

II. НОВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА УСТАТКУВАННЯ ДЛЯ ОТРИМАННЯ, ТРАНСПОРТУВАННЯ ТА ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ

УДК 517.927

ИСЛАМОВ И. ДЖ., канд. техн. наук, доцент
Азербайджанский Технический Университет, г. Баку
ИСМИБЕЙЛИ Э. Г., доктор техн. наук, профессор
Азербайджанский Технический Университет, г. Баку

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУГЛОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

***Аннотация.** В данной статье изучаются ТМ-поляризованные электромагнитные волны, распространяющиеся в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненной средой. Разработан итерационный алгоритм, с помощью которого определяются значения собственных функций и спектрального параметра при соответствующих краевых условиях. Представлены численные результаты расчетов.*

***Ключевые слова:** электромагнитное поле, диэлектрический волновод, нелинейная задача, численные результаты, расчет.*

***Abstract.** The article deals with TM-polarized electromagnetic waves propagating in a dielectric waveguide of circular cross section filled with a medium. An iterative algorithm has been developed, with the help of which the values of the eigenfunctions and the spectral parameter are determined under corresponding boundary conditions. Numerical results of calculations are presented.*

***Keywords:** electromagnetic field, dielectric waveguide, nonlinear problem, numerical results, calculation.*

Рассмотрим трехмерное пространство R^3 с декартовыми координатами $Oxyz$. Это пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = const$. В эту среду помещен круглый диэлектрический волновод с образующей, параллельной оси Oz и круговым поперечным сечением $W = \{x : 0 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$.

Электромагнитное поле гармонически зависит от времени [1—3]:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(r, \varphi, z, t) &= E_+(r, \varphi, z)\cos \omega t + E_-(r, \varphi, z)\sin \omega t, \\ \tilde{H}(r, \varphi, z, t) &= H_+(r, \varphi, z)\cos \omega t + H_-(r, \varphi, z)\sin \omega t,\end{aligned}\quad (1)$$

где ω — круговая частота; \tilde{E} , E_+ , E_- , \tilde{H} , H_+ , H_- — действительные функции.

Везде ниже временной множитель пропущен.

Образуем комплексные амплитуды полей **E**, **H**

$$\begin{aligned}E &= E_+ + iE_-, \\ H &= H_+ + iH_-\end{aligned}\quad (2)$$

где $E(E_r, E_\varphi, E_z)^T$, $H(H_r, H_\varphi, H_z)^T$ и $(\cdot)^T$ означает операцию транспонирования. Каждая компонента **E**, **H** является функцией трех пространственных переменных.

Электромагнитное поле **E**, **H** удовлетворяет системе уравнений Максвелла [1—3]

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E},\quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H},\quad (4)$$

условиям непрерывности касательных составляющих полей **E**, **H** на границах раздела сред $r = R_1$ и $r = R_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $r \rightarrow \infty$.

Пусть диэлектрическая проницаемость внутри волновода является скалярной функцией и внутри, и вне волновода и определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, \varepsilon_0, & 0 < r < R_1, \\ (1,8 + \chi E)\varepsilon_0, & R_1 < r < R_2, \\ \varepsilon_3, \varepsilon_0, & r > R_2, \end{cases}\quad (5)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — вещественные положительные постоянные. Среда предполагается изотропной и немагнитной, во всем пространстве полагаем $\mu = \mu_0$.

Поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, определяем при решении уравнений Максвелла во всем пространстве.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Цилиндр неограниченно продолжается в направлении оси z .

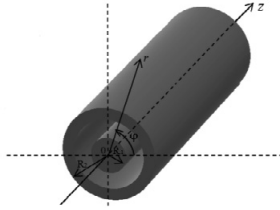


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассмотрим ТМ-волны

$$E = (E_r, 0, E_z)^T, H = (0, H_\varphi, 0)^T, \quad (6)$$

где $E_r = E_r(r, \varphi, z)$, $E_z = E_z(r, \varphi, z)$, $H_\varphi = H_\varphi(r, \varphi, z)$.

