

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ

І. В. Трубаров

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ

ЧАСТИНА 2. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Інженерія та програмування інфокомунікацій», «Інформаційно-
комунікаційні технології», «Системи електронних комунікацій та Інтернету речей»
спеціальності G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та
радіотехніка»

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 621.391
Т77

Автор: *Трубаров Ігор Володимирович*, канд. техн. наук, доц.

Рецензент: *Трубін О.О.*, д.т.н., старший науковий співробітник, професор кафедри електронних комунікацій та Інтернету речей НН ІТС КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор: *Явіся В.С.*, к.т.н, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 11.09.2026 р.)
за поданням вченої ради НН ІТС
(протокол № 7 від 30.06.2026 р.)*

Трубаров І.В.
Т77 Основи теорії кіл. Частина 2. Нелінійні електричні кола [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмами «Інженерія та програмування інфокомунікацій», «Інформаційно-комунікаційні технології», «Системи електронних комунікацій та Інтернету речей» спец. G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка» / І. В. Трубаров ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 79 с.

Навчальний посібник до практичних занять призначений для здобувачів, які вивчають освітній компонент “Основи теорії кіл. Частина 2. Нелінійні електричні кола”. Він складений відповідно до силабусу освітнього компонента і призначений для використання на практичних заняттях і під час самостійної роботи. Матеріал посібника розділений на 12 розділів, кожний з яких відповідає темі одного практичного заняття. Матеріали посібника також будуть корисними у навчальній діяльності аспірантів і викладачів.

УДК 621.391

Реєстр. № НП 26/27-015. Обсяг 2,25 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І. В. Трубаров, 2026
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

Зміст

Вступ	5
Практичне заняття №1 Режими аналізу нелінійних електричних кіл у часовій області. Лінеаризація характеристик нелінійних елементів	6
1. Мета роботи	6
2. Завдання на заняття	6
Практичне заняття №2 Апроксимація характеристик нелінійних приладів за допомогою методів кусково-лінійної та поліноміальної інтерполяції	12
1. Мета роботи	12
2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття	12
3. Завдання на заняття	13
3.1. Завдання №1	13
3.2. Завдання №2	16
Практичне заняття №3 Апроксимація характеристик нелінійних приладів за допомогою лінійної та нелінійної регресії	22
1. Мета роботи	22
2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття	22
3. Завдання на заняття	22
3.1. Завдання №1	22
3.2. Завдання №2	25
Практичне заняття №4 Тест №1	30
1. Мета роботи	30
2. Завдання на заняття	30
Практичне заняття №5 Аналіз спектра реакції нелінійного приладу у разі дії гармонічного та бігармонічного сигналу. Метод п'яти ординат	31
1. Мета роботи	31
2. Завдання на заняття	31
2.1. Завдання №1	31
2.2. Завдання №2	33
2.3. Завдання №3	36
Практичне заняття №6 Перетворення спектрів сигналів у нелінійних колах	38
1. Мета роботи	38
2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття	38
3. Завдання на заняття	38
3.1. Завдання №1	38
3.2. Завдання №2	42
3.3. Завдання №3. Спектр гармонічного сигналу	43
3.4. Завдання №4	43
3.5. Завдання №5	44
3.6. Завдання №6. Оцінка нелінійних спотворень підсилювача	47

Практичне заняття №7 Тест №2	49
1. Мета роботи	49
2. Завдання на заняття.....	49
Практичне заняття №8 Розрахунок підсилювального каскаду на біполярному транзисторі в режимі малого сигналу.....	50
1. Опис завдання.....	50
2. Розрахунок параметрів еквівалентної схеми заміщення транзистора для випадку лінійного режиму роботи	50
3. Розрахунок параметрів схеми підсилювального каскаду.....	53
Практичне заняття №9 Аналіз нелінійного резистивного кола. Метод робочої точки. Отримання вхідної характеристики нелінійного кола.....	55
1. Мета роботи	55
2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття	55
3. Завдання на заняття.....	55
3.1. Завдання №1	57
3.2. Завдання №2	58
3.3. Завдання №3	60
3.4. Завдання №4	62
3.5. Завдання №5	64
Практичне заняття №10 Метод робочої точки. Метод Ньютона-Рафсона.....	69
1. Мета роботи	69
2. Завдання на заняття.....	69
2.1. Завдання №1	69
2.2. Завдання №2	71
2.3. Практика для завдання №2.....	75
Практичне заняття №11 Тест №3	77
1. Мета роботи	77
2. Завдання на заняття.....	77
Практичне заняття №12 Модульна контрольна робота	78
1. Мета роботи	78
2. Завдання на заняття.....	78
Література для підготовки.....	79

Вступ

Дисципліна «Основи теорії кіл. Частина 2. Нелінійні електричні кола», який викладається студентам, що навчаються за освітніми програмами «Інженерія та програмування інфокомунікацій», «Інформаційно-комунікаційні технології», «Системи електронних комунікацій та Інтернету речей», присвячений питанням аналізу та побудови нелінійних електричних кіл. Дисципліна «Основи теорії кіл» є однією з базових фундаментальних дисциплін підготовки фахівців за даними освітніми програмами. Вона формує теоретичну основу для розуміння процесів передавання, перетворення та оброблення електричних сигналів, що лежать в основі функціонування сучасних телекомунікаційних систем.

Будь-яка телекомунікаційна система — від простого провідного каналу зв'язку до складних мереж мобільного чи супутникового зв'язку — у своїй фізичній основі складається з електричних кіл. Передавання інформації у таких системах здійснюється за допомогою електричних сигналів, які поширюються через провідники, електронні компоненти, фільтри, підсилювачі, антенно-фідерні тракти та інші елементи апаратури. Для аналізу, розрахунку та проєктування цих пристроїв необхідно знати закономірності функціонування електричних кіл.

Метою дисципліни є формування у студентів системи знань про основні закони електричних кіл, методи їх аналізу та розрахунку, а також набуття навичок практичного дослідження електричних процесів. Розуміння законів функціонування електронних схем дозволяє майбутнім фахівцям:

- аналізувати роботу електронних і телекомунікаційних пристроїв;
- правильно інтерпретувати електричні процеси у каналах передавання сигналів;
- виконувати інженерні розрахунки параметрів електричних кіл;
- використовувати методи моделювання та експериментального дослідження електричних систем.

Важливою складовою вивчення дисципліни є лабораторні роботи, під час яких студенти досліджують основні явища та закономірності, що розглядаються у теоретичному курсі. Виконання лабораторних робіт дозволяє закріпити теоретичні знання, набуті практичних навичок вимірювання електричних величин, роботи з вимірювальними приладами та аналізу результатів експериментів.

У даному посібнику викладено вказівки до виконання завдань, що розглядаються на практичних заняттях в рамках дисципліни. Основною метою практичних занять є отримання студентами практичних навичок здійснення розрахунків електричних кіл із застосуванням програмних засобів їх автоматизації.

Матеріал посібника організовано у відповідності до плану проведення практичних занять в рамках курсу. Кожний розділ даного посібника відповідає одному практичному заняттю. Опис кожного практичного заняття включає в себе формулювання завдань, детальний їх аналіз та розв'язання. Матеріали даного посібника можуть бути використані як в аудиторній роботі, так і для самостійної роботи.

Виконання більшості практичних робіт передбачає виконання громіздких розрахунків для аналізу нелінійних електричних кіл, що передбачає наявність засобів автоматизації обчислень. В даному курсі передбачається реалізація обчислень за допомогою програмного забезпечення MATLAB.

Режими аналізу нелінійних електричних кіл у часовій області. Лінеаризація характеристик нелінійних елементів

1. Мета роботи

1. Засвоїти режими аналізу нелінійних електричних кіл та їхні відмінності.
2. Засвоїти межі застосовності кожного режиму аналізу.
3. Отримати практичні навички складання рівнянь для аналізу нелінійних електричних кіл у різних режимах.
4. Навчитись застосовувати лінеаризацію нелінійних характеристик елементів кіл для спрощення їхнього аналізу.

2. Завдання на заняття

Необхідно проаналізувати в режимі холостого ходу (XX) електричне коло (див. рис. 1.1), що містить один нелінійний резистор (НР) – діод.

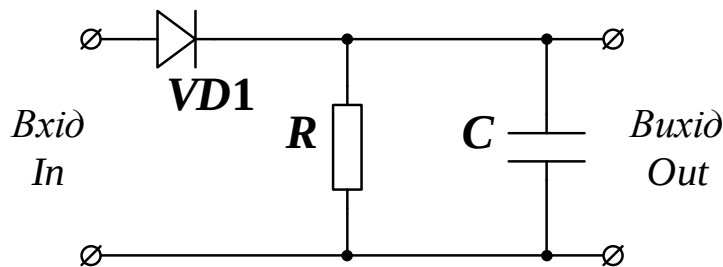


Рис. 1.1

Вольт-амперна характеристика (ВАХ) діода, тобто залежність струму i_d , що протікає через нього, від напруги u_d , яку до нього прикладено, визначається аналітично такою функцією:

$$i_d = f(u_d) = I_0(e^{ku_d} - 1),$$

де I_0, k – константи.

В ході виконання аналізу кола необхідно:

1. Скласти систему рівнянь кола у загальному вигляді, тобто у режимі великого сигналу в часовій області.
2. Скласти систему рівнянь для аналізу кола в статичному режимі.
3. Скласти систему рівнянь для аналізу кола в динамічному режимі у випадку малого сигналу в часовій області.

Завдання №1. Скласти граф кола.

Для подальшого аналізу кола додамо до схеми джерело вхідного сигналу та введемо необхідні позначення, наведені на рис. 1.2.

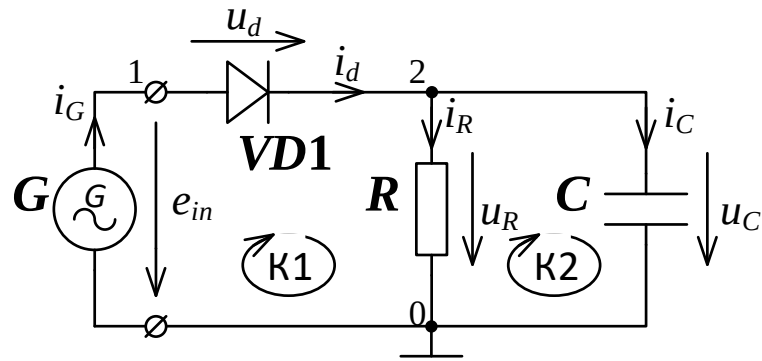


Рис. 1.2

На схемі можемо бачити такі елементи: ідеальне джерело змінної напруги **G**, діод **VD1**, лінійні опір **R** та ємність **C**. Джерело створює змінну в часі входну напругу $e_{in} = e_{in}(t)$.

Під час складання графу кола слід зважати, що будь-яка ділянка провідника, що поєднує дві точки та **не містить жодного елемента**, належить одному **вузлу кола**, тобто на графі відповідатиме **одній вершині**.

Як видно зі схеми, кількість вузлів у колі складає $N_{nodes} = 3$, кількість віток складає $N_{edges} = 4$. Кількість незалежних контурів дорівнює $N_{edges} - N_{nodes} + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$. На схемі вони позначені як K1 та K2. Враховуючи умовні позначення, складемо граф кола (див. рис. 1.3).

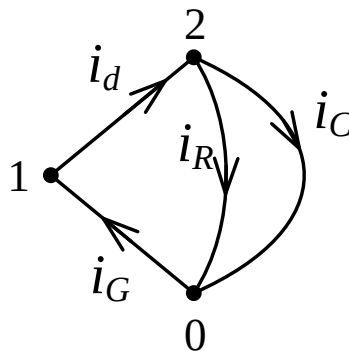


Рис. 1.3

Завдання №2. Скласти систему рівнянь, що описує коло, у режимі великого сигналу в часовій області.

Система рівнянь, що описує коло, складається таким чином:

- 1) складаються $N_{nodes} - 1$ рівнянь за 1-м законом Кірхгофа;
- 2) складаються $N_{edges} - N_{nodes} + 1$ рівнянь за 2-м законом Кірхгофа;
- 3) у складені вище рівняння підставляються залежності між струмами та напругами у кожній вітці.

Тоді для кола, що аналізується, за 1-м та 2-м законами Кірхгофа можемо записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} i_d - i_G = 0; & \text{для вузла 1} \\ i_d - i_R - i_C = 0; & \text{для вузла 2} \\ u_d + u_R = e_{in}; & \text{для контура 1} \\ u_C = u_R. & \text{для контура 2} \end{cases}$$

Далі запишемо співвідношення, що пов'язують струми і напруги у вітках схеми:

$$i_d = f(u_d) = I_0(e^{ku_d} - 1);$$

$$i_R = \frac{u_R}{R};$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Підставляючи дані співвідношення у складену вище систему рівнянь (спочатку , отримаємо:

$$\begin{cases} i_G = i_d = I_0(e^{ku_d} - 1); \\ i_d = i_R + i_C = \frac{u_R}{R} + C \frac{du_C}{dt} = I_0(e^{ku_d} - 1); \\ u_d + u_R = e_{in}; \\ u_C = u_R. \end{cases} \quad (1.1)$$

Таким чином, маємо систему з $N_{edges} = 4$ рівнянь відносно 4-х незалежних змінних: u_d, u_R, u_C, i_G .

Примітка. Варто пам'ятати, що система рівнянь складається для найбільш загального випадку довільних, змінних у часі, сигналів. Таким чином, усі «змінні» рівняння є насправді функціями часу і задача аналізу кола полягає у знаходженні саме часових залежностей струмів і напруг у вітках кола.

Можна бачити, що складена система містить:

- 2 лінійних алгебричних рівняння: $u_d + u_R = e_{in}; u_C = u_R$;
- 1 нелінійне алгебричне рівняння: $i_G = I_0(e^{ku_d} - 1)$;
- 1 нелінійне диференціальне рівняння: $\frac{u_R}{R} + C \frac{du_C}{dt} = I_0(e^{ku_d} - 1)$.

Загальний підхід до подальшого спрощення системи рівнянь полягає у зменшенні кількості рівнянь. При цьому залишаються ті змінні, перші похідні яких входять у систему. Дані змінні називають **змінними стану** кола. Решта змінних виключається. В результаті отримують систему з меншої кількості рівнянь, кожне з яких містить, окрім алгебричних залежностей, лише **перші похідні від змінних стану**.

У нашому випадку бачимо, що можна звести отриману систему рівнянь лише до одного нелінійного диференціального рівняння 1-го порядку. Нехай незалежною змінною буде u_C , тоді виразимо решту напруг через неї:

$$u_R = u_C;$$

$$u_d = e_{in} - u_C.$$

Підставляючи дані співвідношення до 2-го рівняння системи, маємо:

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} u_C = I_0(e^{k(e_{in}-u_C)} - 1).$$

Наявність аналітичного розв'язку у даного рівняння залежить від виду функції, що визначає вхідний сигнал: $e_{in} = e_{in}(t)$.

Розв'язавши дане рівняння, тобто отримавши функцію $u_c(t)$, зможемо знайти решту струмів та напруг у всіх вітках схеми за виразами, отриманими вище.

Дане рівняння можна записати й відносно іншої змінної. Наприклад, нехай тепер незалежною змінною буде u_d , тоді $u_c = e_{in} - u_d$ й дане рівняння набуде вигляду:

$$C \frac{du_d}{dt} + \frac{1}{R} u_d = \frac{1}{R} e_{in} - f(u_d),$$

або

$$C \frac{du_d}{dt} + \frac{1}{R} u_d = \frac{1}{R} e_{in} - I_0(e^{ku_d} - 1). \quad (1.2)$$

Завдання № 3. Скласти систему рівнянь, що описує коло в статичному режимі.

У статичному режимі (англ. DC mode – direct current mode) усі струми та напруги **постійні, тобто не залежать від часу**. Вхідний сигнал також є постійним: $e_{in} = E = const$. Це означає, що усі похідні від них рівні нулю. Таким чином, маємо:

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = 0.$$

Примітка. У теорії електричних кіл прийнято використовувати такі позначення:

- Маленькі літери використовують для миттєвих значень величин у випадку **змінних** напруг та струмів: $i_R = i_R(t)$, $u_R = u_R(t)$.
- Великі літери використовують для позначення **постійних** напруги та струмів, що не залежать від часу: $I_R = const$; $U_R = const$. Також великі літери використовують **амплітуд гармонічних сигналів**: $i_R(t) = I_R \cos(\omega t + \varphi_R)$.
- Для позначення **комплексних амплітуд** величин використовують великі літери з крапкою: $\dot{I}_R = I_R e^{j\varphi_R}$, де I_R – амплітуда гармонічного струму, а φ_R – його фаза. Миттєве значення струму обчислюється як $i_R(t) = \operatorname{Re}\{\dot{I}_R e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{I_R e^{j\varphi_R} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{I_R e^{j(\omega t + \varphi_R)}\} = \operatorname{Re}\{I_R \cos(\omega t + \varphi_R) + j I_R \sin(\omega t + \varphi_R)\} = I_R \cos(\omega t + \varphi_R)$.

У якості незалежної змінної оберемо U_d . Підставляючи $\frac{du_c}{dt} = 0$ в систему (1.1), отримаємо рівняння для статичного режиму:

$$-\frac{1}{R} U_d + \frac{E}{R} = I_0(e^{kU_d} - 1). \quad (1.3)$$

Ми отримали нелінійне алгебричне рівняння. Розв'язання його доцільно проводити, застосовуючи чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь, наприклад, метод Ньютона.

Нехай розв'язок рівняння (1.2) – $U_d = U_{d0}$. Тоді решту струмів та напруг зможемо знайти за співвідношеннями (індексом «0» позначимо шуканий розв'язок системи (1.1), тобто струми і напруги у статичному режимі):

$$I_{d0} = I_{G0} = I_0(e^{kU_{d0}} - 1);$$

$$U_{R0} = U_{C0} = E - U_{d0};$$

$$I_{R0} = \frac{U_{R0}}{R};$$

$$I_{C0} = 0.$$

Графічно розв'язання (1.3) можна зобразити на координатній площині (див. рис. 1.4).

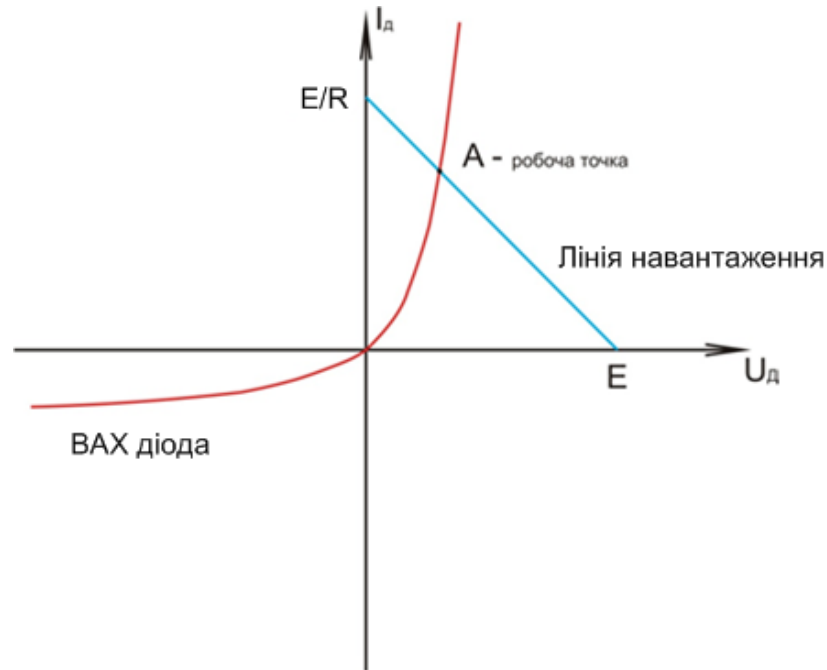


Рис. 1.4

Завдання №4. Скласти систему рівнянь для аналізу кола в динамічному режимі у випадку малого сигналу в часовій області.

Дуже часто в роботі нелінійного пристрою задіяно лише невелику ділянку його характеристики: певний діапазон напруг навколо певного значення напруги. У цьому випадку вхідний змінний сигнал можна представити як суперпозицію постійної та змінної складових:

$$e_{in}(t) = E + e_v(t).$$

При цьому амплітуда змінної складової $|e_v|_{max}$ є невеликою настільки, щоб характеристику нелінійного приладу в діапазоні значень вхідної напруги $E - |e_v|_{max} \dots E + |e_v|_{max}$ можна було наблизити прямою, не вносячи суттєвої похибки в розрахунок.

Як можна бачити з рівняння (1.3), постійна складова вхідної напруги E визначає **робочу точку** (U_{d0}, I_{d0}) на характеристиці нелінійного приладу. У цьому випадку можемо здійснити **лінеаризацію** характеристики діода навколо робочої точки (див. рис. 1.5).

Як правило, характеристика будь-якого нелінійного приладу визначається гладкою функцією, тому замінити її в певному околі робочої точки можна її похідною в цій точці.

Щоб отримати рівняння прямої, що наближає (апроксимує) характеристику діода в околі робочої точки $u_d = u_{d0}$, розкладемо рівняння характеристики в ряд Тейлора:

$$i_d = f(u_d) = f(u_{d0}) + \frac{df(u_{d0})}{du_d}(u_d - u_{d0}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2f(u_{d0})}{dt^2}(u_d - u_{d0})^2 + \dots$$

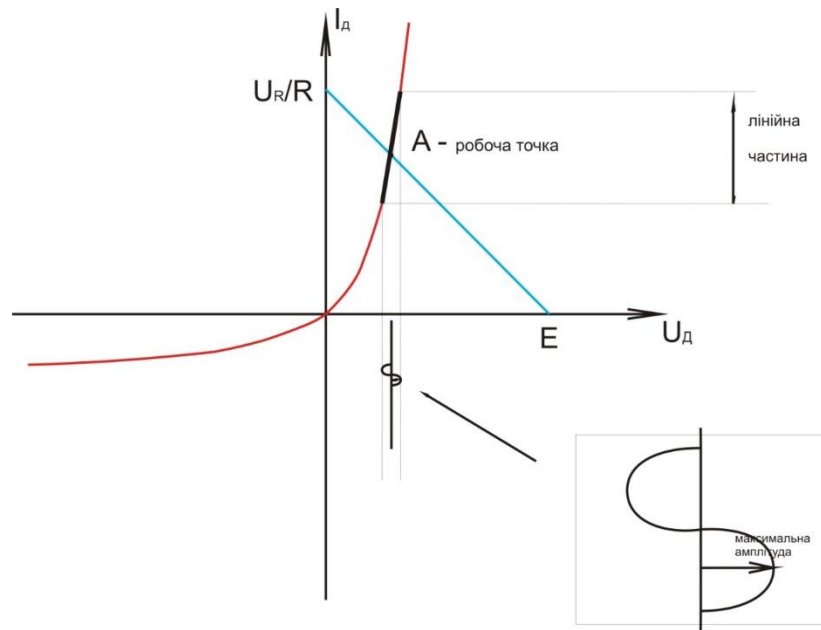


Рис. 1.5

Нехай $K_0 = \frac{df(u_{d0})}{du_d} = f'(u_{d0})$. Обмежуючись лише лінійним наближенням, тобто враховуючи лише перші два члени ряду Тейлора, маємо:

$$i_d(u_d) \approx K_0 u_d + (f(u_{d0}) - K_0 u_{d0}).$$

Отримана лінійна функція є рівнянням дотичної до графіку характеристики $i_d(u_d)$ у точці $u_d = u_{d0}$. Підставивши дане рівняння в (1.2), отримаємо рівняння кола для випадку режиму малого сигналу:

$$C \frac{du_d}{dt} + \frac{1}{R} u_d = \frac{1}{R} e_{in} - (K_0 u_d + (f(u_{d0}) - K_0 u_{d0})),$$

або

$$C \frac{du_d}{dt} + \left(\frac{1}{R} + K_0 \right) u_d = \frac{1}{R} e_{in} - f(u_{d0}) + K_0 u_{d0} \quad (1.4)$$

Рівняння (1.4) є **неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку**. Для нього можливим є знаходження аналітичного розв'язку $u_d(t)$.

Практичне заняття №2

Апроксимація характеристик нелінійних приладів за допомогою методів кусково-лінійної та поліноміальної інтерполяції

1. Мета роботи

Засвоїти використання методів кусково-лінійної та поліноміальної інтерполяції для роботи з характеристиками, визначеними набором точок

2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття

Перед початком обчислень необхідно виконати такі підготовчі дії:

1. Створити у відповідній папці файл Microsoft Word та зберегти його, давши довільну назву. У цей файл по мірі виконання завдань заняття копіюються вихідні умови завдань та отримані результати, а також наприкінці виконання кожного завдання – лістинг коду, використаного для виконання обчислень.

2. Запустити програмний пакет Matlab, має відкритися відповідне діалогове вікно (див. рис. 2.1).

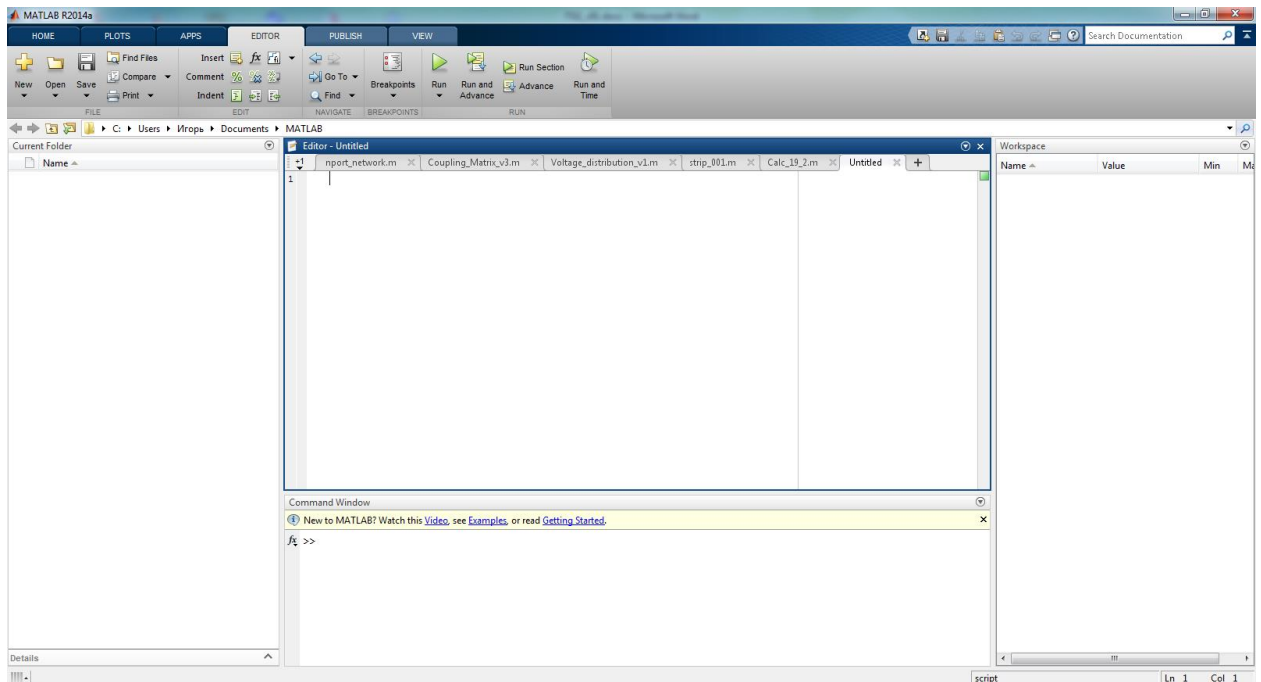


Рис. 2.1

Примітка. Тут і далі використовуватимуться зображення версії Matlab R2014a (8.3.0.532). В інших версіях елементи інтерфейсу можуть відрізнятись.

3. Створити пустий m-файл (вкладка **Editor** -> **New** -> **Script**) або комбінація клавіш **Ctrl+N**. Зберегти даний файл у відповідну папку, давши йому будь-яке ім'я (вкладка **Editor** -> **Save As**) або комбінація клавіш **Ctrl+S**. Нехай його назва – **File1.m**.

