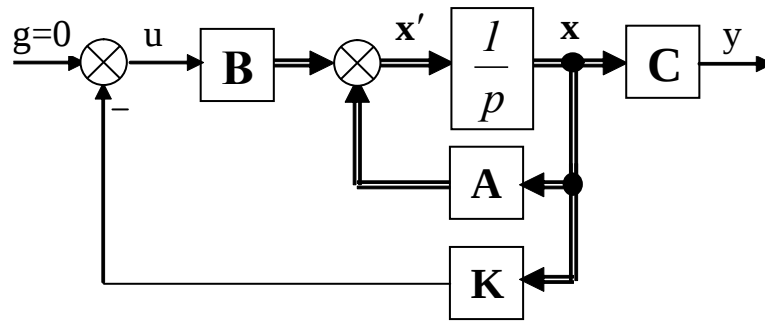


Рис. 9.1. Векторно-матрична структурна схема системи модального керування

Підставляючи (9.4) в перше рівняння системи (9.1), отримаємо рівняння стану замкненої системи

$$p\mathbf{x}(p) = \mathbf{Ax}(p) + \mathbf{Bg}(p) - \mathbf{BKx}(p) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(p) + \mathbf{Bg}(p), \quad (9.5)$$

де

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad (9.6)$$

– матриця стану замкненої САК.

Дійсний характеристичний поліном та дійсні полюси замкненої системи (9.30) залежать тільки від її матриці стану (9.6) і згідно з (8.24) і (8.25) визначаються виразами

$$G_d(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0, \quad (9.7)$$

$$\mathbf{P}_d = \text{eig}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \text{eig}(p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}). \quad (9.8)$$

Якщо за умовами синтезу відомі **бажані полюси системи**

$$\mathbf{P}_6 = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n]^T, \quad (9.9)$$

або **бажаний характеристичний поліном**

$$G_6(p) = (p - p_1)(p - p_2) + \dots + (p - p_n) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0, \quad (9.10)$$

то визначити вектор коефіцієнтів модального регулятора **K** можна з рівнянь

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_6; \quad \text{eig}(p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n]^T \quad (9.11)$$

або

$$G_d(p) = G_6(p); \quad \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0, \quad (9.12)$$

Для систем невисокого порядку з рівняння (9.12) легко отримати систему n лінійних рівнянь з n невідомими $K_1, K_2, \dots, K_n$, прирівнюючи в коефіцієнти при однакових степенях p . Така система зазвичай дуже просто розв'язується без використання числових методів.

Для розв'язання рівняння (9.11) можна скористатися **формулою Акермана**:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_c^{-1} G(\mathbf{A}), \quad (9.13)$$

де $\mathbf{Q}_c$ – матриця керованості системи (8.8); $G(\mathbf{A})$ – матричний поліном, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами бажаного характеристичного поліному (9.10):

$$G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}. \quad (9.14)$$

В MATLAB існують дві функції, що розраховують коефіцієнти модального регулятора за відомими матрицями стану об'єкту регулювання та бажаними полюсами замкненої системи: `acker` і `place`. Перша з них використовує формулу Акермана, а друга розв'язує рівняння (9.11) чисельними методами. Звернення до цих функцій має однаковий формат:

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}),$$

$$\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}).$$

Функцію `place` рекомендовано використовувати для багатомірних систем високого порядку та для слабко керованих систем. Для одновірних систем невисокого порядку краще застосовувати функцію `acker`.

10 СТАНДАРТНІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПОЛІНОМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ СИНТЕЗІ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

10.1 Загальні відомості

Важливою складовою частиною синтезу систем модального керування є вибір бажаного характеристичного полінома. Звичайно їх обирають з переліку так званих *стандартних поліномів (СП)*, синтезованих різними вченими за деякими правилами або критеріями. Для систем зі стандартними ХП різного порядку у довідниках з ТАК наведені сімейства перехідних функцій, з яких проектувальники можуть обрати саме такий СП, який задовольняє їх з точки зору забезпечення бажаної якості перехідних процесів.

Метод синтезу, заснований на формуванні бажаного ХП називають *методом стандартних поліномів* або просто *поліноміальним методом*.

Передавальна функція системи з відомим бажаним розташуванням полюсів (9.9) та одиничним коефіцієнтом підсилення при відсутності нулів має вигляд:

$$W(p) = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{(p - p_1)(p - p_2) + \dots + (p - p_n)} = \frac{\alpha_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}, \quad (10.1)$$

де згідно з теоремою Вієта

$$\alpha_0 = p_1 p_2 \dots p_n. \quad (10.2)$$

Якщо система стійка, то її полюси складаються із від'ємних дійсних полюсів і комплексно-спряжених пар полюсів з від'ємними дійсними частинами. Добуток таких полюсів дорівнює добутку їх амплітуд, які називають власними частотами:

$$\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n |p_i| = \prod_{i=1}^n \omega_i. \quad (10.3)$$

Величину

$$\omega_0 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n p_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \omega_i}. \quad (10.4)$$

називають *середньо-геометричним коренем (СГК) характеристичного рівняння, або характеристичною частотою системи.*

Вигляд (форма) перехідних процесів залежить від взаємного розташування полюсів, а СГК впливає тільки на масштаб часу (чим більше СГК, тим менше стає час перехідного процесу та часові параметри усіх характерних точок перехідних процесів). Отже, якщо зменшити кожний полюс в ω_0 разів, то це буде еквівалентно нормуванню характеристичного поліному за СГК та переходу до нормованого часу:

$$p_{\text{нi}} = p_i / \omega_0, \quad (10.5)$$

$$\tau = t\omega_0. \quad (10.6)$$

Нормуванням називають перехід від абсолютних (розмірних) одиниць (а.о.) до відносних (в.о.). Відносні величини завжди є безрозмірними.

В усіх літературних джерелах наводяться саме нормовані стандартні поліноми та їх перехідні функції $h(t\omega_0)$. Згідно з (10.19) нормований ХП має вигляд:

$$G_{\text{бн}}(p) = \left(p - \frac{p_1}{\omega_0}\right) \left(p - \frac{p_2}{\omega_0}\right) + \dots + \left(p - \frac{p_n}{\omega_0}\right) = p^n + \gamma_{n-1}p^{n-1} + \dots + \gamma_1p + 1, \quad (10.7)$$

тобто його можна розглядати як поліном з одиничним СГК. Коефіцієнти поліномів (9.10) і (10.7) пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\alpha_i = \gamma_i \omega_0^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.8)$$

Враховуючи, що $\omega_0^0 = 1$, та $\gamma_0 = 1$, завжди маємо

$$\alpha_0 = \omega_0^n, \quad \alpha_n = 1. \quad (10.9)$$

Найбільш часто при проектуванні систем модального керування електромеханічними об'єктами використовують *поліноми з біноміальними коефіцієнтами, поліноми Батерворта (Butterworth), поліноми Бесселя (Bessel).*

10.2 Поліноми з біноміальними коефіцієнтами

У поліномів з біноміальними коефіцієнтами усі полюси розташовані в одній точці дійсної осі:

$$p_i = -\omega_0, \quad p_{ni} = -1, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.10)$$

Згідно з (10.10) вони утворюють характеристичний поліном у формі бінома Ньютона:

$$G_{bin}(p) = (p + \omega_0)^n, \quad G_{nbin} = (p + 1)^n, \quad (10.11)$$

який для скорочення будемо називати *поліномом Ньютона*.

Як відомо, при розкладенні бінома Ньютона на суму складових утворюються ряди з біноміальними коефіцієнтами, які можна розрахувати за формулою:

$$\gamma_i = C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.12)$$

Враховуючи, що для біноміальних коефіцієнтів справедлива формула

$$C_i^k = C_i^{k-1} + C_{i-1}^{k-1}, \quad (10.13)$$

коефіцієнти нормованого полінома Ньютона можна розрахувати за схемою, що зветься трикутником Паскаля:

				1		1										
				1		2		1								
			1		3		3		1							
		1		4		6		4		1						
	1		5		10		10		5		1					
	1		6		15		20		15		6		1			
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Згідно з цією схемою у табл. 10.1 представлені нормовані поліноми Ньютона

Таблиця 10.1. Нормовані поліноми Ньютона

n	$G_{\text{нbin}} = (p+1)^n$
2	$p^2 + 2p + 1$
3	$p^3 + 3p^2 + 3p + 1$
4	$p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$
5	$p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1$
6	$p^6 + 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1$
7	$p^7 + 7p^6 + 21p^5 + 35p^4 + 35p^3 + 21p^2 + 7p + 1$
8	$p^8 + 8p^7 + 28p^6 + 56p^5 + 70p^4 + 56p^3 + 28p^2 + 8p + 1$

Перехідні функції систем з такими ХП зображені на рис.10.1, а АЧХ – на рис. 10.2.

