

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО- НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису
УДК 519.866

До захисту допущено
Завідувач кафедри ММСА
Оксана ТИМОЩУК
«___» _____ 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 124 «Системний аналіз»
на тему: «Моделювання залежності факторів ризику за допомогою копул»

Виконала:

студентка 2 курсу, групи КА-12мп
Шепель Ірина Олександрівна

Керівник: професор кафедри ММСА,
д.т.н., проф. Бідюк П.І.

Рецензент: професор НТУУ "КПІ ім. Сікорського",
д.т.н., проф. Сільвестров А.М.

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань

Студент (підпис): _____

Київ
2022

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО- НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)
Спеціальність (ОПП) — 124 «Системний аналіз» («Системний аналіз
фінансового ринку»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ММСА
Оксана ТИМОЩУК
«___» _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студентці Шепель Ірині Олександрівні

- 1. Тема дисертації:** «Моделювання залежності факторів ризику за допомогою копул», науковий керівник дисертації Бідюк Петро Іванович, д.т.н., професор, затверджені наказом по університету від «03» листопада 2022 р. № 4046-с
- 2. Термін подання студентом дисертації:** 12.12.2022
- 3. Об'єкт дослідження:** ризики у складних фінансових та економічних системах.
- 4. Предмет дослідження:** математичні методи аналізу, моделювання і оцінювання характеристик ризиків.
- 5. Перелік завдань, які потрібно розробити:**
 - 1) дослідити актуальність обраної теми та існуючих систем на ринку;
 - 2) здійснити огляд технічної літератури за темою дослідження;
 - 3) розробити та протестувати систему, яка буде моделювати залежність ризиків;
 - 4) провести аналіз результатів;
 - 5) провести аналіз ринкових можливостей запуску стартап проекту;
 - 6) розробити концептуальні висновки;
 - 7) підготувати ілюстративний матеріал;
 - 8) оформити пояснювальну записку.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

- 1) архітектура СППР;
- 2) приклад результатів використання системи;
- 3) розрахункові таблиці з результатами.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1. Шепель І.О., Бідюк П.І. Моделювання залежності факторів ризику за допомогою копул: збірник доповідей І науково-практичної конференції «Системні науки та інформатика», 22–29 листопада 2022 року, Київ. – К., НН ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. С. 273-277.

8. Дата видачі завдання: 01.09.2022**Календарний план**

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання завдання на магістерську дисертацію	01.09.2022 – 05.09.2022	Виконано
2	Огляд технічної літератури за темою	06.09.2022-12.09.2022	Виконано
3	Підготовка другого розділу	04.04.2022-05.05.2022	Виконано
4	Розробка СППР	05.05.2022-09.09.2022	Виконано
5	Підготовка третього розділу	09.09.2022-10.10.2022	Виконано
6	Доопрацювання СППР	10.10.2022-11.11.2022	Виконано
7	Підготовка стартапу	11.11.2022-20.11.2022	Виконано
8	Оформлення розділів відповідно до нормоконтролю	20.11.2022-01.12.2022	Виконано
9	Оформлення дипломної роботи	01.12.2022-10.12.2022	Виконано
10	Підготовка презентації доповіді	10.12.2022-11.12.2022	Виконано

Студентка

Ірина ШЕПЕЛЬ

Науковий керівник дисертації

Петро БІДЮК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 95 с., 25 рис., 23 табл., 2 додатки, 25 джерел.

Об'єкт дослідження – ризики у складних фінансових та економічних системах.

Предмет дослідження – математичні методи аналізу, моделювання і оцінювання характеристик ризиків та інформаційна система підтримки прийняття рішень на їх основі.

Мета роботи – розробка та використання статистично-ймовірностних багатовимірних моделей ризиків, що виникають у складних фінансово-економічних системах, спрямованої на зменшення можливих втрат внаслідок виникнення ризикових ситуацій завдяки підвищенню якості математичного опису ризиків.

Виконано аналіз можливості застосування класу спеціальних функцій – копул до опису багатовимірних розподілів у задачах менеджменту ризиків. Запропоновано метод побудови комбінованих маргінальних розподілів, який дозволяє враховувати важкі хвости одновимірних розподілів ризиків. Маргінальні розподіли поєднані у спільні розподіли ризиків через структуру залежності, що характеризується копулами. На основі аналізу методів побудови сімейств копул запропоновано використовувати для моделювання ризиків кілька сімейств копул із корисними для менеджменту ризиків властивостями.

Інформаційна система підтримки прийняття рішень реалізована за допомогою мови програмування R(MATLAB).

Результати даної роботи рекомендується використовувати для моделювання залежності ризиків та міри ризику.

ФІНАНСОВІ РИЗИКИ, КОПУЛИ, АНАЛІЗ РИЗИКІВ, ЗАЛЕЖНІСТЬ, МОДЕЛЮВАННЯ, VAR.

ABSTRACT

Theme: “Modelling dependency of risk factors using copulas”.

Master’s thesis: 95 p., 25 fig., 23 tab., 2 appendices, 25 sources.

The object of research – risks in complex financial and economic systems.

The subject of research is mathematical methods of analysis, modeling and measuring of risk characteristics and an information system for supporting decision-making based on them.

The purpose of the work is the development and use of statistical probabilistic multidimensional models of risks arising in complex financial and economic systems, aimed at reducing possible losses due to the occurrence of risky situations thanks to the improvement of the quality of the mathematical description of risks.

An analysis of the possibility of applying a class of special functions - copulas to the description of multidimensional distributions in risk management tasks was performed. A method of constructing combined marginal distributions is proposed, which allows taking into account the heavy tails of one-dimensional risk distributions. Marginal distributions are combined into joint risk distributions through a dependence structure characterized by copulas. Based on the analysis of the methods of constructing copula families, it is proposed to use several copula families with properties useful for risk management for risk modeling.

The decision support information system is implemented using the R (MATLAB) programming language.

The results of this work are recommended to be used for modeling the dependence of risks and the measure of risk.

FINANCIAL RISKS, COPULAS, RISK ANALYSIS, DEPENDENCE, SIMULATION, VAR.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	8
ВСТУП.....	9
1 ПОНЯТТЯ «РИЗИКУ» ТА «КОПУЛИ»	11
1.1 Що таке «ризик»?	11
1.2 Види ризиків.....	14
1.3 Визначення «копула» та застосування копул у сфері фінансів	18
Висновки до розділу 1	20
2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО КОПУЛИ ТА МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ КОПУЛ	22
2.1 Теорія екстремальних значень.....	22
2.2 Означення та основні властивості копул.....	25
2.3 Побудова сімейства копул	30
2.4 Оцінювання параметрів копули.....	34
2.5 Оцінювання міри ризику	36
Висновки до розділу 2	37
3 РОЗРОБКА І ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОЇ СИСТЕМИ	38
3.1 Архітектура системи підтримки прийняття рішень	38
3.2 Вибір інструментальної платформи для реалізації програми.	40
3.4 Інтерфейс СППР	42
3.4 Побудова моделей.....	43
Висновки до розділу 3	47

4 РОЗРОБКА СТАРТАП-ПРОЕКТУ	48
4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок	48
4.2 Опис ідеї стартап-проекту	50
4.3 Технологічний аудит ідеї проекту	52
4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	55
4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту	64
4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	67
Висновки до розділу 4	69
ВИСНОВКИ	70
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	72
ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДІ	75
ДОДАТОК Б ЛІСТИНГ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	80

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

СППР – система підтримки прийняття рішень

ПЗ – програмне забезпечення

ПП – програмний продукт

ВСТУП

Копули (копула-функції) останні двадцять років стали популярним інструментом статистичного моделювання багатовимірних спостережень. Застосування апарату копула-функцій дозволяє розділити етапи моделювання: (а) випадкових величин - компонент випадкового вектора, і (б) їхньої спільної поведінки. Відповідно до теореми Скл'яра [1], будь-який багатовимірний розподіл може бути побудований за набором приватних розподілів, які описують індивідуальну поведінку кожної випадкової величини, та спеціального виду копула-функції, що задає структуру залежності між випадковими величинами. Ця залежність виражається через параметр асоціації популярної моделі.

Копули дозволяють з достатнім ступенем гнучкості будувати різні види багатовимірних розподілів, які не укладаються в рамки багатовимірної нормальності або інших параметричних багатовимірних сімейств. Той факт, що за допомогою копул можна моделювати складніші структури залежності, ніж багатовимірне нормальне розподілення, зробив їх особливо популярними для фінансових додатків. У роботі [2] виділено п'ять основних додатків моделей «копула» до завдань фінансів, які включають побудову моделі дюрації, оцінку вартості похідних фінансових інструментів, оцінку ризиків портфеля активів, вибір оптимальної структури інвестиційного портфеля та хеджування ризику. Застосування копул до вивчення характеру взаємодії національних фондових ринків, зниження фінансових ризиків виявилось важливим кроком у розвитку теорії інвестиційного портфеля. Почало з'являтися все більше робіт, що моделюють поведінку фондових індексів, валют [3-4].

Задача цього проекту – розробка статистично-ймовірностних багатовимірних моделей ризиків, що виникають у складних фінансово-економічних системах, спрямованої на зменшення можливих втрат внаслідок

виникнення ризикових ситуацій завдяки підвищенню якості математичного опису ризиків.

Перший розділ присвячений поняттям ризику та копули, також зроблений огляд літератури. У другому розділі розглянуто теоретичні відомості про копули, їх види, методи оцінювання параметрів копул. Третій розділ описує практичну частину роботи. Четвертий розділ присвячений стартап-частині роботи.

1 ПОНЯТТЯ «РИЗИКУ» ТА «КОПУЛИ»

1.1 Що таке «ризик»?

Оксфордський словник англійської мови визначає ризик наступним чином: "шанс або можливість небезпеки, втрати, травми або інших несприятливих наслідків", а визначення ризику означає "схильність до небезпеки". У цьому контексті ризик використовується для визначення негативних наслідків. Однак ризик може призвести до позитивного результату. Третя можливість у тому, що ризик пов'язані з невизначеністю результату.