Можем показать, что для рассматриваемой геометрии и выбранной нелинейности компоненты полей могут быть представлены в форме:

$$E_r = E_r(r)e^{i\gamma z}, E_z = E_z(r)e^{i\gamma z}, H_\varphi = H_\varphi(r)e^{i\gamma z}, \quad (7)$$

где γ — неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$. Подставив компоненты (7) в (3) получим

$$\{\gamma^2 E_r + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_r, i\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial E_z}{\partial r}) = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_z, \quad (8)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0$, ε_0 , μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства.

Обозначая

$$E_r(r, \gamma) = \Psi_1(r, \gamma), \\ iE_z(r, \gamma) = \Psi_2(r, \gamma), \quad (9)$$

получим из (8)

$$\{\gamma^2 \Psi_2 + (\gamma - k_0^2 \tilde{\varepsilon}) \Psi_1 = 0, -\gamma \frac{1}{r} (r \Psi_1)' - \frac{1}{r} (r \Psi_2)' = k_0^2 \tilde{\varepsilon} \Psi_2 = 0, \quad (10)$$

где производная обозначает дифференцирование по r ; $\Psi_1(r, \gamma)$, $\Psi_2(r, \gamma)$ — вещественные функции.

Найдем те действительные значения спектрального параметра γ , для которых существуют действительные не равные тождественно нулю решения $\Psi_1(r, \gamma)$, $\Psi_2(r, \gamma)$, системы уравнений (10).

Полагаем, что функции $\Psi_1(r, \gamma)$, $\Psi_2(r, \gamma)$ дифференцируемы таким образом, что

$$\Psi_1 \in C[0, R_1] \cap C[R_1, R_2] \cap C[R_2, +\infty] \cap C_1[0, R_1] \cap C_1[R_1, R_2] \cap C_1[R_2, +\infty], \quad (11)$$

$$\Psi_2 \in C[0, +\infty] \cap C_1[0, R_1] \cap C_1[R_1, R_2] \cap C_1[R_2, +\infty] \cap C_2[0, R_1] \cap C_2[R_1, R_2] \cap C_2[R_2, +\infty],$$

Принимаем, что $\gamma^2 > \varepsilon_3$.

При $r > R_1$ получим $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$ и система (10) будет иметь вид

$$\{\gamma^2 \Psi_2' + k_1^2 \Psi_1 = 0, -\gamma \frac{1}{r} (r \Psi_1)' - \frac{1}{r} (r \Psi_2)'\} = k_0^2 \varepsilon_1 \Psi_2 = 0, \quad (12)$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$.

Выражая функцию Ψ_1 из первого уравнения и подставляя его во второе уравнение системы, получим уравнение для функции Ψ_2 :

$$-\frac{\gamma}{k_1^2} \frac{1}{r} (r \Psi_2)'\} - \frac{1}{r} (r \Psi_2)' - k_0^2 \varepsilon_1 \Psi_2 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является уравнением Бесселя и его можно записать в виде

$$\frac{1}{r} (r \Psi_2)' + k_0^2 \varepsilon_1 \Psi_2 = 0. \quad (14)$$

Тогда решение системы (11) имеет вид

$$\Psi_1(r) = \frac{\gamma}{k_1} (C_1 I_0'(k_1 r) + C_1 K_0'(k_1 r)), \quad (15)$$

$$\Psi_2(r) = (C_1 I_0(k_1 r) + C_2 K_0(k_1 r)),$$

Функции I_0 и K_0 — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков соответственно. Функция Макдональда $K_0(r)$ стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$ а функция Бесселя $I_0(r)$ ограничена при $r \rightarrow \infty$. Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области и учитывая, что $I_0'(r) = I_1(r)$, получаем из (12)

$$\Psi_1(r) = \frac{\gamma}{k_1} C_1 K_1(k_1 r), \quad (16)$$

$$\Psi_2(r) = C_1 I_0(k_1 r).$$

При $R_1 < r < R_2$ имеем $\varepsilon = (1,8 + \chi E) \varepsilon_0$. Тогда система (10) примет вид

$$\begin{aligned} & \{\gamma \Psi_2' + ((\gamma^2 - k_0^2(1,8 + \chi(\Psi_1^2 + \Psi_2^2))) \Psi_1 = 0, \\ & -\gamma \frac{1}{r} (r \Psi_1)' - \frac{1}{r} (r \Psi_2)'\} - k_0^2(1,8 + \chi(\Psi_1^2 + \Psi_2^2)) \Psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При $r > R_2$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_3 \varepsilon_0$. Тогда система (10) примет вид

$$\begin{aligned} \{\gamma \Psi_2' + k_3^2 \Psi_1 = 0, \\ -\frac{1}{r} \gamma (r \Psi_1)' - \frac{1}{r} (r \Psi_2)' - k_0^2 \varepsilon_3 \Psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $k_3^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3$.