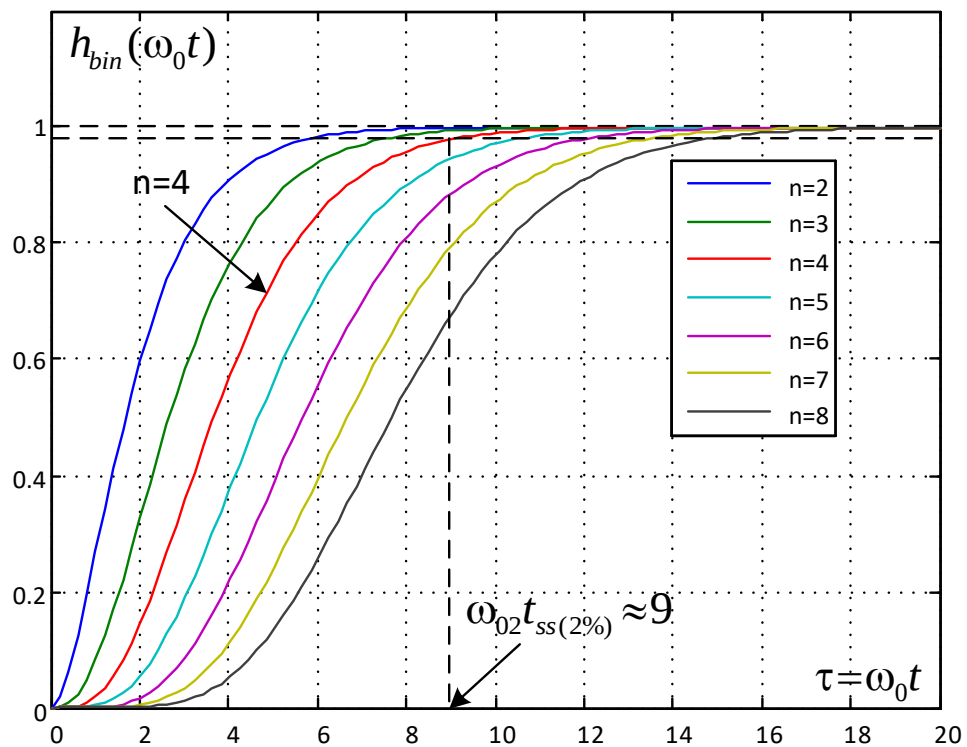


Рис. 10.1. Перехідні функції систем, що мають ХП з біноміальними коефіцієнтами

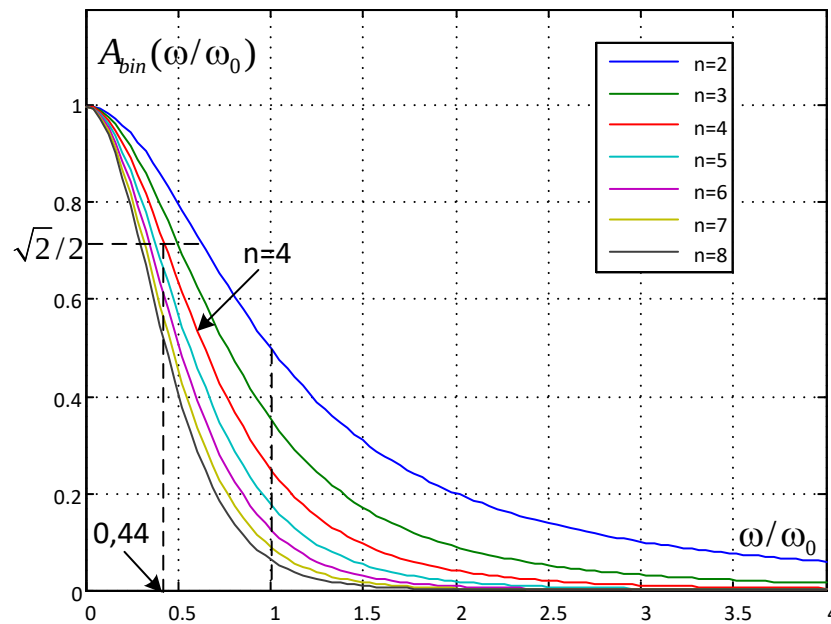


Рис. 10.2. АЧХ систем, що мають ХП з біноміальними коефіцієнтами

Як бачимо, при таких ХП в перехідних функціях відсутнє перерегулювання. Зі збільшенням порядку системи зростає час затримки перехідної функції на початку її формування та час перехідного процесу. Отже, ХП з біноміальними коефіцієнтами доцільно застосовувати при проектуванні систем позиційного електроприводу та слідкуючих систем, в яких зазвичай перерегулювання за положенням є неприпустимим. АЧХ не мають резонансних максимумів. Частота пропускання і амплітуда коливань вихідного сигналу при синусоїдальному входному сигналі з характеристичною частотою суттєво знижуються при збільшенні порядку ХП.

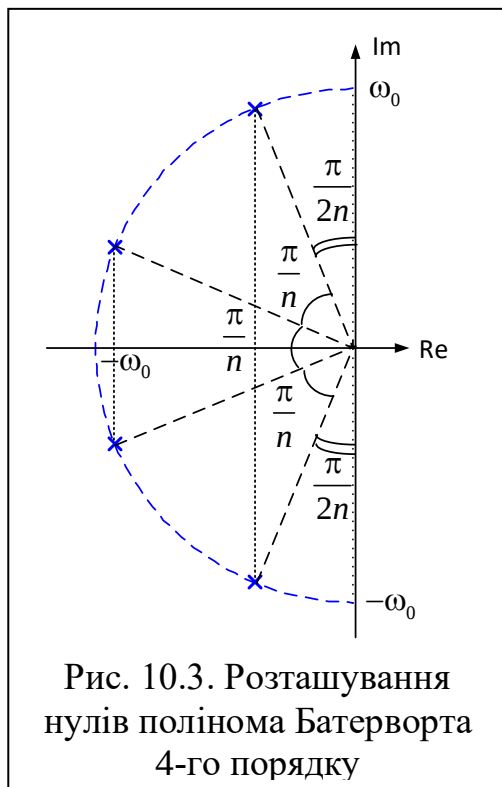
10.3 Поліноми Батерворта

У поліномів Батерворта усі полюси розташовані на одному колі на однаковій кутовій відстані один від одного:

$$p_{Buti} = \omega_0 e^{j\varphi_i} = \omega_0 (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i), \quad p_{Butni} = e^{j\varphi_i} = \cos \varphi_i + j \sin \varphi_i, \quad (10.14)$$

де

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{(2i-1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2i-1}{n} \right), \quad (10.15)$$



як це показано на рис. 10.3.

Таке розташування впливає з умов так званого **модульного оптимуму (Betragsoptimum)**, запропонованого німецьким вченим Кеслером (Kessler) у 50-х р.р. минулого століття, сутність якого полягає в забезпеченні сталості АЧХ системи у можливо більшому діапазоні частот. Таку АЧХ називають максимально плоскою.

Коефіцієнти нормованого полінома Батерворта можна визначити шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_4 = 0, \\ \dots \\ \gamma_{n-2}^2 - 2\gamma_{n-3}\gamma_{n-1} + 2\gamma_{n-4} = 0, \\ \gamma_{n-1}^2 - 2\gamma_{n-2} = 0. \end{cases} \quad (10.16)$$

Система рівнянь (10.16) для поліному 2-го порядку вироджується у рівняння

$$\gamma_1^2 - 2 = 0,$$

звідкіля

$$\gamma_1 = \sqrt{2} \approx 1,41, \quad G_{2н But}(p) = p^2 + \sqrt{2}p + 1;$$

для полінома 3-го порядку отримуємо

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_2^2 - 2\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

звідкіля

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 2, \quad G_{3н But}(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1;$$

для поліномів 4-го порядку –

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 + 2 = 0, \\ \gamma_3^2 - 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідкіля

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} \approx 2,61, \quad \gamma_2 = (2 + \sqrt{2}) \approx 3,41,$$

$$G_{4н But}(p) = p^4 + 2,61p^3 + 3,41p^2 + 2,61p + 1;$$

Для поліномів Батерворта більш високого порядку додатково можна застосувати формули, що випливають із взаємного аналізу системи рівнянь (10.16) і особливостей розташування полюсів та із властивості симетрії коефіцієнтів поліномів, чиї нулі мають одиничні амплітуди (розташовані на колі одиничного радіусу):

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_{n-1} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \\ \gamma_2 = \gamma_{n-2} = \frac{\gamma_1^2}{2}, \end{cases} \quad (10.17)$$

$$\gamma_i = \gamma_{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n. \quad (10.18)$$

Також може статися в нагоді ітераційна формула

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} \frac{\cos \frac{(i-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{i\pi}{2n}}. \quad (10.19)$$

Нормовані поліноми Батерворта другого-восьмого порядків наведені в табл. 10.2, відповідні перехідні функції так званих **фільтрів Батерворта** – на рис. 10.4, а їх АЧХ – на рис. 10.5.

Таблиця 10.2. Нормовані поліноми Батерворта

n	G_{nBut}
2	$p^2 + 1,41p + 1$
3	$p^3 + 2p^2 + 2p + 1$
4	$p^4 + 2,61p^3 + 3,41p^2 + 2,61p + 1$
5	$p^5 + 3,24p^4 + 5,24p^3 + 5,24p^2 + 3,24p + 1$
6	$p^6 + 3,86p^5 + 7,46p^4 + 9,14p^3 + 7,46p^2 + 3,86p + 1$
7	$p^7 + 4,49p^6 + 10,1p^5 + 14,6p^4 + 14,6p^3 + 10,1p^2 + 4,49p + 1$
8	$p^8 + 5,13p^7 + 13,14p^6 + 21,85p^5 + 25,69p^4 + 21,85p^3 + 13,14p^2 + 5,13p + 1$