Візьмемо приклад володіння автомобілем. Для більшості людей володіння автомобілем — це можливість стати мобільнішим і отримати відповідні переваги. Однак при володінні автомобілем існують невизначеності, пов'язані з витратами на технічне обслуговування та ремонт. Нарешті легкові автомобілі можуть потрапляти в аварії, тому можливі очевидні негативні наслідки. Також важливо пам'ятати про юридичні зобов'язання, пов'язані з володінням автомобілем, та про правила, яких необхідно дотримуватися під час руху автомобіля дорогою.

Визначення ризику можна знайти в багатьох джерелах і деякі ключові визначення наведені далі. Також пропонується альтернативне визначення, щоб проілюструвати широкий характер ризиків, які можуть вплинути на організації. Інститут Управління Ризиками визначає ризик як поєднання ймовірності події та її наслідків. Наслідки можуть змінюватись від позитивних до негативних. Це широко застосовне та практичне визначення, яке можна легко застосувати. Міжнародний посібник із визначень, пов'язаних із ризиком, — ISO Guide 73, визначає ризик як «вплив невизначеності на цілі». Це визначення, мабуть, передбачає певний рівень знань про управління ризиками, та його нелегко застосувати у повсякденному житті. Сенс і застосування цього визначення стануть яснішими в міру читання цієї книги. У попередній версії ISO Guide 73 (2002 р.) також зазначається, що ефект може бути позитивним, негативним або відрізнятися від очікуваного. Ці три типи подій можуть бути пов'язані з

ризиками як можливість, небезпека або невизначеність, і це стосується описаного вище прикладу володіння автомобілем. У посібнику наголошується, що ризик часто описується подією, зміною обставин, наслідком або їх комбінацією та тим, як вони можуть вплинути на досягнення цілей.

Інститут Внутрішніх Аудиторів визначає ризик як невизначеність настання події, яка може вплинути на досягнення цілей. Інститут Внутрішніх Аудиторів додає, що ризик вимірюється з погляду наслідків та ймовірності. У різних дисциплінах термін "ризик" визначається по-різному. Фахівці з охорони праці та техніки безпеки використовують визначення ризику як поєднання ймовірності та величини, але цього може бути недостатньо для більш загальних цілей управління ризиками.

Враховуючи, що існує багато доступних визначень слова «ризик», важливо, щоб організація обрала визначення, яке найбільше підходить для її власних цілей. Визначення може бути як вузьким, і всеосяжним за бажанням організації. Як варіант вичерпного визначення слова «ризик» автор пропонує наступне: Подія, здатна вплинути (придушити, посилити чи викликати сумніви) в ефективності та результативності основних процесів організації.

Ризик у організаційному контексті зазвичай визначається як усе, що може вплинути на виконання корпоративних цілей. Проте корпоративні цілі зазвичай повністю формулюються більшістю організацій. У тих випадках, коли цілі встановлені, вони зазвичай формулюються як внутрішні, щорічні, цілі зміни. Це особливо вірно щодо особистих цілей, поставлених перед співробітниками організації, де цілі зазвичай відносяться до змін або розробок, а не до продовження або рутинних операцій організації.

Загальновизнано, що ризик найкраще визначити, зосередившись на ризиках як на подіях, як у визначенні ризику, наданому в ISO 31000, і визначенні, наданому Інститутом Внутрішніх Аудиторів, наведеному в таблиці 1.1. Для того, щоб ризик реалізувався, має відбутися подія. Тому, можливо, ризик можна просто вважати «незапланованою подією з неочікуваними наслідками».

Таблиця 1.1 – Визначення ризику

Організація	Визначення ризику
ISO Guide 73 ISO 31000	Вплив невизначеності на цілі. Зверніть увагу, що ефект може бути позитивним, негативним або відхиленням від очікуваного. Крім того, ризик часто описується подією, зміною обставин або наслідком.
Інститут Управління Ризиками	Ризик - це сукупність ймовірності події та її наслідків. Наслідки можуть варіюватися від позитивних до негативних.
Orange Book from HM Treasury	Невизначеність результату в діапазоні опромінення, що виникає внаслідок поєднання впливу та ймовірності потенційних подій.
Інститут Внутрішніх Аудиторів	Невизначеність події, яка може вплинути на досягнення цілей. Ризик вимірюється з точки зору наслідків і ймовірності.

1.2 Види ризиків

Байєсові мережі широко використовуються в цілях прогнозування. Такі мережі являють собою графові моделі імовірнісних і причинно-наслідкових відносин між змінними в статистичному інформаційному моделюванні. У байєсових мережах можуть органічно поєднуватися емпіричні частоти появи різних значень змінних, суб'єктивні оцінки «очікувань» і теоретичні уявлення про математичні ймовірності тих чи інших наслідків з апіорної інформації. Це є важливою практичною перевагою і відрізняє байєсові мережі від інших методик інформаційного моделювання.

Основні ринкові ризики виникають через зміни цін на фінансовому ринку, таких як обмінні курси, процентні ставки та ціни на товари. Основні ринкові ризики зазвичай є найбільш очевидним типом фінансового ризику, з яким стикається організація. Основні ринкові ризики включають:

- валютний ризик;
- ризик відсоткової ставки;
- ризик зміни цін на товар;
- ціновий ризик акцій.

Інші важливі фінансові ризики включають:

- кредитний ризик;
- операційний ризик;
- ризик ліквідності;
- системний ризик.

Взаємодія кількох ризиків може змінити або посилити потенційний вплив на організацію. Наприклад, організація може мати як ризик цін на товар, так і валютний ризик. Якщо обидва ринки рухаються несприятливо, в результаті організація може зазнати значних збитків. Оцінка фінансового ризику складається з двох компонентів. Перший компонент – це розуміння

потенційних втрат у результаті конкретної зміни курсу чи ціни. Другий компонент – це оцінка ймовірності настання такої події.

Ризик процентної ставки

Ризик процентної ставки виникає з кількох джерел, зокрема:

- Зміни рівня процентних ставок (абсолютний процентний ризик)
- Зміни форми кривої дохідності (ризик кривої дохідності)
- Невідповідності між ризиком і вжитими стратегіями управління ризиками (базовий ризик)

Ризик процентної ставки – це ймовірність негативного впливу на прибутковість або вартість активів у результаті зміни процентної ставки. Відсотковий ризик впливає на багато організацій, як на позичальників, так і на інвесторів, і особливо на капіталомісткі галузі та сектори.

Зміни впливають на позичальників через вартість коштів. Наприклад, корпоративний позичальник, який використовує борг із плаваючою відсотковою ставкою, зазнає впливу зростання відсоткових ставок, що може збільшити вартість коштів компанії. Портфель цінних паперів з фіксованим доходом піддається впливу процентних ставок як через зміни дохідності, так і через прибутки чи збитки від утримуваних активів.

Абсолютний процентний ризик

Абсолютний ризик процентної ставки є результатом можливості спрямованої зміни процентних ставок або підвищення або зниження. Більшість організацій відслідковують абсолютний ризик відсоткової ставки у своїй оцінці ризику, завдяки як його видимості, так і можливому впливу на прибутковість. З точки зору позичальника, підвищення процентних ставок може призвести до підвищення вартості проекту та змін у фінансуванні чи стратегічних планах.

З точки зору інвестора чи позикодавця, зниження процентних ставок призводить до зниження процентного доходу за тих самих інвестицій або, навпаки, до недостатнього прибутку від утримуваних інвестицій. За інших рівних умов чим більша тривалість, тим більший вплив зміни відсоткової ставки.

Найпоширенішим методом хеджування абсолютного процентного ризику є узгодження тривалості активів і зобов'язань або заміна запозичень чи інвестицій із плаваючою процентною ставкою боргом чи інвестиціями з фіксованою процентною ставкою. Іншою альтернативою є хеджування процентного ризику за допомогою таких інструментів, як форвардні процентні угоди, свопи та обмеження процентної ставки, мінімальні ставки та коміри.

Ризик кривої дохідності

Ризик кривої дохідності є результатом змін у співвідношенні між короткостроковими та довгостроковими процентними ставками. У нормальних умовах процентної ставки крива дохідності має висхідну форму. Довгострокові процентні ставки вищі за короткострокові через вищий ризик для кредитора. Збільшення або сплюснення кривої дохідності змінює різницю процентних ставок між строками погашення, що може вплинути на рішення про запозичення та інвестиції, а отже, на прибутковість.

У середовищі перевернутої кривої прибутковості попит на короткострокові кошти підвищує короткострокові ставки вище довгострокових. Крива дохідності може виглядати перевернутою або плоскою для більшості термінів погашення або, як альтернатива, лише в певних сегментах погашення. У такому середовищі ставки з довгими термінами погашення можуть зазнати меншого впливу, ніж коротші терміни до погашення. Якщо існує невідповідність між активами та пасивами організації, ризик кривої прибутковості слід оцінювати як складову процентного ризику організації.

Коли крива дохідності стає крутішою, процентні ставки для більш довгих строків погашення збільшуються більше, ніж процентні ставки для коротших термінів, оскільки зростає попит на довгострокове фінансування. З іншого боку, короткострокові ставки можуть знизитися, тоді як довгострокові ставки залишаться відносно незмінними. Крутіша крива дохідності призводить до більшої різниці між короткостроковими та довгостроковими процентними ставками, що робить продовження боргу дорожчим. Якщо позичальник

стикається з крутою кривою прибутковості, фіксація витрат на позики на більш тривалий термін коштує набагато більше, ніж на короткий термін.

Більш плоска крива дохідності має менший розрив між довгостроковими та короткостроковими процентними ставками. Це може статися, коли довгострокові ставки падають, а короткострокові ставки залишаються приблизно такими ж. З іншого боку, короткостроковий попит на кошти може зменшитися з невеликими змінами попиту на довгострокові кошти. Вирівнювання кривої дохідності здешевлює форвардний борг, оскільки існує менша різниця процентних ставок між датами погашення.

Свопи та стратегії кривої прибутковості, які використовують такі продукти, як процентні ф'ючерси та форвардні процентні угоди вздовж кривої доходності, можуть скористатися перевагами змін у формі кривої прибутковості. Крива прибутковості враховується щоразу, коли існує невідповідність між активами та пасивами.

Валютний ризик

Валютний ризик виникає через операції, транзакції та економічні ризики. Він також може виникати в результаті транзакцій на основі товарів, коли ціни на товари визначаються та торгуються в іншій валюті.