4. Вказати шлях до папки, де збережено файл, у відповідному рядку адреси (див. рис. 2.2).

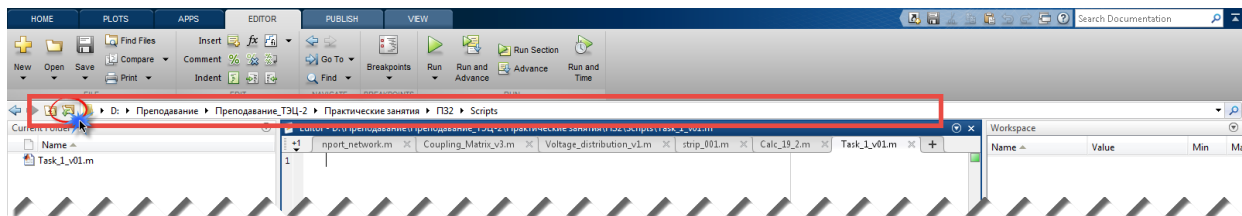


Рис. 2.2

5. У файлі File1.m ввести два перші рядки для очищення простору імен та вікна вводу:

```
clear all
clc
```

Виконавши дані кроки, можна приступати до виконання роботи.

Для того, щоб запустити скрипт на виконання, необхідно спочатку зберегти файл (**Ctrl+S**), а потім натиснути **F5** або кнопку **Run** у стрічці меню.

3. Завдання на заняття

3.1. Завдання №1

Вольт-амперну характеристику нелінійного електронного приладу визначено набором точок, як зображено на графіку.

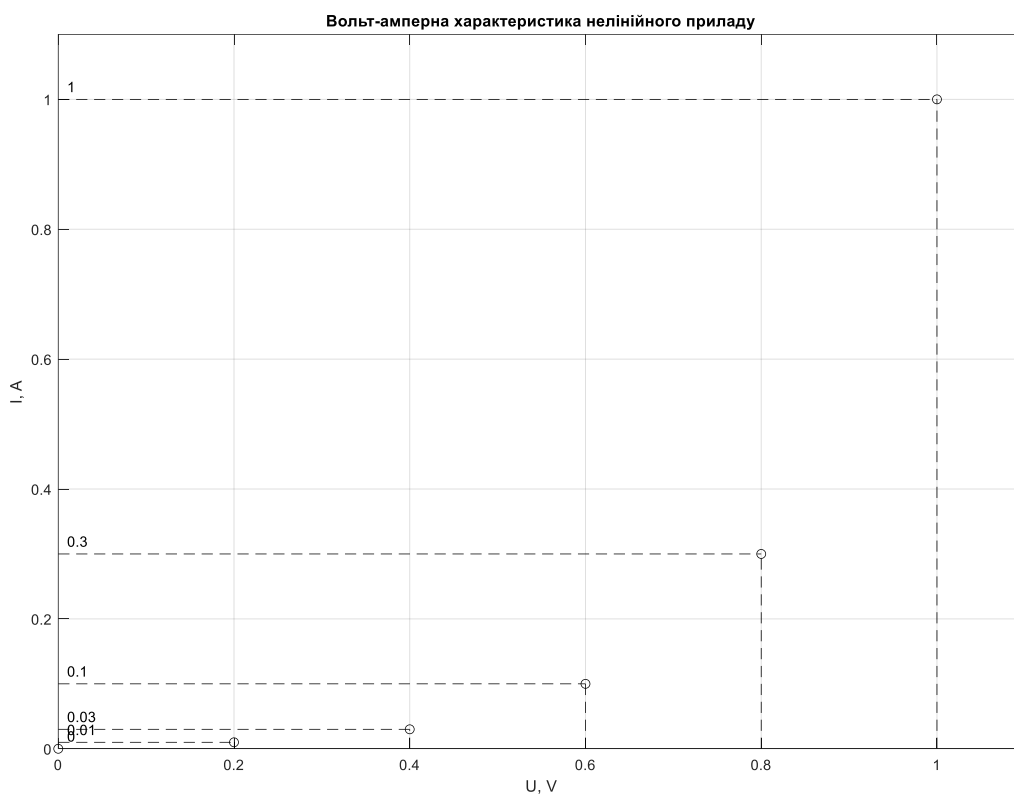


Рис. 2.3

Здійснити кусково-лінійну інтерполяцію функції та знайти:

- Значення струму I_0 через нелінійний прилад у випадку прикладання до нього напруги $U_0 = 0.65$ V.

- Коефіцієнти k, b прямої $I = k \cdot U + b$, що визначає відрізок, який містить точку U_0 .

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Отримаємо з графіка координати точок. Значення за віссю абсцис (напруга):

0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.

Значення за віссю ординат (струм):

0, 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1.

Створимо відповідні масиви:

```
% Точки для вольт-амперної характеристики
U_ar = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1] % значення напруги
I_ar = [0 0.01 0.03 0.1 0.3 1] % значення струму
```

Намалюємо графік з кусково-лінійною інтерполяцією:

```
% Побудуємо графік
plot(U_ar, I_ar, 'ko'); hold on;
plot(U_ar, I_ar, 'b-');
grid on;
title('Вольт-амперна характеристика нелінійного приладу');
xlabel('U, V');
ylabel('I, A');
axis([0 1.1*max(U_ar) 0 1.1*max(I_ar)])
```

Після запуску скрипту (клавіша F5 на клавіатурі) отримаємо графічне представлення кусково-лінійної інтерполяції (див. рис. 2.4).

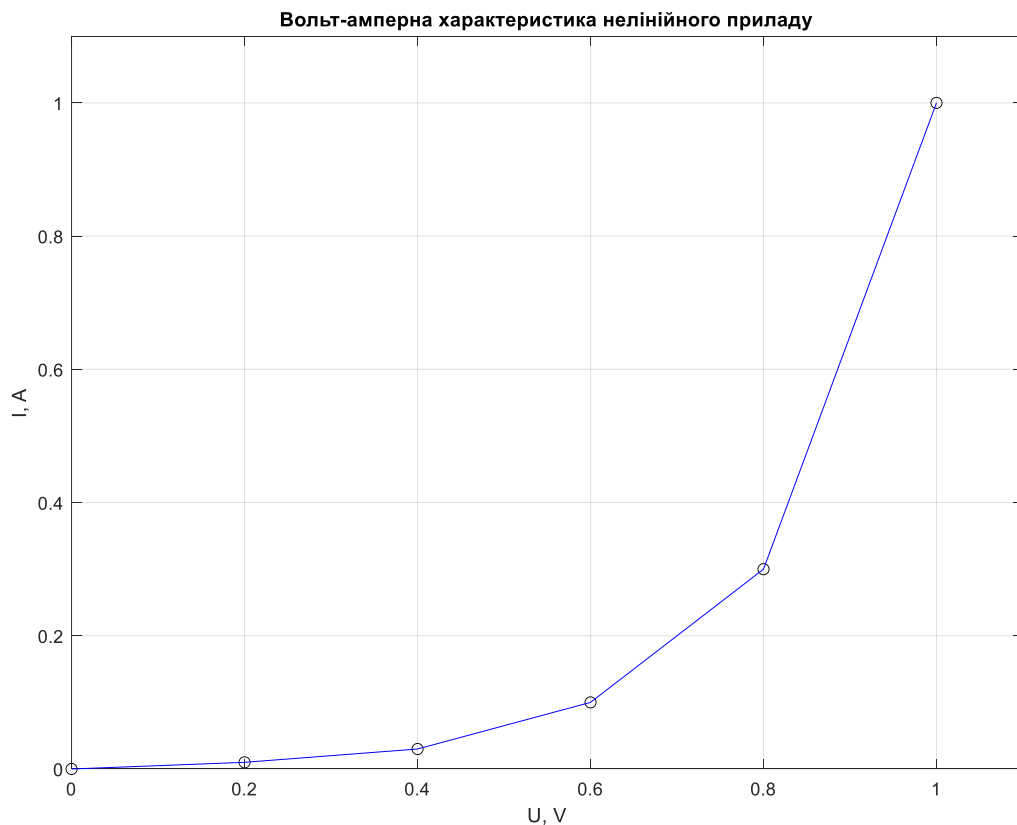


Рис. 2.4

Бачимо, що вихідне значення напруги знаходиться між визначеними точками $U_1 = 0.6 \text{ В}$, $I_1 = 0.1 \text{ А}$ та $U_2 = 0.8 \text{ В}$, $I_2 = 0.3 \text{ А}$.

Знайдемо рівняння прямої, що містить відповідний відрізок. Для цього запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 = k \cdot U_1 + b \\ I_2 = k \cdot U_2 + b \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему рівнянь, отримаємо вирази для шуканих параметрів k, b :

$$k = \frac{I_2 - I_1}{U_2 - U_1}$$

$$b = I_1 - k \cdot U_1$$

Розрахуємо значення даних параметрів:

$$k = \frac{I_2 - I_1}{U_2 - U_1} = \frac{0.3 \text{ А} - 0.1 \text{ А}}{0.8 \text{ В} - 0.6 \text{ В}} = \frac{0.2 \text{ А}}{0.2 \text{ В}} = 1 \text{ Ом}^{-1} = 1 \text{ См}$$

$$b = I_1 - k \cdot U_1 = 0.1 \text{ А} - 1 \text{ См} \cdot 0.6 \text{ В} = -0.5 \text{ А}$$

Отже, рівняння лінійного відрізка, що містить точку $U_0 = 0.65 \text{ В}$, має вигляд:

$$I = 1 \cdot U - 0.5$$

Розрахуємо значення струму I_0 , що протікає через нелінійний елемент у разі прикладання напруги $U_0 = 0.65 \text{ В}$:

$$I_0 = 1 \cdot 0.65 - 0.5 = 0.15 \text{ (А)}$$

Здійснимо цей розрахунок у середовищі Matlab:

```
% Нехай необхідно знайти значення апроксимованої функції у точці U = 0.65 V
U_0 = 0.65;

% При цьому для апроксимації функції, заданої точками, використаємо
% кусково-лінійну інтерполяцію.
% Розрахуємо значення коефіцієнтів k, b лінійного відрізка y = kx + b,
% що містить дану точку
x1 = 0.6; y1 = 0.1;
x2 = 0.8; y2 = 0.3;

k = (y2 - y1) / (x2 - x1)
b = y1 - k * x1

%Тепер можемо розрахувати значення струму I_0, що відповідає значенню напруги
U_0:
I_0 = k * U_0 + b

%Побудуємо точку на графіку
plot(U_0, I_0, 'ko', 'MarkerFaceColor','k');
plot([U_0 U_0], [0 I_0], 'k--');
plot([0 U_0], [I_0 I_0], 'k--');
```

Результати виконання скрипту наведено на рис. 2.5.

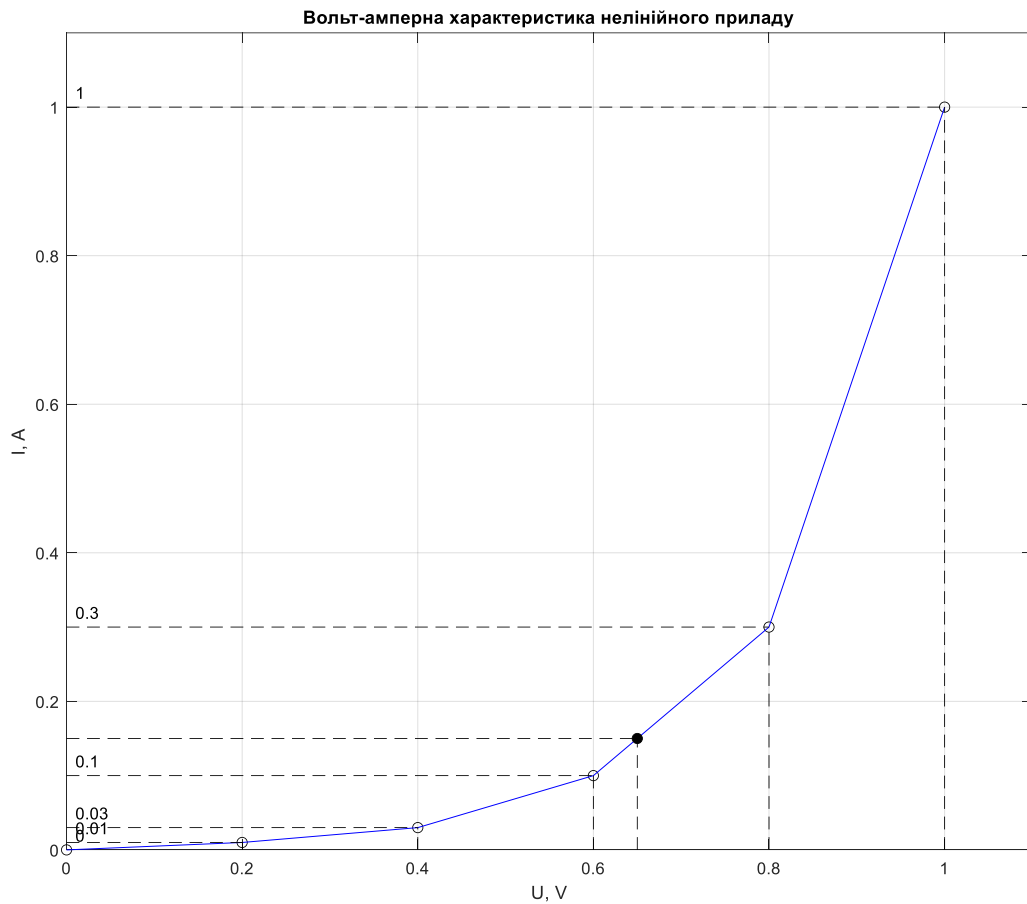


Рис. 2.5

У Command Window отримаємо чисельні значення шуканих параметрів:

```
k =
    1.0000

b =
   -0.5000

I_0 =
    0.1500
```

Як бачимо, розраховані значення співпадають зі значеннями, отриманими вище.

3.2. Завдання №2

Вольт-амперну характеристику нелінійного електронного приладу визначено набором точок, як зображено на графіку (див. рис. 2.6).

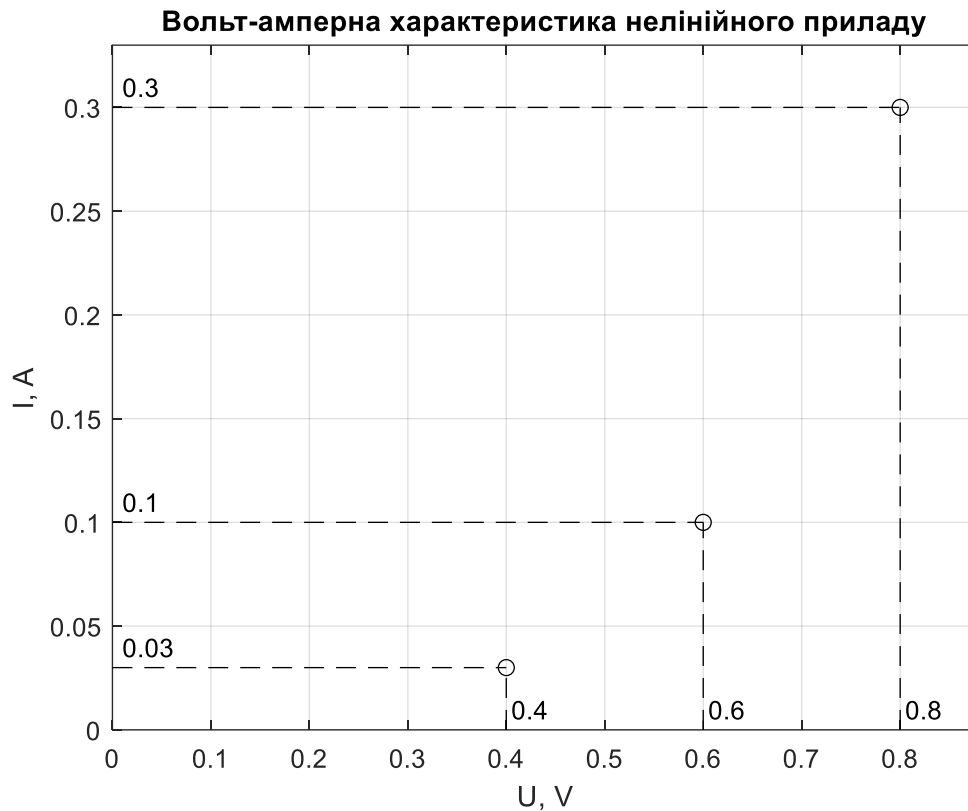


Рис. 2.6

Здійснити інтерполяцію функції поліномом 2-го степеня $I = a_2 U^2 + a_1 U + a_0$ та знайти:

- Значення струму I_0 через нелінійний прилад у випадку прикладання до нього напруги $U_0 = 0.65$ В.
- Коефіцієнти a_2, a_1, a_0 полінома, що апроксимує функцію.

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Отримасмо з графіка координати точок. Значення за віссю абсцис (напруга):

0.4, 0.6, 0.8.

Значення за віссю ординат (струм):

0.03, 0.1, 0.3.

Створимо відповідні масиви:

```
% Поліноміальна інтерполяція поліномом 2-гу степеня

%Точки для вольт-амперної характеристики
U_ar = [0.4 0.6 0.8] % значення напруги
I_ar = [0.03 0.1 0.3] % значення струму
```

Побудуємо графік:

```
plot(U_ar, I_ar, 'ko'); hold on;
% plot(U_ar, I_ar, 'b-');
grid on;
title('Вольт-амперна характеристика нелінійного приладу');
xlabel('U, V');
ylabel('I, A');
```

```
axis([0 1.1*max(U_ar) 0 1.1*max(I_ar)])
for i = 1:length(U_ar)
    plot([U_ar(i) U_ar(i)], [0 I_ar(i)], 'k--');
    plot([0 U_ar(i)], [I_ar(i) I_ar(i)], 'k--');

    text(U_ar(i)+0.005,0.01,num2str(U_ar(i)));
    text(0.01,I_ar(i)+0.01,num2str(I_ar(i)));
end
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 2.7.

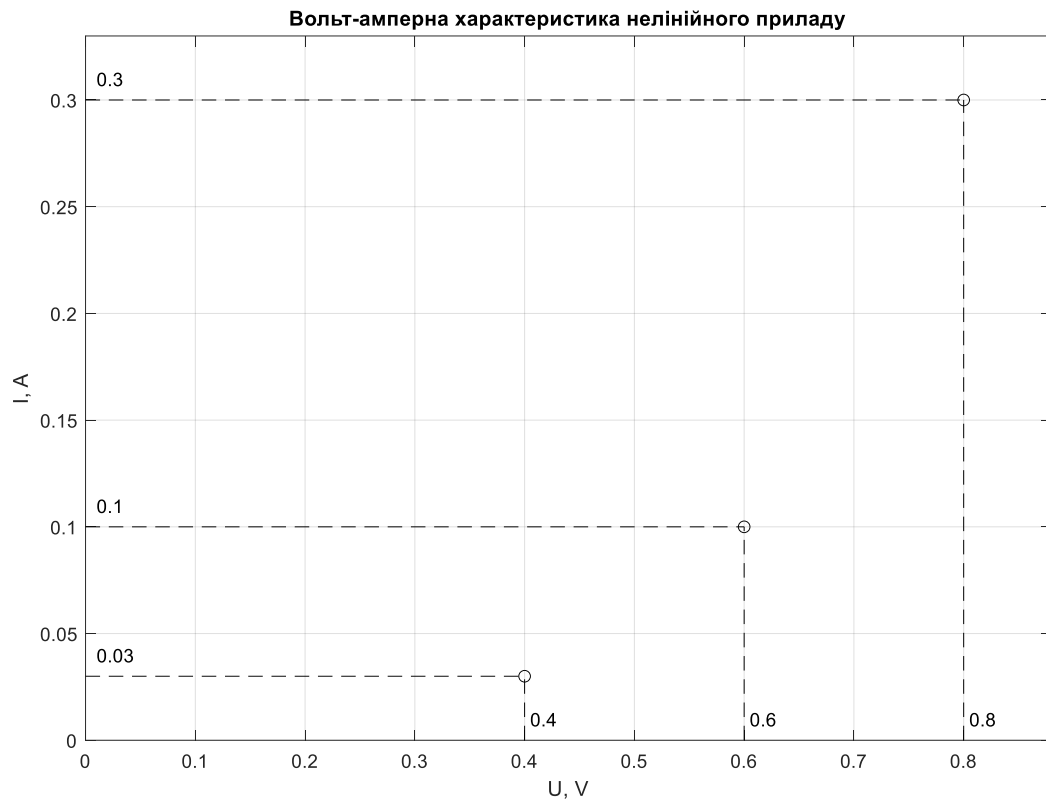


Рис. 2.7

Загальний принцип поліноміальної інтерполяції полягає в тому, що шукається поліном $N - 1$ -го степеня, де N — кількість заданих точок. При цьому поліном проходить через усі задані точки.

Оскільки вихідною умовою задано $N = 3$ точки, то шукатимемо поліном 2-го степеня, як це зазначено в завданні.

Для знаходження шуканих коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 = a_0 + a_1 \cdot U_1 + a_2 \cdot U_1^2 \\ I_2 = a_0 + a_1 \cdot U_2 + a_2 \cdot U_2^2 \\ I_3 = a_0 + a_1 \cdot U_3 + a_2 \cdot U_3^2 \end{cases}$$

Перепишемо дану систему в матричній формі:

$$X \cdot A = I,$$

Де

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & U_1 & U_1^2 \\ 1 & U_2 & U_2^2 \\ 1 & U_3 & U_3^2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Домножимо обидві частини рівняння на обернену матрицю X^{-1} .

$$X^{-1} \cdot X \cdot A = X^{-1} \cdot I,$$

У результаті отримаємо вираз для шуканого вектора A :

$$A = X^{-1} \cdot I$$

Для здійснення даного розрахунку додамо такий код:

```
x1 = U_ar(1); x2 = U_ar(2); x3 = U_ar(3);

X_matrix = [1 x1 x1^2; 1 x2 x2^2; 1 x3 x3^2]

A = inv(X_matrix) * I_ar'

u_interp = 0.9*min(U_ar):0.01:1.1*max(U_ar);
i_interp = A(3) .* u_interp.^2 + A(2) .* u_interp + A(1);

plot(u_interp, i_interp, 'r-');
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 2.8.

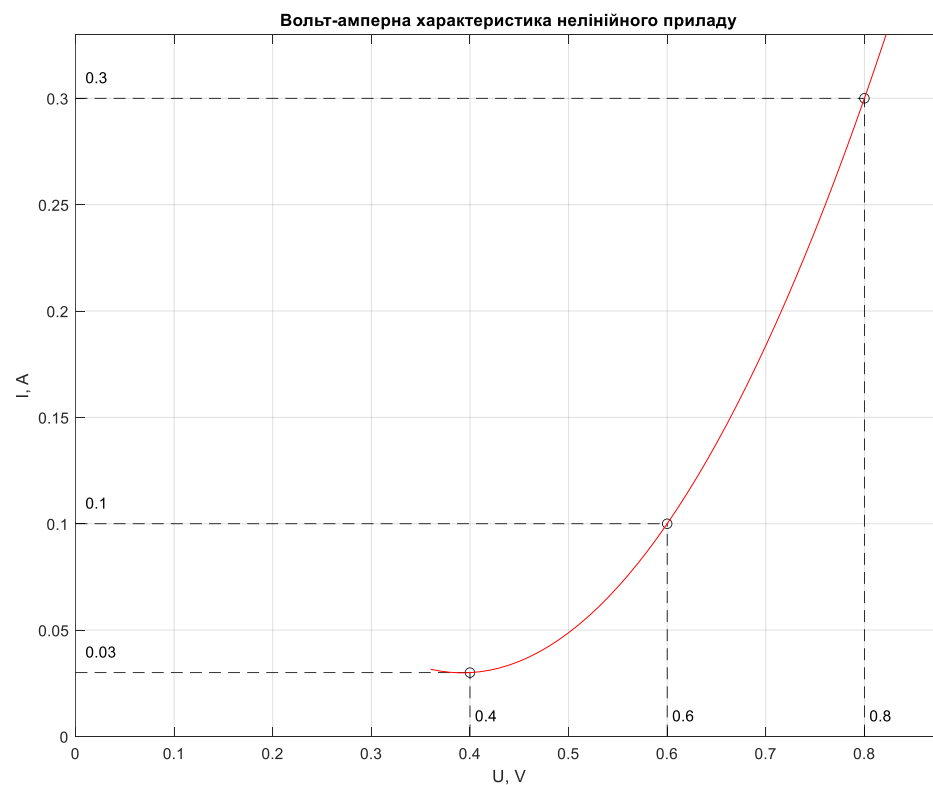


Рис. 2.8

Розраховані значення a_2, a_1, a_0 виводяться у вікні Command Window:

```
I_ar =  
    0.0300    0.1000    0.3000  
  
X_matrix =  
    1.0000    0.4000    0.1600  
    1.0000    0.6000    0.3600  
    1.0000    0.8000    0.6400  
  
A =  
    0.2800  
   -1.2750  
    1.6250
```

Отже, маємо:

$$a_0 = 0.28; a_1 = -1.275; a_2 = 1.625$$

Тепер можемо розрахувати значення струму I_0 , що має місце при прикладанні напруги U_0 :

```
%Тепер можемо розрахувати значення струму I_0, що відповідає значенню напруги  
U_0 = 0.65 В;  
U_0 = 0.65;  
I_0 = A(3)*U_0^2 + A(2)*U_0 + A(1)  
  
%Побудуємо точку на графіку  
plot(U_0, I_0, 'ko', 'MarkerFaceColor','k');  
plot([U_0 U_0], [0 I_0], 'k--');  
plot([0 U_0], [I_0 I_0], 'k--');
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 2.9.

Шукане значення I_0 виведено у вікні Command Window:

```
I_0 =  
  
    0.1378
```

Таким чином, маємо:

$$I_0 = 0.1378 \text{ A} \approx 138 \text{ mA}$$

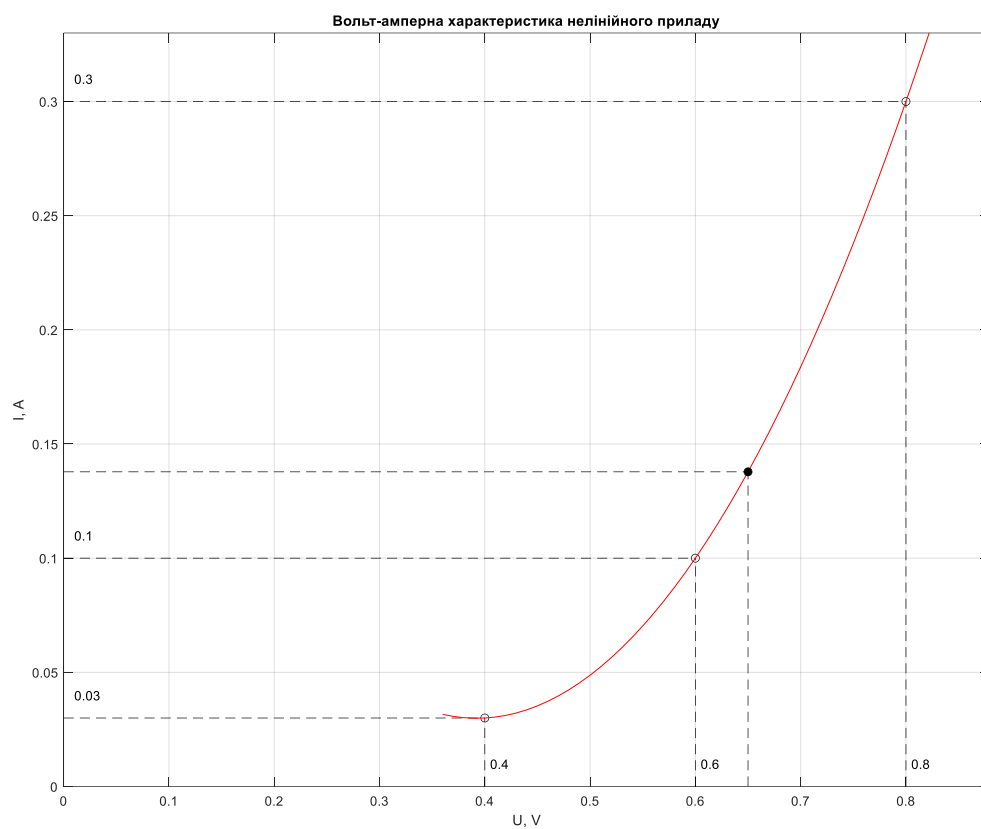


Рис. 2.9

Практичне заняття №3

Апроксимація характеристик нелінійних приладів за допомогою лінійної та нелінійної регресії

1. Мета роботи

Засвоїти використання методів лінійної та нелінійної регресії для роботи з характеристиками, визначеними набором точок.

2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття

Перед початком обчислень необхідно виконати такі підготовчі дії:

1. Запустити програмний пакет Matlab.
2. Створити пустий m-файл (вкладка **Editor** -> **New** -> **Script**) або комбінація клавіш **Ctrl+N**. Зберегти даний файл у відповідну папку, давши йому будь-яке ім'я (вкладка **Editor** -> **Save As**) або комбінація клавіш **Ctrl+S**. Нехай його назва – **File1.m**.
3. Вказати шлях до папки, де збережено файл, у відповідному рядку адреси.
4. У файлі File1.m ввести два перші рядки для очищення простору імен та вікна вводу:

```
clear all  
clc
```

Виконавши дані кроки, можна приступати до виконання роботи.

Для того, щоб запустити скрипт на виконання, необхідно спочатку зберегти файл (**Ctrl+S**), а потім натиснути **F5** або кнопку **Run** у стрічці меню.

3. Завдання на заняття

3.1. Завдання №1

Вольт-амперну характеристику (ВАХ) нелінійного компонента задано набором точок, наведених у табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Точки, що визначають ВАХ нелінійного компонента

U, В	I, А
0	0.63
0.2	0.5
0.4	0.7
0.6	0.76
0.8	0.7
1	0.82

Здійснити апроксимацію даної характеристики шляхом знаходження рівняння лінійної регресії $I = a + b \cdot U$.

Знайти:

- Коефіцієнти a, b лінійної функції.
- Значення струму I_0 , виражене в амперах (А), у разі прикладання напруги $U_0 = 0.65$ В. Для знаходження величини струму використати отримане рівняння лінійної регресії $I = a + b \cdot U$.

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Рівняння лінійної регресії:

$$I = a + b \cdot U$$

У якості вихідних даних дано набір точок (U_i, I_i) . Критерієм визначення коефіцієнтів a, b шуканої прямої лінійної регресії є мінімум суми квадратів відхилень точок від отриманої прямої.

Нехай у загальному випадку маємо N точок. Тоді критерій пошуку рівняння прямої формулюється таким чином:

$$\sum_{i=1}^N (I(U_i) - I_i)^2 \rightarrow \min$$

або

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^N (a + b \cdot U_i - I_i)^2 \rightarrow \min$$

Для пошуку значень a, b , що відповідають мінімуму функції оптимізації $F(a, b)$ необхідно знайти її похідні по змінних a, b та прирівняти їх до нуля. Після розв'язання отриманої системи рівнянь отримаємо вирази для значень a, b :

$$a = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I_i - \frac{1}{N} \cdot b \cdot \sum_{i=1}^N U_i$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N U_i \cdot I_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N U_i \cdot \sum_{i=1}^N I_i}{\sum_{i=1}^N U_i^2 - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N U_i)^2}$$

Визначимо масиви вхідних значень:

```
% Побудова лінійної регресії

% Точки для вольт-амперної характеристики
U_ar = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1] % значення напруги
I_ar = [0.63 0.5 0.7 0.76 0.7 0.82] % значення струму
```

Визначимо кількість точок та задамо границі відображення на графіку:

```
% Визначимо кількість точок
N = length(U_ar);

% Задамо границі області побудови графіка ВАХ
U_min = -0.2; U_max = 1.2; I_min = 0.3; I_max = 1;
```

Побудуємо графік:

```
% Побудуємо графік
plot(U_ar, I_ar, 'ko'); hold on;
% plot(U_ar, I_ar, 'b-');
grid on;
title('Вольт-амперна характеристика нелінійного приладу');
xlabel('U, V');
ylabel('I, A');
% axis([1.1*U_min 1.1*U_max 0.9*min(I_ar) 1.1*max(I_ar)])
axis([U_min U_max I_min I_max]);
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 3.1.

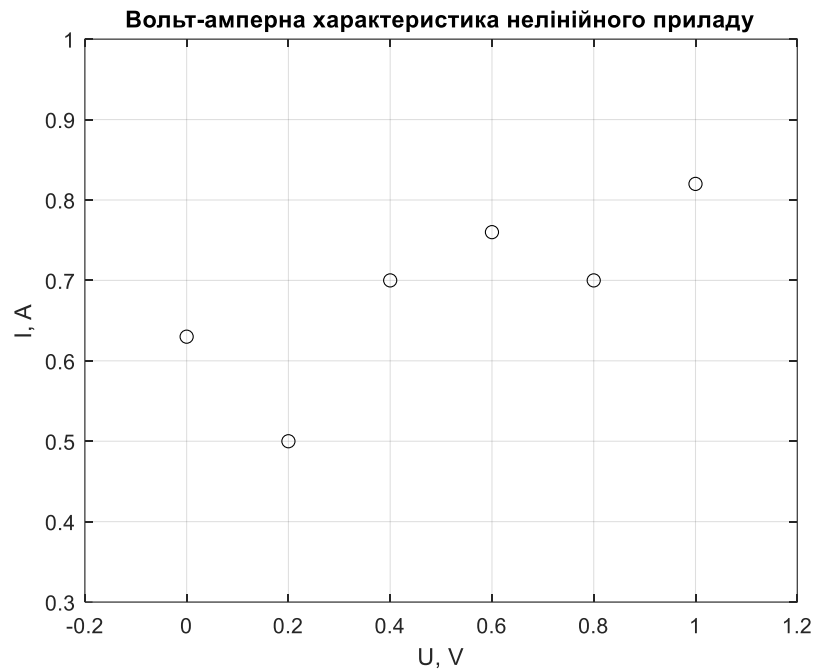


Рис. 3.1

Розрахуємо тепер значення коефіцієнтів a, b за формулами, отриманими вище:

```
N = length(U_ar);

% Знайдемо параметри a, b прямої лінійної регресії y = a + bx

b = (sum(U_ar .* I_ar) - sum(U_ar) * sum(I_ar) / N) / ...
    (sum(U_ar.^2) - (sum(U_ar)^2 / N))

a = (sum(I_ar) - b * sum(U_ar)) / N
```

Після запуску скрипта на виконання отримаємо результат розрахунку у вікні “Command Window”:

```
U_ar =
    0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000

I_ar =
    0.6300    0.5000    0.7000    0.7600    0.7000    0.8200

b =
    0.2300

a =
    0.5700
```

Отже, $a = 0.57, b = 0.23$.

Тепер можемо побудувати графік отриманої лінійної регресії:

```
% Побудуємо графік прямої лінійної регресії
```

```
u_regression = 1.1*U_min:0.01:1.1*U_max;
i_regression = a + b .* u_regression;
plot(u_regression, i_regression, 'r-');
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 3.2.

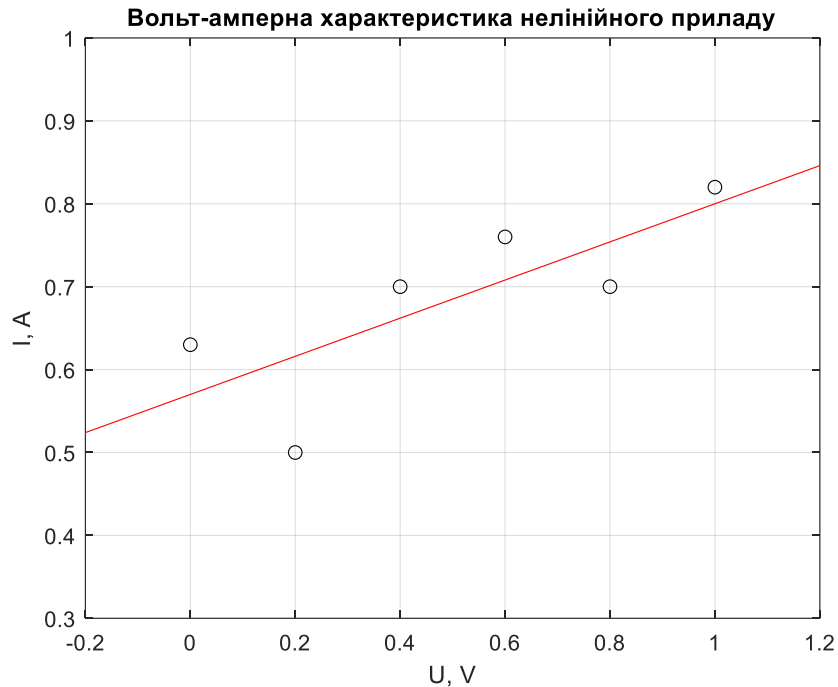


Рис. 3.2

Тепер знайдемо значення струму I_0 , що протікатиме через нелінійний елемент у разі прикладання напруги U_0 . Для цього необхідно підставити значення U_0 в отримане рівняння регресії: $I_0 = a + b \cdot U_0$.

```
% Знайдемо значення струму I_0, який протікає через елемент
% при прикладанні напруги U_0 = 0.65 В:
U_0 = 0.65
I_0 = a + b * U_0
```

Після запуску скрипта на виконання у вікні “Command Window” отримаємо шукане значення I_0 :

```
U_0 =
    0.6500

I_0 =
    0.7195
```

Отже, в разі прикладання напруги $U_0 = 0.65 \text{ В} = 650 \text{ мВ}$ через елемент протікатиме струм $I_0 = 0.7195 \text{ А} \approx 0.720 \text{ А} = 720 \text{ мА}$.

3.2. Завдання №2

Вольт-амперну характеристику (ВАХ) нелінійного компонента задано набором точок, наведених у табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Точки, що визначають ВАХ нелінійного компонента

U, В	I, А
0	0
0.2	0.01
0.4	0.03
0.6	0.1
0.8	0.3
1	1

Здійснити апроксимацію даної характеристики шляхом знаходження рівняння поліноміальної регресії $I = a_n \cdot U^n + a_{n-1} \cdot U^{n-1} + \dots + a_1 \cdot U + a_0$.

Знайти:

- Підібрати степінь полінома n , за якого апроксимація здійснюється найбільш точно.
- Коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ полінома, що визначає рівняння регресії.
- Значення струму I_0 , виражене в амперах (А), у разі прикладання напруги $U_0 = 0.65$ В. Для знаходження величини струму використати отримане рівняння нелінійної регресії $I = a_n \cdot U^n + a_{n-1} \cdot U^{n-1} + \dots + a_1 \cdot U + a_0$.

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Для пошуку рівняння нелінійної регресії застосуємо, як і в попередньому завданні, метод найменших квадратів (МНК).

Визначимо масиви точок та побудуємо графік:

```
% Побудова поліноміальної регресії

% Точки для вольт-амперної характеристики
U_ar = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1] % значення напруги
I_ar = [0 0.01 0.03 0.1 0.3 1] % значення струму

U_min = -0.5; U_max = 1.5; I_min = -0.5; I_max = 1.5

% Побудуємо графік
plot(U_ar, I_ar, 'ko'); hold on;
% plot(U_ar, I_ar, 'b-');
grid on;
title('Вольт-амперна характеристика нелінійного приладу');
xlabel('U, V');
ylabel('I, A');
axis([U_min U_max I_min I_max])
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 3.3.

Розрахуємо тепер коефіцієнти поліноміальної регресії степеня 2:

```
% Побудуємо поліноміальну регресію
p = polyfit(U_ar, I_ar, 2)

u_regression = U_min:0.01:U_max;
i_regression = polyval(p, u_regression);

% Побудуємо графік регресії
plot(u_regression, i_regression, 'r-');
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 3.4.

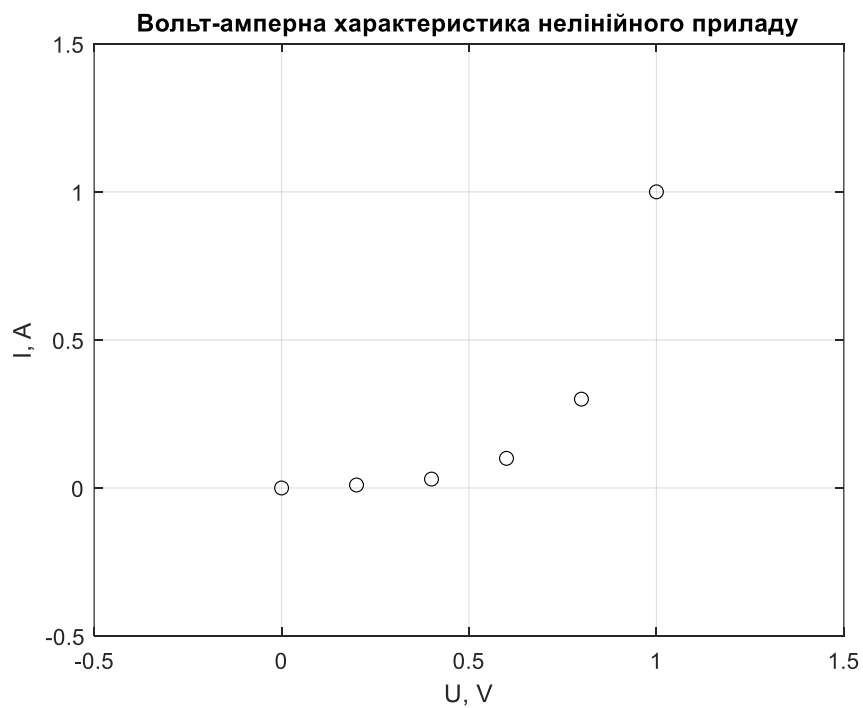


Рис. 3.3

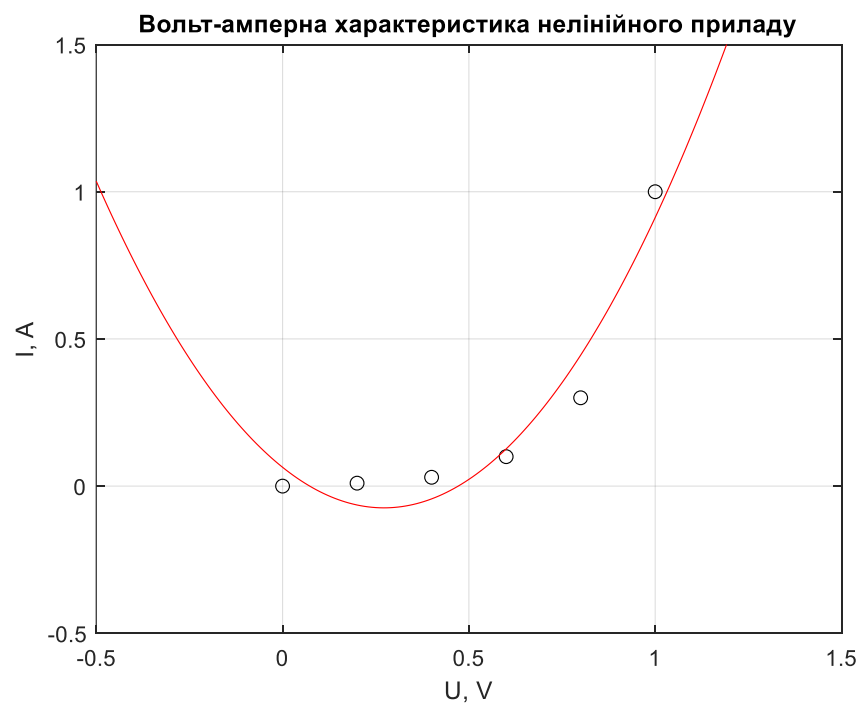


Рис. 3.4

У вікні “Command Window” отримаємо чисельні значення коефіцієнтів полінома 2-го степеня:

```
U_ar =
    0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000

I_ar =
```

```

0      0.0100    0.0300    0.1000    0.3000    1.0000
p =
1.8616   -1.0130    0.0639

```

Отже, рівняння полінома 2-го степеня, що апроксимує залежність, визначену умовою завдання, $I(U) = a_2 \cdot U^2 + a_1 \cdot U + a_0$ має вигляд:

$$I(U) = 1.8616 \cdot U^2 - 1.0130 \cdot U + 0.0639$$

Бачимо, що апроксимація квадратичною функцією неоптимально описує залежність. Шляхом підбору значення степеня полінома отримаємо, що прийнятним вибором є поліном 4-го степеня:

```
p = polyfit(U_ar, I_ar, 4)
```

Результат виконання скрипту наведено на рис. 3.5.

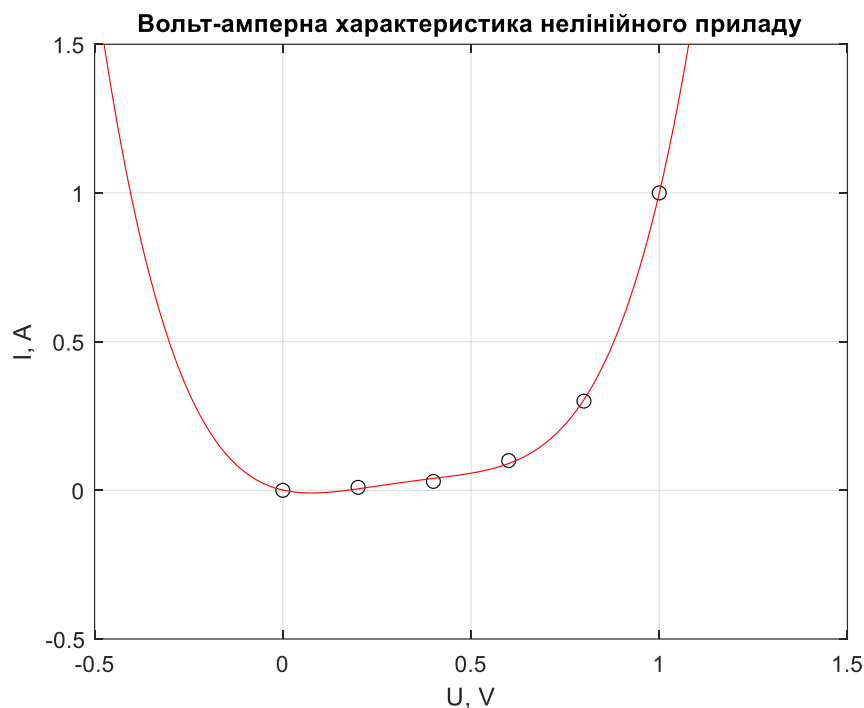


Рис. 3.5

Шукані коефіцієнти полінома $I(U) = a_4 \cdot U^4 + a_3 \cdot U^3 + a_2 \cdot U^2 + a_1 \cdot U + a_0$ виведено у вікні “Command Window”:

```

p =
4.2969   -5.4803    2.4705   -0.2890    0.0010

```

Отже, рівняння полінома матиме вигляд:

$$I(U) = 4.2969 \cdot U^4 - 5.4803 \cdot U^3 + 2.4705 \cdot U^2 - 0.2890 \cdot U + 0.0010$$

Знайдемо тепер шукане значення струму I_0 , що протікає при прикладанні напруги $U_0 = 0.65$ В:

```

% Знайдемо значення струму I_0, який протікає через елемент
% при прикладанні напруги U_0 = 0.65 В:
U_0 = 0.65
I_0 = polyval(p, U_0)

```

Шукане значення струму отримаємо у вікні Command Window після виконання скрипту:

```
U_0 =  
    0.6500  
  
I_0 =  
    0.1920
```

Отже, значення струму становить $I_0 = 192$ мА.

Практичне заняття №4

Тест №1

1. Мета роботи

Здійснити контроль навичок здійснення апроксимації характеристик нелінійних елементів, отриманих на практичних заняттях №2 та №3.

2. Завдання на заняття

Тест містить 3 завдання. Загальна кількість різних типів завдань: 3. Завдання у тесті наводяться у випадковому порядку.

Усі завдання, що містяться у тесті, розглянуто на практичних заняттях №2 та №3. Тематику завдань наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Тип	Опис завдання	Кількість
1	Здійснити кусково-лінійну інтерполяцію функції, заданої набором точок (точки задаються на графіку). Обчислити один з параметрів прямої, що інтерполює функцію на певному відрізку, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1
2	Здійснити поліноміальну інтерполяцію функції, заданої набором точок (точки задаються на графіку). Обчислити один з параметрів кривої, що інтерполює функцію, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1
3	Побудувати лінійну регресії функції, заданої набором точок (точки задаються таблицею). Обчислити один з параметрів прямої, що апроксимує функцію, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1

Тип – номер типу завдання.

Опис завдання – короткий зміст тематики завдання даного типу.

Кількість – кількість завдань даного типу в тесті.

Аналіз спектра реакції нелінійного приладу у разі дії гармонічного та бігармонічного сигналу. Метод п'яти ординат

1. Мета роботи

Засвоїти:

- Метод безпосереднього отримання спектру реакції у разі характеристики, апроксимованої поліномом.
- Метод п'яти ординат для наближеного розрахунку спектра постійної складової та перших 4-х гармонік спектра сигналу.

2. Завдання на заняття

2.1. Завдання №1

До безінерційного резистивного двополюсника прикладено змінну напругу, що визначається рівнянням $u(t) = E_0 + U_0 \cos 2\pi f_0 t$ (див. рис. 5.1). Вольт-амперну характеристику (ВАХ) двополюсника апроксимовано кривою, що визначається рівнянням $I(U) = a \cdot U^2 + b \cdot U$.

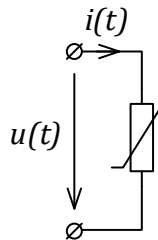


Рис. 5.1

Для спектра струму $i(t)$, що протікає через двополюсник у разі прикладання напруги $u(t)$, знайти:

- Амплітуду постійної складової спектра струму
- Амплітуду 1-ї гармоніки (на частоті f_0).
- Амплітуду 2-ї гармоніки (на частоті $2f_0$).

Для розрахунку використати такі значення параметрів:

$$E_0 = 2 \text{ В}$$

$$U_0 = 2 \text{ В}$$

$$a = 1 \frac{\text{А}}{\text{В}^2}$$

$$b = 2 \frac{\text{А}}{\text{В}}$$

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Для отримання часової залежності струму, що протікає через двополюсник, підставимо вираз для прикладеної напруги $U(t)$ у вираз, що визначає ВАХ приладу (введемо позначення для кутової частоти $\omega_0 = 2\pi f_0$):

$$\begin{aligned} i(t) &= I(u(t)) = a \cdot (E_0 + U_0 \cdot \cos \omega_0 t)^2 + b \cdot (E_0 + U_0 \cdot \cos \omega_0 t) = \\ &= a \cdot E_0^2 + 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_0 \cos \omega_0 t + a \cdot U_0^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t + \\ &+ b \cdot E_0 + b \cdot U_0 \cdot \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Врахуємо, що $\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (\cos 2\alpha + 1)$, тоді отримаємо:

$$i(t) = a \cdot E_0^2 + 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 \cos 2\omega_0 t + b \cdot E_0 + b \cdot U_0 \cdot \cos \omega_0 t =$$

$$= a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 + b \cdot E_0 + 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_0 \cos \omega_0 t + b \cdot U_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 \cos 2\omega_0 t =$$

$$= \left[a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 + b \cdot E_0 \right] + [(2 \cdot a \cdot E_0 + b) \cdot U_0] \cdot \cos \omega_0 t + \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 \right] \cdot \cos 2\omega_0 t$$

Таким чином, залежність струму від часу ми представили у вигляді:

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t$$

В даному виразі:

- Постійна складова: $I_0 = a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 + b \cdot E_0$
- Амплітуда 1-ї гармоніки: $I_1 = (2 \cdot a \cdot E_0 + b) \cdot U_0$
- Амплітуда 2-ї гармоніки: $I_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2$

Розрахуємо чисельні значення відповідних амплітуд:

- Постійна складова:

$$I_0 = a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 + b \cdot E_0 = 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 10 \text{ (A)}$$

- Амплітуда 1-ї гармоніки (для частоти f_0):

$$I_1 = (2 \cdot a \cdot E_0 + b) \cdot U_0 = (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2) \cdot 2 = 12 \text{ (A)}$$

- Амплітуда 2-ї гармоніки (для частоти $2f_0$):

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2 \text{ (A)}$$

На рис. 5.2 нижче наведено результат чисельної перевірки проведеного вище розрахунку амплітуд спектра, а саме:

- Сигнали прикладеної напруги $u_{in}(t)$ та струму $i_{out}(t)$, що протікає через двополюсник у часовій області.
- Спектр прикладеної напруги $u_{in}(t)$, тобто відображення напруги у частотну область.
- Спектр струму $i(t)$, тобто відображення струму в частотну область.

Для розрахунку було прийнято, що $f_0 = 20$ Гц. Тоді частоти компонентів спектра становитимуть: 0 Гц, $f_0 = 20$ Гц, $2f_0 = 40$ Гц.

Як можна бачити, усі частотні складові та їхні амплітуди відповідають розрахунку.

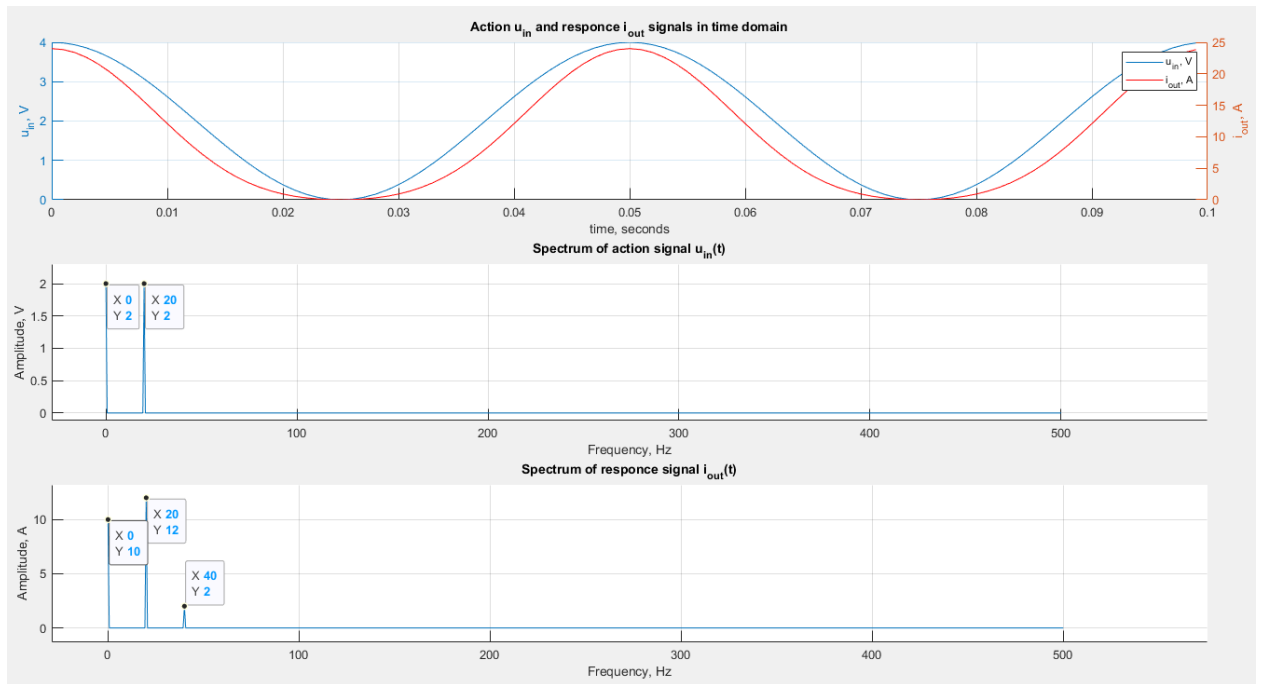


Рис. 5.2

2.2. Завдання №2

До безінерційного резистивного двополюсника прикладено змінну напругу, що визначається рівнянням $u(t) = E_0 + U_1 \cos 2\pi f_1 t + U_2 \cos 2\pi f_2 t$ (див. рис. 5.3). Вольтамперну характеристику (ВАХ) двополюсника апроксимовано кривою, що визначається рівнянням $I(U) = a \cdot U^2$.

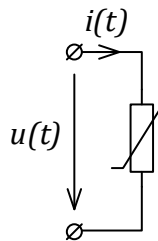


Рис. 5.3

Для спектра струму $i(t)$, що протікає через двополюсник у разі прикладання напруги $u(t)$ знайти:

- Амплітуду постійної складової спектра струму.
- Амплітуду гармоніки 1-го порядку для частоти f_1 .
- Амплітуду гармоніки 1-го порядку для частоти f_2 .
- Амплітуду гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_1$.
- Амплітуду гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_2$.
- Амплітуду комбінаційної різницевої гармоніки для частоти $f_1 - f_2$.
- Амплітуду комбінаційної сумарної гармоніки для частоти $f_1 + f_2$.

Для розрахунку використати такі значення параметрів:

$$E_0 = 2 \text{ В}$$

$$U_1 = 1.5 \text{ В}$$

$$U_2 = 0.5 \text{ В}$$

$$a = 1 \frac{\text{А}}{\text{В}^2}$$

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Для отримання часової залежності струму, що протікає через двополюсник, підставимо вираз для прикладеної напруги $U(t)$ у вираз, що визначає ВАХ приладу (введемо позначення для кутової частоти $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$):

$$\begin{aligned} i(t) &= I(u(t)) = a \cdot (E_0 + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t)^2 = \\ &= a \cdot E_0^2 + a \cdot U_1^2 \cdot \cos^2 \omega_1 t + a \cdot U_2^2 \cdot \cos^2 \omega_2 t + \\ &+ 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_1 \cdot \cos \omega_1 t + 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_2 \cdot \cos \omega_2 t + \\ &+ 2 \cdot a \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (\cos 2\alpha + 1),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} i(t) &= \left[a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2 \right] + \\ &+ [2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_1] \cdot \cos \omega_1 t + \\ &+ [2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_2] \cdot \cos \omega_2 t + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2 \right] \cdot \cos 2\omega_1 t + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2 \right] \cdot \cos 2\omega_2 t + \\ &+ [a \cdot U_1 \cdot U_2] \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \\ &+ [a \cdot U_1 \cdot U_2] \cdot \cos(\omega_1 + \omega_2)t \end{aligned}$$

Таким чином, залежність струму від часу ми представили у вигляді:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 + I_{11} \cos \omega_1 t + I_{21} \cos \omega_2 t + \\ &+ I_{12} \cos 2\omega_1 t + I_{22} \cos 2\omega_2 t + \\ &+ I_d \cos(\omega_1 - \omega_2)t + I_s \cos(\omega_1 + \omega_2)t \end{aligned}$$

В даному виразі:

- Постійна складова спектра струму:

$$I_0 = a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2$$

- Амплітуда гармоніки 1-го порядку для частоти f_1 :

$$I_{11} = 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_1$$

- Амплітуда гармоніки 1-го порядку для частоти f_2 :

$$I_{21} = 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_2$$

- Амплітуда гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_1$:

$$I_{12} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2$$

- Амплітуда гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_2$:

$$I_{22} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2$$

- Амплітуда комбінаційної різницевої гармоніки для частоти $f_1 - f_2$:

$$I_d = a \cdot U_1 \cdot U_2$$

- Амплітуда комбінаційної сумарної гармоніки для частоти $f_1 + f_2$:

$$I_s = a \cdot U_1 \cdot U_2$$

Розрахуємо чисельні значення відповідних амплітуд:

- Постійна складова спектра струму:

$$I_0 = a \cdot E_0^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2 = 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1.5^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.5^2 = 5.25 \text{ (A)}$$

- Амплітуда гармоніки 1-го порядку для частоти f_1 :

$$I_{11} = 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_1 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1.5 = 6 \text{ (A)}$$

- Амплітуда гармоніки 1-го порядку для частоти f_2 :

$$I_{21} = 2 \cdot a \cdot E_0 \cdot U_2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.5 = 2 \text{ (A)}$$

- Амплітуда гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_1$:

$$I_{12} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1.5^2 = 1.125 \text{ (A)}$$

- Амплітуда гармоніки 2-го порядку для частоти $2f_2$:

$$I_{22} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.5^2 = 0.125 \text{ (A)}$$

- Амплітуда комбінаційної різницевої гармоніки для частоти $f_1 - f_2$:

$$I_d = a \cdot U_1 \cdot U_2 = 1 \cdot 1.5 \cdot 0.5 = 0.75 \text{ (A)}$$

- Амплітуда комбінаційної сумарної гармоніки для частоти $f_1 + f_2$:

$$I_s = a \cdot U_1 \cdot U_2 = 1 \cdot 1.5 \cdot 0.5 = 0.75 \text{ (A)}$$

На рис. 5.4 наведено результат чисельної перевірки проведеного вище розрахунку амплітуд спектра, а саме:

- Сигнали прикладеної напруги $u_{in}(t)$ та струму $i_{out}(t)$, що протікає через двополюсник у часовій області.
- Спектр прикладеної напруги $u_{in}(t)$, тобто відображення напруги у частотну область.
- Спектр струму $i(t)$, тобто відображення струму в частотну область.

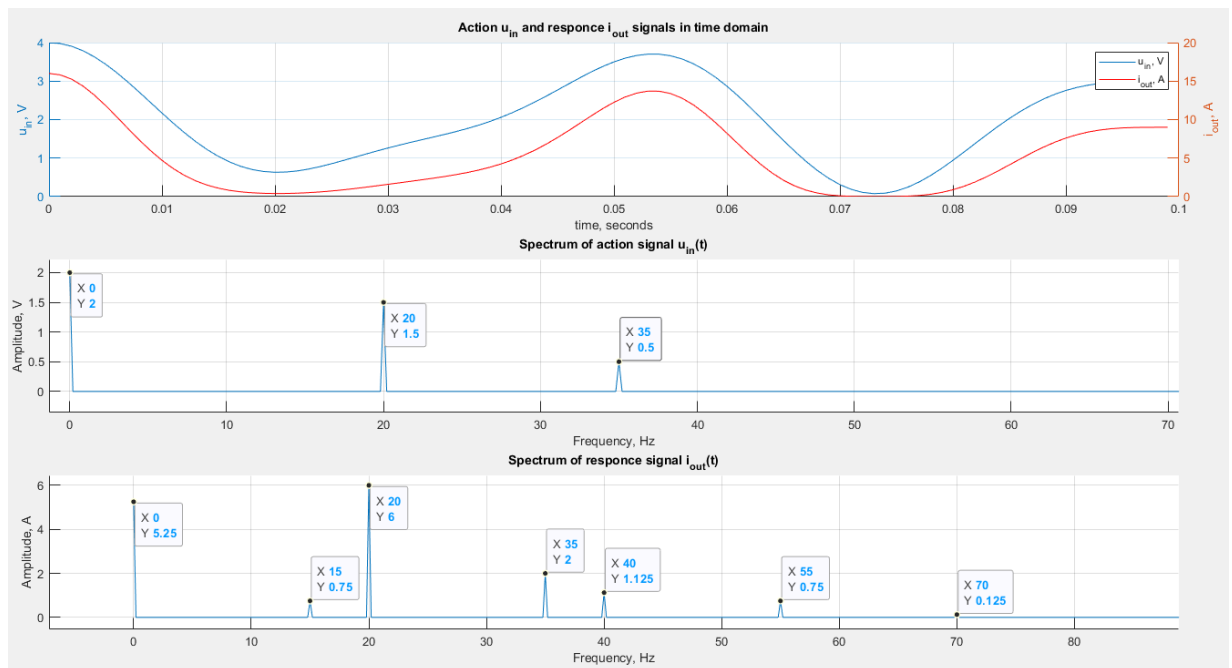


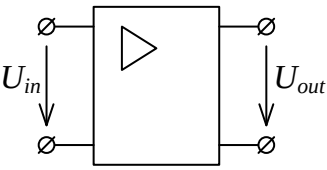
Рис. 5.4

Для розрахунку було прийнято, що $f_1 = 20$ Гц, $f_2 = 35$ Гц. Тоді частоти компонентів спектра становитимуть: 0 Гц, $f_1 = 20$ Гц, $f_2 = 35$ Гц, $2f_1 = 40$ Гц, $2f_2 = 70$ Гц, $f_1 + f_2 = 55$ Гц, $|f_1 - f_2| = 15$ Гц.

Як можна бачити, усі частотні складові та їхні амплітуди відповідають розрахунку.

2.3. Завдання №3

Передатна характеристика підсилювача визначена таблицею значень у 9-ти точках. На вхід підсилювача подається сигнал $U_{in}(2\pi f_0 t) = E_s + U_s \cos 2\pi f_0 t$. Параметри передатної характеристики $U_{out} = f(U_{in})$ та вхідного сигналу наведено нижче.

			$U_{in}, \text{ V}$	$U_{out}, \text{ V}$	Довідкові співвідношення $U_0 = \frac{1}{6}[A_5 + A_1 + 2(A_4 + A_2)];$ $U_1 = \frac{1}{3}[A_5 - A_1 + A_4 - A_2];$ $U_2 = \frac{1}{4}[A_5 + A_1 - 2A_3];$ $U_3 = \frac{1}{6}[A_5 - A_1 - 2(A_4 - A_2)];$ $U_4 = \frac{1}{12}[A_5 + A_1 - 4(A_4 + A_2) + 6A_3];$ Для $\omega_0 t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ відповідно: $A_5 = U_{out}(U_{in}(0)); A_4 = U_{out}(U_{in}(\pi/3));$ $\dots A_1 = U_{out}(U_{in}(\pi)).$
			0	4.4	
			0.5	12.4	
			1	21.7	
			1.5	32.5	
			2	55	
			2.5	77.5	
			3	88.3	
			3.5	97.6	
$E_s, \text{ V}$	$U_s, \text{ V}$	$f_0, \text{ kHz}$			
2	2	100	4	105.6	

Методом 5-ти ординат обчислити постійну складову U_0 та амплітуди перших чотирьох гармонік U_1, U_2, U_3, U_4 спектра сигналу на виході підсилювача. Побудувати графік даного спектра.

Розв'язання

Обмежуючись постійною складовою та першими чотирма гармоніками, запишемо загальне представлення спектра сигналу на виході підсилювача (введемо позначення для кутової частоти $\omega_0 = 2\pi f_0$):

$$U_{out}(\omega_0 t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t + U_2 \cos 2\omega_0 t + U_3 \cos 3\omega_0 t + U_4 \cos 4\omega_0 t.$$

Обчислимо значення вхідного сигналу U_{in} у 5-ти точках, після чого з таблиці, що визначає передатну функцію $U_{out} = f(U_{in})$, знайдемо відповідні значення напруги на виході U_{out} в цих точках (використаємо відповідні позначення A_i):

$$1) \omega_0 t = 0 \rightarrow U_{in}(0) = E_s + U_s \cos 0 = E_s + U_s = 4 \text{ В} \rightarrow U_{out}(4) = 105.6 \text{ В} = A_5;$$

$$2) \omega_0 t = \frac{\pi}{3} \rightarrow U_{in}\left(\frac{\pi}{3}\right) = E_s + U_s \cos \frac{\pi}{3} = E_s + \frac{1}{2}U_s = 3 \text{ В} \rightarrow U_{out}(3) = 88.3 \text{ В} = A_4;$$

$$3) \omega_0 t = \frac{\pi}{2} \rightarrow U_{in}\left(\frac{\pi}{2}\right) = E_s + U_s \cos \frac{\pi}{2} = E_s + 0 = 2 \text{ В} \rightarrow U_{out}(2) = 55 \text{ В} = A_3;$$

$$4) \omega_0 t = \frac{2\pi}{3} \rightarrow U_{in}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = E_s + U_s \cos \frac{2\pi}{3} = E_s - \frac{1}{2}U_s = 1 \text{ В} \rightarrow U_{out}(1) = 21.7 \text{ В} = A_2;$$

$$5) \omega_0 t = \pi \rightarrow U_{in}(\pi) = E_s + U_s \cos \pi = E_s - U_s = 0 \text{ В} \rightarrow U_{out}(0) = 4.4 \text{ В} = A_1;$$

Скориставшись довідковою інформацією, обчислимо значення амплітуд гармонік сигналу на виході:

$$\begin{aligned}
1) U'_0 &= \frac{1}{6}[A_5 + A_1 + 2(A_4 + A_2)] = \frac{1}{6}[105.6 + 4.4 + 2(88.3 + 21.7)] = 55 \text{ В}; \\
2) U'_1 &= \frac{1}{3}[A_5 - A_1 + A_4 - A_2] = \frac{1}{3}[105.6 - 4.4 + 88.3 - 21.7] \approx 55.93 \text{ В}; \\
3) U'_2 &= \frac{1}{4}[A_5 + A_1 - 2A_3] = \frac{1}{4}[105.6 + 4.4 - 2 \cdot 55] = 0 \text{ В}; \\
4) U'_3 &= \frac{1}{6}[A_5 - A_1 - 2(A_4 - A_2)] = \frac{1}{6}[105.6 - 4.4 - 2(88.3 - 21.7)] \approx -5.33 \text{ В}; \\
5) U'_4 &= \frac{1}{12}[A_5 + A_1 - 4(A_4 + A_2) + 6A_3] = \frac{1}{12}[105.6 + 4.4 - 4(88.3 + 21.7) + 6 \cdot 55] = 0 \text{ В}.
\end{aligned}$$

Якщо певні амплітуди мають від'ємний знак, це означає, що фаза відповідного гармонічного коливання зсунута на π : $-5.33 \cos 3\omega_0 t = 5.33 \cos(3\omega_0 t + \pi)$. Амплітуди спектральних складових отримаємо, взявши абсолютні значення обчислених величин U'_i :

$$U_i = |U'_i|.$$

Маємо:

- 1) $U_0 = |U'_0| = 55 \text{ В}$ на частоті $f = 0$;
- 2) $U_1 = |U'_1| = 55.93 \text{ В}$ на частоті $f = f_0 = 100 \text{ кГц}$;
- 3) $U_2 = |U'_2| = 0 \text{ В}$ на частоті $f = 2f_0 = 200 \text{ кГц}$;
- 4) $U_3 = |U'_3| = 5.33 \text{ В}$ на частоті $f = 3f_0 = 300 \text{ кГц}$;
- 5) $U_4 = |U'_4| = 0 \text{ В}$ на частоті $f = 4f_0 = 400 \text{ кГц}$.

Маючи значення амплітуд, можемо побудувати спектр сигналу для постійної складової та 4-х перших гармонік (див. рис. 5.5).

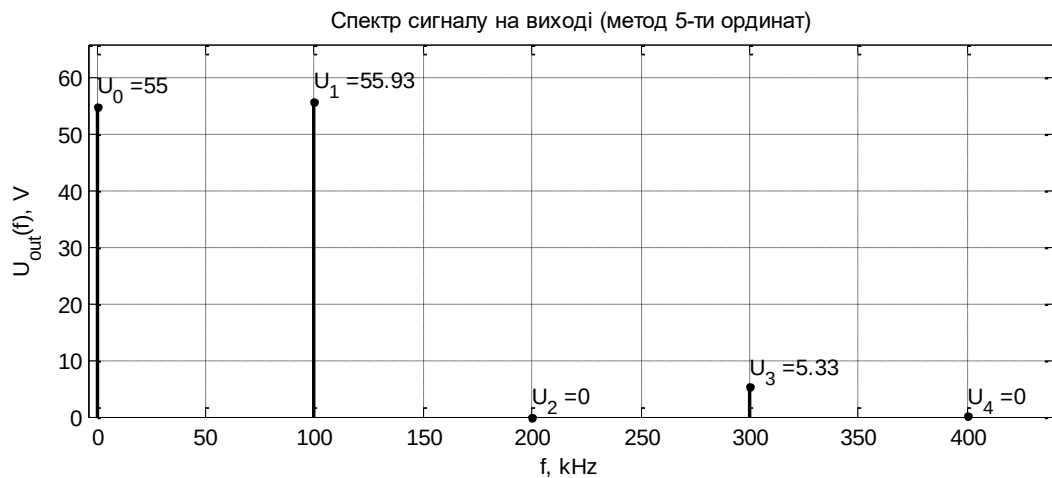


Рис. 5.5

Таким чином, маємо такі значення амплітуд гармонік:

- 1) $U_0 = 55 \text{ В}$;
- 2) $U_1 = 55.93 \text{ В}$;
- 3) $U_2 = 0 \text{ В}$;
- 4) $U_3 = 5.33 \text{ В}$;
- 5) $U_4 = 0 \text{ В}$.

Практичне заняття №6
Перетворення спектрів сигналів у нелінійних колах

1. Мета роботи

1. Навчитись будувати спектр періодичного сигналу.
2. Навчитись будувати спектр сигналу на виході нелінійного пристрою та оцінювати рівень нелінійних спотворень, внесених ним.
3. Засвоїти метод п'яти ординат.

2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття

Перед початком обчислень необхідно виконати такі підготовчі дії:

1. Запустити програмний пакет Matlab.
2. Створити пустий m-файл (вкладка **Editor** -> **New** -> **Script**) або комбінація клавіш **Ctrl+N**. Зберегти даний файл у відповідну папку, давши йому будь-яке ім'я (вкладка **Editor** -> **Save As**) або комбінація клавіш **Ctrl+S**. Нехай його назва – **File1.m**.
3. Вказати шлях до папки, де збережено файл, у відповідному рядку адреси.
4. Скопіювати до обраної папки допоміжний файл **Gain.xls**.
5. У файлі File1.m ввести два перші рядки для очищення простору імен та вікна вводу:

```
clear all  
close all  
clc
```

Виконавши дані кроки, можна приступати до виконання роботи.

Для того, щоб запустити скрипт на виконання, необхідно спочатку зберегти файл (**Ctrl+S**), а потім натиснути **F5** або кнопку **Run** у стрічці меню.

3. Завдання на заняття

3.1. Завдання №1

Необхідно побудувати спектр сигналу, що являє собою послідовність прямокутних імпульсів.

Параметри даного сигналу такі:

- Амплітуда: $U_0 = 1\text{В}$;
- Частота слідування імпульсів: $f_0 = 100\text{ Гц}$;
- Коефіцієнт заповнення послідовності: $D = \frac{\tau}{T} = 0.3$,

де τ – тривалість імпульсу; $T = \frac{1}{f_0}$ – період повторення імпульсів.

Для введення початкових параметрів сигналу додамо до коду файлу **file1.m** такі рядки:

```
U0 = 1; %Magnitude of the input signal  
f0 = 100; T = 1/f0; %Frequency and period of the input signal  
Np = 3; %Number of periods of the input signal to be plotted at the graph  
Nh = 5; %Number of harmonics of the signal spectrum to be calculate
```

У даному коді додатковий параметр Np вказує, скільки періодів сигналу необхідно вивести на графіки, а параметр Nh визначає кількість гармонік, які будуть враховуватись.

Створимо сигнал відповідно до вказаних вище початкових умов. Для цього додамо такі рядки коду:

```
input = @(t)U0*0.5*(1 + square(2*pi*f0.*t,30));
```

```
t = 0:T/1000:T;
u_in = input(t);

t_var = 0:T/1000:Np*T;
u_in_var = input(t_var);
```

У даному коді t , u_{in} – масиви значень часу та напруги сигналу відповідно, створень **в межах одного періоду функції сигналу**. Це необхідно, оскільки обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є здійснюється шляхом інтегрування функції на відрізку часу, що відповідає одному періоду T .

Змінні t_{var} , u_{in_var} створюють такі самі масиви, але на більш тривалому відрізку часу, що містить N_p періодів сигналу. Це необхідно для більш наочного відображення сигналу на графіках.

Визначимо межі відображення графіків за осями абсис (час) та ординат (напруга), додавши такий код:

```
tmin = t_var(1);
tmax = t_var(length(t_var));
umin = -0.1*U0;
umax = 1.1*U0;
```

Побудуємо графік створеного сигналу на одному періоді, додавши такі рядки коду:

```
figure
plot(t, u_in, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Вхідний сигнал');
axis([t(1) t(length(t)) umin umax]);
grid on;
```

В результаті виконання коду отримаємо такий графік, зображений на рис. 6.1.

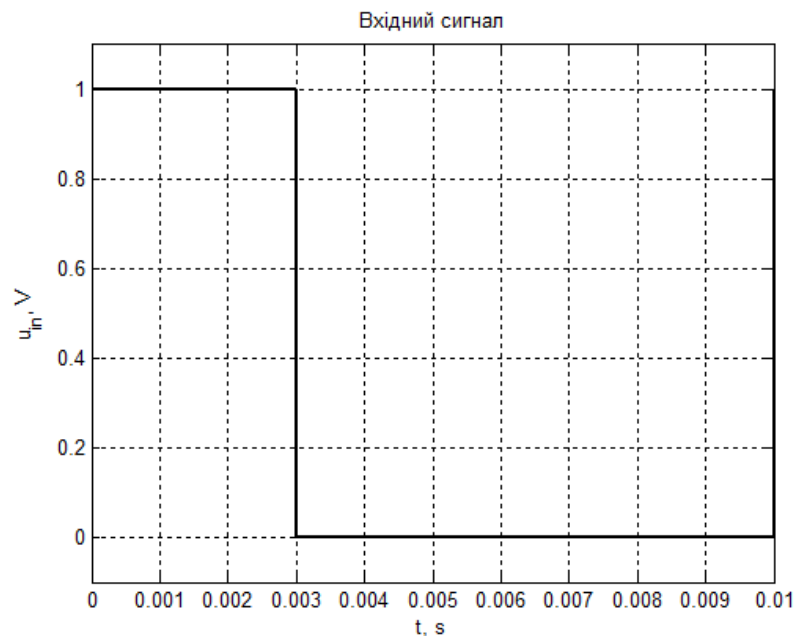


Рис. 6.1

Періодичну функцію $f(t)$ з періодом T можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t,$$

де

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t dt;$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Той самий ряд для тієї ж функції може бути представлений у комплексній формі:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},$$

де комплексні амплітуди гармонік c_k виражаються через наведені вище a_k, b_k таким чином:

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}; c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}; c_0 = \frac{a_0}{2},$$

або можуть бути обчислені безпосередньо з виразу

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Третя форма представлення цього ж ряду є найбільш наочною і її використовують для побудови спектра сигналу:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k),$$

де параметри A_k, φ_k визначаються через комплексні амплітуди гармонік таким чином:

$$A_0 = c_0;$$

$$A_k = 2|c_k|;$$

$$\varphi_k = \arg c_k.$$

Створимо масиви для зберігання параметрів гармонік ряду Фур'є. Розмірність масивів дорівнює кількості гармонік Nh , яку було визначено вище. Для цього додамо такі рядки:

```
f = zeros(1,Nh);
c = zeros(1,Nh);
A = zeros(1,Nh);
Ph = zeros(1,Nh);
```

Тут f – масив частот гармонік; c – масив комплексних амплітуд гармонік для представлення ряду Фур'є в комплексній формі; A – масив дійсних амплітуд гармонік для представлення ряду в дійсній формі; Ph – масив значень фази φ_k гармонік.

Тепер обчислимо відповідні параметри для кожної з N_h гармонік, додавши такі рядки коду:

```
a0 = (2/T)*trapz(t,u_in);
c(1) = a0/2;
A(1) = c(1);
for k = 1:Nh-1
    c(k+1) = (1/T)*trapz(t,u_in.*cos(k*2*pi*f0*t)) -
i*(1/T)*trapz(t,u_in.*sin(k*2*pi*f0*t));
    A(k+1) = 2*abs(c(k+1));
    Ph(k+1) = angle(c(k+1));
    f(k+1) = k*f0;
end
```

Примітка. Функція $\text{trapz}(x,y)$ здійснює чисельне інтегрування функції, що задана масивом значень y на масиві x .

Тепер відновимо сигнал, використавши тільки N_h гармонік, які було обчислено. Очевидно, що через відкидання гармонік вищого порядку форму сигналу буде спотворено. Чим більше гармонік враховується, тим точнішим є наближення сигналу до вихідного. Додамо такий код:

```
u_in_sp = zeros(1,length(t_var));
for m = 1:Nh
    u_in_sp = u_in_sp + A(m)*cos((m-1)*2*pi*f0*t_var + Ph(m));
end
```

Тепер виведемо графіки початкового сигналу, його спектру, а також відновленої копії сигналу на основі N_h гармонік, додавши рядки коду:

```
figure
subplot(3,1,1);
plot(t_var, u_in_var, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Вхідний сигнал');
axis([tmin tmax umin umax]);
grid on;

subplot(3,1,2);
stem(f, A, '.k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('U_{in}(f), V');
xlabel('f, Hz');
title('Спектр вхідного сигналу');
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(t_var, u_in_sp, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Вхідний сигнал з урахуванням лише перших гармонік');
axis([tmin tmax umin umax]);
grid on;
```

В результаті виконання коду отримаємо графіки, зображені на рис. 6.2.

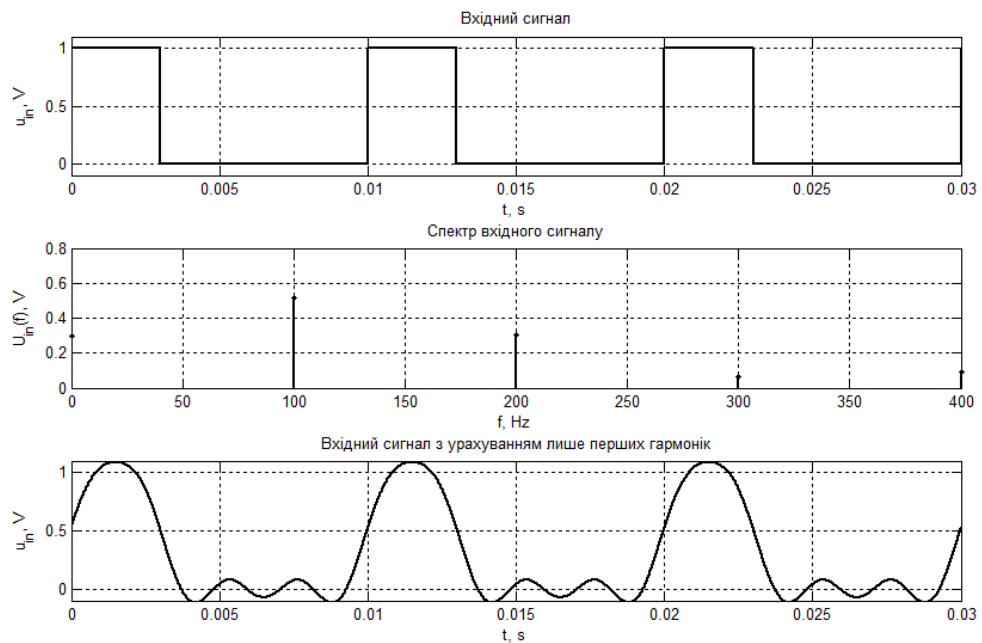


Рис. 6.2

Як можна побачити, у спектрі сигналу присутні $N_h = 5$ гармонік, що відповідають частотам 0, 100, 200, 300, 400 Гц. Можна також бачити, що врахування лише перших 5-ти гармонік недостатнє для точного наближення сигналу до вихідного.

3.2. Завдання №2

Здійснити більш точне відновлення сигналу, врахувавши більшу кількість гармонік.

У коді файлу **file1.m** змінимо кількість гармонік на 20, замінивши відповідний рядок коду:

```
Nh = 20;
```

В результаті виконання **file1.m** отримаємо графіки, зображені на рис. 6.3.

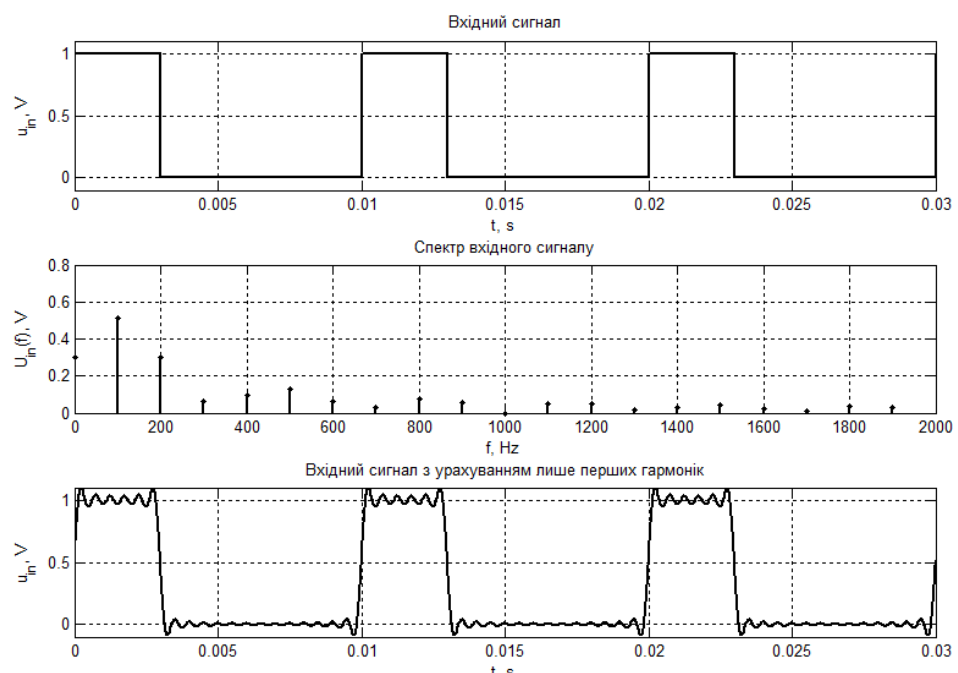


Рис. 6.3

Як можна побачити, більша кількість гармонік призводить до більш точного відновлення сигналу зі спектру.

3.3. Завдання №3. Спектр гармонічного сигналу

Гармонічний сигнал сам являє собою свій спектр, який містить єдину гармоніку. Впевнимось у цьому, підставивши замість вхідного сигналу гармонічний. Для цього **замінімо** у коді такий рядок коду:

```
input = @(t)U0*sin(2*pi*f0*t);
```

Крім цього, **змінимо** нижню межу відображення напруги на графіках:

```
umin = -1.1*U0;
```

Після виконання коду отримаємо графіки, зображені на рис. 6.4.

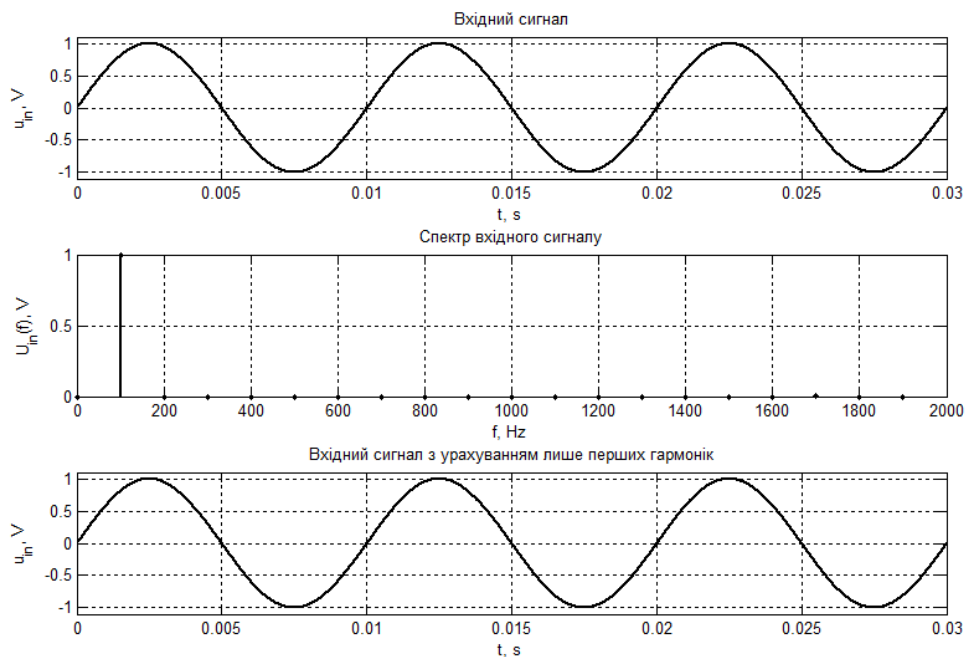


Рис. 6.4

Як можна переконатись, спектр гармонічного сигналу складається з єдиної гармоніки, усі решта гармонік рівні 0. Амплітуда гармоніки дорівнює амплітуді гармонічного сигналу.

3.4. Завдання №4

Побудувати графік передатної функції підсилювача, визначеної в окремому файлі.

Розглянемо перетворення спектра вхідного гармонічного сигналу у підсилювачі, чия передатна характеристика, тобто залежність напруги на виході від напруги на вході $u_{out}(u_{in})$ є нелінійною.

Створимо новий m-файл (нехай його назва – **file2.m**), та побудуємо графік передатної характеристики, визначеної у файлі **Gain.xls**. Для цього додамо у створений файл такі рядки коду:

```
clc; clear all; close all;  
  
data1 = xlsread('Gain.xls', 'V-I', 'B2:C22');  
Uin = data1(:,1);  
Uout = data1(:,2);  
  
figure
```

```
plot(Uin, Uout, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('U_{in}, V');
xlabel('U_{out}, V');
title('Передатна характеристика підсилювача');
grid on;
```

Після виконання коду отримаємо графік передатної функції, зображений на рис. 6.5.

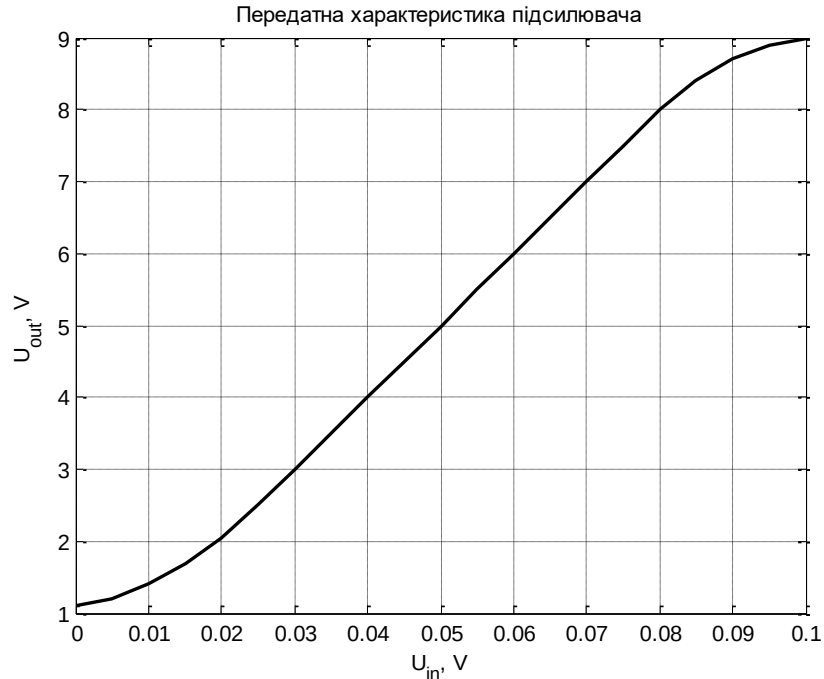


Рис. 6.5

3.5. Завдання №5

Дослідити спектр сигналу на виході підсилювача у разі подання на вхід гармонічного сигналу в режимі А.

Для забезпечення роботи підсилювача в режимі А оберемо на передатній характеристиці робочу точку, що відповідатиме середині лінійної ділянки характеристики, а амплітуду сигналу виберемо якомога більшою. Тоді рівняння вхідного гармонічного сигналу, що подається на вхід підсилювача, має вигляд:

$$u_{in}(t) = U_{shift} + U_0 \sin(2\pi f_0 t),$$

де $U_{shift} = 0.05 \text{ В} = 50 \text{ мВ}$; $U_0 = 0.05 \text{ В} = 50 \text{ мВ}$; $f_0 = 100 \text{ Гц}$.

Побудуємо спектр вхідного сигналу. Очевидно, що він міститиме лише дві складові: постійну (гармоніку нульової частоти) та першу гармоніку на частоті f_0 . Для цього додамо такі рядки коду:

```
Ushift = 0.05;
U0 = 0.05; %Magnitude of the input signal
f0 = 100; T = 1/f0; %Frequency and period of the input signal
Np = 3; %Number of periods of the input signal to be plotted at the graph
Nh = 20; %Number of harmonics of the signal spectrum to be calculate

%input = @(t)U0*0.5*(1 + square(2*pi*f0.*t,30));
input = @(t)Ushift + U0*sin(2*pi*f0*t);
t = 0:T/1000:T;
u_in = input(t);
```

```

t_var = 0:T/1000:Np*T;
u_in_var = input(t_var);

tmin = t_var(1);
tmax = t_var(length(t_var));
umin = Ushift - 1.1*U0;
umax = Ushift + 1.1*U0;

f = zeros(1,Nh);
c = zeros(1,Nh);
A = zeros(1,Nh);
Ph = zeros(1,Nh);

a0 = (2/T)*trapz(t,u_in);
c(1) = a0/2;
A(1) = c(1);
for k = 1:Nh-1
    c(k+1) = (1/T)*trapz(t,u_in.*cos(k*2*pi*f0*t)) -
i*(1/T)*trapz(t,u_in.*sin(k*2*pi*f0*t));
    A(k+1) = 2*abs(c(k+1));
    Ph(k+1) = angle(c(k+1));
    f(k+1) = k*f0;
end

u_in_sp = zeros(1,length(t_var));
for m = 1:Nh
    u_in_sp = u_in_sp + A(m)*cos((m-1)*2*pi*f0*t_var + Ph(m));
end

figure
subplot(3,1,1);
plot(t_var, u_in_var, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Вхідний сигнал');
axis([tmin tmax umin umax]);
grid on;

subplot(3,1,2);
stem(f, A, '.k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('U_{in}(f), V');
xlabel('f, Hz');
title('Спектр вхідного сигналу');
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(t_var, u_in_sp, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Вхідний сигнал з урахуванням лише перших гармонік');
axis([tmin tmax umin umax]);
grid on;

```

Після виконання коду отримаємо графіки, зображені на рис. 6.6.

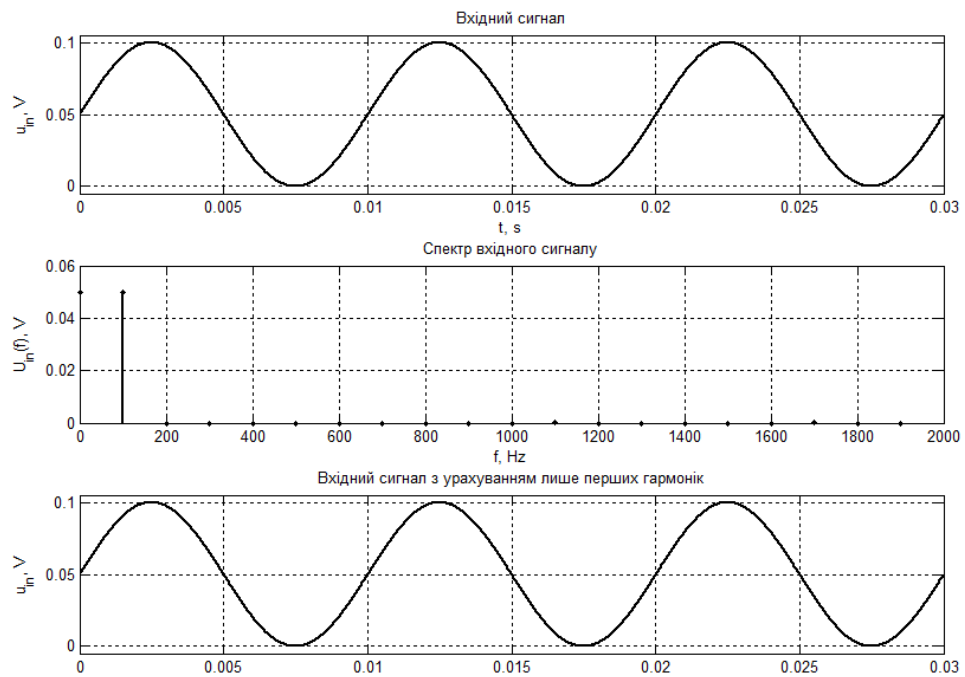


Рис. 6.6

Для побудови реакції підсилювача та її спектра на даний вхідний сигнал додамо до скрипту такий код:

```
umax_out = 1.1*max(Uout);
umin_out = min(Uout)-0.1*max(Uout);

u_out = interp1(Uin,Uout,u_in);
u_out_var = interp1(Uin,Uout,u_in_var);

c_out = zeros(1,Nh);
A_out = zeros(1,Nh);
Ph_out = zeros(1,Nh);

a0 = (2/T)*trapz(t,u_out);
c_out(1) = a0/2;
A_out(1) = c_out(1);
for k = 1:Nh-1
    c_out(k+1) = (1/T)*trapz(t,u_out.*cos(k*2*pi*f0*t)) -
i*(1/T)*trapz(t,u_out.*sin(k*2*pi*f0*t));
    A_out(k+1) = 2*abs(c_out(k+1));
    Ph_out(k+1) = angle(c_out(k+1));
end

u_out_sp = zeros(1,length(t_var));
for m = 1:Nh
    u_out_sp = u_out_sp + A_out(m)*cos((m-1)*2*pi*f0*t_var + Ph_out(m));
end

figure
subplot(3,1,1);
plot(t_var, u_out_var, '-k', 'LineWidth',2); hold on;
ylabel('u_{out}, V');
xlabel('t, s');
title('Сигнал на виході');
axis([tmin tmax umin_out umax_out]);
grid on;
```

```

subplot(3,1,2);
stem(f, A_out, '.k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('U_{out}(f), V');
xlabel('f, Hz');
title('Спектр сигналу на виході');
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(t_var, u_out_sp, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{out}, V');
xlabel('t, s');
title('Сигнал на виході з урахуванням лише перших гармонік');
axis([tmin tmax umin_out umax_out]);
grid on;

```

Після виконання коду отримаємо графіки, зображені на рис. 6.7.

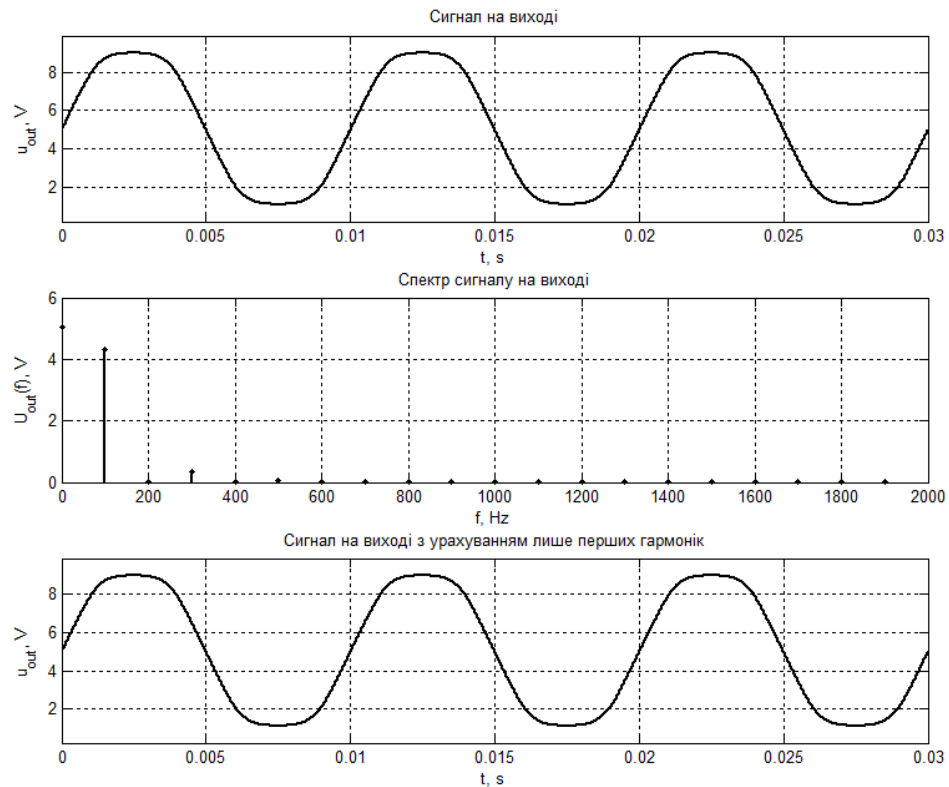


Рис. 6.7

З побудованих графіків видно, що нелінійні спотворення сигналу на виході обумовлені в основному появою 3-ї гармоніки на частоті $3f_0 = 300$ Гц (друга гармоніка має нульову амплітуду через непарність функції).

3.6. Завдання №6. Оцінка нелінійних спотворень підсилювача

Для оцінки нелінійних спотворень вводять коефіцієнт нелінійності

$$K_H = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U_1},$$

де $U_1, U_2, U_3, \dots$ – амплітуди 1-ї, 2-ї, 3-ї і т.д. гармонік.

Обчислимо коефіцієнт нелінійності, додавши такий код:

```
A2nl = 0;  
for k = 3:Nh  
    A2nl = A2nl + A_out(k)^2;  
end  
Kn1 = sqrt(A2nl)/A_out(2)
```

В результаті виконання **file2.m** отримаємо значення коефіцієнта нелінійності:

```
Kn1 =  
  
    0.0826
```

Практичне заняття №7

Тест №2

1. Мета роботи

Здійснити контроль навичок оцінки спектрів сигналів, отриманих на практичних заняттях №5 та №6.

2. Завдання на заняття

Тест містить 5 завдань. Загальна кількість різних типів завдань: 3. завдання у тесті наводяться у випадковому порядку.

Усі завдання, що містяться у тесті, розглянуто на практичному занятті №5. Тематику завдань наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Тип	Опис завдання	Кількість
1	Знайти амплітуду певної гармоніки спектра струму, що протікає через нелінійний безінерційний двополюсник у разі прикладання гармонічної напруги.	2
2	Знайти амплітуду певної гармоніки спектра струму, що протікає через нелінійний безінерційний двополюсник у разі прикладання бігармонічної напруги.	2
3	За допомогою метода 5-ти ординат знайти амплітуду певної гармоніки спектра напруги на виході підсилювача.	1

Тип – номер типу завдання.

Опис завдання – короткий зміст тематики завдання даного типу.

Кількість – кількість завдань даного типу в тесті.

Розрахунок підсилювального каскаду на біполярному транзисторі в режимі малого сигналу

1. Опис завдання

Метою роботи є розрахунок параметрів схеми підсилювального каскаду на біполярному транзисторі, включеному за схемою зі спільним емітером, та моделювання його роботи в режимі малого сигналу. Схему підсилювального каскаду, що підлягає розрахунку, представлено на рис. 8.1.

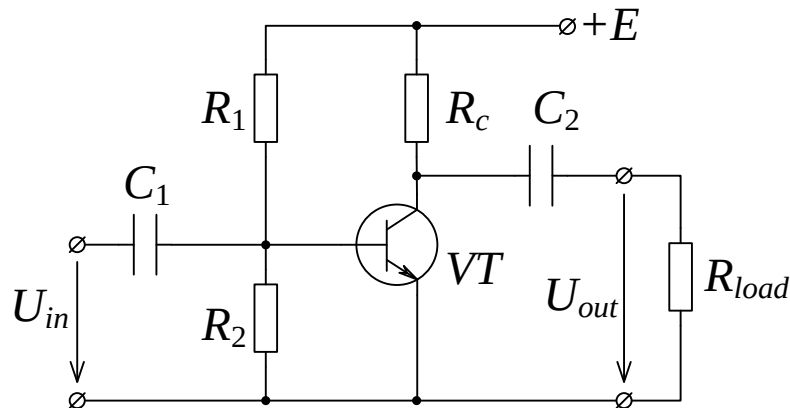


Рис. 8.1. Схема підсилювального каскаду на біполярному транзисторі, включеному за схемою зі спільним емітером

На схемі, представлений на рис. 8.1, U_{in} – амплітуда вхідного гармонічного сигналу; U_{out} – амплітуда гармонічного сигналу на виході схеми; VT – біполярний транзистор типу pnp ; R_{load} – опір, на який навантажено підсилювальний каскад, тобто опір навантаження; E – ЕРС живлення, за рахунок енергії джерела якого здійснюється підсилення потужності сигналу; R_c – опір колектора, що визначає робочу точку на вихідних характеристиках транзистора; R_1, R_2 – опори, що складають подільник напруги, який забезпечує потрібне значення постійної напруги зміщення у вхідному колі «база-емітер», визначаючи робочу точку на вхідній характеристиці транзистора; C_1, C_2 – розділювальні ємності для виключення постійної складової напруги.

Також будемо використовувати такі позначення:

- U_{be} – напруга між базою та емітером транзистора;
- U_{ce} – напруга між колектором та емітером транзистора;
- I_b – струм, що втікає в базу транзистора;
- I_c – струм, що втікає в колектор транзистора.

2. Розрахунок параметрів еквівалентної схеми заміщення транзистора для випадку лінійного режиму роботи

Розглянемо біполярний транзистор у разі включення його за схемою зі спільним емітером (рис. 8.2, а). У цьому випадку транзистор можна розглядати як чотириполіусник. У випадку роботи біполярного транзистора в лінійному режимі даний чотириполіусник можна замінити еквівалентною схемою заміщення, що також являтиме собою лінійний чотириполіусник (рис. 8.2, б).

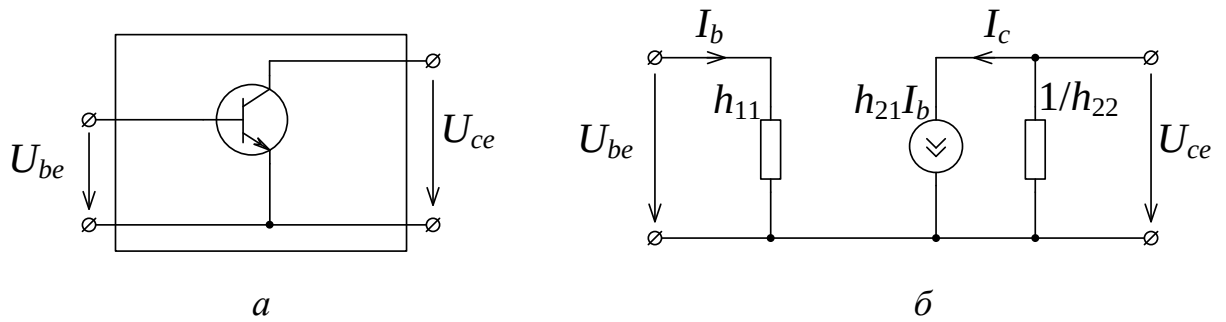


Рис. 8.2. Схема заміщення біполярного транзистора в лінійному режимі роботи: а – транзистор у схемі зі спільним емітером як чотириполіусник; б – його еквівалентна схема заміщення

Даний чотириполіусник може бути описаний матрицею h -параметрів:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

При цьому струми та напруги на вході та виході чотириполіусника будуть пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} U_{be} = h_{11}I_b + h_{12}U_{ce}; \\ I_c = h_{21}I_b + h_{22}U_{ce}. \end{cases}$$

h -параметри для схеми заміщення транзистора мають такий фізичний зміст:

$$h_{11} = \left. \frac{\Delta U_{be}}{\Delta I_b} \right|_{U_{ce}=\text{const}} = R_{in VT} - \text{вхідний опір транзистора};$$

$$h_{12} = \left. \frac{\Delta U_{be}}{\Delta U_{ce}} \right|_{I_b=\text{const}} - \text{коефіцієнт зворотного зв'язку за напругою};$$

$$h_{21} = \left. \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} \right|_{U_{ce}=\text{const}} = \beta - \text{коефіцієнт передачі транзистора за струмом};$$

$$h_{22} = \left. \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{ce}} \right|_{I_b=\text{const}} - \text{вихідна провідність транзистора}; \text{ вихідний опір транзистора}$$

можна обчислити як $R_{out VT} = 1/h_{22}$.

Для обчислення параметра h_{11} будують вхідну характеристику транзистора $I_b(U_{be})$ для одного значення напруги U_{ce} на виході, наприклад $U_{ce} = 5$ В (рис. 8.3, а). Після цього на даній кривій обирають лінійну ділянку, на якій обирають дві довільні точки (рис. 8.3, а). Після цього h_{11} обчислюють як відповідне відношення різниць за осями абсцис та ординат:

$$h_{11} = \frac{\Delta U_{be}}{\Delta I_b} = \frac{U_{be2} - U_{be1}}{I_{b2} - I_{b1}}.$$

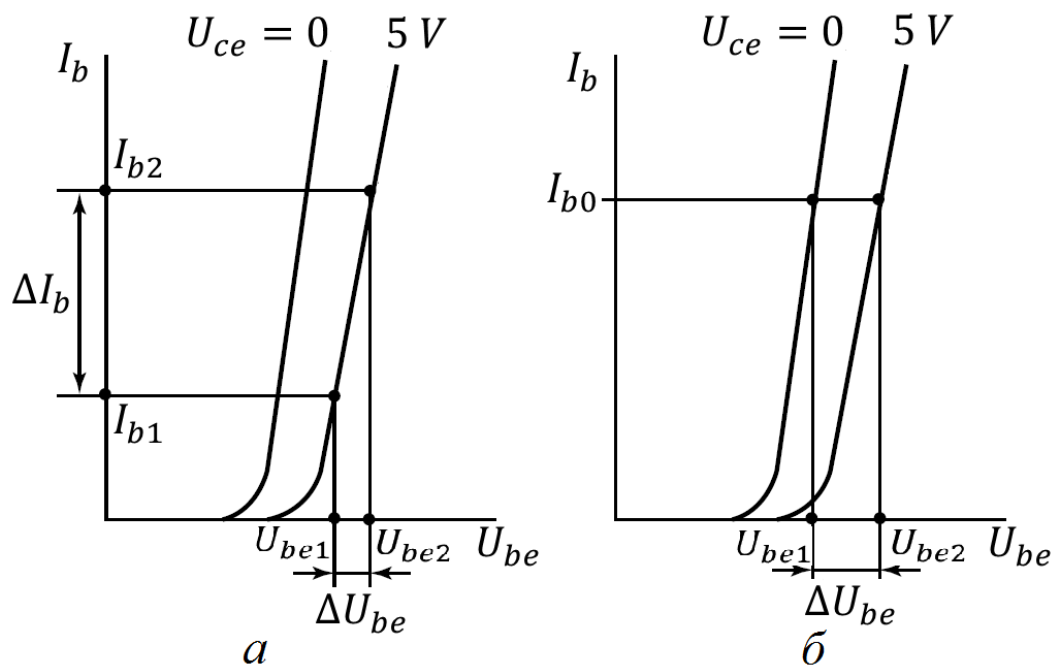


Рис. 8.3. Обчислення h -параметрів на входних характеристиках транзистора: а – обчислення h_{11} ; б – обчислення h_{12}

Для обчислення параметра h_{12} будують дві входні характеристики транзистора $I_b(U_{be})$ для двох значень напруги U_{ce} на виході, наприклад $U_{ce} = 0$ В та $U_{ce} = 5$ В (рис. 8.3, б). Після цього на даних кривих обирають лінійні ділянки, на яких фіксують точки для одного значення $I_b = I_{b0}$ (рис. 8.3, б). Після цього h_{12} обчислюють як відповідне відношення різниці напруги U_{be} між цими точками до різниці між напругами U_{ce} , для яких побудовано дві зазначені криві (у наведеному прикладі $\Delta U_{ce} = 5 - 0 = 5$ В):

$$h_{12} = \frac{\Delta U_{be}}{\Delta U_{ce}} = \frac{U_{be2} - U_{be1}}{5 - 0} = \frac{U_{be2} - U_{be1}}{5}.$$

Для обчислення значення параметра h_{21} будують дві вихідні характеристики транзистора $I_c(U_{ce})$ для двох значень струму бази $I_b = I_{b2}$ та $I_b = I_{b3}$ (рис. 8.4, а). Після цього для одного значення $U_{ce} = U_{ce0}$ фіксують на кривих дві точки. Тоді параметр h_{21} може бути обчислений як відношення різниці значень струмів колектора для даних точок до різниці струмів бази для кривих, на яких обрано дані дві точки:

$$h_{21} = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} = \frac{I_{c2} - I_{c1}}{I_{b3} - I_{b2}}.$$

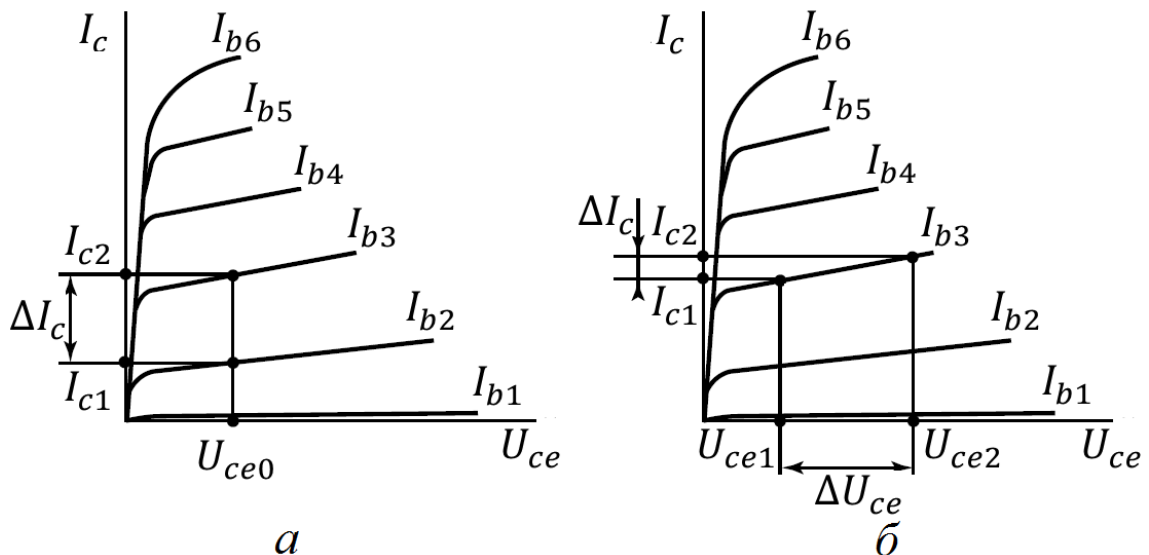


Рис. 8.4. Обчислення h -параметрів на вихідних характеристиках транзистора: а – обчислення h_{21} ; б – обчислення h_{22}

Для обчислення значення параметра h_{22} будують одну вихідну характеристику транзистора $I_c(U_{ce})$ для одного значення струму бази $I_b = I_{b3}$ (рис. 8.4, б). На даній кривій обирають дві точки та обчислюють параметр h_{22} як відношення різниці струмів колектора до різниці напруг «колектор-емітер» даних двох точок::

$$h_{22} = \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{ce}} = \frac{I_{c2} - I_{c1}}{U_{ce2} - U_{ce1}}.$$

3. Розрахунок параметрів схеми підсилювального каскаду

У схемі підсилювального каскаду, зображений на рис. 8.1, опори R_1 та R_2 формують резистивний подільник напруги, призначення якого полягає в забезпеченні потрібного значення напруги зміщення у вхідному колі транзистора «база-емітер».

Для визначення значень даних опорів спочатку задаються струмом, що протікає через подільник (тобто через опори R_1, R_2). Зазвичай, для забезпечення стабільності роботи каскаду, його приймають рівним

$$I_d = (2 \dots 5)I_c.$$

Якщо для конкретної моделі транзистора його вхідний опір $R_{inVT} = h_{11}$ виявляється малим порівняно з типовими значеннями, що складають $10^3 - 10^4$ Ом, то вхідний опір транзистора може шунтувати опір R_2 . У цьому випадку струм подільника I_d можна прийняти більшим для зменшення впливу R_{inVT} на розподіл напруги в подільнику. Слід зауважити, що збільшення I_d призводить до збільшення потужності, що споживається від джерела.

Вхідний опір R_{in} каскаду, зображеного на рис. 8.1, може бути обчислений як паралельне з'єднання опорів R_1, R_2, R_{inVT} , оскільки для змінного струму джерело живлення E формує коротке замикання, а, отже, на змінному струмі дані три опори виявляються з'єднаними паралельно.

Введемо параметр опору бази R_b , який дорівнює еквівалентному опору паралельного з'єднання опорів подільника R_1, R_2 :

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Тоді вхідний опір каскаду обчислюється як паралельне з'єднання R_b та $R_{in VT}$:

$$R_{in} = \frac{R_b R_{in VT}}{R_b + R_{in VT}}.$$

Виходячи з таких самих міркувань, вихідний опір каскаду, зображеного на рис. 8.1, обчислимо як паралельне з'єднання вихідного опору транзистора $R_{out VT} = 1/h_{22}$ та опору колектора R_c :

$$R_{out} = \frac{R_c R_{out VT}}{R_c + R_{out VT}}.$$

Величина розділювальної ємності C_1 розраховується з умови того, що її реактивний опір має бути значно менше вхідного опору каскаду:

$$\frac{1}{2\pi f C_1} \ll R_{in}.$$

де f – частота сигналу.

З даного співвідношення маємо:

$$C_1 \gg \frac{1}{2\pi f R_{in}}.$$

На практиці достатньо, щоб реактивний опір, створюваний ємністю C_1 , був принаймні в 10 разів менше вхідного опору каскаду:

$$C_1 > \frac{10}{2\pi f R_{in}}.$$

Величину розділювальної ємності C_2 обирають з тих самих міркувань, але в даному випадку реактивний опір, створюваний ємністю C_2 має бути значно менше опору навантаження R_{load} (див. рис. 8.1):

$$C_2 > \frac{10}{2\pi f R_{load}}.$$

Опір навантаження зазвичай фіксований, але якщо його можна обирати, то у випадку каскаду попереднього підсилення, в якому ключовою функцією є підсилення напруги, варто взяти опір навантаження, що принаймні в 10 разів перевищує вихідний опір каскаду R_{out} :

$$R_{load} \approx 10 R_{out}.$$

Аналіз нелінійного резистивного кола. Метод робочої точки. Отримання вхідної характеристики нелінійного кола

1. Мета роботи

1. Засвоїти використання методу еквівалентних перетворень для знаходження результуючої ВАХ з'єднання декількох нелінійних елементів.
2. Навчитись застосовувати метод робочої точки для аналізу нелінійного кола.
3. Навчитись будувати вхідну характеристику нелінійного резистивного кола.

2. Підготовчі дії перед виконанням завдань заняття

Перед початком обчислень необхідно виконати такі підготовчі дії:

1. Запустити програмний пакет Matlab.
2. Створити пустий m-файл (вкладка **Editor** -> **New** -> **Script**) або комбінація клавіш **Ctrl+N**. Зберегти даний файл у відповідну папку, давши йому будь-яке ім'я (вкладка **Editor** -> **Save As**) або комбінація клавіш **Ctrl+S**. Нехай його назва – **File1.m**.
3. Вказати шлях до папки, де збережено файл, у відповідному рядку адреси.
4. Скопіювати до обраної папки допоміжний файл **V-I_curves.xls**.
5. У файлі File1.m ввести два перші рядки для очищення простору імен та вікна вводу:

```
clear all
clc
```

Виконавши дані шість кроків, можна приступати до виконання роботи.

Для того, щоб запустити скрипт на виконання, необхідно спочатку зберегти файл (**Ctrl+S**), а потім натиснути **F5** або кнопку **Run** у стрічці меню.

3. Завдання на заняття

Необхідно знайти вхідну характеристику $i = i(u)$ кола, зображеного на рис. 9.1.

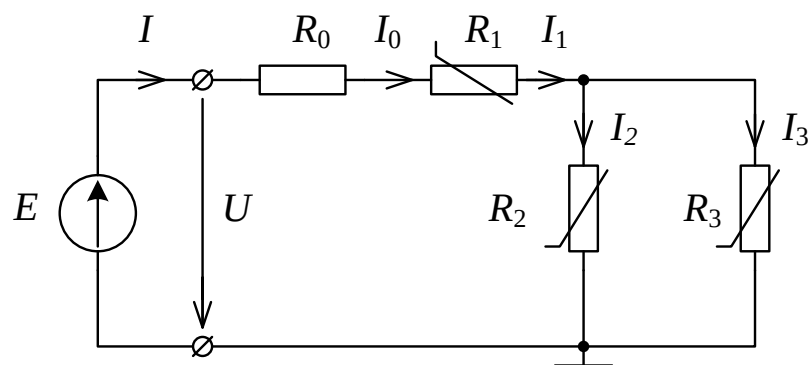


Рис. 9.1

Параметри схеми:

$$R_0 = 30 \, \Omega;$$

$$E = 15 \, \text{В};$$

R_1, R_2, R_3 – нелінійні елементи, ВАХ яких визначається вольт-амперними характеристиками $i_1(u_1), i_2(u_2), i_3(u_3)$ відповідно. Кожна ВАХ задається на однаковій множині з 21-го значення напруги $u = -10, -9, \dots, 0, 1, \dots, 9, 10 \, \text{В}$. Дані характеристики

надані у табличному вигляді в файлі **V-I_curves.xls**, що повинен знаходитись в тій самій папці, де і файл **File1.m**. ВАХ елементів визначаються у табл. 9.1 (дані з **V-I_curves.xls**).

Таблиця 9.1

№	u, B	I ₁ , A	I ₂ , A	I ₃ , A
1	-10	-0.98889	-0.04849	-0.2594
2	-9	-0.98258	-0.04786	-0.25041
3	-8	-0.97268	-0.04696	-0.23943
4	-7	-0.95715	-0.04569	-0.22602
5	-6	-0.93279	-0.04388	-0.20964
6	-5	-0.8946	-0.04131	-0.18964
7	-4	-0.8347	-0.03767	-0.1652
8	-3	-0.74076	-0.0325	-0.13536
9	-2	-0.59343	-0.02517	-0.0989
10	-1	-0.36237	-0.01477	-0.05438
11	0	0	0	0
12	1	0.362372	0.020953	0.066421
13	2	0.59343	0.050688	0.147547
14	3	0.74076	0.092883	0.246636
15	4	0.834701	0.15276	0.367662
16	5	0.894601	0.23773	0.515485
17	6	0.932794	0.358308	0.696035
18	7	0.957148	0.529417	0.91656
19	8	0.972676	0.772232	1.18591
20	9	0.982578	1.116803	1.514894
21	10	0.988891	1.605773	1.916717

Побудуємо ВАХ трьох нелінійних елементів. Для цього спочатку зчитуємо дані з файлу **V-I_curves.xls** до середовища Matlab. Для зчитування даних у масиви необхідно додати такі рядки коду:

```
data1 = xlsread('V-I_curves.xls', 'V-I', 'B2:E22');
U = data1(:,1);
I1 = data1(:,2);
I2 = data1(:,3);
I3 = data1(:,4);
```

Для побудови графіків необхідно додати такий код:

```
figure
plot(U, I1, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(U, I2, '-r', 'LineWidth', 2);
plot(U, I3, '-g', 'LineWidth', 2);
ylabel('I, A');
xlabel('U, V');
legend('i_1(u)', 'i_2(u)', 'i_3(u)', 'Location', 'NorthWest'); grid on;
```

Запустивши код на виконання, отримаємо графіки ВАХ, зображені на рис. 9.2.

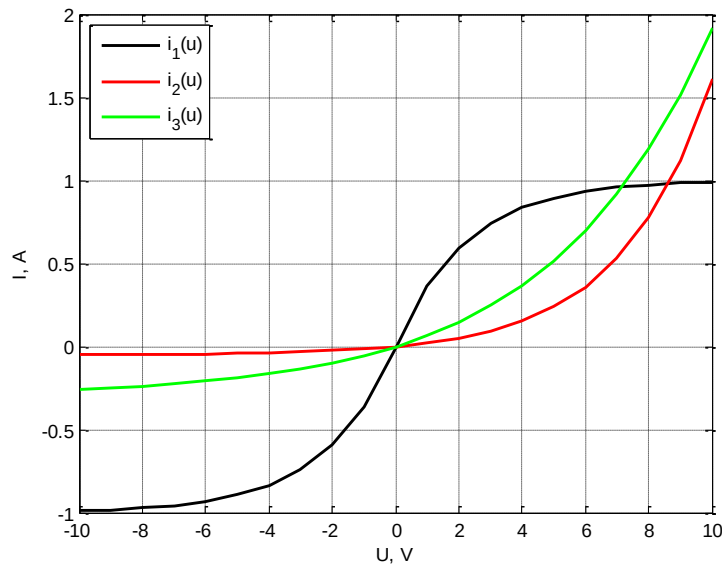


Рис. 9.2

Щоб скопіювати графік до документу Word, у меню вікна графіка необхідно вибрати опцію **Edit -> Copy Figure**. Після цього графік можна вставити (**Ctrl+V**) до звіту.

Примітка. Отримані криві ВАХ визначаються аналітичними співвідношеннями

$$i_1(u) = \text{sign}(u) \cdot (1 - e^{-0.45 \cdot u});$$

$$i_2(u) = 0.05 \cdot (e^{0.35 \cdot u} - 1);$$

$$i_3(u) = 0.3 \cdot (e^{0.2 \cdot u} - 1).$$

Однак, для виконання завдання слід вважати, що дані ВАХ задано у вигляді набору точок, що були виміряні експериментально. Зазначені аналітичні співвідношення наведено лише для інформації.

3.1. Завдання №1

Здійснимо еквівалентне перетворення паралельного з'єднання резисторів R_2, R_3 на один еквівалентний нелінійний резистор R_{23} , ВАХ якого $i_{23}(u)$ є результуючою ВАХ паралельного з'єднання (див. рис. 9.3).

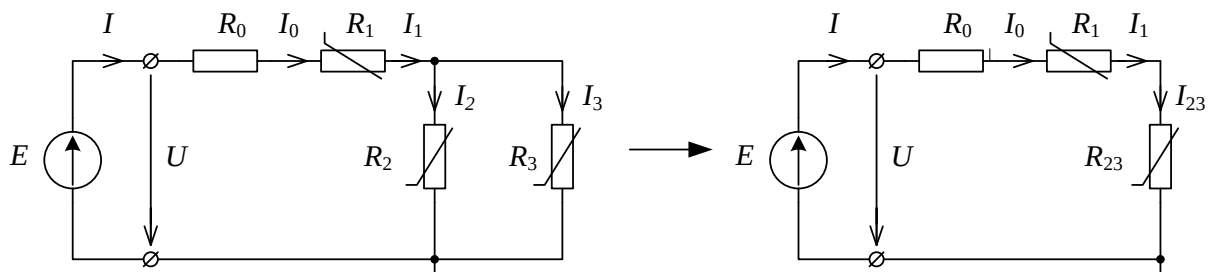


Рис. 9.3

Для того, щоб отримати результуючу ВАХ паралельного з'єднання двох нелінійних резисторів (НР), необхідно скласти їхні струми для кожного значення U_i напруги. Для цього додамо такий рядок коду:

```
| I23 = I2+I3;
```

Після цього побудуємо графіки ВАХ НР 2 і 3, а також результуючу ВАХ НР 23, додавши такі рядки коду:

```
figure
plot(U, I23, '-k', 'LineWidth',2); hold on;
plot(U, I2, '--k', 'LineWidth',2);
plot(U, I3, '-.k', 'LineWidth',2);
ylabel('I, A');
xlabel('U, V');
legend('i_23(u)', 'i_2(u)', 'i_3(u)', 'Location', 'NorthWest'); grid on;
```

Запустивши код на виконання, отримаємо шукані графіки ВАХ, зображені на рис. 9.4.

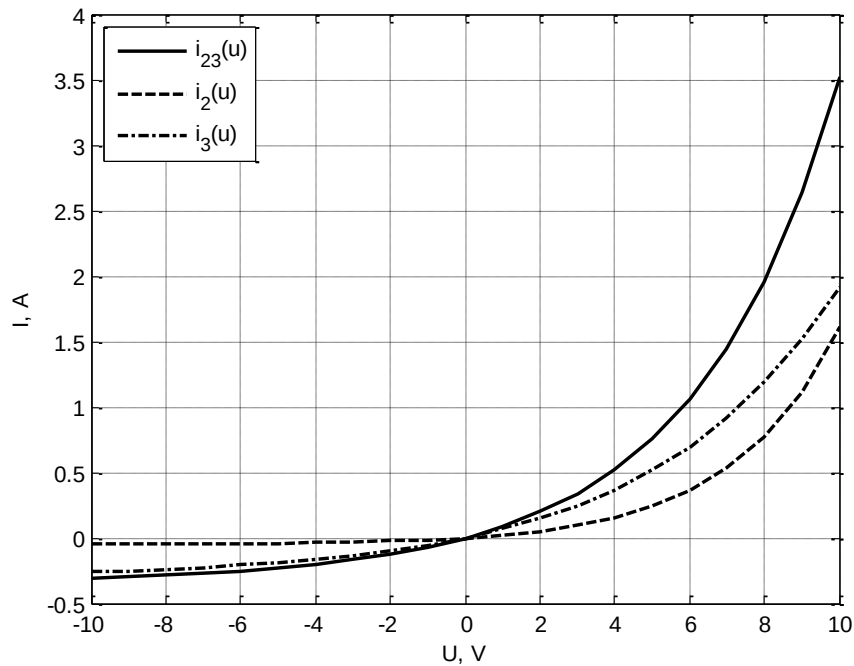


Рис. 9.4

3.2. Завдання №2

Здійснимо еквівалентне перетворення послідовного з'єднання резисторів R_1, R_{23} на один еквівалентний нелінійний резистор R_{123} , ВАХ якого $i_{123}(u)$ є результуючою ВАХ послідовного з'єднання, зображеного на рис. 9.5.

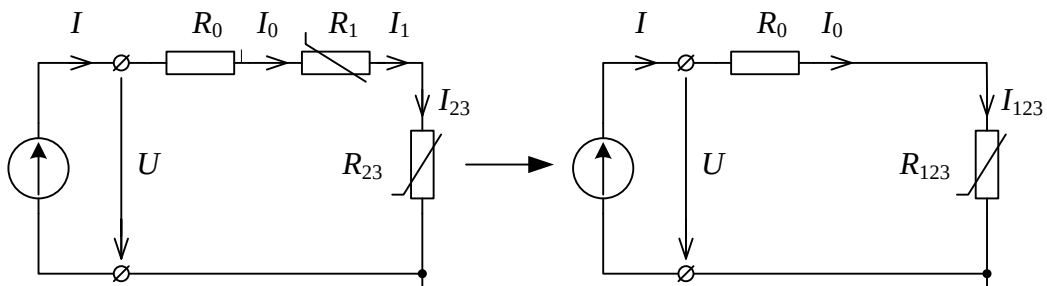


Рис. 9.5

Оскільки за послідовного з'єднання для однакових значень i складаються значення напруги u , спочатку побудуємо ВАХ НР1 та НР23, здійснивши перехід до обернених ВАХ, тобто до кривих $u_1(i), u_{23}(i)$, для чого додаємо такі рядки коду:

```
figure
plot(I1, U, '--k', 'LineWidth',2); hold on;
plot(I23, U, '-.k', 'LineWidth',2);
ylabel('U, V');
xlabel('I, A');
legend('u_1(i)', 'u_{23}(i)', 'Location', 'SouthEast'); grid on;
```

У результаті виконання даного коду отримаємо ВАХ, зображені на рис. 9.6.

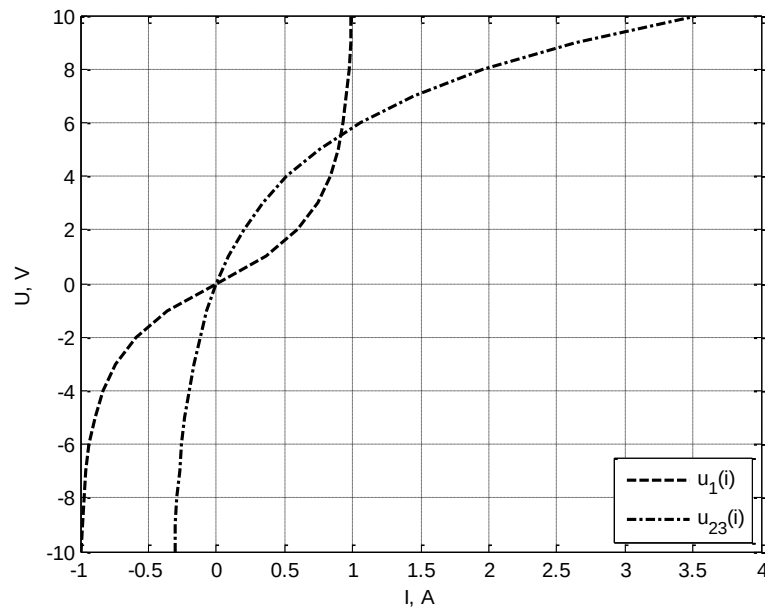


Рис. 9.6

На графіках визначимо мінімальне та максимальне значення струму, в діапазоні яких $I_{min} \dots I_{max}$ обидві криві визначені. Для цього запишемо код:

```
Imin = min(I23);
Imax = max(I1);
```

Для того, щоб отримати результуючу ВАХ послідовного з'єднання НР1 та НР23, необхідно скласти їхні напруги для кожного фіксованого значення I_i . Однак, для обох графіків значення струму відрізняються. Щоб привести обидва графіка до одного набору струмів, здійснимо кусково-лінійну інтерполяцію обох кривих в діапазоні $I_{min} \dots I_{max}$. Для цього запишемо такі рядки коду:

```
I123=Imin:(Imax-Imin)/20:Imax;
U1 = interp1(I1,U,I123);
U23 = interp1(I23,U,I123);
```

Після цього здійснимо обчислення значень результуючої ВАХ $u_{123}(i)$ та побудуємо графіки $u_1(i)$, $u_{23}(i)$, $u_{123}(i)$, додавши такі рядки коду:

```
U123 = U1 + U23;
figure
plot(I123, U123, '-k', 'LineWidth',2); hold on;
plot(I123, U1, '--k', 'LineWidth',2);
plot(I123, U23, '-.k', 'LineWidth',2);
ylabel('U, V');
xlabel('I, A');
legend('u_{123}(i)', 'u_1(i)', 'u_{23}(i)', 'Location', 'NorthWest'); grid on;
```

У результаті виконання даного коду отримаємо графіки, зображені на рис. 9.7.

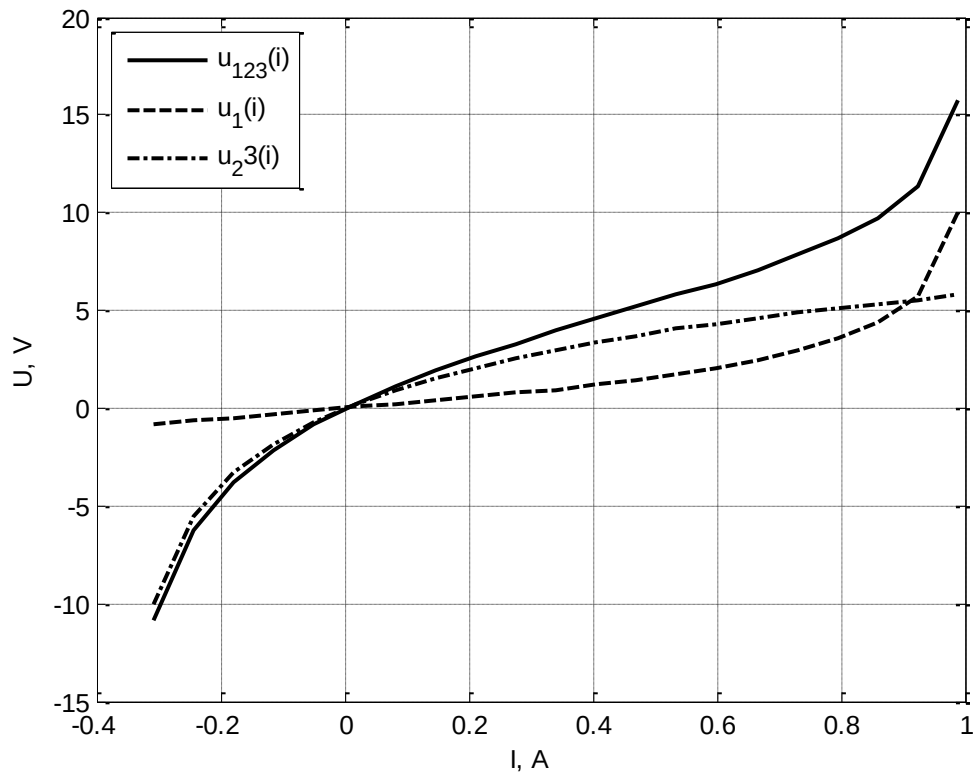


Рис. 9.7

Таким чином, в результаті еквівалентних перетворень ми отримали еквівалентне нелінійне коло (див. рис. 9.8), яке зручно проаналізувати методом робочої точки.

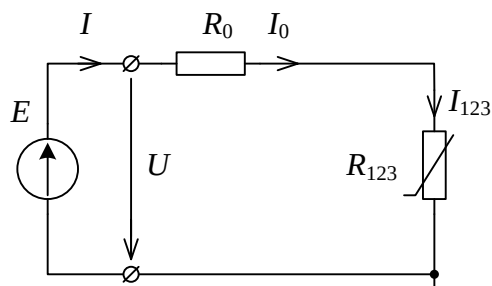


Рис. 9.8

3.3. Завдання №3

Для вказаних параметрів E, R_0 проаналізувати коло в статичному режимі, знайшовши значення струму I та падіння напруги на НР123 U_{123} методом робочої точки.

Вище ми знайшли ВАХ НР123 $i_{123}(u)$. Лінія навантаження визначатиметься рівнянням $i = \frac{E}{R_0} - \frac{1}{R_0} U_{123}$.

Побудуємо ці два графіки в одній системі координат, додавши код:

```
E = 15; R0 = 30;
I_load = E/R0 - U123/R0;

figure
plot(U123, I123, '-r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(U123, I_load, '-k', 'LineWidth', 2);
ylabel('I, A');
```

```
xlabel('U, V');
legend('i_{123}(u)', 'i_{load}(u)', 'Location', 'SouthEast'); grid on;
```

У результаті виконання даного коду отримаємо графіки, зображені на рис. 9.9.

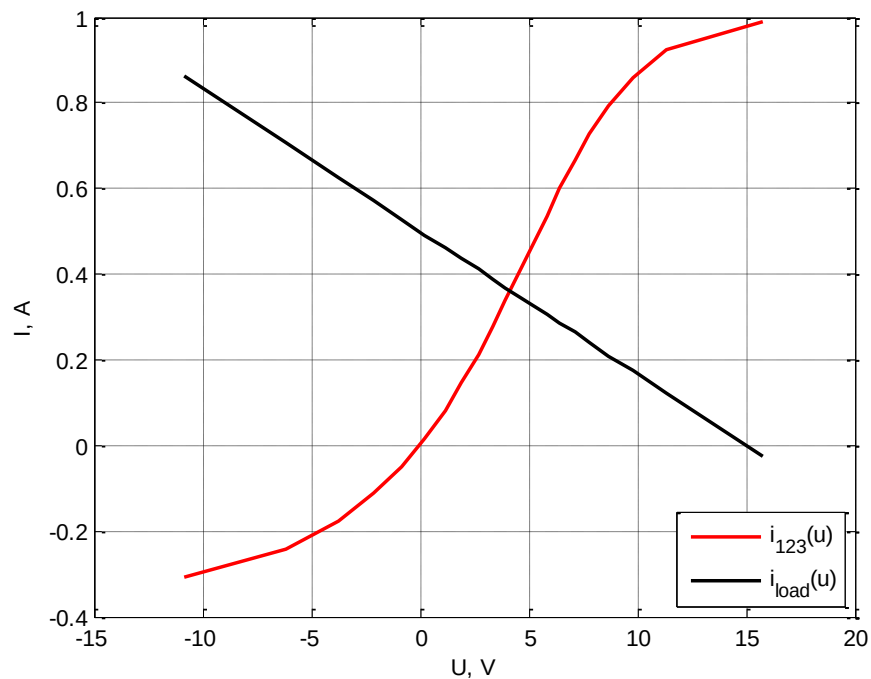


Рис. 9.9

Робоча точка знаходиться на перетині цих кривих. Знайти її координати можна, чисельно розв'язавши рівняння $i_{123}(u) - i_{load}(u) = 0$. Для цього необхідно додати такий код:

```
Umin = min(U123);
Umax = max (U123);
u=Umin:(Umax-Umin)/1000:Umax;
Inl = interp1(U123, I123,u);
Il = interp1(U123,I_load,u);

Delta = abs(Inl(1)-Il(1));
Uwp = Umin; Iwp = Inl(1);
for p = 1:length(u)
    if abs(Inl(p)-Il(p))<=Delta
        Delta = abs(Inl(p)-Il(p));
    else
        Uwp=u(p);
        Iwp=Inl(p);
        break;
    end
end
Iwp
Uwp
```

В результаті маємо значення робочої точки:

```
Iwp =

    0.3647
```

Uwp =

4.1710

Отже, якщо $E = 15$ В, то на вході схеми протікає струм $I = 0.37$ А. При цьому напруга на нелінійній ділянці кола становить 4.17 В.

3.4. Завдання №4

Побудуємо тепер вхідну характеристику кола, тобто залежність вхідного струму i_{in} від вхідної напруги $u_{in} = E$. Для цього достатньо повторити процедуру обчислення робочої точки для множини значень вхідної напруги E . Створимо (**Ctrl+N**) та збережемо (**Ctrl+S**) новий m-файл, нехай його ім'я – **File2.m**. У **File2.m** скопіюємо усі обчислення з попереднього файлу, окрім коду виведення графіків, а останній фрагмент коду, призначений для обчислення робочої точки, розмістимо всередині циклу, змінна якого пробігатиме усі значення вхідної напруги. Підсумковий код файлу **File2.m** має вигляд:

```
clear all
clc

data1 = xlsread('V-I_curves.xls', 'V-I', 'B2:E22');
U = data1(:,1);
I1 = data1(:,2);
I2 = data1(:,3);
I3 = data1(:,4);

I23 = I2+I3;

Imin = min(I23);
Imax = max(I1);

I123=Imin:(Imax-Imin)/20:Imax;
U1 = interp1(I1,U,I123);
U23 = interp1(I23,U,I123);
U123 = U1 + U23;

R0 = 30;

Emin = -10; Emax = 20;
E = Emin:2:Emax;

Umin = min(U123);
Umax = max (U123);
u=Umin:(Umax-Umin)/1000:Umax;
Inl = interp1(U123, I123,u);

Iwp = zeros(1,length(E));
Uwp = zeros(1,length(E));

figure
plot(U123, I123,'-r','LineWidth',2); hold on;
ylabel('I, A');
xlabel('U, V');
title('Обчислення робочих точок для різних значень вхідної напруги');
grid on;

for k = 1:length(E)
    I_load = E(k)/R0 - U123/R0;
    I1 = interp1(U123,I123,u);

    Delta = abs(Inl(1)-I1(1));
```

```

Uwp(k) = Umin; Iwp(k) = Inl(1);
for p = 1:length(u)
    if abs(Inl(p)-Il(p))<=Delta
        Delta = abs(Inl(p)-Il(p));
    else
        Uwp(k)=u(p);
        Iwp(k)=Inl(p);
        break;
    end
end
plot(U123, I_load, '-k', 'LineWidth',2); hold on;
end
legend('i_{123}(u)', 'i_{load}(u)', 'Location', 'NorthWest');

```

В результаті виконання коду отримаємо множину робочих точок, побудова яких ілюструється отриманим графіком, зображеним на рис. 9.10.

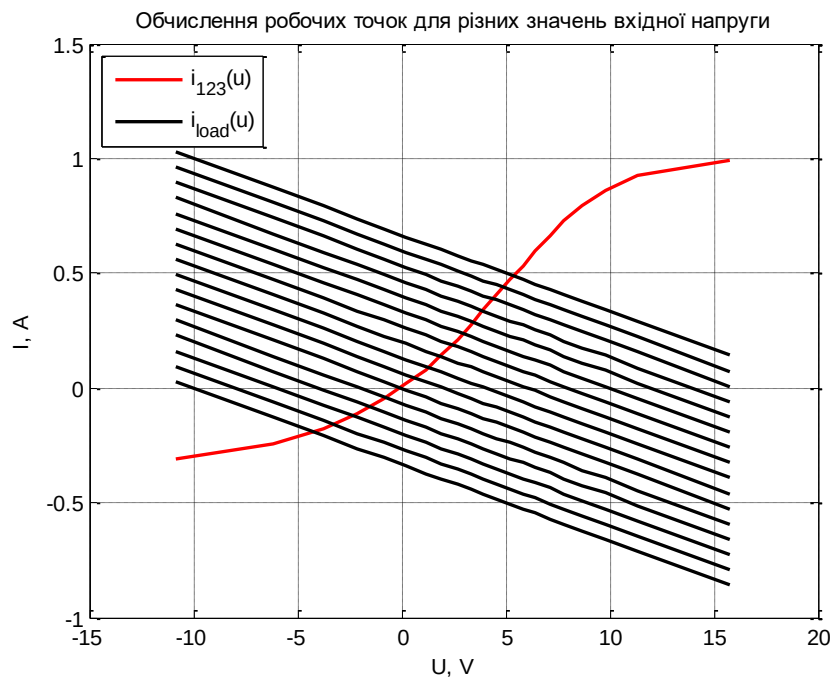


Рис. 9.10

На графіку побудовано лінії навантаження для кожного значення вхідної напруги (що визначається ЕРС джерела: $u_{in} = E$), яка змінюється в діапазоні $E = -10, -8, -6, \dots, 20$ В.

Для побудови вхідної характеристики у всьому діапазоні вхідних напруг, для яких визначена ВАХ $i_{123}(u)$, **змінимо** у файлі **File2.m** рядки коду, що визначають діапазон вхідної ЕРС:

```

Emin = -20; Emax = 45;
E = Emin:1:Emax;

```

Після цього додамо в кінець файлу **File2.m** код, що виводить графіки вхідної характеристики $i_{in}(u_{in})$ та залежності напруги на нелінійній частині кола від вхідної напруги $u_{123}(u_{in})$:

```

figure
plot(E, Iwp, '-k', 'LineWidth',2); hold on;
ylabel('i_{in}, A');
xlabel('u_{in} = E, V');
title('Вхідна характеристика кола');

```

```

legend('i(u)', 'Location', 'NorthWest'); grid on;

figure
plot(E, Uwp, '--k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{123}, V');
xlabel('u_{in} = E, V');
title('Залежність напруги на нелінійній частині кола від вхідної напруги \itu_{123}(u)');
legend('u_{123}(u)', 'Location', 'NorthWest'); grid on;

```

Після виконання коду отримаємо відповідні графіки, зображені на рис. 9.11 та рис. 9.12.

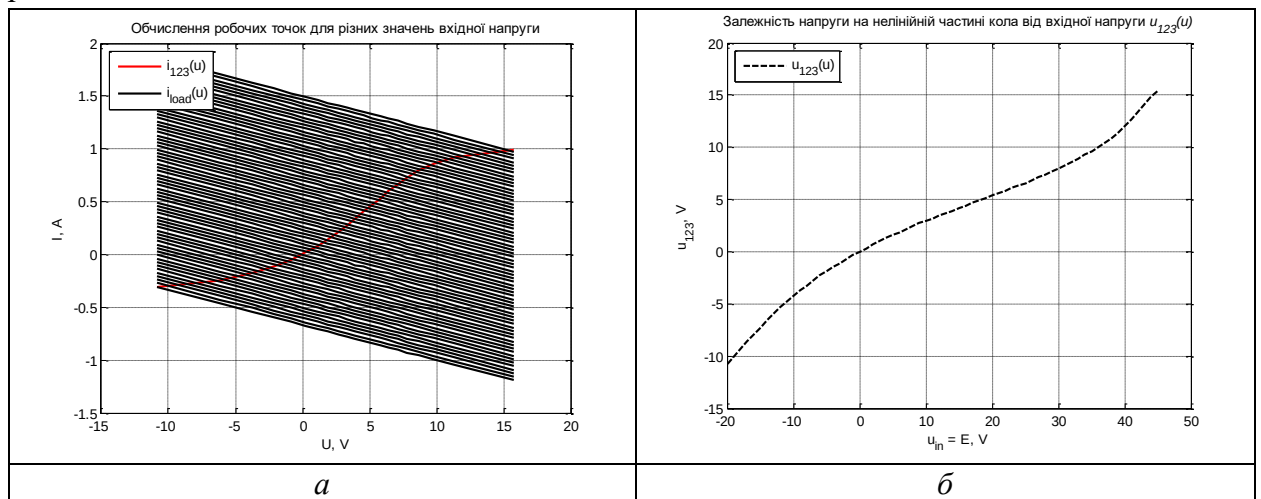


Рис. 9.11. Отримання залежності напруги на нелінійній частині кола від вхідної напруги:
а) процес отримання множини робочих точок; б) отримана залежність.

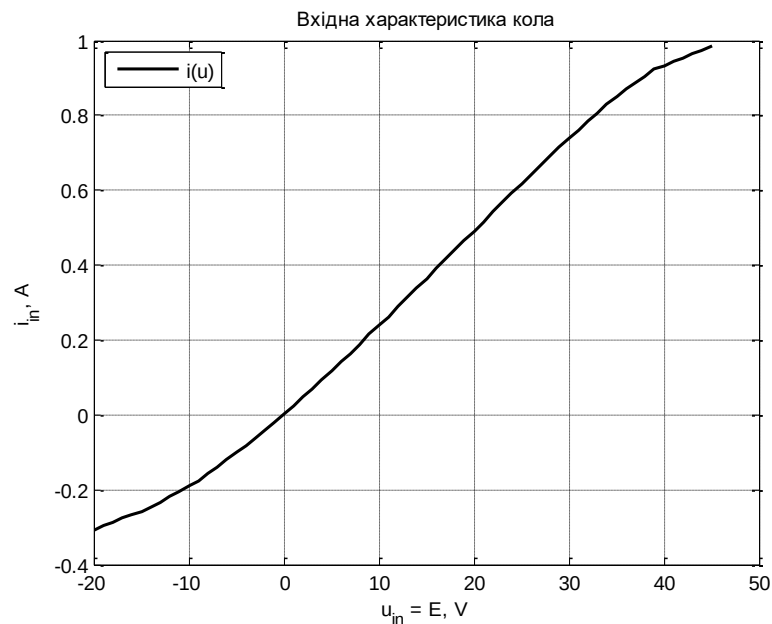


Рис. 9.12. Вхідна характеристика кола

3.5. Завдання №5

Отримавши вхідну характеристику кола $i_{in}(u_{in})$, подамо на вхід кола сигнали різної форми та отримаємо реакцію кола, тобто форму вхідного струму, після чого порівняємо форму напруги u_{in} та струму i_{in} на вході кола.

Як можна побачити, вхідна характеристика має значну ділянку, наближену до лінійної, та виражені нелінійності на краях діапазону вхідних напруг.

Завдання 5.1. Синусоїдний сигнал великої амплітуди (режим великого сигналу)

Подано на вхід кола синусоїдний сигнал великої амплітуди:

$$u_{in}(t) = U_{shift} + U_{mag} \cos \omega t,$$

де U_{shift} – напруга зміщення;

U_{mag} – амплітуда коливання;

ω – кутова частота коливання.

Нехай $U_{shift} = 0$; $U_{mag} = 20$ В, $\omega = 1$ рад/с. Для обчислення реакції кола у часі на такий вхідний сигнал за допомогою отриманої вхідної характеристики додамо такий код:

```
omega = 1;
t = 0:0.1:20/omega;
Umag = 20;
Ushift = 0;
u_in = Ushift + Umag*cos(omega.*t);
i_in = interp1(E,Iwp,u_in);

figure
subplot(2,1,1);
plot(t, u_in, '-k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('u_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Дія: напруга на вході');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(t, i_in, '--k', 'LineWidth', 2); hold on;
ylabel('i_{in}, V');
xlabel('t, s');
title('Реакція: струм на вході');
grid on;
```

Після виконання отримаємо графіки, зображені на рис. 9.13.

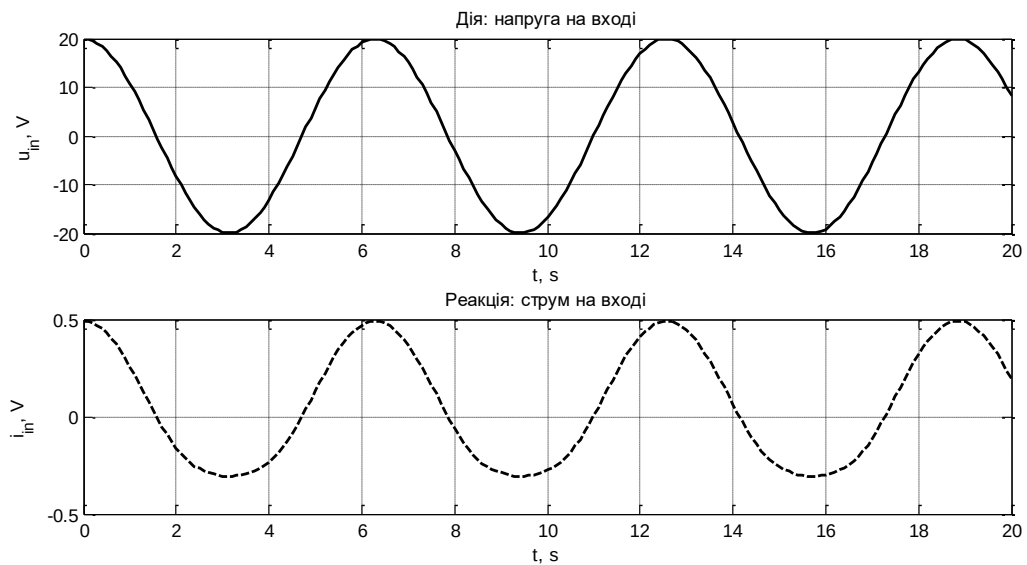


Рис. 9.13

На графіках реакції (вхідний струм) можна помітити спотворення форми сигналу в порівнянні з синусоїдною формою сигналу, що прикладається до входу кола.

Примітка. Можна помітити, що вхідний сигнал $u_{in}(t)$ є симетричним відносно осі абсцис $u_{in} = 0$. У той же час, максимальне та мінімальне значення реакції несиметричні відносно осі абсцис $i_{in}(t)$. Це означає, що у спектрі дії була відсутня **постійна складова** (що відповідає $U_{shift} = 0$), а в спектрі реакції вона присутня, тобто відмінна від 0.

Завдання 5.2. Синусоїдний сигнал великої амплітуди (режим малого сигналу)

Подамо на вхід кола синусоїдний сигнал малої амплітуди: $U_{shift} = 0$; $U_{mag} = 5$ В, змінивши відповідні рядки коду:

```
Umag = 5;
```

Отримаємо графіки, зображені на рис. 9.14.

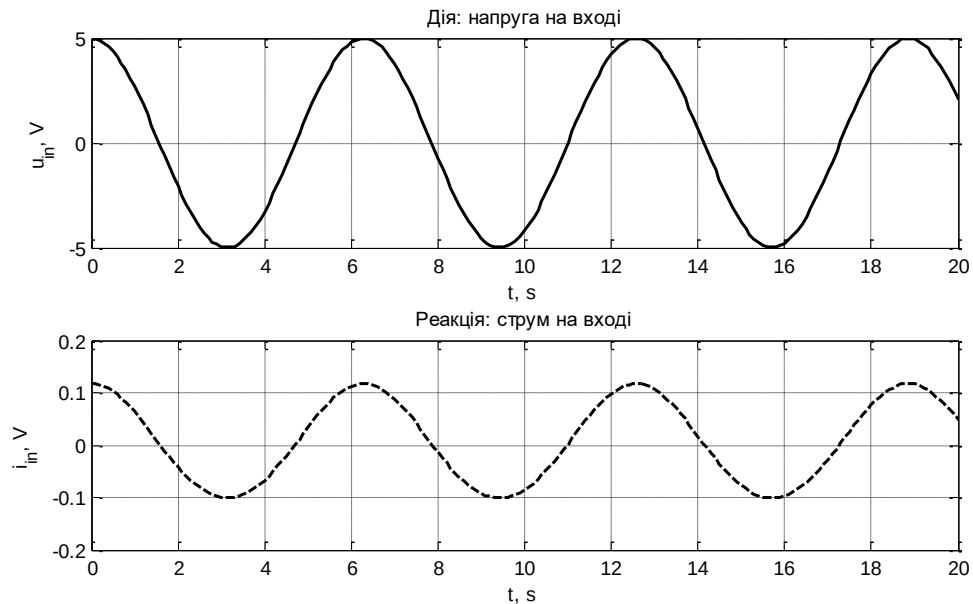


Рис. 9.14

Можна бачити, що у цьому випадку (малої амплітуди сигналу) робота відбувається на лінійній ділянці характеристики, і форма реакції мало відмінна від синусоїдної.

Завдання 5.3. Пилкоподібний сигнал малої амплітуди з нульовою постійною складовою (режим малого сигналу)

Подамо на вхід кола пилкоподібний сигнал малої амплітуди: $U_{shift} = 0$; $U_{mag} = 5$ В, змінивши відповідні рядки коду:

```
Umag = 5;
u_in = Ushift + Umag*sawtooth(omega.*t);
```

Отримаємо графіки, зображені на рис. 9.15.

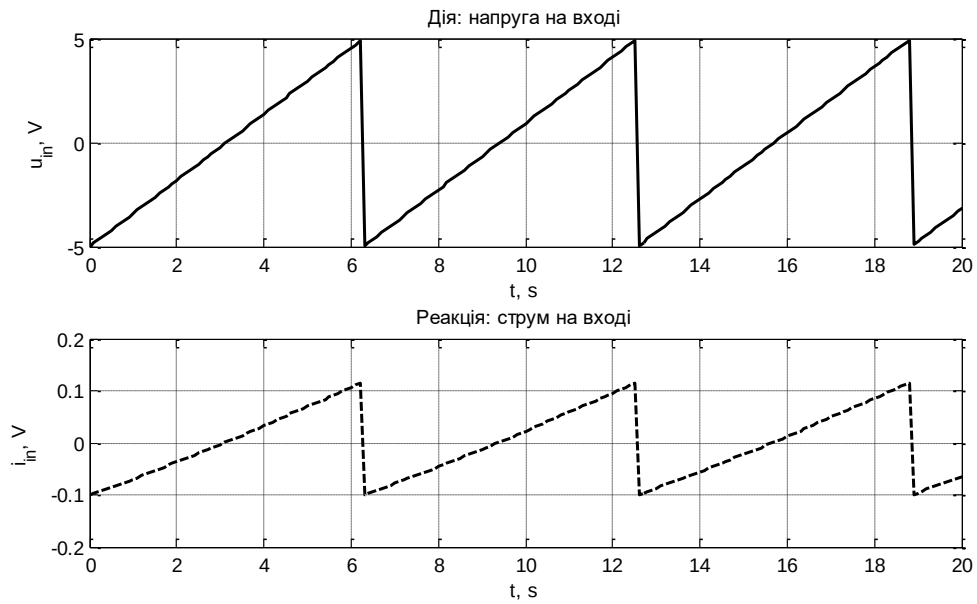


Рис. 9.15

Можна бачити, що робота відбувається на лінійній частині характеристики, і сигнал майже не спотворюється.

Завдання 5.4. Пилкоподібний сигнал малої амплітуди з ненульовою постійною складовою (режим великого сигналу)

Подамо на вхід кола пилкоподібний сигнал малої амплітуди: $U_{shift} = -15$; $U_{mag} = 5$ В, змінивши відповідні рядки коду:

```
Umag = 5;
Ushift = -15;
u_in = Ushift + Umag*sawtooth(omega.*t);
```

Отримаємо графіки, зображені на рис. 9.16.

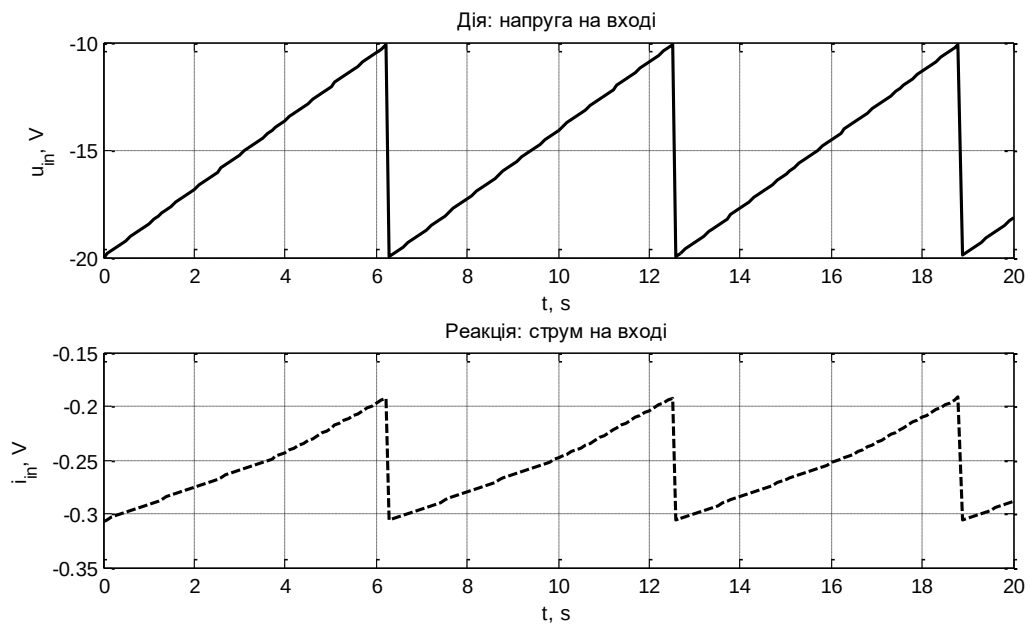


Рис. 9.16

Можна бачити, що, перемістивши робочу точку в нелінійну ділянку характеристики, отримуємо спотворений сигнал за такої самої амплітуди $U_{mag} = 5$ В.

Примітка. Амплітуда сигналу залишилась у цьому випадку невеликою, однак через значну нелінійність в обраній робочій точці тепер вже не можна розглядати реакцію в режимі **малого сигналу**, як вище, а має місце **режим великого сигналу**, оскільки заміна системи лінійною неможлива.

Завдання 5.5. Пилкоподібний сигнал великої амплітуди з нульовою постійною складовою (режим великого сигналу)

Подамо на вхід кола пилкоподібний сигнал малої амплітуди: $U_{shift} = 0$; $U_{mag} = 20$ В, змінивши відповідні рядки коду:

```
Umag = 20;  
Ushift = 0;  
u_in = Ushift + Umag*sawtooth(omega.*t);
```

Отримаємо графіки, зображені на рис. 9.17.

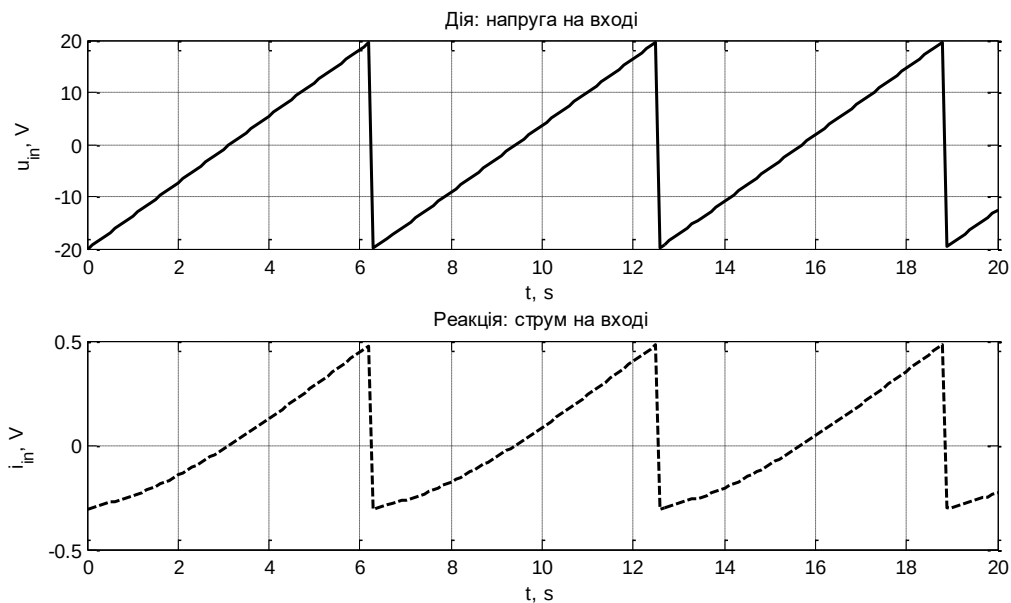


Рис. 9.17

За такої великої амплітуди задіяно значну ділянку характеристики, включаючи нелінійну частину. Тому можна побачити очевидні спотворення форми вхідного струму.

Практичне заняття №10
Метод робочої точки. Метод Ньютона-Рафсона

1. Мета роботи

Засвоїти:

- Застосування методу робочої точки
- Використання методу Ньютона-Рафсона для чисельного розв'язування нелінійних рівнянь

2. Завдання на заняття

2.1. Завдання №1

Здійснити аналіз нелінійного електричного кола (див. рис. 10.1) в режимі постійного струму. ВАХ нелінійного резистора (НР) R_{nl} визначається функцією $i_{nl} = f(u_{nl}) = a\sqrt{u_{nl}}$, де i_{nl} – струм, що протікає через R_{nl} , u_{nl} – падіння напруги на ньому.

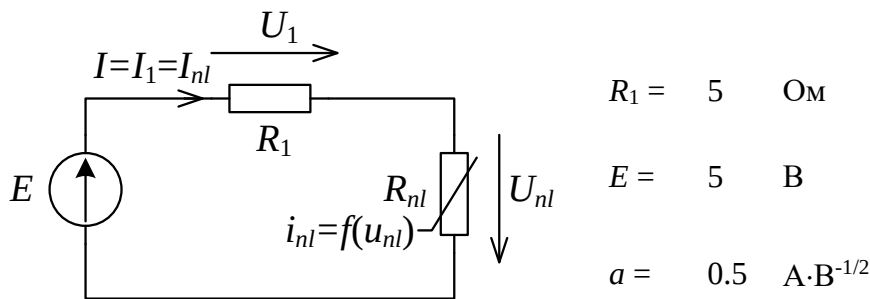


Рис. 10.1

- 1) Обчислити координати робочої точки кола: струм, що протікає в колі I_0 та падіння напруги U_{nl0} на нелінійному резисторі R_{nl} ;
- 2) Побудувати графіки ВАХ нелінійного резистора та лінії навантаження, що відповідає значенням R_1, E елементів кола. На графіку зобразити робочу точку та вказати її координати.
- 3) Обчислити диференційний опір R_{nl0} нелінійного резистора R_{nl} у робочій точці.

Розв'язання

Складемо рівняння кола. Оскільки коло містить лише один контур, для повного опису кола достатньо одного рівняння, складеного за II-м законом Кірхгофа:

$$E = U_1 + U_{nl} = IR_1 + U_{nl}(I). \quad (1)$$

З аналітичного виразу для ВАХ НР виразимо напругу на НР через його струм:

$$I_{nl} = a\sqrt{U_{nl}} \rightarrow U_{nl} = \frac{1}{a^2} I_{nl}^2. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1), в результаті чого отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{a^2} I^2 + R_1 I - E = 0.$$

Дане квадратне рівняння має два корені:

$$I_{0,2} = a^2 \frac{-R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + \frac{4E}{a^2}}}{2}.$$

Оскільки фізичний зміст має лише корінь, за якого напруга додатна (ВАХ НР визначена лише для додатних значень напруги $u > 0$), обираємо додатний корінь та можемо обчислити струм, що протікає через коло:

$$I_0 = a^2 \frac{-R_1 + \sqrt{R_1^2 + \frac{4E}{a^2}}}{2} = 0.5^2 \frac{-5 + \sqrt{5^2 + \frac{4 \cdot 5}{0.5^2}}}{2} = 0.655868 \text{ A} \approx 656 \text{ mA}.$$

Підставляючи значення струму $I_0 = 656 \text{ mA}$ у (2), отримаємо значення напруги на нелінійному елементі:

$$U_{nl0} = \frac{1}{a^2} I_0^2 = \frac{0.656^2}{0.5^2} \approx 1.72 \text{ V}.$$

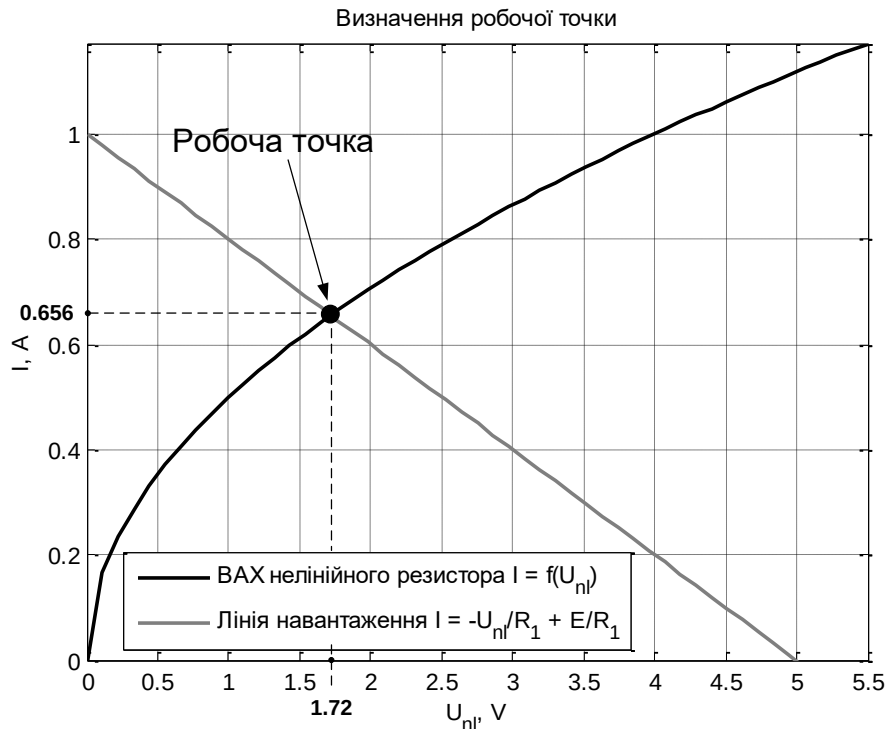
Отримаємо рівняння **лінії навантаження** як залежності струму в колі I від напруги на нелінійному резисторі U_{nl} , перетворивши рівняння (1):

$$I = -\frac{1}{R_1} U_{nl} + \frac{E}{R_1}.$$

Підставляючи значення з вихідних умов, отримаємо рівняння лінії навантаження:

$$I = -0.2 \cdot U_{nl} + 1.$$

Побудуємо графіки ВАХ НР та лінії навантаження (див. рис. 10.2).



Примітка. Для графічної побудови графіка ВАХ достатньо обчислити значення функції у трьох будь-яких точках (наприклад, для значень $U_{nl} = 0; E/2; E$), нанести їх на графік та

умовно провести криву, що проходить через них. Для графічної побудови лінії навантаження достатньо нанести дві точки: $(E; 0)$ та $(0; E/R)$, після чого провести пряму лінію через них.

Диференційний опір нелінійного резистора в певній точці ВАХ дорівнює значенню похідної напруги від струму в даній точці:

$$R_{d0} = \frac{dU_{nl}}{dI_{nl}}(I_{nl0}).$$

Маємо:

$$R_d(I_{nl}) = \frac{dU_{nl}}{dI_{nl}} = \frac{d}{dI_{nl}} \left(\frac{1}{a^2} I_{nl}^2 \right) = \frac{2}{a^2} I_{nl}.$$

Обчислимо значення диференційного опору R_{d0} в робочій точці $I = I_0 = I_{nl0}$:

$$R_{d0} = R_d(I_0) = \frac{2}{a^2} I_0 = \frac{2}{0.5^2} 0.656 = 5.248 \text{ Ом}.$$

Таким чином, можемо записати відповідь:

- Координати робочої точки:
 - струм $I_0 = 656 \text{ мА}$;
 - напруга на нелінійному резисторі $U_{nl0} = 1.72 \text{ В}$.
- Диференційний опір: $R_{d0} = 5.248 \text{ Ом}$.

2.2. Завдання №2

Здійснити аналіз нелінійного електричного кола (див. рис. 10.3) в режимі постійного струму. Для визначення параметрів робочої точки використати чисельний метод Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь.

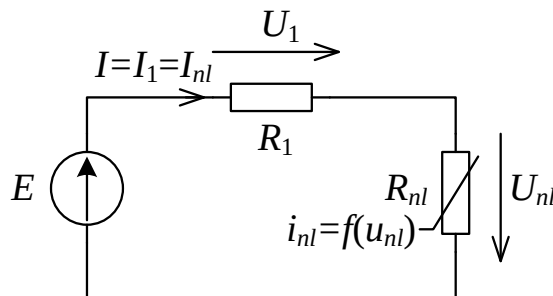


Рис. 10.3

Вольт-амперна характеристика (ВАХ) нелінійного резистора (НР) R_{nl} , тобто залежність $I_{nl} = f(U_{nl})$, де I_{nl} – струм, що протікає через R_{nl} , U_{nl} – падіння напруги на ньому, визначається рівнянням:

$$I_{nl} = f(U_{nl}) = I_R \cdot \left(e^{\frac{U_{nl}}{U_T}} - 1 \right)$$

Для розрахунку використати такі значення параметрів кола та ВАХ:

$$E = 2 \text{ В}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$I_R = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ А}$$

$$U_T = 26 \cdot 10^{-3} \text{ В}$$

- 1) Обчислити координати робочої точки кола: струм, що протікає в колі I_{nl0} та падіння напруги U_{nl0} на нелінійному резисторі R_{nl} ;
- 2) Побудувати графіки ВАХ нелінійного резистора та лінії навантаження, що відповідає значенням R_1, E елементів кола. На графіку зобразити робочу точку та вказати її координати.
- 3) Обчислити диференційний опір R_{nl0} нелінійного резистора R_{nl} у робочій точці.

Розв'язання та аналіз необхідних теоретичних положень

Запишемо рівняння за 2-м законом Кірхгофа:

$$E = I \cdot R_1 + U_{nl}$$

Враховуючи, що $I = I_{nl}$, перепишемо рівняння так, щоб у подальшому розв'язувати його лише відносно змінних, що зв'язані з нелінійним елементом, тобто I_{nl}, U_{nl} :

$$E = I_{nl} \cdot R_1 + U_{nl}$$

З даного рівняння отримаємо рівняння для лінії навантаження (позначимо його як $f_{load}(U_{nl})$):

$$I_{nl} = f_{load}(U_{nl}) = -\frac{1}{R_1} \cdot U_{nl} + \frac{E}{R_1}$$

Тоді маємо систему з 2-х рівнянь, що описує коло відносно 2-х змінних I_{nl0}, U_{nl0} :

$$\begin{cases} I_{nl0} = f_{load}(U_{nl0}) \\ I_{nl0} = f(U_{nl0}) \end{cases}$$

Тут введено позначення для струму через нелінійний елемент $I_{nl} = I_{nl0}$ та напруги на ньому $U_{nl} = U_{nl0}$, що є розв'язком даної системи за даних параметрів E, R_1 , тобто шуканими **координатами робочої точки**.

Оскільки ліві частини обох рівнянь однакові, зведемо систему до одного рівняння шляхом прирівнювання правих частин:

$$f(U_{nl0}) = f_{load}(U_{nl0})$$

Введемо позначення $F(U_{nl0}) = f(U_{nl0}) - f_{load}(U_{nl0})$. Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$F(U_{nl0}) = f(U_{nl0}) - f_{load}(U_{nl0}) = 0$$

Підставимо вирази для $f(U_{nl0}), f_{load}(U_{nl0})$ в дане рівняння. Отримаємо:

$$F(U_{nl0}) = I_R \cdot \left(e^{\frac{U_{nl0}}{U_T}} - 1 \right) + \frac{1}{R_1} \cdot U_{nl0} - \frac{E}{R_1} = 0$$

Як бачимо, дане рівняння є нелінійним, і неможливо знайти вираз для його точного розв'язку в аналітичній формі. Тому для розв'язання даного рівняння застосуємо чисельний метод Ньютона-Рафсона.

Згідно з цим методом, якщо потрібно розв'язати рівняння $F(U_{nl0}) = 0$, то розрахунок проводиться ітераційно, і на кожній ітерації обчислюється уточнене значення U_{nl0} :

$$U_{nl0 [k]} = U_{nl0 [k-1]} - \frac{F(U_{nl0 [k-1]})}{F'(U_{nl0 [k-1]})}$$

В даному рівнянні $U_{nl0 [k]}$ слід сприймати як значення U_{nl0} на k -му кроці розрахунку. Відповідно, $U_{nl0 [k-1]}$ – це значення U_{nl0} на попередньому, $k - 1$ -му кроці.

Розпишемо дане рівняння детальніше:

$$U_{nl0 [k]} = U_{nl0 [k-1]} - \frac{f(U_{nl0 [k-1]}) - f_{load}(U_{nl0 [k-1]})}{f'(U_{nl0 [k-1]}) - f'_{load}(U_{nl0 [k-1]})}$$

В даному рівнянні функція $f(U_{nlo})$ залежить від нелінійного елемента та є частиною вихідного завдання. Натомість, функція $f_{load}(U_{nlo})$ визначає лінію навантаження та завжди має однаковий вигляд. Тоді в рівняння вище можемо підставити такі вирази:

$$f_{load}(U_{nlo}) = -\frac{1}{R_1} \cdot U_{nlo} + \frac{E}{R_1}$$

$$f'_{load}(U_{nlo}) = \frac{df}{dU_{nlo}}(U_{nlo}) = -\frac{1}{R_1}$$

Тоді формула для уточнення значення $U_{nlo [k]}$ матиме вигляд:

$$U_{nlo [k]} = U_{nlo [k-1]} - \frac{f(U_{nlo [k-1]}) + \frac{1}{R_1} \cdot U_{nlo [k-1]} - \frac{E}{R_1}}{f'(U_{nlo [k-1]}) + \frac{1}{R_1}}$$

Опис алгоритму розрахунку за допомогою метода Ньютона-Рафсона

- 1) Отримати аналітичний вираз для першої похідної функції $f(U_{nlo})$:

$$f'(U_{nlo}) = \frac{df}{dU_{nlo}}(U_{nlo})$$

- 2) Задатись точністю розрахунку Δ_0 . Дана величина означає, що отримане в результаті розв'язання значення U_{nlo} відхиляється від істинного розв'язку U_{nlo}^* не більше, ніж на Δ_0 , тобто $|U_{nlo} - U_{nlo}^*| \leq \Delta_0$.
- 3) Задатись початковим наближенням $U_{nlo [0]}$. Чим ближче $U_{nlo [0]}$ буде до істинного розв'язку U_{nlo}^* , тим менше ітерацій знадобиться для розрахунку. Для даної задачі можна прийняти $U_{nlo [0]} = E$.
- 4) Далі повторювати такий алгоритм ($k = 1, 2, \dots$ – це номер кроку алгоритму, тобто номер ітерації), де на кожному кроці потрібно виконати такі дії:

Дія 1. Розрахувати уточнене на даному кроці значення шуканого параметра:

$$U_{nlo [k]} = U_{nlo [k-1]} - \frac{f(U_{nlo [k-1]}) + \frac{1}{R_1} \cdot U_{nlo [k-1]} - \frac{E}{R_1}}{f'(U_{nlo [k-1]}) + \frac{1}{R_1}}$$

Примітка. На першому кроці, тобто при $k = 1$, у якості попереднього значення взяти початкове наближення $U_{nlo [0]}$, яке було визначене перед початком розрахунку в п. 3.

Дія 2. Розрахувати абсолютне значення різниці (нев'язку) між попереднім і поточним значеннями шуканого параметра:

$$\Delta = |U_{nlo [k]} - U_{nlo [k-1]}|$$

Дія 3. Перевірити, чи досягнута необхідна точність:

- Якщо $\Delta \leq \Delta_0$, то зупинити розрахунок і прийняти $U_{nlo} = U_{nlo [k]}$.
- Якщо $\Delta > \Delta_0$, то продовжити розрахунок, перейшовши на наступний крок. Ця умова означає, що потрібна точність ще не досягнута і потрібно продовжити розрахунок.

Для розрахунку використаємо такий скрипт:

```
clc; clear all; close all;
```

```

E = 2; % ЕРС, що подається на коло, у вольтах
R_1 = 10; % опір лінійного резистора в омах

% Визначимо лінію навантаження та її похідну
load_line = @(U_n) (-U_n/R_1 + E/R_1); % лінія навантаження
d_load_line = @(U_n) (-1/R_1); % перша похідна л. навантаження

% Побудуємо графік
U_n1 = 0:0.01:1.1*E;
I_load = load_line(U_n1);

plot(U_n1, I_load, 'k-'); grid on; hold on;
ylim([0 1.2*E/R_1])

% Визначимо функцію, що описує ВАХ нелінійного двохполюсника
I_R = 2.5e-6;
U_t = 26e-3;
non_linear = @(U_n) (I_R*(exp(U_n/U_t) - 1)); % ВАХ двохполюсника
d_non_linear = @(U_n) (I_R*exp(U_n/U_t)/U_t); % перша похідна ВАХ

% Побудуємо криву ВАХ на графіку
I_nonlinear = non_linear(U_n1);

plot(U_n1, I_nonlinear, 'r-');

% Розрахунок робочої точки методом Ньютона-Рафсона
% Визначення початкових значень
U_start = 0.31; % Початкове наближення розв'язку, з якого стартує алгоритм

delta_threshold = 0.0001; % Порогове значення нев'язки, що визначає точність розрахунку

delta = 2*delta_threshold; % Початкове значення нев'язки. Має бути вищим за порогове
U_n10 = U_start;

% Власне ітераційний процес розрахунку
step = 0;
while(delta > delta_threshold)
    step = step + 1;
    % increment = (non_linear(U_n10) -
load_line(U_n10))/(d_non_linear(U_n10)+1/R_1);
    increment = (non_linear(U_n10) - load_line(U_n10))/(d_non_linear(U_n10) -
d_load_line(U_n10));
    U_new = U_n10 - increment;
    delta = abs(U_new - U_n10);
    U_n10 = U_new;
    fprintf("step = "+num2str(step) + ": U_n10 = " + num2str(U_n10) + " V;
Delta = " + num2str(delta) + " V\n");
end
I_n10 = non_linear(U_n10); % Значення струму в робочій точці
R_n10 = 1/d_non_linear(U_n10); % Значення диференційного опору в робочій
точці в омах
R_s0 = U_n10/I_n10; % Значення статичного опору в робочій точці

fprintf("Розраховані координати робочої точки: U_n10 = " + num2str(U_n10) +
" V; I_n10 = " + num2str(I_n10) + " A\n");
fprintf("Розраховане значення диференційного опору в робочій точці: R_n10 = "
+ num2str(R_n10) + " Ом\n");
fprintf("Розраховане значення статичного опору в робочій точці: R_s0 = " +
num2str(R_s0) + " Ом\n");

```

```
% Нанесемо розраховану робочу точку на графік
plot(U_n10, non_linear(U_n10), 'ok');
legend("Лінія навантаження", "ВАХ нелінійного приладу", "Робоча точка");
title("Метод робочої точки");
xlabel("Напруга на нелінійному приладі U_{nl}, В");
ylabel("Струм через нелінійний прилад I_{nl}, А");
xlim([0 2*U_n10]);
```

У результаті виконання даного коду отримаємо графік, зображений на рис. 10.4.

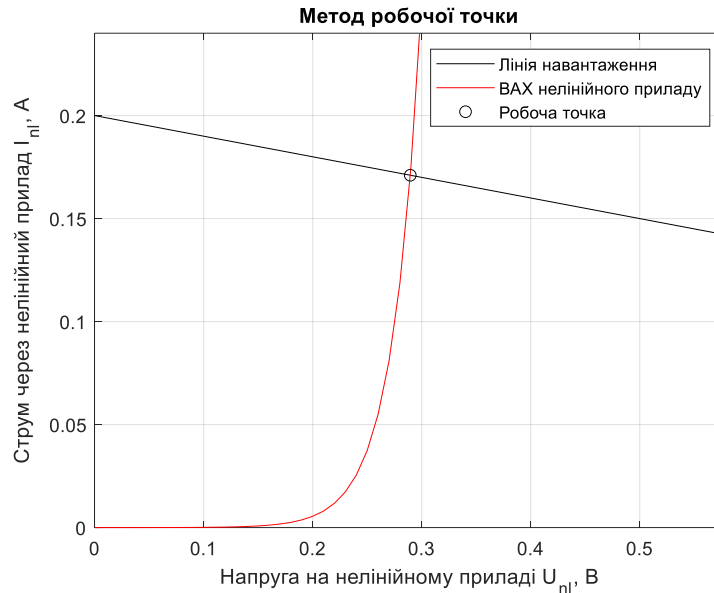


Рис. 10.4

У вікні Command Window буде виведено результат розрахунку для кожної ітерації алгоритму, а також фінальні значення шуканих параметрів (див. рис. 10.5).

```
Command Window
step = 1: U_n10 = 0.29576 V; Delta = 0.014239 V
step = 2: U_n10 = 0.29016 V; Delta = 0.0055962 V
step = 3: U_n10 = 0.28948 V; Delta = 0.00068593 V
step = 4: U_n10 = 0.28947 V; Delta = 9.0709e-06 V
Розраховані координати робочої точки: U_n10 = 0.28947 V; I_n10 = 0.17105 A
Розраховане значення диференційного опору в робочій точці: R_n10 = 0.152 Ом
Розраховане значення статичного опору в робочій точці: R_s0 = 1.6923 Ом
```

Рис. 10.5. Результати ітераційного процесу розрахунку методом Ньютона-Рафсона

Таким чином, маємо відповідь:

$$U_{nl0} = 0.28947 \text{ В} \approx 0.29 \text{ В}$$

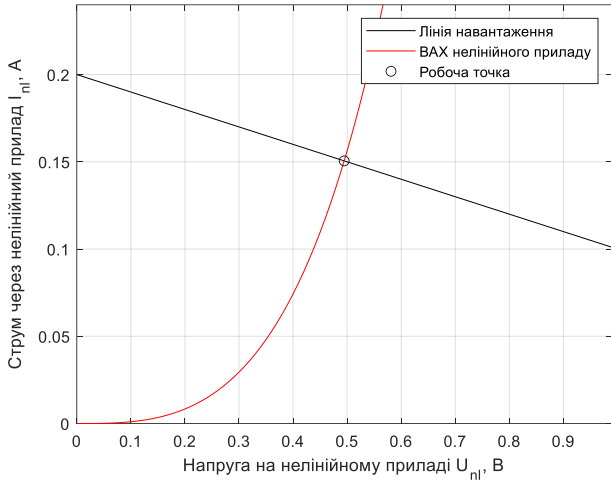
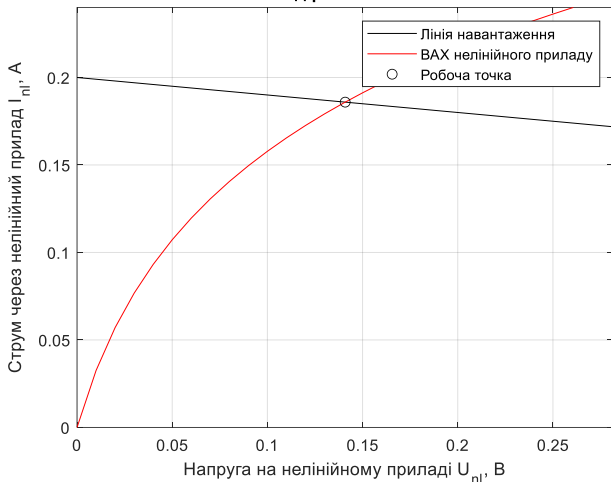
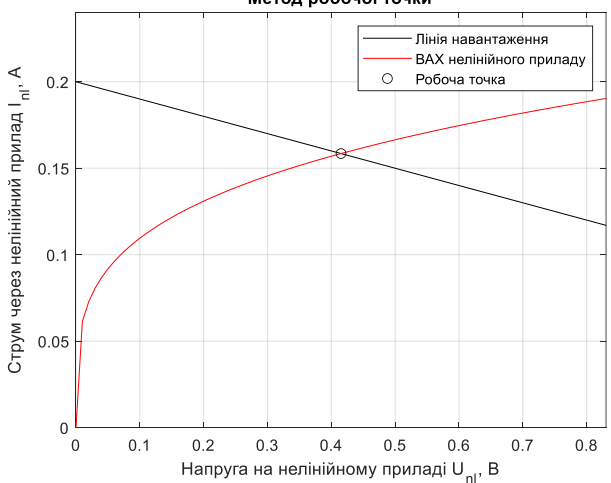
$$I_{nl0} = 0.17105 \text{ А} \approx 0.17 \text{ А}$$

$$R_{nl0} = 0.152 \text{ Ом} \approx 0.15 \text{ Ом}$$

2.3. Практика для завдання №2

Для успішного виконання завдання №2 для різних варіантів рівняння, що визначає ВАХ, рекомендується розв'язати декілька прикладів. Для прикладів, наведених у табл. 10.1, наведено вихідні дані та відповіді для перевірки.

Таблиця 10.1

№ прикладу	Вихідна умова	Графік	Відповіді
1	$I_{nl} = f(U_{nl}) = a \cdot U_{nl}^5 + b \cdot U_{nl}^3$ $E = 2 \text{ В}$ $R_1 = 10 \text{ Ом}$ $a = 1 \frac{\text{А}}{\text{В}^5}$ $b = 1 \frac{\text{А}}{\text{В}^3}$	Метод робочої точки  Струм через нелінійний прилад I_{nl}, А Напруга на нелінійному приладі U_{nl}, В Легенда: — Лінія навантаження — ВАХ нелінійного приладу ○ Робоча точка	$I_{nl0} = 0.15 \text{ А}$ $U_{nl0} = 0.49 \text{ В}$ $R_{nl0} = 0.97 \text{ Ом}$
2	$I_{nl} = f(U_{nl}) = a \cdot \ln\left(\frac{U_{nl}}{U_T} + 1\right)$ $E = 2 \text{ В}$ $R_1 = 10 \text{ Ом}$ $a = 0.1 \text{ А}$ $U_T = 26 \cdot 10^{-3} \text{ В}$	Метод робочої точки  Струм через нелінійний прилад I_{nl}, А Напруга на нелінійному приладі U_{nl}, В Легенда: — Лінія навантаження — ВАХ нелінійного приладу ○ Робоча точка	$I_{nl0} = 0.19 \text{ А}$ $U_{nl0} = 0.14 \text{ В}$ $R_{nl0} = 1.67 \text{ Ом}$
3	$I_{nl} = f(U_{nl}) = a \cdot \sqrt[5]{U_{nl}} + b \cdot \sqrt[3]{U_{nl}}$ $E = 2 \text{ В}$ $R_1 = 10 \text{ Ом}$ $a = 0.1 \text{ А} \cdot \text{В}^{-\frac{1}{5}}$ $b = 0.1 \text{ А} \cdot \text{В}^{-\frac{1}{3}}$	Метод робочої точки  Струм через нелінійний прилад I_{nl}, А Напруга на нелінійному приладі U_{nl}, В Легенда: — Лінія навантаження — ВАХ нелінійного приладу ○ Робоча точка	$I_{nl0} = 0.16 \text{ А}$ $U_{nl0} = 0.42 \text{ В}$ $R_{nl0} = 9.97 \text{ Ом}$

Практичне заняття №11

Тест №3

1. Мета роботи

Здійснити контроль навичок застосування методу робочої точки, отриманих на практичному занятті №10.

2. Завдання на заняття

Тест містить 2 завдання. Загальна кількість різних типів завдань: 2. завдання у тесті наводяться у випадковому порядку. Тематику завдань наведено в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Тип	Опис завдання	Кількість
1	Здійснити аналіз нелінійного електричного кола в режимі постійного струму. Розрахунок провести аналітично. Розрахувати координати робочої точки та значення диференційного опору в робочій точці.	1
2	Здійснити аналіз нелінійного електричного кола в режимі постійного струму. Для визначення параметрів робочої точки використати чисельний метод Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розрахувати координати робочої точки та значення диференційного опору в робочій точці.	1

Тип – номер типу завдання.

Опис завдання – короткий зміст тематики завдання даного типу.

Кількість – кількість завдань даного типу в тесті.

Практичне заняття №12
Модульна контрольна робота

1. Мета роботи

Здійснити контроль навичок, отриманих в рамках усього практичного курсу.

2. Завдання на заняття

Тест містить 8 завдань. Загальна кількість різних типів завдань: 8. Тематику завдань наведено в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Тип	Опис завдання	Кількість
1	Здійснити кусково-лінійну інтерполяцію функції, заданої набором точок (точки задаються на графіку). Обчислити один з параметрів прямої, що інтерполює функцію на певному відрізку, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1
2	Здійснити поліноміальну інтерполяцію функції, заданої набором точок (точки задаються на графіку). Обчислити один з параметрів кривої, що інтерполює функцію, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1
3	Побудувати лінійну регресії функції, заданої набором точок (точки задаються таблицею). Обчислити один з параметрів прямої, що апроксимує функцію, або значення струму, що протікає за визначеного значення прикладеної напруги.	1
4	Знайти амплітуду певної гармоніки спектра струму, що протікає через нелінійний безінерційний двополюсник у разі прикладання гармонічної напруги.	1
5	Знайти амплітуду певної гармоніки спектра струму, що протікає через нелінійний безінерційний двополюсник у разі прикладання бігармонічної напруги.	1
6	За допомогою метода 5-ти ординат знайти амплітуду певної гармоніки спектра напруги на виході підсилювача.	1
7	Здійснити аналіз нелінійного електричного кола в режимі постійного струму. Розрахунок провести аналітично. Розрахувати координати робочої точки та значення диференційного опору в робочій точці.	1
8	Здійснити аналіз нелінійного електричного кола в режимі постійного струму. Для визначення параметрів робочої точки використати чисельний метод Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розрахувати координати робочої точки та значення диференційного опору в робочій точці.	1

Тип – номер типу завдання.

Опис завдання – короткий зміст тематики завдання даного типу.

Кількість – кількість завдань даного типу в тесті.

Література для підготовки

1. Артеменко М.Ю., Дрозденко К.С. Теорія електричних кіл. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 99 с.
2. Сташук, В.Д. Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6,4 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30984/1/Posibnyk_OTtaKMEK.pdf
3. Булашенко, А.В. Основи теорії кіл. Збірник задач [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А.В. Булашенко, М.І. Ястребов ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 2,13 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 128 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/34874/1/OTK.pdf>
4. Булашенко, А.В. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А.В. Булашенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 809 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 52 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/34935/1/Osnovy_teorii_kil.pdf
5. Parodi M., Storace M. Linear and Nonlinear Circuits: Basic & Advanced Concepts. – Cham: Springer International Publishing, 2018. Vol. 441 – 281 p.
6. Parodi M., Storace M. Linear and Nonlinear Circuits: Basic and Advanced Concepts: Volume 2. – Cham: Springer International Publishing, 2020. Vol. 620. – 520 p.
7. Muthuswamy B., Banerjee S. Introduction to Nonlinear Circuits and Networks. – Cham: Springer International Publishing, 2019 – 373 p.
8. Izadian A. Fundamentals of Modern Electric Circuit Analysis and Filter Synthesis: A Transfer Function Approach. – Cham: Springer International Publishing, 2023. – 689 p.
9. Sundararajan D. Introductory Circuit Theory. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – 300 p.