

ТРИЕТАПНА ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Вступ. Як у бізнесі, так й у виробництві прийнято підтримувати розумний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Традиційно запас розглядаються як неминучі витрати, занадто низький його рівень приводить до дорогих зупинок виробництва, а занадто високий – до "омертвлення" капіталу. Завдання управління запасами – визначити рівень запасу, що врівноважує два згаданих крайніх випадки.

Важливим фактором, що визначає формулювання й рішення задачі управління запасами, є те, що обсяг попиту на збережений запас в одиницю часу може бути або детермінованим (відомим), або імовірнісним (описаним імовірнісним розподілом).

Постановка задачі. Визначити оптимальну модель управління запасу, для трьох етапів, припускаючи, що початковий запас для першого періоду дорівнює нулю. Попит є випадковою величиною, рівномірно розподіленою від 0 до 10.

Дана модель не враховує вартість розміщення запасу. В даній моделі враховується зведена вартість грошей. Тобто якщо $\alpha (<1)$ – коефіцієнт дисконтування для одного етапу, то сума A через n етапів еквівалентна $\alpha^n A$ в даний момент.

Припустимо, що планування охоплює $n=3$ етапів, а незадоволення попиту можливо лише на протязі одного етапу.

Використаємо наступні позначення

r – дохід від реалізації одиниці продукції;

c – вартість виробництва одиниці продукції;

h – питомі витрати на зберігання одиниці продукції;

p – питомі втрати від незадоволеного попиту;

D – величина випадкового попиту на даному періоді;

$f(D)$ – щільність імовірності попиту на даному періоді;

y – об'єм замовлення;

x – запас продукції.

Очікувані витрати $M\{C(y)\}$ на період виражаються наступною формулою.

$$M\{C(y)\} = c(y - x) + h \int_0^y (y - D) f(D) dD + p \int_y^\infty (D - y) f(D) dD$$

Нехай $F(x)$ – максимальний очікуваний прибуток, при умові, що x – рівень запасу перед розміщенням замовлення

$$F(x) = -c(y - x) + \int_0^y [rD - h(y - D)] f(D) dD + \int_y^\infty [ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)] f(D) dD$$

Методологія. Сформулюємо задачу управління запасами у вигляді задачі динамічного програмування:

$$F_i(x_i) = \max_{y_i \geq x_i} \left\{ -c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} [rD - h(y_i - D)] f(D) dD + \int_{y_i}^\infty [ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)] f(D) dD + \right. \\ \left. + \alpha \int_0^\infty F_{i+1}(y_i - D) f(D) dD \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Нехай $F_{n+1}(y_n - D) = 0$. Величина x_i може приймати негативні значення, тому що незадоволений попит може накопичуватися. Величина $\alpha r(D - y_i)$ включена в другий інтеграл, оскільки $D - y_i$ являє собою незадоволений попит на i -м етапі, що повинен бути вдоволений на етапі $i + 1$.

Оптимальне значення y можна визначити з наступної умови, яка в даному випадку є достатньою, оскільки функція $F(x)$ очікуваного прибутку є ввігнута

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = -c - h \int_0^y f(D) dD + \int_y^\infty [(1 - \alpha)r + p] f(D) dD + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial F(y - D)}{\partial y} f(D) dD = 0$$

Величина $\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}$ визначається таким чином. Якщо на початок наступного етапу рівень запасу складає $\beta (>0)$ одиниць, тоді прибуток на цьому етапі зростає на величину $c\beta$, тому що об'єм наступного замовлення зменшується на цю величину. Отже

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y} = c$$

Відповідно, необхідна умова приймає вигляд

$$-c - h \int_0^y f(D) dD + [(1-\alpha)r + p](1 - \int_0^y f(D) dD) + \alpha c \int_0^\infty f(D) dD = 0$$

Оптимальний рівень замовлення y^* визначається з рівняння

$$\int_0^{y^*} f(D) dD = \frac{p + (1-\alpha)(r-c)}{p + h + (1-\alpha)r}$$

Оптимальна стратегія кожного етапу при заданому вихідному запасі x визначається наступним правилом

Якщо $x < y^*$, робимо замовлення об'ємом $y^* - x$, якщо $x \geq y^*$, не робимо замовлення.

Результати дослідження. Розглянемо триетапну імовірнісну модель управління запасами, в який попит накоплюється.

Попит є випадковою величиною рівномірно розподіленою від 0 до 10 одиниць.

Параметри моделі:

$r=2$; $c=1$; $h=0,1$; $p=3$; $\alpha=0,8$.