Під впливом абсолютних змін цін є ризик зростання або падіння цін на товари. Організації, які виробляють або закупають товари, або чиї засоби до існування іншим чином пов'язані з цінами на товари, піддаються ризику зміни цін на товари.

Деякі товари неможливо хеджувати, оскільки для цього продукту немає ефективного форвардного ринку. Як правило, якщо існує форвардний ринок, може розвиватися ринок опціонів або на біржі, або між установами на позабіржовому ринку.

Замість біржових товарних ринків багато постачальників товарів пропонують своїм клієнтам форвардні контракти або контракти з фіксованою ціною. Фінансові установи можуть пропонувати клієнтам подібні продукти за умови, що існує ринок для цього продукту, який дозволяє фінансовій установі

хеджувати власний ризик. Фінансові установи на деяких ринках обмежені законодавством щодо типів товарних операцій, які вони можуть здійснювати, хоча товарні похідні інструменти може бути дозволено.

Кредитний ризик

Кредитний ризик є одним із найпоширеніших ризиків фінансів і бізнесу. Загалом, кредитний ризик викликає занепокоєння, коли організація має гроші або повинна покладатися на іншу організацію, щоб здійснити платіж їй або від її імені. Неспроможність контрагента є меншою проблемою, коли організації не заборгували гроші на нетто-основі, хоча це певною мірою залежить від правового середовища та того, чи заборговані кошти на чистій чи сукупній основі за окремими контрактами. Погіршення кредитної якості, наприклад, емітента цінних паперів, також є джерелом ризику через зниження ринкової вартості, якою може володіти організація.

Операційний ризик

Операційний ризик виникає внаслідок людських помилок і шахрайства, процесів і процедур, а також технологій і систем. Операційний ризик є одним із найбільш значних ризиків, з якими стикається організація, через різноманітні можливості виникнення збитків і той факт, що втрати можуть бути суттєвими, коли вони виникають.

1.3 Визначення «копула» та застосування копул у сфері фінансів

Термін «копула» вперше був використаний у роботі Sklar (1959) і походить від латинського слова «copulare», що означає з'єднувати або об'єднувати. Основне призначення копули — описати взаємозв'язок кількох випадкових величин. Таким чином, копули є інструментами для моделювання залежності кількох випадкових величин. Копула — це функція, яка об'єднує або з'єднує функцію багатовимірного розподілу з одновимірними граничними функціями розподілу, тому копула є функцією багатовимірного розподілу.

Оскільки можна визначити поведінку функції одновимірного граничного розподілу, за допомогою багатовимірного розподілу ми можемо визначити, як граничні розподіли поведуться разом, або глибше зрозуміти їхню залежність. Через обмеження лінійної кореляції копули стають більш популярними інструментами в економічних та фінансових задачах вимірювання залежності, ніж загальновідома лінійна кореляція.

У сфері фінансів Лю [5] представляє застосування методології копули для моделювання спільних розподілів із важкими хвостами. Чотири загальноприйняті копули були оцінені та порівняні з багатовимірною нормальною моделлю. Це копула Гауса, t-копула, копула Гумбела та суміш копули Гаусса. Вплив копули на ризикову вартість (VaR) також вивчається. Крім того, у цьому дослідженні розглядаються моделі з різними розподілами портфелів. Автор виявив, що копула є особливо корисним для апроксимації хвостів дохідності портфеля. Далі, коли ми рухаємося до центру спільного розподілу, ця перевага зменшується. Крім того, також виявилось, що коли ми розглядаємо розподіл портфеля, не існує єдиної найкращої моделі. Це забезпечило додаткові результати для інших порівнянь спільного моделювання розподілу, проведених в останніх роботах, і вимагало більш конкретного критерію порівняння. Дослідження показало, що копула є альтернативою багатовимірній нормальній специфікації залежності між змінними, і привернула все більшу увагу в ціноутворенні активів, розподілі портфеля та управлінні ризиками.

Вданій роботі [6] описав деякі можливі варіанти використання копульних функцій у програмах управління ризиками та довів, як деякі види копульних функцій легко реалізувати в імітаційних моделях Монте-Карло для оцінки показників ризику. Було виконано практичне застосування з портфелем з десяти італійських акцій і доведено, що загальна гіпотеза мультиномального розподілу доходів активів (або доходів факторів ризику) недооцінює VaR і очікуваний дефіцит ринкового портфеля. Також було виконано моделювання за методом Монте-Карло, моделювання прибутковості активів з використанням

граничних розподілів жирного хвоста та функції копули з хвостовою залежністю та отримано точнішу оцінку для двох показників ризику. Дослідження також довело, що методологія, яка використовує багатofакторний розподіл Гаусса прихованих змінних, не враховує ризик багатьох спільних дефолтів контрагентів. Навпаки, події такого типу ефективно фіксуються за допомогою копули Стюдента для опису структури залежності латентних змінних. Таким чином, копула t-Стюдента може бути дуже корисною для моделювання екстремального ризику, який турбує ризик-менеджерів і керівників.

В управлінні ризиками, точніше ціноутворенням опціонів, Гурберх, Генест та Веркер [7] досліджували поведінку біваріантних цін опціонів за наявності зв'язку між базовими активами. Параметричні сімейства копул, що пропонують різні альтернативи структурі залежності Гаусса, були використані для моделювання цієї асоціації, яка явно змінюється з часом як функція волатильності активів. Ці динамічні моделі копули були застосовані до опціонів на найкращі з двох і гірші з двох ринків на індексах Standard and Poor's 500 та Nasdaq.

Висновки до розділу 1

У розділі 1 були розглянуті поняття ризику у різних аспектах, а також основні види ризиків. Було розглянуто поняття «копула» та проведено огляд літератури по темі.

Показано актуальність та перспективність моделювання залежності ризиків за допомогою копул, на основі чого сформульовано постановку задачі дисертаційної роботи та виділено етапи її розв'язку.

Постановка задачі

Метою роботи є розробка та використання статистично-ймовірностних багатовимірних моделей ризиків, що виникають у складних фінансово-економічних системах, спрямованої на зменшення можливих втрат внаслідок виникнення ризикових ситуацій завдяки підвищенню якості математичного опису ризиків..

Задачі даної роботи:

- розробити метод моделювання спостережень;
- виконати аналіз методів побудови класу спеціальних функцій – копул, які придатні для описання багатовимірних розподілів
- створити модель ризиків;
- створити системний підхід та методи його реалізації до оцінки ризику;
- розробити комп’ютерну інформаційну систему підтримки прийняття рішень для задач управління ризиками;
- описати звіт за отриманими результатами та зробити висновки.

2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО КОПУЛИ ТА МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ КОПУЛ

2.1 Теорія екстремальних значень

Математичну модель екстремальних даних можна подати у вигляді [8]:

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad (2.1)$$

де $X_1, \dots, X_n$ – послідовність незалежних випадкових величин з функцією розподілу F . У виразі (2.1) величина M_n позначає максимум досліджуваного процесу на інтервалі часу n і має розподіл [8]:

$$\begin{aligned} \Pr\{M_n \leq Z\} &= \Pr\{X_1 \leq Z, \dots, X_n \leq Z\} = \\ &= \Pr\{X_1 \leq Z\} \times \dots \times \Pr\{X_n \leq Z\} = \{F(Z)\}^n. \end{aligned}$$

Функція F невідома, а тому розглядається наближена оцінка для F^n . Якщо послідовність констант $\{a_n > 0\}$ і $\{b_n > 0\}$ таких, що

$$\Pr\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq Z\right\} \rightarrow F(a_n x + b_n x)^n \rightarrow G(Z),$$

При $n \rightarrow \infty$, то G – невироджена функція розподілу, але належить до одного з розподілів екстремальних значень (Generalized Extreme Value — GEV):

$$G(Z) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\},$$

де μ – параметр розподілу, σ – параметр масштабованості, ξ – параметр формули розподілу.

Відповідно до теореми про типи розподілів екстремальних значень виділяють три типи таких розподілів:

1) розподіл Гумбела:

$$G(Z) = \exp \left\{ -\exp \left(-\left(\frac{Z-b}{a} \right) \right) \right\}, \quad -\infty < Z < \infty;$$

2) розподіл Фреше:

$$G(Z) = \begin{cases} 0, & Z \leq b; \\ \exp \left(-\left(\frac{Z-b}{a} \right)^{-\alpha} \right), & Z > b; \end{cases}$$

3) розподіл Вейбула:

$$G(Z) = \begin{cases} \exp \left(-\left(-\left(\frac{Z-b}{a} \right) \right)^\alpha \right), & Z < b; \\ 1, & Z > b; \end{cases}$$

Для всіх трьох випадків $a > 0, b$ – дійсне число. Для другої та третьої функцій $\alpha > 0$. Ці три класи розподілів називають розподілами екстремальних значень.