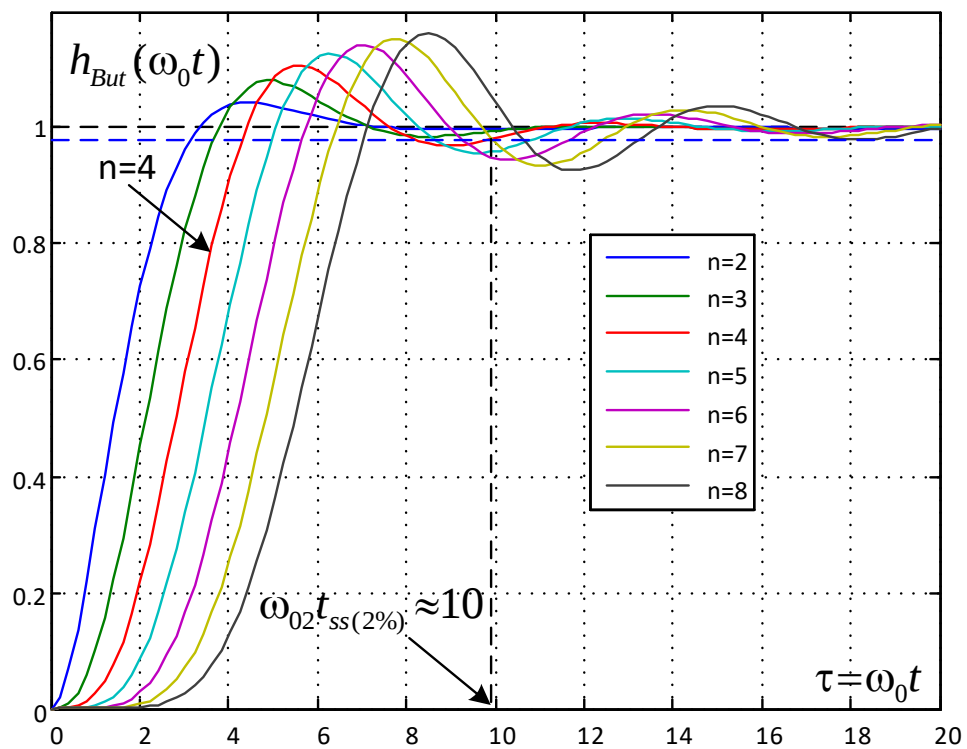


Рис. 10.4. Перехідні функції фільтрів Батерворта другого-восьмого порядків

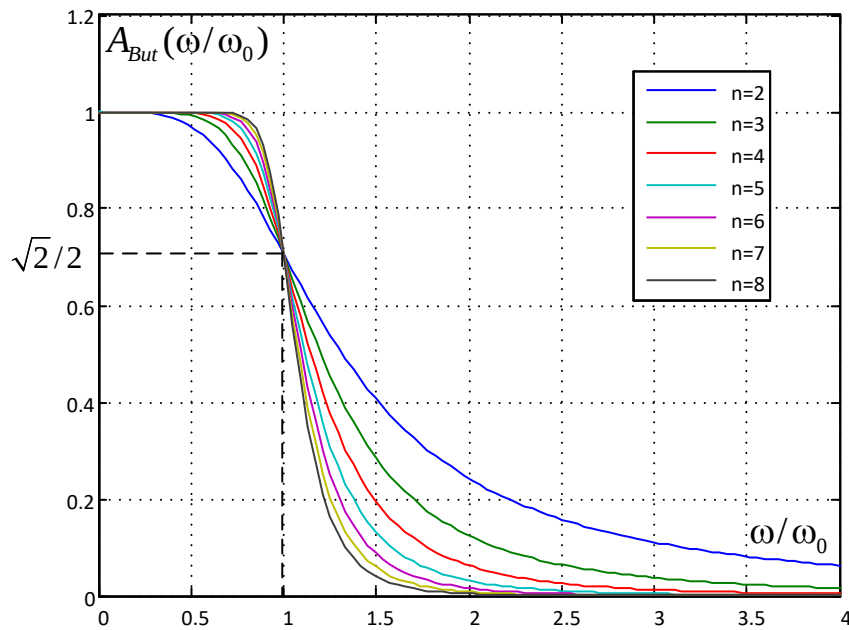


Рис. 10.5. АЧХ фільтрів Батерворта другого-восьмого порядків

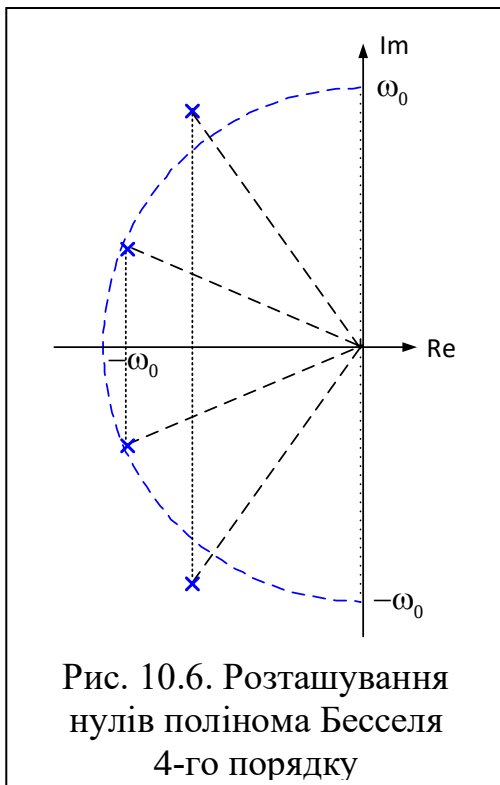
З аналізу наведених графіків можна зробити такі висновки щодо систем з характеристичними поліномами Батерворта, які не мають нулів:

- максимально плоска АЧХ має в області низьких частот ($\omega < \omega_0$) тривалу ділянку з амплітудою $A(\omega) \approx A(0)$, а в області низьких частот ($\omega > \omega_0$) тривалу ділянку з амплітудою $A(\omega) \rightarrow 0$, при чому довжина цих ділянок зростає зі збільшенням порядку полінома, тобто при $n \rightarrow \infty$ фільтр Батерворта **наближається до ідеального фільтра високих частот**; такі фільтри називають **фільтрами з крутим зрізом (Brick-wall Filter)**;
- у фільтра Батерворта частота пропускання ω_{π} збігається з характеристичною частотою ω_0 і не залежить від порядку ХП;
- не зважаючи на відсутність в АЧХ резонансного максимуму **перехідні функції фільтра Батерворта мають коливальний характер**, при чому **коливальність та перерегулювання зростають при збільшенні порядку ХП від 4% при $n=2$ до 16% при $n=8$** , тому що зростання порядку приводить до наближення домінуючої пари полюсів до уявної осі.
- поліноми Батерворта доцільно використовувати при синтезі систем керування електроприводами не більше, ніж 4-го порядку; інакше повільно загасаючі коливання електромагнітного моменту сприятимуть передчасному руйнуванню кінематичних передач (редукторів, гнучких механічних конструкцій, канатів тощо).

10.4 Поліном Бесселя

Коефіцієнти нормованого полінома Бесселя, який синтезують з умови плоскої апроксимації не амплітудно-частотної, а фазово-частотної характеристики, розраховуються за формулою:

$$\gamma_{Bes i} = \frac{(2n-i)!}{2^{2n-i} i! (n-i)!}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.20)$$



Розташування нулів полінома Бесселя 4-го порядку показано на рис. 10.6. Нормовані поліноми Бесселя другого-восьмого порядку, розраховані за формулою (10.20) наведені в табл. 10.3.

Як бачимо, коефіцієнти нормованих поліномів Бесселя не є симетричними. Це свідчить про те, що нулі поліномів розташовані не на колі одного радіусу, що видно з рис. 10.6. Крім того, домінуюча пара полюсів ХП Бесселя більш віддалена від уявної осі, ніж у ХП Бесселя і має більшу амплітуду, завдяки чому ця складова (мода) перехідного процесу швидше загасає.

Це підтверджується сімейством графіків перехідних функцій у відносному часі, зображених на рис. 10.7.

АЧХ фільтрів Бесселя подані на рис. 10.8.

З аналізу наведеного графічного матеріалу випливає, що фільтри Бесселя займають проміжну позицію між фільтрами Батерворта і фільтрами з біноміальними коефіцієнтами. Перерегулювання перехідних функцій складає менше 1%, коливальність майже відсутня, а швидкодія значно більша, ніж при використанні ХП з біноміальними коефіцієнтами.

Таблиця 10.3. Нормовані поліноми Бесселя

n	$G_{n\text{Bes}}$
2	$p^2 + 1,73p + 1$
3	$p^3 + 2,43p^2 + 2,47p + 1$
4	$p^4 + 3,12p^3 + 4,39p^2 + 3,2p + 1$
5	$p^5 + 3,81p^4 + 6,78p^3 + 6,89p^2 + 3,94p + 1$
6	$p^6 + 4,5p^5 + 9,62p^4 + 12,36p^3 + 9,92p^2 + 4,67p + 1$
7	$p^7 + 5,18p^6 + 12,93p^5 + 19,93p^4 + 20,27p^3 + 13,49p^2 + 5,41p + 1$
8	$p^8 + 5,86p^7 + 16,7p^6 + 29,9p^5 + 36,51p^4 + 30,9p^3 + 17,61p^2 + 6,14p + 1$

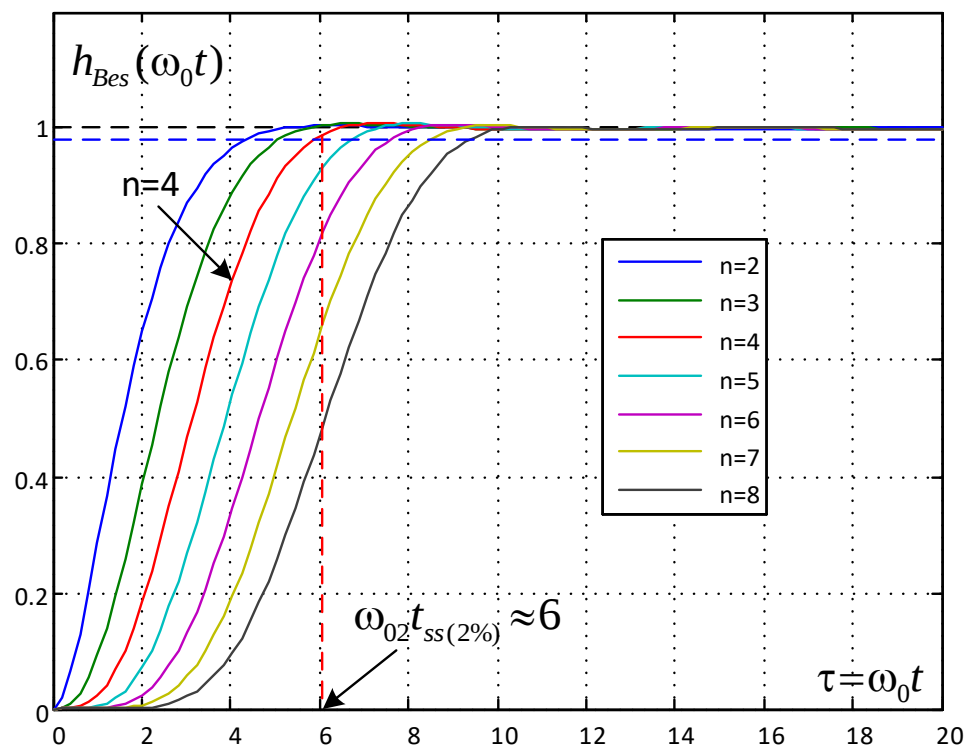


Рис. 10.7. Перехідні функції фільтрів Бесселя другого-восьмого порядків

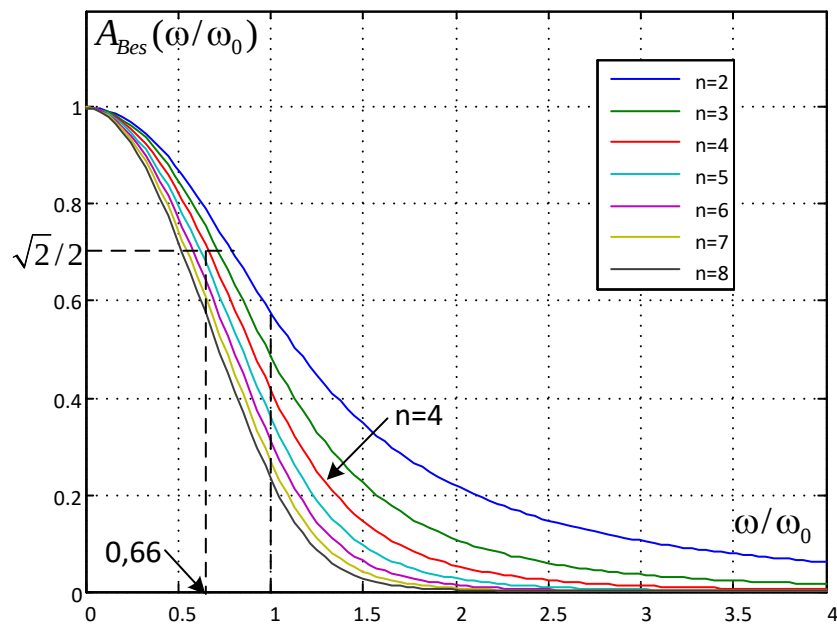


Рис. 10.8. АЧХ фільтрів Бесселя другого-восьмого порядків

10.5 Вибір характеристичної частоти стандартних поліномів

Вибір характеристичної частоти ω_0 в загальному випадку не є однозначним. При збільшенні ω_0 зростає швидкодія системи, її смуга пропускання та поліпшується точність відпрацювання задавальних дій, але погіршується завадостійкість системи, тобто підвищується вплив завад. Отже, вибір ХЧ залежить від вимог, що ставляться до синтезованої системи.

В даній курсовій роботі необхідно для об'єкта регулювання 4-го порядку синтезувати модальний регулятор з умов забезпечення бажаного перерегулювання σ , частоти пропускання ω_n , часу перехідного процесу $t_{ss(2\%)}$ і добротності за швидкістю K_v .

За величиною перерегулювання обираємо тип стандартного поліному. Як видно із графіків 10.4, 10.7 перерегулювання перехідної функції фільтра Батерворта 4-го порядку складає $\approx 11\%$, полінома Бесселя $\approx 1\%$, а «біноміального фільтра» - 0% . Отже, якщо обмежитися тільки розглянутими трьома типами стандартних поліномів, то обираємо той із них який забезпечує перерегулювання, що не перевищує заданої величини.

Наступні 3 параметри залежать від ХЧ. Тому треба розрахувати 3 значення цієї частоти, кожне з яких відповідає забезпеченню одного із 3-х бажаних параметрів, а потім обрати найбільше із цих значень.