Тоді визначаємо спочатку оптимальний об'єм замовлення y^* . Маємо

$$y^* = \frac{p + (1-\alpha)(r-c)}{p + h + (1-\alpha)r}$$

підставляємо вихідні дані

$$y^* = \frac{3 - (1-0,8)(2-1)}{3 + 0,1 + (1-0,8)2}$$

$$y^* = 0,914$$

$$\int_0^{y^*} \frac{1}{10} dD = \frac{y^*}{10} = 0,0914$$

$$S = 9,14$$

Очікуване значення функції прибутку визначається наступним чином

$$c \cdot (y - x) + \left[\int_0^y [r \cdot D - h \cdot (y - D)] \cdot f dD + \int_y^{10} [r \cdot y + \alpha \cdot r \cdot (D - y) - p \cdot (D - y)] \cdot f dD + \int_0^b \alpha \cdot c \cdot ((y - D)) \cdot f dD \right]$$

$$= 3,2 \cdot y + x - 0,175 \cdot y^2 - 11.$$

Перший етап

Якщо запаси $x=0$ $x < k$ замовлення робимо $S - x = 9,14$ тобто оптимальну величину замовлення.

$$v(k) := 3,2 \cdot k - 0,175 \cdot k^2 - 11$$

$$\begin{pmatrix} 4.5893207284259350381 \\ 13.696393557288350676 \end{pmatrix}$$

$$F(k) := -c \cdot (k - x) + \int_a^k [r \cdot D - h \cdot (k - D)] \cdot f dD + \int_k^b [r \cdot k + \alpha \cdot r \cdot (D - k) - p \cdot (D - k)] \cdot f dD + \int_0^b \alpha \cdot c \cdot (k - D) \cdot f dD$$

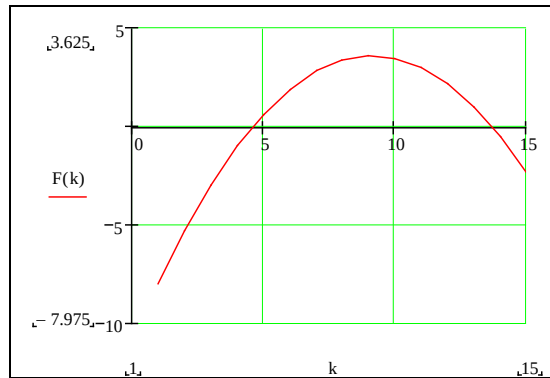
$$y := 9,14$$

$$F(y) = 3,629$$

k := 1.. 12

F(k) =

-7.975
-5.3
-2.975
-1
0.625
1.9
2.825
3.4
3.625
3.5
3.025
2.2



y - x > 0

	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12
X=0					0.625	1,9	2,85	3,4	3,625	3,5	3,05	2,2
X=1				0	1,625	2,9	3,825	4,4	4,625	4,5	4,025	3,2
X=2				1	2,625	3,9	4,8	5,4	5,625	5,5	5,025	4,2
X=3			0.025	2	3,625	4,9	5,8	6,4	6,625	6,5	6,025	5,2
X=4			1.025	3	4,625	5,9	6,8	7,4	7,3	7,5	7,03	6,2

Другий етап

$$-c \cdot (y_1 - x) + \int_a^{y_1} [r \cdot D - h \cdot (y_1 - D)] \cdot f \cdot dD + \int_{y_1}^b [r \cdot y_1 + \alpha \cdot r \cdot (D - y_1) - p \cdot (D - y_1)] \cdot f \cdot dD + \int_0^b \alpha \cdot c \cdot (y_1 - D) \cdot f \cdot dD + (3.2 \cdot k_1 - 0.175 \cdot k_1^2 - 11.)$$

$$= 3.2 \cdot y_1 + 0 - 0.175 \cdot y_1^2 - 7.375$$

$$\begin{pmatrix} 2.7047689490035719589 \\ 15.580945336710713755 \end{pmatrix}$$

k1 := 1.. 10

F(k1) =

-4.346
-1.671
0.654
2.629
4.254
5.529
6.454
7.029
7.254
7.129

	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10
X=0	-	-	0.63	2.63	4.25	5.23	6.4	7.03	7.254	7.129
X=1	-	-	1.65	3.63	5.25	6.53	7.45	8.03	8.254	8.13
X=2	-	0.3	2.65	4.62	6.25	7.53	8.45	9.03	9.256	9.13
X=3	-	1.33	3.65	5.63	7.25	8.3	9.4	10	10.25	10.1
X=4	-	2.33	4.65	6.63	8.25	9.5	10.45	11.03	11.25	11.1

Максимальний прибуток x=2

P=8,45 k=7

Третій етап

$$-c \cdot (y_2 - x) + \int_a^{y_2} [r \cdot D - h \cdot (y_2 - D)] \cdot f \cdot dD + \int_{y_2}^b [r \cdot y_2 + \alpha \cdot r \cdot (D - y_2) - p \cdot (D - y_2)] \cdot f \cdot dD + \left[\int_0^b \alpha \cdot c \cdot (y_2 - D) \cdot f \cdot dD \right] + (3.2 \cdot k_2 - 0.175 \cdot k_2^2 - 7.37143)$$

$$3.2 \cdot y_2 - 2.54643 + x - 0.175 \cdot y_2^2$$

для даного етапу найефективніше x=2 y2=7,14

Сумарний прибуток P=13,38

Слід зауважити, що якщо на кожному етапі запас дорівнює 0, а замовлення 9,14 прибуток P= 12,08

Література:

1. Hadley G. and Whitin T., Analysis of Inventory Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1963.
2. Мельник М.М. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техническим снабжением./Уч. Для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 2001. – 208с.

3. Бажин И.И. Информационные системы в менеджменте.
4. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с: ил.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. – 324 с.