З рис. 4 видно, що кожен із розподілів має свою форму поведінки хвоста. Наприклад, для розподілу Вейбула хвіст має кінцеву точку $Z_{sup} = \frac{\mu-\sigma}{\xi}$, а для розподілів Фреше та Гумбела $Z_{sup} = \infty$. Крім того, щільність розподілу Гумбела експоненційно затухає, тоді як щільність розподілу Фреше затухає поліноміально. Розподіл Гумбела є наближенням до класу таких відомих розподілів: нормального, лог-нормального та гамма. Розподіл Фреше має тяжкий хвіст, для якого за означенням $E(X^r) = \infty$ при $r \geq \frac{1}{\xi}$ (що означає

нескінченність дисперсії при $\xi \geq 1/2$). В окремий клас виділяють узагальнений розподіл Парето (Generalized Pareto Distribution — GPD), який отримуємо за умови: X — це розподіл, що умовно перевищує деякий поріг u :

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)},$$

де $u \rightarrow w_F = \sup\{x: F(x) < 1\}$, що найчастіше зводиться до пошуку границі:

$$F_u(y) \approx G(y, \sigma_u, \xi),$$

де G — узагальнений розподіл Парето, еквівалентний виразу [2]

$$G(y, \sigma_u, \xi) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi}.$$

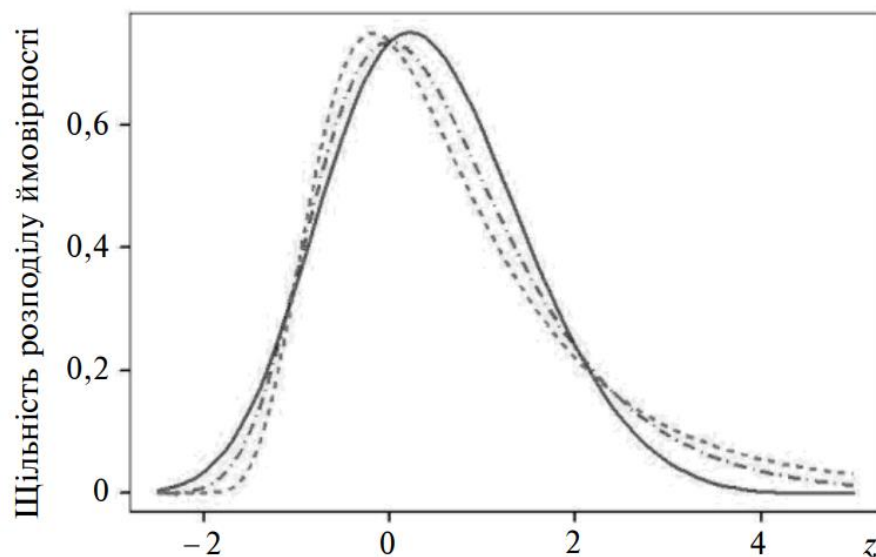


Рисунок 2.1 – Функції щільності розподілу для трьох типів розподілів: — - Вейбула; - - - - Фреше; - · - - Гумбела

Якщо $\xi > 0$, то маємо довгий хвіст $x^{-1/\xi}$, що еквівалентно розподілу Парето; якщо $\xi = 0$, при $\xi \rightarrow 0$ отримаємо $G(y, \sigma, 0) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)$, тобто експоненціальний розподіл із середнім σ ; і якщо $\xi < 0$, то кінцева верхня точка знаходиться на рівні $-\sigma/\xi$. Також однією із переваг GEV-розподілів є інваріантність кожного з розподілів, які належать до цього класу.

2.2 Означення та основні властивості копул

У теорії ймовірностей відправною точкою є поняття ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, \Pr)$, де Ω – область визначення відповідних випадкових змінних; $\mathfrak{F}$ – сігма-алгебра, тобто сімейство випадкових подій, які є підмножинами Ω ; $\Pr$ – ймовірнісна міра. При цьому сімейство підмножин $\mathfrak{F}$ в області визначення Ω називають сігма-алгеброю, якщо воно задовольняє таким властивостям: (1) $\Omega \in \mathfrak{F}$; (2) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$; $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathfrak{F}$.

Надалі під ризиком будемо розуміти випадкову подію, яка може призвести до фінансових втрат. Формальним означенням ризику може бути таке: ризик X – це випадкова подія, яка характеризується двома невід’ємними величинами – рівнем випадкових виплат або втрат та ймовірністю цієї події. Спільний розподіл ризиків розглянемо у вигляді:

$$H(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

де $F_1, \dots, F_n$ – маргінальні функції розподілу окремих ризиків, C – n -копула, що характеризує структуру залежності між ризиками.

Означення 1: *функцією розподілу* називається така функція F з областю визначення $[-\infty, \infty]$, що F є неспадаючою, $F(-\infty) = 0$ та $F(\infty) = 1$.

Означення 2: *функцією розподілу випадкової величини X* називається така функція розподілу F , що для всіх $x \in [-\infty, \infty]$ виконується $F(x) = P[X \leq x]$.

Означення 3: функція H від n аргументів називається n -зростаючою

якщо для будь-якого n -вимірному інтервалу $B = [\vec{a}, \vec{b}]$, такого що $\vec{a}, \vec{b}$ належать до області визначення функції H та $\vec{a} \leq \vec{b}$ виконується

$$V_H(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} H(\vec{x}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\vec{x}) \geq 0$$

де $\Delta_{a_i}^{b_i} H(\vec{x}) = H(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - H(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Означення 4: *спільною функцією розподілу* називається така функція H з областю визначення $[-\infty, \infty]^n$, що H є n -зростаючою $H(x_1, \dots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, x_n) = 0 \quad \forall i$ $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Означення 5: *спільною функцією розподілу випадкових величин $X_1, \dots, X_n$* називається така спільна функція розподілу H з областю визначення $[-\infty, \infty]^n$ що $H(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$.

З визначень маємо, що функція розподілу випадкової величини X_i є маргінальною функцією розподілу спільної функції розподілу випадкових величин $X_1, \dots, X_n$:

$$F(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \lim_{t_j \rightarrow \infty} \bigvee_j H(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

Вичерпним описом залежності або незалежності випадкових величин є $P(X_1 \leq x_1; \dots; X_n \leq x_n)$, тобто функція спільного розподілу $H(x_1, \dots, x_n)$. Але вона містить також надлишкову інформацію про маргінальні розподіли кожної з випадкових величин. На практиці інформацію про структуру залежності бажано мати окремо. [?]

Означення 6: функція $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ називається n -копулою, якщо 1) $C(F_1, \dots, F_n) = 0$ якщо існує j таке що $F_j = 0$; 2) $C(1, \dots, 1, F_i, 1, \dots, 1) = F_i$; 3) C є n -зростаючою функцією.

Теорема 1 (Скляра)[14]: Нехай H є n -вимірною спільною функцією розподілу з маргінальними розподілами $F_1, \dots, F_n$. Тоді існує така n -копула C

що для всіх $\vec{x} \in R^n$,

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Якщо $F_1, \dots, F_n$ є неперервними, тоді C унікальна; в іншому випадку функції C є унікально визначеними на $Rng[F_1] \times \dots \times Rng[F_n]$. І навпаки, якщо $F_1, \dots, F_n$ є розподілами та C є n -копулою, тоді $H(x_1, \dots, x_n)$ є n -вимірною спільною функцією розподілу з маргінальними розподілами $F_1, \dots, F_n$.

Означення 7: функцією щільності для копули C є:

$$c(F_1, F_2, \dots, F_n) = \frac{\partial C(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial F_1 \partial F_2, \dots, \partial F_n}.$$

Функцію щільності спільного розподілу можна представити у вигляді:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

де f_i - функції щільностей маргінальних розподілів. Корисною в управлінні ризиками властивістю копул є інваріантність до зростаючих перетворень.

Теорема 2[14]: розглянемо перетворення $Z_1, \dots, Z_n$ які є зростаючими на відповідних областях значень випадкових величин $X_1, \dots, X_n$ з неперервними маргінальними функціями розподілу і n -копулою C . Тоді випадкові величини $Z_1(X_1), \dots, Z_n(X_n)$ мають ту ж саму n -копулу C .

Побудова функції маргінального розподілу[11-13]. При використанні копул для моделювання залежності необхідно мати окрему модель маргінальних розподілів. Для задач менеджменту ризиків особливо важливими є оцінки значень, які знаходяться у хвості розподілу. Правий хвіст розподілу втрат пропонується моделювати за допомогою методу перевищень, тобто узагальненим розподілом Парето, а розподіл решти спостережень, що знаходяться ближче до математичного сподівання, пропонується моделювати за допомогою нормального розподілу, спираючись на центральну граничну теорему та досвід використання цього розподілу в задачах управління

ризиками. Для відокремлення двох частин необхідно знайти значення квантилю емпіричного розподілу для обраного порогу. В проведених дослідженнях поріг обирався на рівні 95% , виходячи з існуючої практики управління ризиками.

Оцінка математичного сподівання нормального розподілу здійснюється на всіх наявних спостереженнях, а стандартного відхилення таким чином, щоб значення функції нормального розподілу в точці порогу дорівнювало значенню емпіричної функції розподілу, що дозволяє зорієнтувати модель на адекватне відображення саме хвостової частини. Крім того, це забезпечує неперервність комбінованої функції розподілу, права частина якої будується методом перевищення порогу. Для цього методу функція розподілу за побудовою дорівнює в точці порогу емпіричній функції розподілу. Неперервність функцій маргінальних розподілів вказує на існування унікальної копули.

Означення 8: Нехай X_i має функцію розподілу F_i та праву кінцеву точку $x_{iF} \leq \infty$. Для фіксованого $u < x_{iF}$ функцією розподілу перевищень порогу u називають

$$F_{iu}(x) = P(X_i - u_i \leq x \mid X_i > u), \quad x + u \leq x_{iF}$$

функцію

$$e(u) = E[X - u \mid X > u] = \int_u^{x_{iF}} \frac{1 - F_i(t)}{1 - F_i(x)} dt, \quad u < x_{iF},$$

називають функцією середнього перевищення.

Позначимо через $z^+ = \max(z, 0)$, та через $\text{card}\{A\}$ кількість елементів множини A . Емпіричною оцінкою для функції середнього перевищення буде

$$e_N(u) = \frac{1}{\text{card}\{j: x_{ij} > u, j=1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N (x_{ij} - u)^+, \quad u \geq 0.$$

Для розподілу перевищень порогу існує аналог теореми Фішера-Тіппета-Гнеденко – теорема Піканда-Балкема-де Хаана.

Теорема 3 (Піканда, Балкема, Де Хаана) [14]:

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{1-F_i(u+x\beta(u))}{1-F_i(u)} = \begin{cases} (1+\xi x)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ \exp(-x), & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $1 + \xi x > 0$, для деякої додатної функції $\beta(u)$.

З (2.2) та визначення функції розподілу перевищень маємо модель для розподілів перевищень порогів – функцію узагальненого розподілу Парето:

$$GPD_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $\beta > 0$ та $x \geq 0$ при $\xi > 0$, а $0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\xi}$ при $\xi < 0$; ξ – параметр, що характеризує форму розподілу; β – додатковий масштабуючий параметр.

Модель для функції розподілу хвоста будується методом перевищень порогу, який ґрунтується на граничному законі розподілу перевищень (2.3) і полягає в наступному:

1. Для вибірки $\{x\}_i$ розміром N , обирається поріг u . Визначаються спостереження, що перевищують поріг $x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_u}}$ та відповідні перевищення $y_j = x_{i_j} - u \geq 0$, N_u – число спостережень, що перевищують поріг.