Решение системы (18) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) &= \frac{\gamma}{k_1^2} (C_3 I_0'(k_3 r) + C_4 K_0'(k_3 r)), \\ \Psi_2(r) &= C_3 I_0(k_3 r) + C_4 K_0(k_3 r). \end{aligned} \quad (19)$$

Известно, что функция $I_0(r)$ стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, а функция $K_0(r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Принимая во внимание данные условия и учитывая то, что $K_0'(r) = -K_1(r)$, получаем из (19)

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) &= \frac{\gamma}{k_3^2} C_4 K_1(k_3 r), \\ \Psi_2(r) &= C_4 K_0(k_3 r). \end{aligned} \quad (20)$$

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_z и H_φ . Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} E_z(R_1 + 0) = E_z(R_1 - 0), \quad H_\varphi(R_1 + 0) = H_\varphi(R_1 - 0), \\ E_z(R_2 + 0) = E_z(R_2 - 0), \quad H_\varphi(R_2 + 0) = H_\varphi(R_2 - 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Компонента E_r является нормальной компонентой и на границе раздела сред непрерывна.

Из вышесказанного получаем условия сопряжения для функций Ψ_1 и Ψ_2 :

$$[\varepsilon \Psi_1]_{r=R_1} = 0, \quad [\Psi_2]_{r=R_1} = 0, \quad [\varepsilon \Psi_1]_{r=R_2} = 0, \quad [\Psi_2]_{r=R_2} = 0, \quad (22)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Тогда из (22) получаем

$$\varepsilon_1 \Psi_1(R_1 - 0) = (1, 8 + \chi \Psi) \Psi_1(R_1 + 0), \quad \Psi_2(R_1 - 0) = \Psi_2(R_1 + 0), \quad (23)$$

$$(1, 8 + \chi \Psi_1) \Psi_1(R_2 - 0) = \varepsilon_3 \Psi_1(R_2 + 0), \quad \Psi_2(R_2 - 0) = \Psi_2(R_2 + 0), \quad (24)$$

где $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$.

Можно увидеть, что при умножении в (3) полей **E**, **H** на произвольную постоянную $C_0 \neq 0$ и коэффициента нелинейности на C_0^{-2} система уравнений Максвелла не изменяется. Однако это обстоятельство не дает возможности выбора дополнительного условия нормировки. Поскольку при расчетах с конкретным коэффициентом χ окажется, что этот коэффициент нормирован на неизвестную постоянную C_0^{-2} . Считая постоянную C_1 заданной и равной единице, из (16), (20), (23), (24) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) = (\varepsilon_2 + \chi\Psi|_{r=R_2-0})\Psi_1(R_2 - 0) - \gamma \frac{\varepsilon_3 K_1(k_3 R_2)}{k_3 K_0(k_3 R_2)} \Psi_2(R_2 - 0). \quad (25)$$

Теперь мы можем сформулировать нелинейную задачу сопряжения на собственные значения, к которой свелась исходная задача о распространении волн. Требуется отыскать собственные значения γ и соответствующие им не равные тождественно нулю функции Ψ_1 , Ψ_2 , определяемые выражениями (16) при $r < R_1$ и (20) при $r < R_2$, удовлетворяющие системе уравнений (17) при $R_1 < r < R_2$ условиям сопряжения (22).

Для получения численных результатов решалась система дифференциальных уравнений (17) при $\gamma_j = \gamma_0 + jh_0$, $j = \overline{0, N-1}$, с некоторым шагом h_0 , где $\gamma \in (\varepsilon_3, \gamma^*)$, $\gamma^* < \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (в линейной задаче) и (в нелинейной задаче). Затем вычислим значение $\Delta(\gamma_j)$ и определим отрезки изменения знак функции $\Delta(\gamma_j)$. На каждом отрезке значение локализованного корня уравнения $\Delta(\gamma) = 0$ уточнялось методом дихотомии.