Відносну частоту пропускання кожного з фільтрів 4-го порядку можна визначити графічно з розрахованих АЧХ з умови

$$A(\omega_{\pi}/\omega_{01})=\sqrt{2}/2\approx 0,707. \quad (10.21)$$

Отже, з рис. 10.2, 10.5, 10.7 отримуємо:

$$\frac{\omega_{\pi}}{\omega_{01bin}}=0,44, \quad \frac{\omega_{\pi}}{\omega_{01But}}=1, \quad \frac{\omega_{\pi}}{\omega_{01Bes}}=0,66,$$

звідкіля

$$\omega_{01bin} \approx \omega_{\pi}/0,44, \quad \omega_{01But} = \omega_{\pi}, \quad \omega_{01Bes} \approx \omega_{\pi}/0,66.$$

Відносний час перехідного процесу з точністю 2% визначаємо з графіків перехідних функцій:

$$\omega_{02bin}t_{ss} \approx 9, \quad \omega_{02But}t_{ss} \approx 10, \quad \omega_{02Bes}t_{ss} \approx 6,$$

звідкіля

$$\omega_{02bin} \approx 9/t_{ss}, \quad \omega_{02But} \approx 10/t_{ss}, \quad \omega_{02Bes} \approx 6/t_{ss}.$$

Як вже було визначено у першій частині посібника (підрозділ 6.3), **добротність за швидкістю K_v – це величина, зворотна до усталеної похибки керування $\varepsilon_l(t)$ (6.12) реакції системи на лінійний сигнал завдання, що змінюється з одиничною швидкістю $l(t)$ (6.3).**

Для системи з ПФ (10.1) знайдемо передавальну функцію від швидкості зміни вхідного лінійного сигналу (його першої похідної) до похибки регулювання:

$$\frac{\varepsilon_l(p)}{pl(p)} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\alpha_0}{p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0} \right) = \frac{p^{n-1} + \alpha_{n-1}p^{n-2} + \dots + \alpha_1}{p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0}. \quad (10.21)$$

З (10.21) випливає, що усталену похибку керування при одиничній швидкості зміни лінійного сигналу завдання можна розрахувати за формулою

$$\varepsilon_{l\infty} = \alpha_1 / \alpha_0. \quad (10.21)$$

Враховуючи зв'язок між коефіцієнтами ненормованого та нормованого поліномів

$$\alpha_0 = \omega_0^n, \quad \alpha_1 = \gamma_1 \omega_0^{n-1}, \quad (10.22)$$

(10.21) набуває вигляду

$$\varepsilon_{l\infty} = \gamma_1 / \omega_0; \quad (10.23)$$

відповідно

$$K_v = 1 / \varepsilon_{l\infty} = \omega_0 / \gamma_1. \quad (10.24)$$

Тоді третє значення ХЧ, необхідне для забезпечення бажаної добротності за швидкістю визначається із (10.24) для кожного з поліномів в залежності від величини нормованого коефіцієнта при першому степені оператора Лапласа γ_1 :

$$\omega_{03bin} = 4K_v, \quad \omega_{03But} = 2,61K_v, \quad \omega_{01Bes} = 3,2K_v.$$

Щоб усі з проаналізованих показників якості були не гірше заданих, остаточне значення СГК характеристичного полінома обираємо з умови:

$$\omega_0 \geq \max(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{03}). \quad (10.25)$$

Після вибору СГК можна розрахувати коефіцієнти і полюси ненормованого ХП:

$$G_4(p) = p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = p^4 + \gamma_3 \omega_0 p^3 + \gamma_2 \omega_0^2 p^2 + \gamma_1 \omega_0^3 p + \omega_0^4, \quad (10.26)$$

тобто

$$\alpha_i = \gamma_i \omega_0^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.27)$$

$$p_i = \omega_0 p_{ni}. \quad (10.28)$$

10.6 Формування стандартних поліномів у середовищі пакету *MATLAB*

Функції синтезу багатьох стандартних поліномів (точніше фільтрів з такими поліномами) містяться у директорії *MATLAB\toolbox\signal* (додаток *Signal Processing Toolbox*).

Параметри неперервного нормованого фільтра Бесселя у форматі Zero-Pole-Gain (z, p, k) визначає функція

$$[z, pn, k] = \text{besselap}(n),$$

а фільтра Батерворта –

$$[z, pn, k] = \text{buttap}(n).$$

Після цього можна знайти полюси p та коефіцієнти alpha ХП з визначеною характеристичною частотою w0:

$$p = pn * w0,$$

$$\alpha = \text{real}(\text{poly}(p)).$$

Для фільтра Батерворта існує функція, яка одразу визначає його полюси і коефіцієнти ПФ при заданій частоті пропускання, яка для даного фільтра збігається з ХЧ:

$$[z, p, k] = \text{butter}(n, w0, 's'),$$

$$[\text{betta}, \alpha] = \text{butter}(n, w0, 's').$$

Для полінома з поліноміальними коефіцієнтами не передбачено зарезервованих функцій для визначення його параметрів, але це надзвичайно просто зробити, наприклад, за допомогою такої послідовності операторів:

$$pn = \text{ones}(n, 1)$$

$$\gamma = \text{real}(\text{poly}(pn))$$

$$p = pn * w0,$$

$$\alpha = \text{real}(\text{poly}(p))$$

11 ПРИКЛАД СИНТЕЗУ СИСТЕМИ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

11.1 Постановка задачі синтезу

Необхідно у відповідності з вихідними вимогами здійснити синтез системи модального керування заданим об'єктом. Призначенням системи є відпрацювання змінюваного сигналу завдання $g(t) = \text{var}$ (задача стеження). Вимоги до системи формуються у вигляді заданих показників якості керування: 1) час регулювання $t_{ss(2\%)} \leq 0.1\text{с}$; 2) перерегулювання $\sigma \leq 10\%$; 3) добротність за швидкістю $K_v \geq 35\text{с}^{-1}$; 4) смуга пропускання частот $\omega_n \geq 75\text{с}^{-1}$.

Структурна схема об'єкта керування (ОК) зображена на рис. 11.1, де u – вхід; y – вихід; x_1, x_2, x_3 – фізичні величини (кутове положення, кутова швидкість та струм), які вимірюються відповідними давачами. Числові значення параметрів об'єкта є наступними: $k_1 = 22$; $k_2 = 10$; $k_3 = 5$; $k_4 = 1$; $k_5 = 2$; $T_2 = 0.8$.

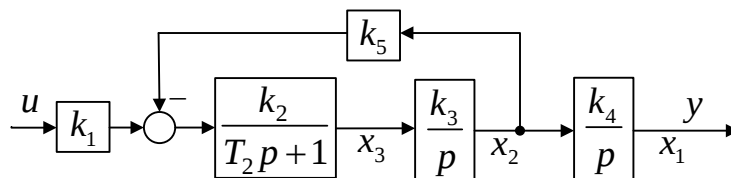


Рис. 11.1. Вихідна структурна схема об'єкту регулювання

11.2 Опис об'єкта керування у просторі стану

Як видно із схеми на рис. 11.1, порядок об'єкта $n = 3$. Оскільки три його фізичних змінних x_1, x_2, x_3 вимірюються, то є доцільним саме їх використати для замикання зворотних зв'язків при модальному керуванні. У цьому разі рівняння стану ОК слід отримати у фізичному базисі щоб можна було їх застосувати для визначення матриці коефіцієнтів зворотних зв'язків модального регулятора у цьому ж базисі. Для отримання опису об'єкта у

просторі стану деталізуємо структурну схему за методикою, описаною в п. 8.3. В результаті отримаємо СС, що зображена на рис. 11.2.

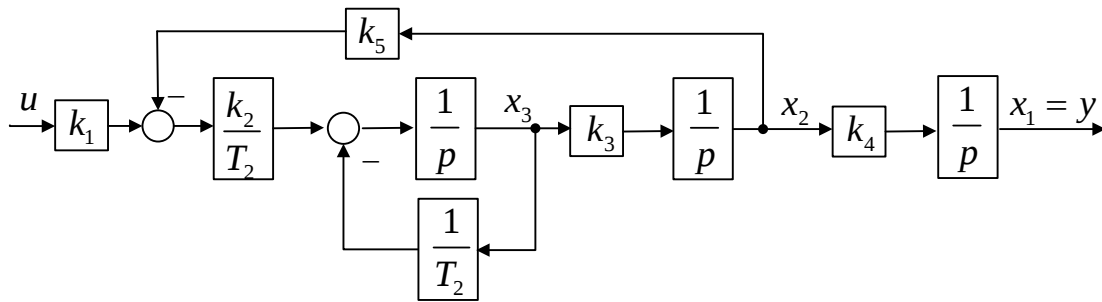


Рис. 11.2. Деталізована структурна схема об'єкту керування

Тепер безпосередньо за представленою на рис. 11.2 деталізованою схемою запишемо рівняння стану ОК у фізичному базисі

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -\frac{k_2 k_5}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1 k_2}{T_2} \end{bmatrix} u; \quad (11.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

За цією ж схемою отримаємо передавальну функцію об'єкта:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{T_2 p^3 + p^2 + k_2 k_3 k_5 p}. \quad (11.2)$$

Доцільно переконатися у коректності отриманих рівнянь стану. Це можна зробити шляхом порівняння перехідних або (краще) вагових характеристики двох моделей ОК, одна з яких описується передавальною функцією (11.2), а інша – рівняннями стану (11.1). Для цього запишемо у *MATLAB* наступну програму.

```
k1 = 22; k2 = 10; k3 = 5; k4 = 1; k5 = 2; T2 = 0.8;
```

```
A = [0, k4, 0;
```

```
0, 0, k3;
```

```
0, -k2*k5/T2, -1/T2];
```

```
B = [0; 0; k1*k2/T2]; C = [1, 0, 0]; D = 0;
```

```
ok_ss = ss (A,B,C,D);
ok_tf = tf ([k1*k2*k3*k5], [T2, 1, k2*k3*k5 0]);
impulse (model_tf, 'b-', model_ss, 'b*');
```

Результати роботи програми зображені на рис. 11.3. Як бачимо, обидві вагові характеристики співпадають. Отже отримані рівняння стану ОК відповідають його передавальній функції і є вірними.

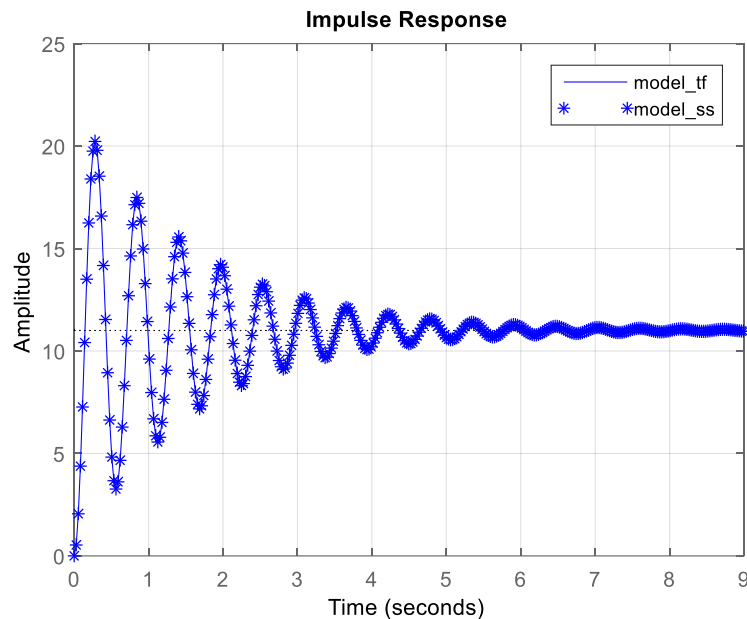


Рис. 11.3. Вагові характеристики об'єкта керування, побудовані за ПФ та описом у просторі стану

11.3 Перевірка керованості об'єкту

Для перевірки керованості ОК треба визначити матрицю керованості за (15) та обчислити її ранг. Складемо для цього програму в MATLAB.

```
Qc = [B, A*B, A^2*B];
rank_Qc=rank(Qc)
```

Перевірити правильність визначення матриці керованості можна функцією `ctrb`:

```
Qc = ctrb (A,B)
```

Результат розрахунку у командному вікні має вигляд:

```
rank_Qc =
```

```
3
```

Оскільки ранг матриці керованості об'єкта дорівнює його порядку, то він є повністю керованим. Це засвідчує можливість керування ОК за допомогою модального регулятора.