2. Знаходиться оцінка функції $F_u(y)$ розподілу перевищень $y_1, \dots, y_{N_u}$ в формі (2.6) $GPD_{\xi, \beta}(x)$ шляхом знаходження оцінок параметрів форми та масштабу.

3. Оцінку функції розподілу випадкової величини X в області хвоста отримаємо, виходячи із співвідношення:

$$F_{iu}(y) = \frac{F_i(y+u) - F_i(u)}{1 - F_i(u)}, \quad F_i(x) = (1 - F_i(u))F_{iu}(y) + F_i(u), \quad F_i(u) = \frac{N_u}{N},$$

тобто маємо:

$$F_i(x) = \left(1 - \frac{N_u}{N}\right) F_{iu}(y) + \frac{N_u}{N}.$$

2.3 Побудова сімейства копул

Теорема Склера гарантує існування копули та її унікальність за певних умов, але не надає методу її знаходження. Розглянемо методи побудови сімейств копул.

1. Метод оберненої функції

Ідея цього методу полягає в тому, що з теореми Склера для спільної функції розподілу H та неперервних маргінальних розподілів $F_1, \dots, F_n$ копула C визначається як

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)),$$

де $F_i^{(-1)}(u_i)$ – обернена функція до функції маргінального розподілу F_i .

Найбільш поширеними в моделюванні фінансових випадкових величин є еліптичні розподіли і зокрема багатовимірний нормальний розподіл. При застосуванні до нього зворотного методу отримаємо багатовимірну нормальну копулу або як її ще називають – Гаусову копулу.

Означення 9: Нехай ρ – симетрична, додатно визначена матриця з діагоналлю $\vec{1}$. Гаусовою багатовимірною копулою називають функцію:

$$C(F_1, F_2, \dots, F_n, \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(F_1), \Phi^{-1}(F_2), \dots, \Phi^{-1}(F_n))$$

де Φ – функція стандартного одновимірного нормального розподілу; Φ_ρ – функція багатовимірного стандартного нормального розподілу з кореляційною матрицею ρ .

Щільністю багатовимірної Гаусової копули є:

$$c(F_1, F_2, \dots, F_n, \rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\Phi^{-1}(F_1), \dots, \Phi^{-1}(F_n)) \times (\rho^{-1} - I) \times \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(F_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(F_n) \end{pmatrix} \right).$$

Тобто Гаусова копула повністю визначається кореляційною матрицею ρ , а тому її параметри досить легко оцінити.

В той час як Гаусова копула за побудовою є природною для моделювання багатовимірною нормального розподілу, в управлінні ризиками її можна застосувати при побудові метанормального розподілу. Цей багатовимірний розподіл утворюється шляхом моделювання залежності між випадковими величинами через нормальну копулу, а маргінальних розподілів – через інші, найбільш доречні для кожної з величин розподіли.

Ще однією копулою, побудованою за методом оберненої функції з еліптичного розподілу є копула Студента, що відповідає багатовимірному t -розподілу Студента. За своєю побудовою ця копула, в своїй центральній частині, досить схожа на нормальну, та стає все більш схожою на неї в хвостовій частині коли зростає кількість ступенів свободи t -розподілу Студента. Але в управлінні ризиками копула Студента може знайти своє окреме застосування, через значну відмінність при моделюванні залежності далеко на хвостах розподілу.

t -копула, яку отримуємо з t -розподілу з ν ступенями свободи та додатно визначеною матрицею Σ , має щільність:

$$c(\vec{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^d |\Sigma|}} \left(1 + \frac{(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})}{\nu} \right)^{-\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}.$$

Як бачимо, еліптичні копули мають ще й ту перевагу, що навіть для великих n їх можна легко реалізувати чисельно.

2. Архімедові копули

Означення 10: Нехай ϕ – неперервна строго зростаюча функція з I в $[0, \infty]$ такою що $\phi(1) = 0$. Псевдо-інверсією для ϕ називається така функція $\phi^{[-1]}$ з $\text{Dom}\phi = [0, \infty]$ в I , що

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Відзначимо, що $\phi^{[-1]}$ є неперервною та неспадаючою на $[0, \infty]$, та строго спадаючою на $[0, \phi(0)]$. Більш того, $\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u$ на I , та

$$\phi(\phi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ \phi(0), & \phi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Якщо $\phi(0) = \infty$, то $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Лема 1: Нехай ϕ є неперервною строго спадаючою функцією з I в $[0, \infty]$ такою що $\phi(1) = 0$, та нехай $\phi^{[-1]}$ буде псевдо-інверсією для ϕ і функція C з I^2 в I задається

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)).$$

Тоді C задовольняє умовам обмеження для копули.

Доведення: $C(u, 0) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(0)) = 0$ та $C(u, 1) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(1)) = \phi^{[-1]}(\phi(u)) = u$. Аналогічно для $C(0, v) = 0$ та $C(1, v) = v$. Якщо $\phi(0) = \infty$ тоді ϕ називають строгим генератором. В цьому випадку $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ та

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

називається строгою архімедовою копулою.

Всі копули, що можуть бути представлені у вигляді (8), називають

архімедовими. Функція ϕ називається генератором копули. Цей клас копул є одним з найбільш вживаних, тому що до нього належить значна кількість параметричних родин копул, що дозволяє відобразити значну різноманітність структур залежності. До того ж побудова копул цього класу досить легка.

Наприклад, якщо $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, де $\theta \geq 1$. Очевидно, що $\phi(t)$ є неперервною та $\phi(1) = 0$. $\phi(t)' = -\theta \frac{1}{t} (-\ln t)^{\theta-1}$, тобто ϕ є строго спадаючою функцією з I в $[0, \infty]$. $\phi(t)'' = \theta(\theta-1) \frac{1}{t^2} (-\ln t)^{\theta-2} + \theta \frac{1}{t^2} (-\ln t)^{\theta-1} \geq 0$ на I , звідси ϕ є випуклою. Більш того, $\phi(0) = \infty$, тобто ϕ є строгим генератором. З (9) маємо

$$C_\theta(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}).$$

Це сімейство копул називають копулами Гумбела у випадку двох змінних. До архімедових також належать сімейства копул Франка у випадку двох змінних

$$C(F_1, F_2) = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\beta F_1} - 1)(e^{-\beta F_2} - 1)}{e^{-\beta} - 1} \right), \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

копул Клейтона у випадку двох змінних

$$C(F_1, F_2) = \max \left(\left(F_1^{-\beta} + F_2^{-\beta} - 1 \right)^{\frac{1}{\beta}}, 0 \right), \quad \beta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Одним з природних підходів до побудови багатовимірних копул є побудова спочатку сімейств двовимірних копул з визначеними зручними властивостями. Після того, як це зроблено, наступним кроком є знаходження багатовимірного узагальнення. Сім'я багатовимірних копул є узагальненням сім'ї двовимірних копул якщо:

- всі двовимірні компоненти багатовимірної копули є належать до цієї сім'ї двовимірних;

- всі багатовимірні компоненти з порядком від 3 до $n - 1$ мають таку саму багатовимірну форму.

Проблема знаходження багатовимірних узагальнень двовимірних копул не є тривіальною. Досить часто двовимірні функції зв'язку не мають багатовимірних узагальнень, або вони призводять до такої структури залежності, що є досить обмеженою.

Функцією C^n є послідовне застосування архімедових двовимірних копул, генератором для яких є ϕ . Таким чином $C^2(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$, для $n \geq 3$, $C^n(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(C^{n-1}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), u_n)$. Відзначимо, що така техніка побудови копул зазвичай не приводить до успіху. Але архімедові копули є симетричними та асоціативними, тому побудована таким чином C^n для $n > 3$ часто є копулою.

2.4 Оцінювання параметрів копули

Найпростішим методом є визначення оцінок параметрів копули через оцінки відомих характеристик вибірки. За допомогою оцінки кореляційної матриці можна знайти оцінку параметрів форми еліптичних копул ρ . Корисною також є ще одна міра узгодженості – статистика τ Кендала, що визначається як

$$\hat{\tau} = 2 \frac{C - D}{N(N-1)},$$

де C – кількість узгоджених пар, тобто $(x_i - x_j) \cdot (y_i - y_j) > 0$, D – число неузгоджених пар; N – число спостережень. Оцінкою τ Кендала можна скористатись, наприклад, для оцінювання параметрів копули Клейтона $\hat{\theta} = \frac{2\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}}$

та параметрів еліптичних копул $\rho = \sin \frac{\pi}{2} \hat{t}$. Цей метод приваблює легкістю реалізації, але значно обмежує вибір сімейств копул.

Для оцінювання параметрів копули з будь-якого сімейства може бути застосований метод максимальної правдоподібності. Розглянемо функцію спільного розподілу $H(\vec{x}, \vec{\theta})$, де вектор параметрів складається з параметрів маргінальних розподілів та параметрів копули $\vec{\theta} = (\beta_1, \dots, \beta_n, \vec{\alpha})$; функцію спільного розподілу можна представити у вигляді

$$H(\vec{x}, \vec{\theta}) = C(F_1(x_1, \beta_1), F_2(x_2, \beta_2) \dots F_n(x_n, \beta_n), \vec{\alpha}).$$

Для вибірки $S_x = \{\vec{x}\}$ розміром N функція правдоподібності моделі обчислюється як:

$$\begin{aligned} \ln L(S_x, \beta_1, \dots, \beta_n, \vec{\alpha}) = \\ = \sum_{i=1}^N c(F_1(x_1(i), \beta_1), F_2(x_2(i), \beta_2), \dots, F_n(x_n(i), \beta_n), \vec{\alpha}) + \\ + \sum_{i=1}^N \ln f_1(x_1(i), \beta_1) + \dots + \sum_{i=1}^N \ln f_n(x_n(i), \beta_n). \end{aligned}$$

Такий вигляд дозволяє застосувати двокроковий алгоритм знаходження оцінок параметрів:

$$(\beta_1, \dots, \beta_n, \hat{\vec{\alpha}}) = \arg \max_{\beta_1, \dots, \beta_n, \vec{\alpha}} \ln L(S_x, \beta_1, \dots, \beta_n, \vec{\alpha})$$

На першому кроці знаходимо оцінки параметрів маргінальних розподілів:

$$\beta_j = \arg \max_{\beta_j} \sum_{i=1}^N \ln f_j(x_j(i), \beta_j),$$

а на другому – оцінки параметрів копули:

$$\hat{\vec{\alpha}} = \arg \max_{\vec{\alpha}} \sum_{i=1}^N c(F_1(x_1(i), \beta_1), F_2(x_2(i), \beta_2), \dots, F_n(x_n(i), \beta_n), \vec{\alpha}).$$

У роботі [15] показано, що оцінка $\hat{\theta} = (\beta_1, \dots, \beta_n, \hat{\alpha})$ є несуперечливою та асимптотично нормальною. Перевагами двокрокового алгоритму є зниження вимірності, що полегшує чисельну оптимізацію, а також можливість використовувати додаткову інформацію при оцінці параметрів розподілів окремих ризиків. Також він надає можливість більш повного використання інформації при моделювання ризиків наявні вибірки яких мають різну довжину, що часто зустрічається на практиці при появі нових ризиків чи нових фінансових інструментів.