Результаты расчетов представлены на рис. 2—6.

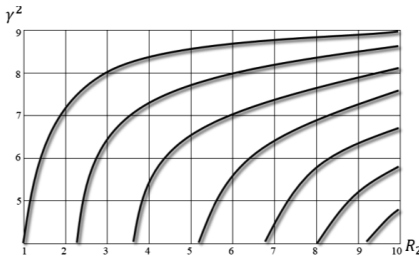


Рис. 2. Зависимость постоянной распространения γ^2 от радиуса R_2 .

При расчете использовались следующие значения параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, \\ R_1 = 2,2 < R_2 < 12, \chi = 0, k_0 = 1$$

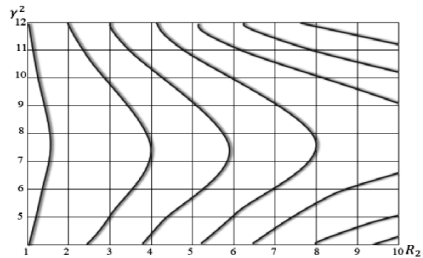


Рис. 3. Зависимость постоянной распространения γ^2 от радиуса R_2 .

При расчете использовались следующие значения параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, \\ R_1 = 2,2 < R_2 < 12, \chi = 0,01$$

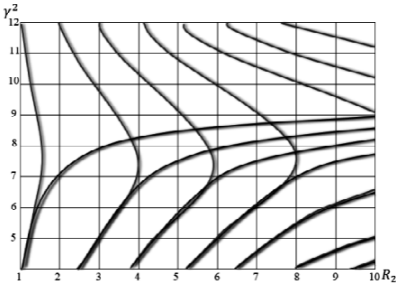


Рис. 5. Зависимость постоянной распространения γ^2 от коэффициента нелинейности χ . При расчете использовались следующие значение параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, R_1 = 2, \\ \hat{R}_2 = 4, k_0 = 1$$

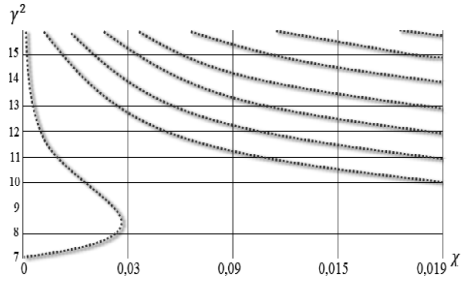


Рис. 5. Зависимость постоянной распространения γ^2 от коэффициента нелинейности χ . При расчете использовались следующие значение параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, R_1 = 2, \\ \hat{R}_2 = 4, k_0 = 1$$

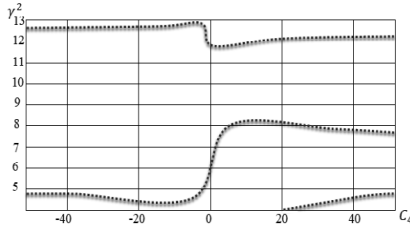


Рис. 6. Зависимость постоянной распространения γ^2 от постоянной C_4 .

При расчете использовались следующие значение параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, R_1 = 2, R_2 = 4, \chi = 0,01, k_0 = 1$$

Литература

1. Jun-Sheng Zhao, Weng Cho Chew. Integral equation solution of Maxwell's equations from zero frequency to microwave frequencies. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. 48, Issue 10, pp. 1635–1645, 2000.
2. Ismibayli, E. G., Islamov, I. J. and Gaziyevev, Y. G. Calculation Of The Electromagnetic Field Of The Microwave Of Devices With Use Of Method FDTD and Integral Kirchhoff. International Journal of Engineering Innovation and Research (IJEIR), Volume 5, Issue 1, pp. 103–106, 2016.
3. Islamov, I. J. Numerical method for analysis of electromagnetic field of microwave waveguide. International Conference on Antenna Theory and Techniques. September 9–12, Sevastopol, Ukraine, pp. 45–50, 2003.