11.4 Визначення бажаного характеристичного поліному замкненої системи

Порівнюючи перехідні функції трьох розглянутих вище стандартних поліномів 3-го порядку, визначаємо, що найближче до заданого значення перерегулювання має поліном Батерворта ($\sigma \approx 11\% \leq 12\%$). Згідно з даними табл. 10.2, нормований поліном Батерворта при $n = 3$ має вигляд

$$G_{\text{знBut}}(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1 \quad (11.3)$$

Розрахуємо значення ХЧ, що задовольняють умовам забезпечення бажаної швидкодії, частоти пропускання та точності, згідно з міркуваннями, викладеними у п. 10.5:

$$\omega_{01} \approx 6 / t_{\text{ss}(2\%)} = 6 / 0,1 = 60 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{02} = \omega_{\pi} = 75 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{03} = \gamma_1 K_v = 2 \cdot 35 = 70 \text{ рад/с}.$$

Остаточний вибір робимо з відношення:

$$\omega_0 \geq \max(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}) = \max(60, 75, 70) = 75 \text{ рад/с}. \quad (11.4)$$

Припустимо, ми обрали ХЧ з невеликим запасом, тобто $\omega_0 = 80 \text{ рад/с}$. За цієї частоти визначаємо бажане характеристичне рівняння замкнутої системи

$$G_6(p) = p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3 = p^3 + 160 p^2 + 12800 p + 512000. \quad (11.5)$$

Бажані полюси є нулями полінома (11.5). Їх можна отримати виконанням оператора

$$P = \text{roots}([1 \ 160 \ 12800 \ 512000])$$

або

$$Pn = \text{roots}([1 \ 2 \ 2 \ 1]);$$

$$P = Pn * 80$$

В обох випадках буде однаковий результат:

$$\begin{aligned}
 P = & \\
 & -80.0000 + 0.0000i \\
 & -40.0000 + 69.2820i \\
 & -40.0000 - 69.2820i
 \end{aligned}$$

11.5 Синтез модального регулятора

Як було показано в розділі 9, коефіцієнти модального регулятора можна обирати, прирівнюючи один до одного відповідні коефіцієнти бажаного $G_6(p)$ та $G_d(p)$ дійсного ХП (9.12). У такий спосіб можна отримати аналітичні вирази для кожного коефіцієнта.

Для визначення дійсного ХП знайдемо матрицю стану замкненої системи A_c . Згідно з математичним описом ОК у просторі станів (11.1) його матриця стану та вектор входу мають вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -\frac{k_2 k_5}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1 k_2}{T_2} \end{bmatrix}. \quad (11.6)$$

Для одновірної системи коефіцієнти модального регулятора 3-го порядку є вектором-рядком $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$. Тоді

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ -\frac{k_1 k_2 K_1}{T_2} & -\frac{k_2 (k_5 + k_1 K_2)}{T_2} & -\frac{1 + k_1 k_2 K_3}{T_2} \end{bmatrix}. \quad (11.7)$$

Тепер знайдемо характеристичну матрицю замкненої системи:

$$p\mathbf{I} - \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} p & -k_4 & 0 \\ 0 & p & k_3 \\ \frac{k_1 k_2 K_1}{T_2} & \frac{k_2 (k_5 + k_1 K_2)}{T_2} & p + \frac{1 + k_1 k_2 K_3}{T_2} \end{bmatrix}, \quad (11.8)$$

а з неї визначимо дійсний характеристичний поліном:

$$G_d(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = p^3 + p^2 \left(\frac{1 + k_1 k_2 K_3}{T_2} \right) + p \left(\frac{k_2 k_3 (k_5 + k_1 K_2)}{T_2} \right) + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 K_1}{T_2} \quad (11.9)$$

Порівнюючи між собою дійсний і бажаний ХП, складаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 K_1}{T_2} = \alpha_0, \\ \frac{k_2 k_3 (k_5 + k_1 K_2)}{T_2} = \alpha_1, \\ \frac{1 + k_1 k_2 K_3}{T_2} = \alpha_2, \end{cases} \quad (11.10)$$

з якої легко отримуємо

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\alpha_0 T_2}{k_1 k_2 k_3 k_4}, \\ K_2 = \left(\frac{\alpha_1 T_2}{k_2 k_3} - k_5 \right) / k_1, \\ K_3 = \frac{1 + k_1 k_2 K_3}{T_2} = \frac{\alpha_2 T_2 - 1}{k_1 k_2}. \end{cases} \quad (11.11)$$

Після підстановки в (11.11) вихідних чисельних даних та знайдених коефіцієнтів бажаного ХП (11.5) маємо:

$$K_1 = 372,36; \quad K_2 = 9,2182; \quad K_3 = 0,5773. \quad (11.12)$$

Значно скоріше можна розв'язати поставлену задачу програмно з використанням в середовищі пакету *MATLAB* функції *acker*, в основу якої покладено формулу Акермана (9.13). При виконанні оператора

$$K = \text{acker}(A, B, P)$$

маємо результат

$$K = \begin{bmatrix} 372.3636 & 9.2182 & 0.5773 \end{bmatrix}$$

який повністю збігається з результатом (11.12), отриманим з аналітичних виразів (11.11).

Для перевірки правильності синтезу модального керування можна скористатися такими операторами пакету *MATLAB*

```

Ac = A-B*K;
Pd = eig (Ac)
Gd = real (poly (Pd))
disp ( ['Gd(p)=', poly2str(Gd,'p') ] )

```

Результат розрахунку у командному вікні має вигляд:

```

Pd =
-80.0000 + 0.0000i
-40.0000 + 69.2820i
-40.0000 - 69.2820i
Gd =
1.0e+05 *
0.0000 0.0016 0.1280 5.1200
Gd(p)= p^3 + 160 p^2 + 12800 p + 512000

```

Бачимо, що і полюси, і коефіцієнти дійсного і бажаного характеристичних поліномів однакові, що засвідчує коректність виконаного синтезу.

Скалярна структурна схема системи модального керування досліджуваним об'єктом зображена на рис. 11.4. Її недоліком є те, що в усталеному режимі вихідна координата y не дорівнює вхідній g . Аналізуючи СС рис. 11.4 Відомо, що в усталеному режимі ($p=0$) усі вхідні сигнали інтеграторів мають нульові значення (інакше б перехідні процеси продовжувалися). Отже, у СС рис. 11.4 $x_{2\infty}=0$, $x_{3\infty}=0$, $\varepsilon_{1\infty}=x_{3\infty}=0$. Тоді для неї справедливе рівняння:

$$g - K_1 y_{\infty} = \varepsilon_{1\infty} = 0, \quad (11.13)$$

звідкіля

$$y_{\infty} = g / K_1. \quad (11.14)$$

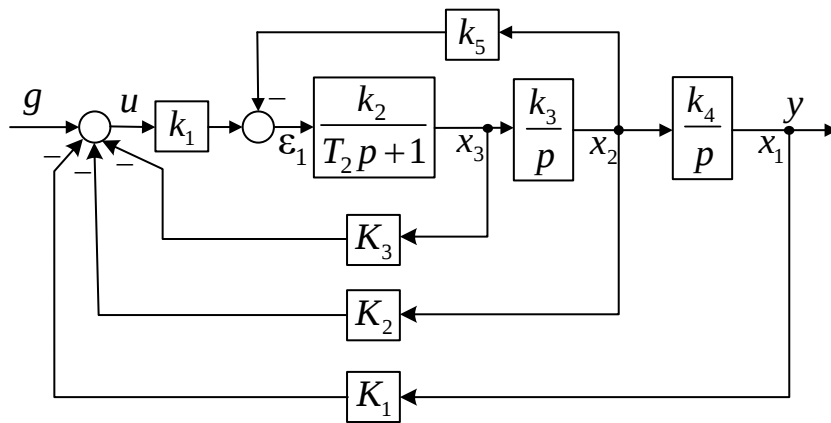


Рис. 11.4. Структурна схема системи модального керування

Проте у системі стеження, якою є синтезована САК, бажано мати за керованою величиною одиничний зворотний зв'язок. Щоб досягти цього, необхідно і вхідний сигнал помножити K_1 , тобто включити додатково на вході системи пропорційну ланку з коефіцієнтом підсилення K_1 . Після цього можна перенести зворотний зв'язок за вихідним сигналом через цю пропорційну ланку ліворуч. В результаті отримаємо систему стеження з модальним керуванням при одиничному коефіцієнті основного зворотного зв'язку, подану на рис. 11.5.

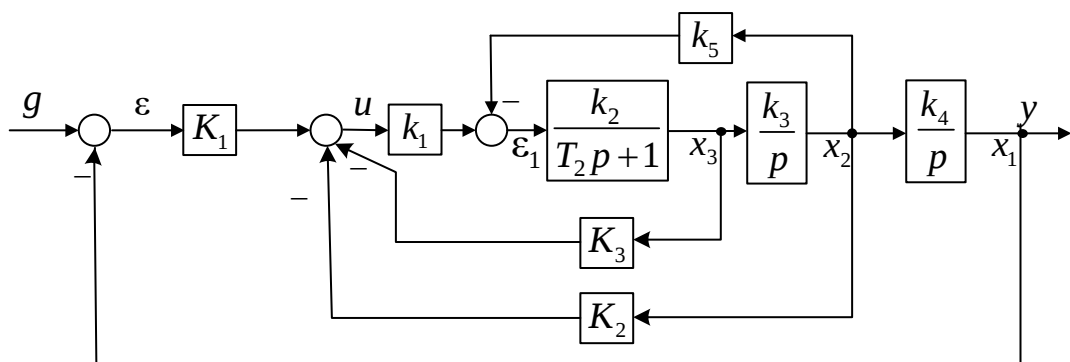


Рис. 11.5. Структурна схема системи модального керування з одиничним зворотним зв'язком за вихідним сигналом

11.6 Перевірка синтезованої системи на відповідність заданим показникам якості

Визначимо показники якості керування синтезованої системи методом математичного моделювання. Схема *Simulink*-моделі системи наведена на рис. 11.6.

У моделі за допомогою перемикачів S1, S2 вибирається завдання $g(t)$ у вигляді одного з трьох типових сигналів: стрибкоподібного (блок *Step*), лінійно-змінюваного (блок *Ramp*) та гармонічного (блок *Sine Wave*). Низка змінних величин, зокрема t, g, e, y , фіксуються у робочому просторі *MATLAB* за допомогою блоків *To Workspace*.