2.5 Оцінювання міри ризику

На практиці Value-at-Risk (VaR) є найбільш широко використовуваним показником ризику у фінансовій та страховій галузі. Регулятор страхової галузі в країнах Європейського Союзу (ЄС) впроваджує Платоспроможність II, згідно з якою VaR використовується як міра ризику для визначення рівня вимог до капіталу. Загалом VaR можна визначити як максимальну втрату, яку не можна перевищувати протягом певного періоду часу з заданим рівнем довіри.

Лі (2012) інтерпретують VaR зі статистичної точки зору як квантиль розподілу доходів або збитків портфеля. Згодом квантиль використовується для визначення рівня ризику. Базуючись на 95% достовірному рівні, VaR інтерпретується як максимальний збиток, який компанія може отримати за «найкращі» 95 днів із загальних 100 днів. Математично VaR_α втрати X можна записати як

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X) &= \inf \{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1 - \alpha\}, \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\},\end{aligned}$$

де α – рівень довіри $(0,1)$.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 були розглянуті спеціальні функції - копули та методи оцінки параметрів копул, побудова розподілів та багатовимірних розподілів. Досліджена доцільність та практичність їх використання.

Виділені основні практичні методи побудови копул. Були розглянуті основні типи копул. Розглянуто метод оцінювання міри ризику.

3 РОЗРОБКА І ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОЇ СИСТЕМИ

3.1 Архітектура системи підтримки прийняття рішень

Система підтримки прийняття рішень (СППР) – це зручний для роботи, сучасний інструмент для роботи статистичних або експериментальних даних і експертних оцінок з метою залежностей між змінними, побудови математичних моделей досліджуваних процесів, оцінювання прогнозів з ціллю прийняття кращого рішення [16-18].

СППР є кращою, ніж інші інформаційно-аналітичні системи через те, що:

1. СППР має бути спроектована та реалізована використовуючи тіж принципи системного аналізу, на яких ґрунтується методика прийняття рішень особами, що приймають рішення.
2. СППР має мати такий проект, щоб СППР була невід'ємною частиною прийняття рішення.
3. У системі обов'язкова наявність бази знань для збереження чисельних процедур обробки даних, обчислення оцінок параметрів моделей, критеріїв якості моделей, оцінок прогнозів і альтернативних рішень (альтернатив), правил вибору кращих моделей і рішень і т. ін.
4. Інтерфейс СППР має бути як умога більш юзерфрендлі та адаптивним до користувачей, з різним рівнем підготовки.

Архітектура системи підтримки прийняття рішення зображена на рис. 3.1.

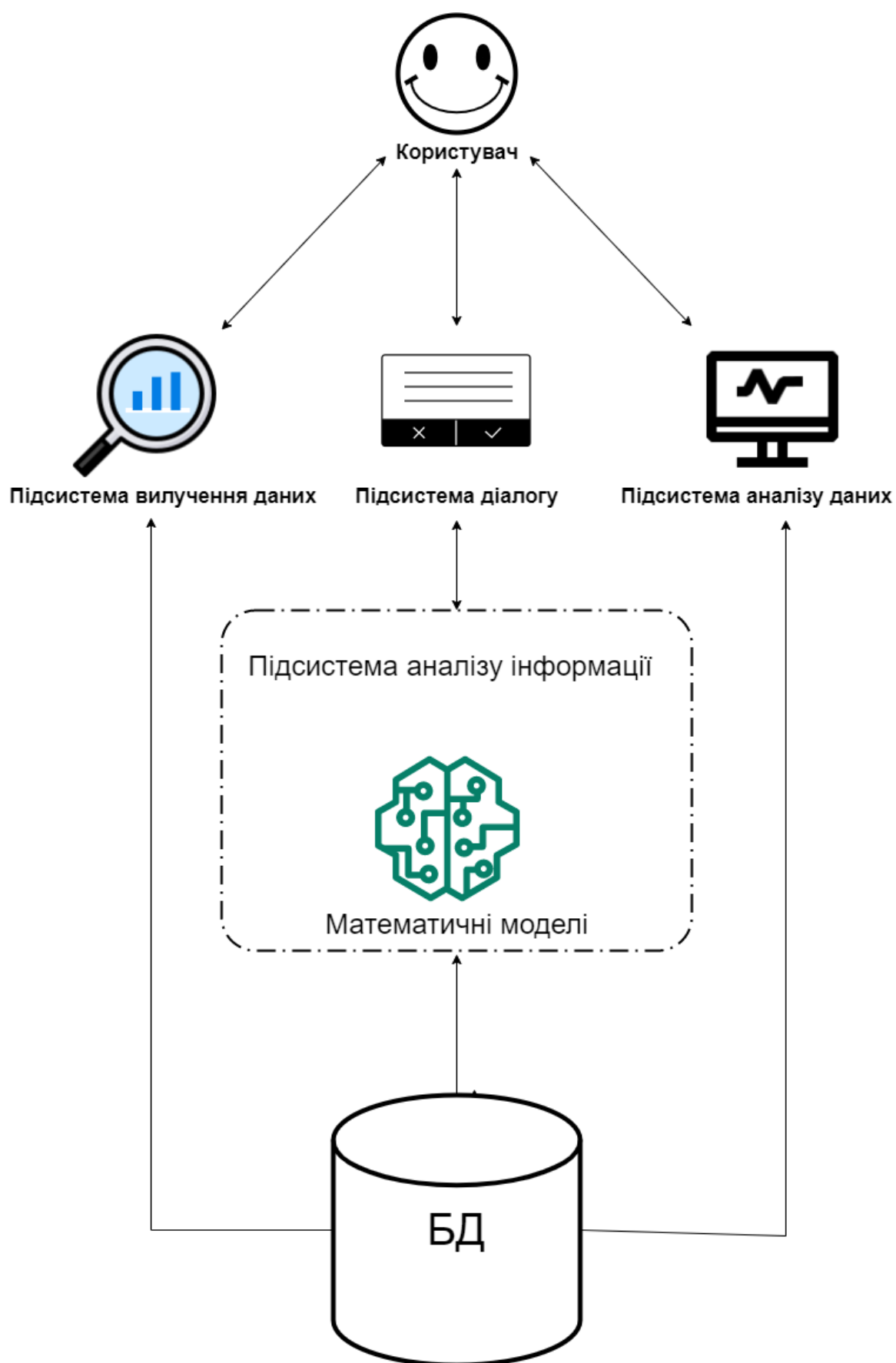


Рисунок 3.1 – Архітектура СПДР

3.2 Вибір інструментальної платформи для реалізації програми.

MATLAB

MATLAB – це платформа програмування, розроблена спеціально для інженерів та вчених для аналізу та проектування систем та продуктів, які перетворюють наш світ. Серцем MATLAB є мова MATLAB, мова на основі матриць, що забезпечує найбільш природний вираз обчислювальної математики.

Переваги MATLAB:

Простота використання

Програму можна використовувати як блокнот для оцінки виразів, введених у командному рядку, або її можна використовувати для виконання великих попередньо написаних програм. Програми можна писати та змінювати за допомогою вбудованого інтегрованого середовища розробки та налагоджувати за допомогою відладчика MATLAB. Оскільки мова настільки проста у використанні, вона оптимальна для швидкого створення прототипів нових програм. Підтримується багато інструментів розробки програм, щоб зробити програму простою у використанні. Вони містять інтегрований редактор/дебагер, онлайн-документацію та посібники, браузер робочої області та численні демонстрації.

Незалежність платформи

MATLAB підтримується різними комп'ютерними системами, забезпечуючи значну ступінь незалежності від платформи. Ця мова доступна для Windows 2000/XP/Vista, Linux, різних версій UNIX і Macintosh. Програми, написані на будь-якій платформі, працюватимуть на всій іншій платформі, а інформаційні файли, написані на будь-якій платформі, можуть читатися на будь-якій іншій платформі. У результаті програми, написані в MATLAB, можуть переходити на нові платформи, коли потреби користувача змінюються.

Попередньо визначені функції

MATLAB поставляється в комплекті з величезною бібліотекою попередньо визначених функцій, яка надає перевірені та готові рішення для багатьох основних технічних завдань. Наприклад, припустимо, що ми пишемо програму, яка повинна оцінити статистику, пов'язану з набором вхідних даних. У більшості мов нам потрібно було б написати наші підпрограми або функції для реалізації таких обчислень, як середнє арифметичне, стандартне відхилення, медіана тощо. Ці та сотні інших служб вбудовано в мову MATLAB, що робить вашу роботу набагато зручнішою. На додаток до величезних бібліотек сервісів, вбудованих у базову мову MATLAB, існує багато спеціальних наборів інструментів, які використовуються для вирішення складних проблем у певних областях. Наприклад, користувач може придбати стандартні набори інструментів для вирішення проблем із обробкою сигналів, системами керування, зв'язком, обробкою зображень, нейронними мережами тощо. Існує також широка копіляція безкоштовних програм MATLAB, створених користувачами, які доступні на веб-сайті MATLAB.

Прикладно-незалежне малювання

MATLAB має багато базових команд для малювання та зображення. Графіки та малюнки можуть бути відображені на будь-якому графічному пристрої виведення, наданому комп'ютером, на якому запущено MATLAB. Ця можливість робить MATLAB видатним інструментом для візуалізації технічної інформації.