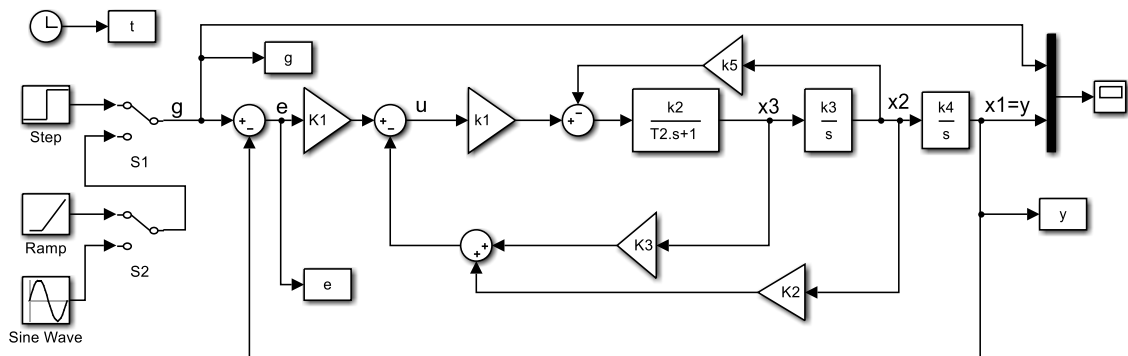
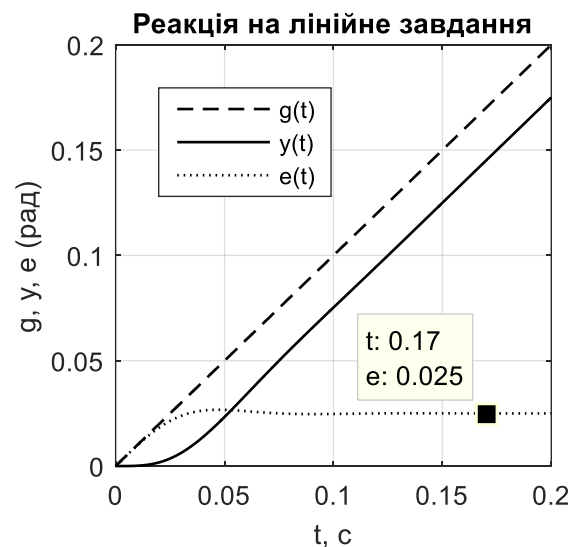
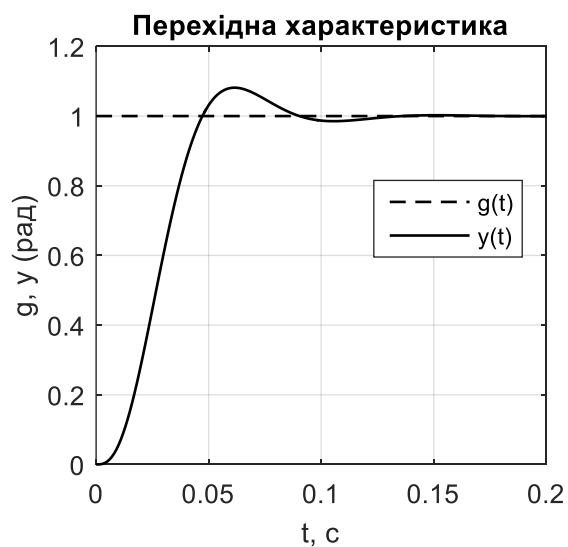


Рис. 11.6. Схема *Simulink*-моделі досліджуваної системи з різними типами вхідних сигналів

Результати досліджень показані на рис. 11.7.



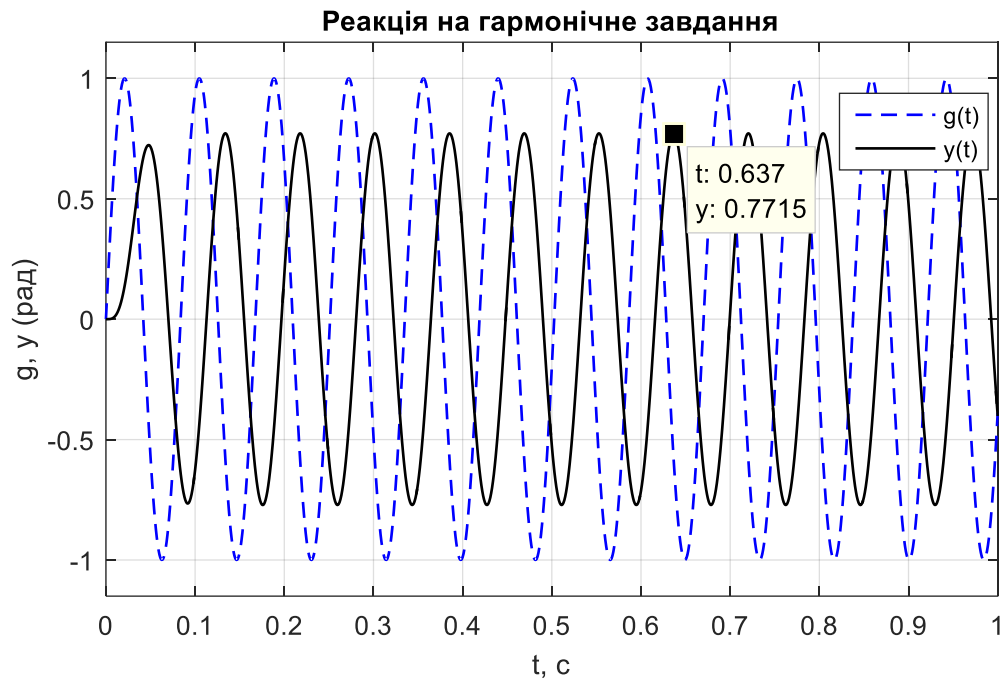


Рис. 11.7. Результати дослідження системи модального керування

З перехідної характеристики можна визначити час регулювання ($t_{ss2\%} \approx 0,075\text{с}$) та перерегулювання ($\sigma \approx 8\%$), із реакції системи на лінійний сигнал з одиничним коефіцієнтом визначаємо усталене значення швидкісної похибки ($\varepsilon_{l\infty} = 0,025\text{с}$) та розраховуємо зворотну до неї добротність за швидкістю ($K_v = 1/\varepsilon_{l\infty} = 40\text{с}^{-1}$), а з реакції системи на синусоїдальний сигнал, що має одиничну амплітуду та змінюється з частотою 75 рад/с , – амплітуду вихідного сигналу в усталеному режимі ($y_{m\infty} \approx 0,77 > \sqrt{2}/2$).

Можна ще побудувати реакцію на синусоїдальний сигнал з частотою $\omega_0 = \omega_{\pi} = 80\text{ рад/с}$ та впевнитися, що в такому випадку $y_{m\infty} = \sqrt{2}/2 \approx 0,71$.

Для зручності порівняння тих показників якості керування, які були задані у вихідних вимогах при постановці задачі синтезу, та тих, які були отримані шляхом дослідження уже синтезованої системи, зведемо їх у табл. 11.1.

Таблиця 11.1. Порівняння заданих та отриманих показників якості

Показники якості САК	Задані значення	Отримані значення
Час регулювання t_p, c	≤ 0.1	0.075
Перерегулювання $\sigma, \%$	≤ 10	8
Добротність за швидкістю K_v, c^{-1}	≥ 35	40
Частота пропускання ω_n, c^{-1}	≥ 75	80

Аналізуючи наведені в порівняльній табл. 11.1 дані, можна зробити висновок, що синтезована система модального керування за своїми показниками якості повністю задовольняє вихідні вимоги до неї.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2007. – 656 с.
2. Phillips C., Harbor R. Feedback control systems, Prentice-Hall, 2000, 658 p.
3. Ogata K. Modern control engineering, Prentice-Hall, 2010, 905 p.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., – СПб, Изд-во «Профессия», 2003. – 752 с.
5. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / В.А. Бесекерский [и др.]. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
6. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического управления : учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1977.– 592 с.
7. Теорія автоматичного керування : методичні вказівки до курсової роботи з дисципліни для студ. спеціальності «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» / Уклад. М. Г. Попович, О. В. Ковальчук, С. М. Пересада, Б. І. Приймак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2012.– 71 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2706>.
8. Теорія автоматичного керування: Частина I : Курс лекцій для студентів напряму підготовки 6.050702 "Електромеханіка" спеціальності "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" денної форми навчання / Уклад. М.Г. Попович, Б.І. Приймак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2010. – 182 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/jspui/handle/123456789/770>
9. Теорія автоматичного керування: Частина II : Курс лекцій для студ. напряму підготовки 6.050702 "Електромеханіка" спеціальності "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" денної форми навчання / Уклад. М.Г. Попович, Б.І. Приймак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2012. – 165 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/jspui/handle/123456789/2209>

10. Control System Toolbox. User's Guide, The MathWorks, Release 2015b, 2015.
11. Системы управления электроприводами: Учебное пособие / А.П. Голубь и др. – К.: УМК ВО, 1992. – 376 с.
12. Толочко О.І. Аналіз та синтез електромеханічних систем зі спостерігачами стану. – Донецьк: НОРД-ПРЕС, 2004. – 298 с.
13. Lutz H., Wendt W. Taschenbuch der Regelungstechnik. – Tun und Frankfurt am Main: Verlag Harry Deutsch, 2000. – 1148 S.
14. Лазарев Ю.Ф. МАТЛАБ 5.x. (Серия “Библиотека студента”) – К.: Издательская группа BHV, 200. – 384 с.
15. MATLAB und SIMULINK. Beispielerorientierte Einführung in die Simulation dynamischer Systeme / Josef Hoffman – Bonn Addison-Wesley-Longman. – 1998.
16. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. – Л.: Энергия, 1968. – 376 с.

ДОДАТОК А

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ПОЯСНЮВАЛЬНОЇ ЗАПИСКИ

Курсова робота має бути виконана у програмі Microsoft Word з повною підстановкою всіх розрахунків, нумерацією формул, таблиць, рисунків та використанням не менше 10-ти літературних джерел.

Шрифт – 14-й, інтервал – полуторний, абзацний відступ – 1,25 см, вирівнювання тексту – по ширині сторінки.

Формули мають бути набрані у програмі MathType 14-м шрифтом, а графіки побудовані у програмі Matlab з підписами осей 14-м шрифтом, з координатною сіткою та товщиною ліній графіків не нижче 2 пт.

Рисунки і таблиці повинні мати назви. Назва рисунку записується у вигляді «Рис. 1.1 Структурна схема досліджуваної САК» і розташовується під рисунком. Назва таблиці записується у вигляді «Таблиця 2.3. Показники якості керування для різних значень полюсів ПФ системи» і розташовується над таблицею.

Кожен пункт повинен починатися з нової сторінки із заголовком, що вирівняний посередині.

Моделювання слід виконувати у пакеті Matlab/Simulink.

Приклад титульної сторінки курсової роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЕЛЕКТРОПРИВОДУ

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

КУРСОВА РОБОТА

**Аналіз та синтез лінійної системи автоматичного
керування четвертого порядку**

Варіант №1

Виконав:

студент 2-го курсу групи ЕП-91

Ярмоленко Андрій

Перевірив:

к.т.н., доц.

Шевченко А. М.

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

ДОДАТОК Б

ФУНКЦІЇ *CONTROL SYSTEM TOOLBOX* ПАКЕТУ *MATLAB*

Розділ *Control System Toolbox* програмного пакету *MATLAB* призначений для аналізу та синтезу лінійних стаціонарних систем (*LTI-systems*). Основні функції цього розділу, що можуть бути корисними при виконанні курсової роботи, наведені в табл. Б1.

Таблиця Б1. Основні функції *Control System Toolbox*

Назва	Призначення
<i>Створення та взаємні перетворення лінійних динамічних систем</i>	
ss	Створення ss-моделі системи у просторі стану
zpk	Створення zpk-моделі системи (нулі, полюси та коефіцієнт передачі)
tf	Створення tf-моделі системи у вигляді передавальної функції
<i>Отримання властивостей моделей систем</i>	
ssdata	Отримання матриць рівнянь стану A, B, C, D
zpkdata	Отримання нулів та полюсів
tfddata	Отримання коефіцієнтів поліномів у чисельнику та знаменнику ПФ
<i>Спрощення моделей систем</i>	
minreal	Мінімальна реалізація (скорочення нулів та полюсів)
sminreal	Структурна мінімальна реалізація у просторі стану
<i>Еквівалентні перетворення структурних схем</i>	
series	Послідовне з'єднання систем (операція множення)
parallel	Паралельне з'єднання систем (операція додавання)
feedback	Охоплення системи зворотним зв'язком
<i>Динаміка систем</i>	
dsgain	Коефіцієнт передачі системи
pole	Полюси системи
zero	Нулі одновимірної системи
tzero	Нулі багатовимірної системи
pzmap	Побудова мапи розташування полюсів і нулів
damp	Інформація про власні частоти та коефіцієнти демпфування полюсів
<i>Керованість та спостережуваність систем</i>	
ctrb	Визначення матриці керованості
obsv	Визначення матриці спостережуваності
<i>Розрахунок та побудова часових характеристик систем</i>	
step	Перехідна характеристика системи
impulse	Вагова характеристика системи
initial	Реакція системи на ненульові початкові умови
lsim	Реакція системи на довільний вхідний сигнал
<i>Розрахунок та побудова частотних характеристик систем</i>	
bode	ЛАХ та ЛФХ системи – діаграми Боде
bodemag	Тільки ЛАХ системи
margin	Запаси стійкості за модулем та фазою
nyquist	АФХ системи – діаграма Найквіста
bandwidth	Частота пропускання
freqresp	Значення АФХ при заданих частотах
<i>Синтез систем керування у просторі стану</i>	
place	Синтез модального регулятора числовим способом
acker	Синтез модального регулятора за формулою Акермана

Б1 Властивості лінійних стаціонарних об'єктів

Як відомо, алгоритмічна мова програмного пакету *MATLAB* є об'єктно-орієнтованою. Для роботи з лінійними стаціонарними системами (*LTI-systems*) у пакеті *Control System Toolbox* визначено батьківський клас об'єктів – *LTI-objects* (*Linear Time Invariant objects*), який поєднує у собі лінійні неперервні (*continuous*) або дискретні (*discrete*) одновимірні (*SISO*) та багатовимірні (*MIMO*) системи з різними формами математичного опису. Відповідно до цього розроблені дочірні об'єкти (підкласи) класу *LTI*. Найбільш важливими з них є (випустимо з розгляду дискретні системи та системи із запізненням):

- 1) **ss** (*State Space*) – *LTI*-об'єкти з математичним описом (МО) у вигляді матричних диференціальних рівнянь та рівнянь виходу у просторі стану;
- 2) **zpk** (*Zero-Pole-Gain*) – розкладені на множники, що визначаються нулями та полюсами системи;
- 3) **tf** (*Transfer Function polynomial*) – *LTI*-об'єкти у формі передавальної функції, чисельник і знаменник якої представлені у вигляді поліномів.

Для поєднання всіх параметрів та властивостей (*Properties*) лінійної стаціонарної системи у єдине ціле при розробці *LTI*-об'єктів використано тип даних, що зветься масивом структур. Структури можуть отримувати у собі різнотипні поля (*fields*), до яких, у загальному вигляді, звертаються за форматом

StructureName.FieldsName

який відповідно до специфіки *LTI*-об'єктів набуває виду

ObjectName.PropertiesName

При поєднанні структур у двовірний масив (матрицю) першому індексу (номеру рядка) відповідає номер виходу системи, а другому індексу (номеру стовпця) – номер входу, отже звернення

ObjectName (i, j)

виділяє з багатомірної системи (*MIMO*) одновірну підсистему (*SISO*), яка характеризує взаємозв'язок i -го виходу багатомірної системи з її j -м входом.

Властивості *LTI*-об'єктів підрозділяються на загальні для всіх підкласів, які називаються родовими, та специфічні властивості, що характеризують лише конкретний підклас.

Інформацію про родові властивості *LTI*-об'єктів можна отримати в середовищі *MATLAB* командою `ltiprops`, а про специфічні властивості підкласів – командами `ltiprops ss`, `ltiprops tf`, `ltiprops zpk`.

До родових властивостей *LTI*-об'єктів належать:

Ts – період дискретності або переривання або квантування за часом (від англ. *Sample Time*) у секундах, який для неперервних систем має значення $T_s = 0$ (за замовчанням);

InputName, **OutputName** – імена входних та вихідних сигналів; задаються при наявності одного входу або виходу рядком символів, наприклад, 'Струм', а при декількох входах або виходах – векторами комірок рядків символів, наприклад, {'M', 'Iя', 'W'}; значення елементів векторів за замовчанням – '' (пустий рядок);

Notes – коментар користувача у вигляді рядку символів з відповідним текстом.

Специфічні властивості *SS*-об'єктів:

A – матриця стану; **B** – матриця входу; **C** – матриця виходу; **D** – матриця прямого зв'язку входу з виходом; **StateName** – імена змінних стану у вигляді вектору комірок рядків символів.

Специфічні властивості *zpk*-об'єктів:

Z – нулі системи; **P** – полюси системи; **K** – коефіцієнт ПФ у вигляді розкладення на нулі-полюси; **Variable** – ім'я оператора, за допомогою якого створені передавальні функції; може приймати значення 's', 'p', 'z', 'z^-1', або 'q'; значення за замовчанням для неперервної системи – 's'.

Специфічні властивості *tf*-об'єктів:

num – коефіцієнти поліномів у чисельниках ПФ; den – коефіцієнти характеристичного поліному системи; Variable – ім'я оператора, за допомогою якого створені передавальні функції; може приймати значення 's', 'p', 'z', 'z⁻¹', або 'q'.

Б2 Створення лінійних стаціонарних об'єктів у системі *MATLAB*

MATLAB-функції, за допомогою яких можна створити *LTI*-об'єкти в різних формах їх математичного опису, перелічені у табл. Б1. Ці ж самі функції призначені і для взаємного перетворення існуючих об'єктів з однієї форми в іншу.

При створенні неперервних систем до функцій *ss*, *zpk*, *tf* можна звертатися за таким форматом:

sys = ss (A, B, C, D)

sys = zpk (Z, P, K)

sys = tf (num, den)

Усі перераховані формати можуть бути доповнені парами властивість-значення ('PropertyName', value). Ім'я властивості (PropertyName) може бути поданим у повному або у скороченому вигляді, достатньому для ідентифікації параметру. Наприклад, при визначенні змінної Лапласа замість повного імені 'Variable' можна використати скорочене ім'я 'Var'. В іменах властивостей можна використовувати як великі, так і малі літери англійського алфавіту.

За допомогою функцій *tf* та *zpk* можна визначити будь-яку змінну як змінну Лапласа:

var = tf ('s'), var = zpk ('s')

Замість літери 's' у правій частині операторів можна використовувати літери 'p', 'q' та 'z'.

Після визначення такої змінної одновимірні *tf*- та *zpk*-об'єкти можна утворювати звичайним присвоюванням виразів ПФ без застосування функцій *tf* та *zpk*. Наприклад, оператор

$$h = tf([1 \ 0], [1 \ 2 \ 10])$$

утворює *LTI-SISO*-об'єкт з ім'ям *h* у вигляді передавальної функції

Transfer function:

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 10}$$

Такого ж результату можна досягти виконанням операторів

$$p = tf('s'); \quad h = p / (p^2 + 2*p + 10)$$

Продемонструємо на прикладах методику створення багатовимірних об'єктів.

Приклад Б1

Послідовність операторів, у якій використовуються масиви комірок

$$\begin{aligned} \text{num} &= \{ [1 \ 3]; [1 \ 2] \}; \\ \text{den} &= \{ [1 \ 1]; [1 \ 4 \ 5] \}; \\ H &= tf(\text{num}, \text{den}) \end{aligned}$$

утворює *LTI*-об'єкт *H* з одним входом та двома виходами, що описується передавальними функціями

Transfer function from input to output...

$$\begin{aligned} \#1: & \frac{s + 3}{s + 1} \\ \#2: & \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 5} \end{aligned}$$

Точно такий же результат можна отримати виконанням операторів

$$\begin{aligned} h11 &= tf([1 \ 3], [1 \ 1]); \\ h21 &= tf([1 \ 2], [1 \ 4 \ 5]); \\ H &= [h11; h21] \end{aligned}$$

де використано вертикальну конкатенацію двох одновимірних об'єктів.

Приклад Б2

Утворення *zpk*-об'єкту з двома безіменними входами та двома виходами з іменами “*Rs*” та “*Mu*”, що має матричну передавальну функцію

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \frac{-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & w_{12}(s) = \frac{3(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ w_{21}(s) = \frac{2(s^2+2s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & w_{22}(s) = 0 \end{bmatrix}$$

можна здійснити за допомогою такої послідовності операторів:

```
Z = { [ ], [-1+i, -1-i]; -5, [ ] };
P1 = { [-1 -2 -3] };
P = [ P1 P1; P1 P1];
K = [-1 3; 2 0];
W = zpk (Z, P, K, 'OutputName', {'Rs' 'Mu'})
```

У результаті виконання цього програмного фрагменту на екран буде виведена така інформація:

Zero/pole/gain from input 1 to output...

```
Rs: -----
      -1
      (s+1)(s+2)(s+3)
```

```
Mu: -----
      2(s^2 + 2s + 2)
      (s+1)(s+2)(s+3)
```

Zero/pole/gain from input 2 to output...

```
Rs: -----
      3(s+5)
      (s+1)(s+2)(s+3)
```

```
Mu: 0
```

БЗ Отримання інформації про лінійні стаціонарні об'єкти

Отримати інформацію про окремі властивості *LTI*-об'єктів можна такими шляхами:

- за допомогою функції **get**;
- за допомогою функцій **ssdata**, **tfddata**, **zpkdata**;
- зверненням до полів структури.

До функції **get** можна звертатися за такими форматами:

```
Value = get (sys, 'PropertyName')
```

```
Struct = get (sys)
```

```
get (sys)
```

Функція `Value = get (sys, 'PropertyName')` призначена для визначення інформації про властивість `'PropertyName'` *LTI*-об'єкта з ім'ям `sys`. Рядок `'PropertyName'` може бути або повною, або скороченою назвою тієї чи іншої властивості об'єкту, набраною в будь якому реєстрі.