Графічний інтерфейс користувача

MATLAB містить інструмент, який дозволяє програмісту інтерактивно проектувати графічний інтерфейс користувача (GUI) для своєї програми. Завдяки цій можливості програміст може розробляти вдосконалені програми аналізу даних, якими можуть керувати відносно недосвідчені користувачі.

Компілятор MATLAB

Адаптивність і незалежність MATLAB від платформи досягаються шляхом компіляції додатків MATLAB у машинно-незалежний р-код і подальшої інтерпретації інструкції р-коду під час виконання. Цей метод еквівалентний тому, який використовується мовою Microsoft Visual Basic. На жаль, отримані програми іноді можуть виконуватися повільно, оскільки код MATLAB інтерпретується, а не компілюється. Доступний окремий компілятор MATLAB. Цей компілятор може компілювати програми MATLAB у реальний виконуваний файл, який працює швидше, ніж інтерпретований код. Це чудова техніка для перетворення прототипу програми MATLAB у виконуваний файл, придатний для продажу та розповсюдження серед користувачів.

3.4 Інтерфейс СППР

На рисунку 3.2 зображений початковий інтерфейс.



Рисунок 3.2 – Початковий інтерфейс

Далі за допомогою кнопки Upload data завантажуються дані.

За допомогою кнопок Gumbel copula, Normal copula, Frank copula виводяться графічні зображення відповідних спільних розподілів. На рисунку 3.3 зображено приклад використання.

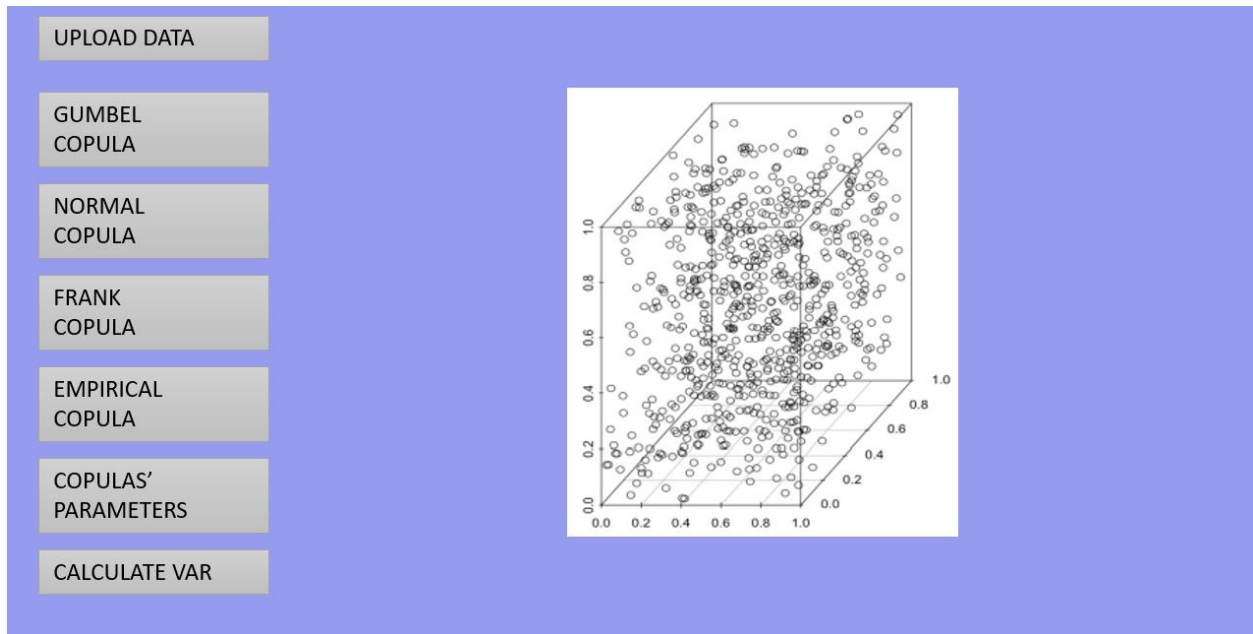


Рисунок 3.3 – Інтерфейс при використанні кнопки Gumbel copula

3.4 Побудова моделей

Для оцінювання можливих втрат при виконанні валютних операцій часто застосовують відому модель VaR (Value-at-Risk). Ця модель використана для аналізу обмінних курсів HRK, PLN, CZK відносно EUR. Для оцінювання параметрів моделі взяті щоденні курси з 04.2003 по 01.2008, що дало вибірку розміром 1598 спостереження.

Спочатку були підраховані розподіли перевищень для чотирьох валют.

Розподіл перевищень для HRK:

$$GPD_{HRK}(x) = 1 - (1 - 0.0012x)^{5.2509}$$

Для PLN:

$$GPD_{PLN}(x) = 1 - (1 + 1.2365x)^{-0.9903}$$

CZK:

$$GPD_{CZK}(x) = 1 - (1 - 0.0345x)^{4.0059}$$

Розподіли перевищень збігаються до Пуасонівського процесу.

Далі були змодельовано функції спільного розподілу (Рис. 3.4 –3.7).

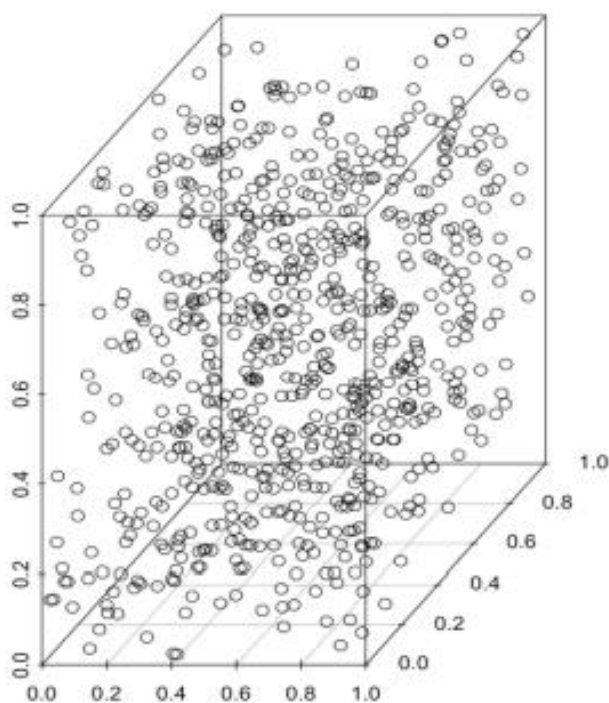


Рисунок 3.4 – Спільний розподіл на основі копули Гумбела

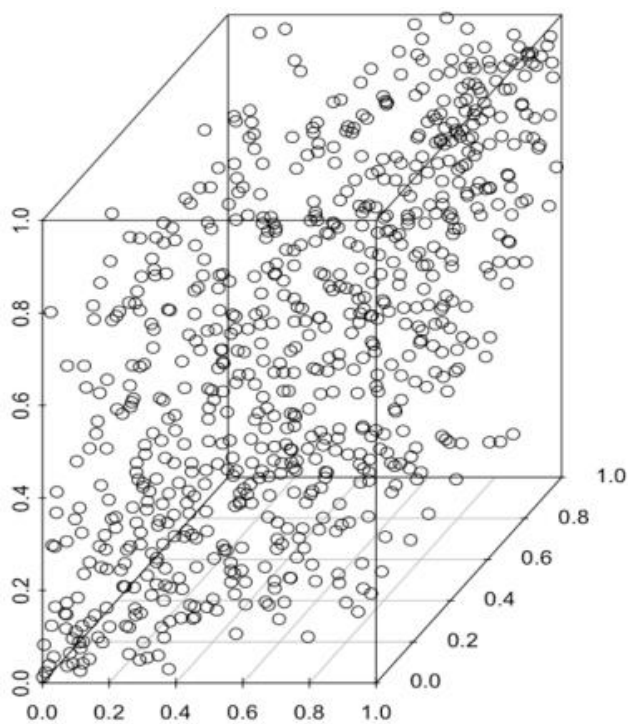


Рисунок 3.5 – Спільний розподіл на основі нормальної копули

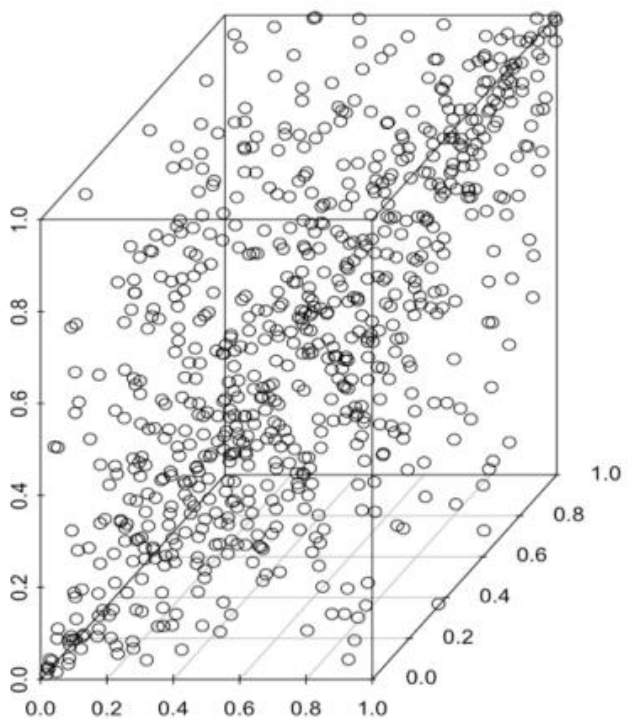


Рисунок 3.6 – Спільний розподіл на основі копули Франка

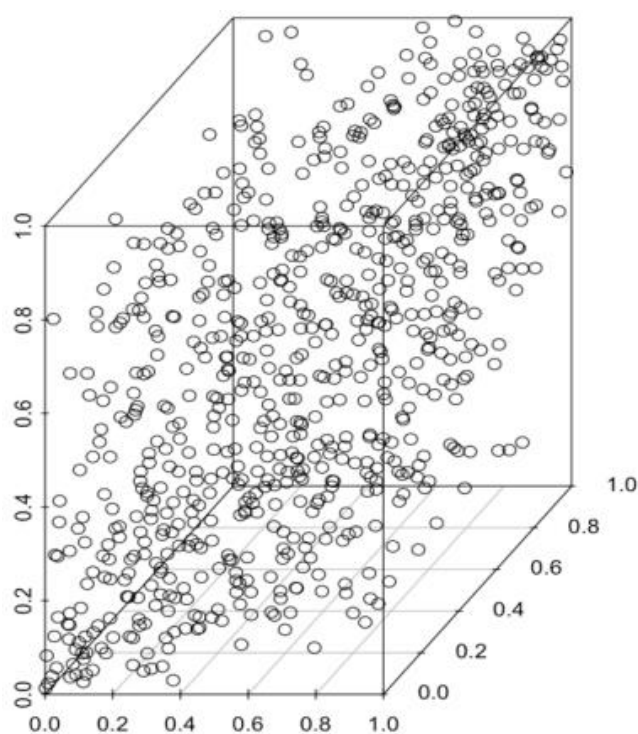


Рисунок 3.7 – Емпіричний спільний розподіл курсів валют

В таблиці 3.1 наведені результати оцінювання параметрів копул.