Функція `Struct = get(sys)` дозволяє одразу опитати всі властивості об'єкту та зберегти інформацію в структурі `Struct`.

Функція `set(sys,'Property')` виводить перелік припустимих значень властивості `'Property'`.

Функція `get(sys)` виводить перелік усіх властивостей моделі з їх дійсними значеннями (якщо об'єкт існує), або перелік усіх припустимих значень властивостей невизначеного досі об'єкту.

Специфічні властивості одновимірної системи простіше за все визначати за допомогою функцій другої групи:

`[A, B, C, D] = ssdata (sys,'v')`

`[Z, P, K] = zpkdata (sys,'v')`

`[num, den] = tfdata (sys,'v')`

Кількість вихідних параметрів можна зменшувати, послідовно відкидаючи їх, починаючи з останнього. Звернення до функцій без вихідних (лівосторонніх) параметрів присвоює скалярній зарезервованій змінній `ans` значення першого з лівосторонніх параметрів.

Б4 Редагування лінійних стаціонарних об'єктів у системі *MATLAB*

Редагування *LTI*-об'єктів можна виконати двома способами:

- за допомогою команди **set**;
- присвоюванням значень елементам структури.

Функція `set` встановлює властивості *LTI*-об'єктів і має такий синтаксис:

`set (sys,'Property1',Value1,'Property2',Value2,...)`

Б5 Взаємні перетворення *LTI*-моделей у системі *MATLAB*

Взаємні перетворення *LTI*-моделей з одного підкласу до іншого виконуються тими ж самими функціями, що і їх створення:

```
sys_ss = ss(sys)
sys_tf = tf(sys)
sys_zpk = zpk(sys)
```

Алгоритм перетворення в *tf*-підклас використовує функцію *poly* для моделей підкласу *zpk* та функції *tzero* і *pole* для моделей класу *ss*.

Мінімальну реалізацію *LTI*-моделей (декомпозицію Калмана) можна отримати за допомогою функції *minreal*, яка виконує скорочення однакових нулів та полюсів системи:

```
sys_min = minreal (sys)
sys_min = minreal (sys, tol)
[sys_min, P] = minreal (sys, tol)
```

де *tol* – максимально припустима похибка перетворення (за замовчанням *tol* = *sqrt* (*eps*), *eps* – зарезервована константа *MATLAB*, що дорівнює 2.2204e-016).

У середовищі пакету *MATLAB* поки що існує можливість користуватися також функціями перетворення, що були розроблені для більш ранніх версій, у яких ще не існувало даних типу “*LTI*-об’єкт”. До них належать функції *ss2zp*, *ss2tf*, *tf2ss*, *zp2ss*, *tf2zp*, *zp2tf* та *ss2ss*, які мають такий синтаксис:

```
[A, B, C, D] = zp2ss (z, p, k)
[A, B, C, D] = tf2ss (num, den)
[z, p, k] = ss2zp (A, B, C, D, iu)
[num, den] = ss2tf (A, B, C, D, iu)
[num, den] = zp2tf (Z, P, K)
[Z, P, K] = tf2zp (num, den)
```

де *iu* – номер входу.

У даному випадку zp - та tf -моделі можуть мати один або декілька виходів, але тільки один вхід.

Б6 Функції аналізу LTI -об'єктів у системі $MATLAB$

До складу пакету прикладних програм *Control System Toolbox* системи $MATLAB$ включені функції для аналізу динамічних характеристик LTI -моделей, таких, як полюси і нулі, коефіцієнт демпфування, коефіцієнт передачі, частотні характеристики, максимальне значення модуля частотної характеристики, керованість і спостережуваність.

Б7 Розрахунок та побудова реакцій систем на типові вхідні сигнали

Поширення *Control System Toolbox* дозволяє розраховувати і побудувати перехідні та вагові характеристики, реакцію системи на ненульові початкові умови і виконати моделювання лінійних систем при довільних зовнішніх діях. Перелік $MATLAB$ -функцій, пов'язаних з розрахунком та графічним відображенням перехідних процесів у лінійних стаціонарних системах, наведено у табл. Б1.

Функції *initial*, *step*, *impulse* та *lsim* мають такі загальні властивості:

- при зверненні до них з лівосторонніми (вихідними аргументами) вони розраховують значення відповідних сигналів без побудови графіків, а при зверненні до них без вихідних аргументів – будують відповідні графіки без збереження у пам'яті результатів розрахунку;
- вихідними аргументами функцій можуть бути $[y, t, x]$, $[y, t]$ та y , де y – масив вихідних координат, t – вектор-стовпець моментів часу, x – масив змінних стану;
параметри y та x є тривимірними; для масиву y перший індекс визначає
- момент часу, другий – номер виходу, а третій – номер входу;
- параметр t може бути як присутнім, так і відсутнім у списку вхідних (правосторонніх) аргументів;
- параметр t у списку вхідних аргументів може бути заданим скаляром

t_end або рівномірно розподіленим вектором $t0:dt:t_end$, де t_end – час закінчення розрахунку, $t0$ – час початку розрахунку (за замовчанням $t0=0$), dt – крок зміни часу (за замовчанням він назначається автоматично на підставі аналізу параметрів моделі); при відсутності параметра t у списку вхідних аргументів всі його складові назначаються відповідною функцією системи *MATLAB* автоматично;

- для будь-якої багатомірної системи кожний графік від деякого входу до деякого виходу будується у власній системі координат власного підвікна загальної графічної фігури.

Аналогічні графіки можна отримати і за допомогою оболонки *LTI Viewer*.

Якщо спочатку розрахувати перехідні функції, а потім побудувати їх командою `plot`, то можна гнучкіше змінювати вигляд графіків.

Розраховані значення перехідних функцій можна використати для визначення показників якості перехідних процесів.

Аналогічно до перехідних функцій можна отримати і вагові функції досліджуваної системи.

Команду `initial` можна застосовувати тільки для *ss*-об'єктів.

Для використання команди `lsim` треба до вхідних параметрів додати ще узгоджений з вектором часу t вектор вхідного сигналу u . Одним із способів формування цього сигналу є використання функції `gensig`.

Б8 Розрахунок та побудова частотних характеристик

Перелік найбільш важливих функцій для дослідження частотних характеристик *LTI*-моделей наведено у табл. А1.

Функції `bode` та `nyquist` мають такі загальні властивості:

- при зверненні до них з лівосторонніми (вихідними) аргументами вони розраховують значення відповідних сигналів без побудови графіків, а при зверненні до них без вихідних аргументів – будують відповідні графіки без збереження у пам'яті результатів розрахунку;

- розміри масивів *mag* (амплітуда) та *phase* (фаза) дорівнюють “кількість виходів” × “кількість входів” × “довжина вектору частот”;
- параметр *w* (частота) може бути як присутнім, так і відсутнім у списку вхідних (правосторонніх) аргументів;
- параметр *w* у списку вхідних аргументів може бути заданим вектором рівномірно розподіленим у логарифмічному масштабі у такий спосіб: *w = logspace(w0, w_end)* або *{w0, w_end}* (за замовчанням він назначається автоматично на підставі аналізу параметрів моделі);
- параметри досліджуваної системи можуть бути задані у початку списку вхідних аргументів у вигляді *LTI*-об’єкту будь-якого підкласу *sys*;

Вихідними аргументами функції *bode* можуть бути [*mag, phase, w*], [*mag, phase*], та *mag*, а вихідними аргументами функції *nyquist* – параметри [*Re, Im, w*], [*Re, Im*], та *Re*, де *mag* – масив амплітуд частотних характеристик у абсолютних одиницях (не в дБ), *phase* – масив фаз частотних характеристик у градусах, *w* – вектор-стовпець частот у рад/с, *Re* – дійсні складові годографу Найквіста, *Im* – уявні складові годографу Найквіста;

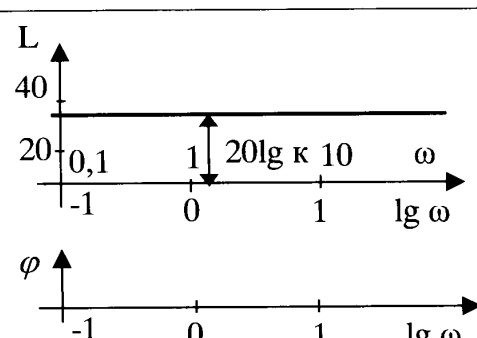
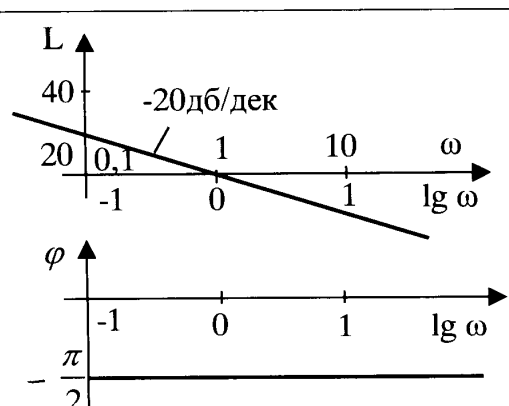
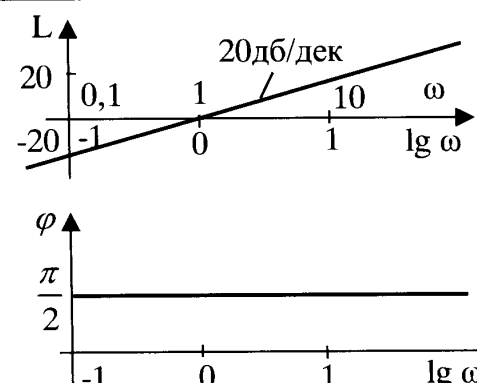
Функція *margin* обчислює запаси стійкості за фазою і модулем, а також відповідні частоти для *LTI*-моделей одномірних розімкнених систем. Значення запасів стійкості вказують, на скільки частотна характеристика розімкненої системи віддалена від критичної точки (-1, j0).

Функція *margin*, яку можна застосовувати тільки для *SISO*-об’єктів, без лівосторонніх аргументів будує логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи з вказівкою запасів її стійкості. Вихідними аргументами її у максимальній кількості є [*Gm, Pm, Wcg, Wcp*], де *Gm* – запас стійкості за амплітудою, *Pm* – запас стійкості за фазою, *Wcg* – частота перетину ЛФХ рівня -180°, *Wcp* – частота зрізу. Якщо існують декілька точок перетину амплітудною характеристикою осі частот і фазовою рівня -180°, то повертаються найменші значення відповідних запасів стійкості.

ДОДАТОК В

ЛОГАРИФМІЧНІ ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ЕЛЕМЕНТАРНИХ СПІВМНОЖНИКІВ ПЕРЕДАВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Співмнож- ник	ЛАХ і ЛФХ	Рівняння фазової характеристики
k		$\varphi(\omega) = 0$
$\frac{1}{p}$		$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
p		$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

$Tp+1$		$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} T\omega$
$\frac{1}{Tp+1}$		$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega$
$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ при $\frac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$
$\frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$ при $\frac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$