Таблиця 3.1 – Результати оцінювання параметрів копул

Копула	Параметр	Значення	Середньоквадр. похибка
Гумбела	θ	1.8736	0.0155
Нормальна	ρ_1	0.6617	0.0119
	ρ_2	0.3541	0.0138
	ρ_3	0.6038	0.0117
	ρ_4	0.8313	0.0055
	ρ_5	0.8672	0.0052
	ρ_6	0.8078	0.006
Франка	β	4.8546	0.0923

В таблиці 3.2 наведені результати оцінювання ризику.

Таблиця 3.2 – Результати оцінювання міри ризику

Копула	Квантиль	Значення
Гумбела	0,03	3,5752
	0,01	3,6479
Нормальна	0,03	3,6475
	0,01	3,7733
Франка	0,03	3,5662
	0,01	3,6548

Емпірична оцінка міри ризику VaR для квантиля 0,05, тобто для 47 спостережень, що перевищують поріг, дорівнює 3,2412; для квантиля 0,01, відповідно для 15 спостережень, що перевищують поріг, оцінка міри ризику складає 3,7045. Наявних спостережень для квантиля 0,03 достатньо для отримання можливості використання цієї емпіричної оцінки на практиці, а для квантиля 0,01 вибірка є замалою.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 була проведена розробка і застосування програмного продукту. Використані і проаналізовані в роботі статистичні дані.

Розроблена і описана СППР, яка може виконувати такі функції:

- завантаження та обробка даних через веб-інтерфейс;
- моделювання сумісних розподілів;
- оцінювання міри ризику.

Був проведений огляд програмного забезпечення та приведені результати.

4 РОЗРОБКА СТАРТАП-ПРОЕКТУ

Щодня у світі з'являються десятки тисяч ідей, багато з яких згодом перетворюються у стартап-проекти. Лише ідеї та мінімального робочого продукту може бути вдосталь, щоб почати заповняти повністю нову нішу або «блакитний океан». Тим не менш, таких вільних ніш у світі залишилося дуже мало. Крім того, успішними стає мізерна частина стартапів, а тому для досягнення успіху лише ідеї – замало. Щоб продукт зміг вистрілити та вистояти на ринку, то він має бути достатньо сучасним та технологічним, вирішувати актуальну проблему та надавати користувачам додану цінність.

Це значить, що для створення робочого та успішного продукту, необхідно дати кінцевому користувачу зручний та оригінальний продукт, який на ринку більше ніхто не пропонує або пропонує, але в гіршій якості. Для того, щоб успішно презентувати свій продукт світу та заявити про себе на ринку, варто виконати маркетинговий аналіз, організувати сам стартап-проект, зробити фінансово-економічний аналіз та розробити заходи для комерціалізації продукту.

4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок

Розглянемо детальніше кожен етап дослідження конкурентів, створення продукту та виведення його на ринок. Першим кроком являється проведення маркетингового аналізу. У першу чергу, необхідно провести конкурентний аналіз, щоб зрозуміти, якими методами вирішення проблем вже користуються люди. Також необхідно сформулювати ідею самого проекту та зрозуміти цільову аудиторію. У рамках даного етапу також важливо зрозуміти, яку додану цінність дає продукт та який портрет ідеального кінцевого користувача. На

основі вищеописаної бази знань, створюється комунікаційна та маркетинг стратегія виходу продукту на ринок.

Наступним кроком являється організація самого стартапу. На цьому етапі має бути складений весь план та побудований таймлайн розробки та запуску продукту. Далі планується обсяг виробництва та оцінюється потенційний обсяг ресурсу, який буде потрібен для виконання плану. Маючи таку базу знань, обраховуємо вже необхідні витрати та хмарні сховища.

Одним із найважливіших етапів продукту являється правильно виконаний фінансово-економічний аналіз. При цьому має бути оцінений обсяг різних інвестиційних втрат, а також мають бути обраховані ризики проекту та продумані сценарії їх запобігання. Для цього необхідно обрахувати різні фінансові показники продукту, як собівартість вироблення, ціна збуту продукту, податковий збір, операційні витрати, маркетингові витрати, податкові збори, чистий прибуток тощо. На основі такої бази знань можна вже обрахувати період окупації проекту та зробити прогнози по збуту товару, що дає можливість оцінити інвестиційну привабливість продукту.

Останній у цій ланці, та не менш важливий крок, являється розробка заходів з комерціалізації продукту. Цей крок являється важливим для масштабування та збільшення розмірів продукту. Для того, щоб залучити інвесторів та знайти різні способи фінансування проекту, спочатку необхідно провести дослідження на предмет інтересів потенційних інвесторів та бізнесів. На основі цього має бути складена інвестиційна пропозиція, яка включає в себе як опис самого продукту та його теперішні розміри, так і можливі шляхи розширення та розвитку. Кінцево необхідно обрати те, через які канали буде вестися комунікація із потенційно зацікавленими персонами. Далі наведемо результати виконання кожного з кроків.

4.2 Опис ідеї стартап-проекту

Стартап-проект полягає у вирішенні проблеми моделювання багатовимірного розподілу за допомогою копул, який описує залежність ризиків та обчислення міри ризику. Це проблема, яку хочуть вирішити всі учасники та яка досі не втрачає своєї актуальності. Суть продукту полягає у тому, що він обробляє масиви історичних даних. На основі всіх вхідних даних, система навчається та будує власні моделі.

У таблиці 4.1 наведені основні характеристики продукту.

Таблиця 4.1 – Інформаційна карта стартап-проекту

Назва проекту	Система моделювання ризиків за допомогою копул
Автори проекту	Шепель Ірина Олександрівна
Коротка анотація	Проект спрямований на обробку історичних даних для моделювання залежності ризиків та оцінювання міри ризику та допомогу користувачу прийняти рішення.
Термін реалізації проекту	5 місяців

Продовження таблиці 4.1

Необхідні ресурси	Приміщення з комп'ютерами, доступом до Інтернету, електрики Програмне забезпечення, хмарне сховище, антивірусні програми Фінансові кошти на оплату заробітної плати виконавцям на термін 5 місяців Фінансові кошти на операційні витрати, як оренда приміщення, комунальні послуги тощо
Опис проблеми, яку вирішує проект	Система дає змогу комплексно обробити велику кількість даних, яка включає в себе як доступну інформацію про певні компанії, так і про весь ринок та про зовнішні впливи. Система не управляє фінансами користувача, а допомагає йому прийняти рішення
Головні цілі та завдання проекту	Метою проекту є створення системи, яка буде будувати ефективніші моделі, ніж люди, та кращі, ніж його конкуренти
Очікувані результати	Автономна система прийняття рішень, доступна для будь-якої кількості кінцевих користувачів, яка може сама донавчатися та розвивати свої моделі

4.3 Технологічний аудит ідеї проекту

На цьому етапі опишемо детальніше ідею стартапу, а також проведемо конкурентний аналіз. Після цього оцінимо технологічну здійсненність проекту. Розпочнемо із того, що розберемо ідею стартап-проекту у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Опис ідеї стартапу

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Основна ідея полягає у створенні системи, що оброблює історичні дані для моделювання залежності ризиків та оцінювання міри ризику та допомогу користувачу прийняти рішення.	Опрацювання усіх історичних даних (проведення фундаментального аналізу)	Користувач з допомогою системи буде знати та тримати на контролі усі відомі дані
	Врахування зовнішніх чинників та подій, які можуть потенційно впливати на ціни акцій (проведення технічного аналізу)	Система допоможе користувачу зрозуміти, які події з якою силою впливають на формування цін на акції, та на основі цього приймати рішення щодо дій на фондовому ринку

Наступним кроком необхідно провести порівняльний аналіз конкурентів (таблиця 4.3). При цьому, важливо визначити сильні і слабкі сторони існуючих

методів вирішення проблем, після чого можна буде визначити додану цінність проекту.

Таблиця 4.3 – Порівняльний аналіз конкурентів проекту

№ п/ п	Технікоеконімічні характеристики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів				W	N	S
		Власний проект	Trade ideas	Seeking Alpha	Atom Finance			
1	Точність прогнозу	Надає кращий результат із списку реалізованих	Свій власний алгоритм	Свій власний алгоритм	Свій власний алгоритм			+
2	Користувачський інтерфейс	У вигляді нескладного API з ключами доступу	Мають власний інтерфейс	Мають власний інтерфейс	Мають власний непростий інтерфейс		+	
3	Ризики невірності прогнозу	Залежать від кількості вхідних даних та обраних дат	Невідомі через комерційну таємницю	Невідомі через комерційну таємницю	Невідомі через комерційну таємницю	+		

Продовження таблиці 4.3

4	Управління капіталом	Відсутнє, задля зменшення ризиків	Існує, нескладна процедура	Існує, доволі складна процедура	Існує, нескладна процедура		+	
---	----------------------	-----------------------------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------------	--	---	--

Далі аналізуємо реальність технічно здійснити ідею проекту (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Технологічна здійсненність продукту

№ п/п	Ідея проекту	Технології реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Основна ідея полягає у створенні системи, що оброблює історичні дані для моделювання залежності ризиків та оцінювання міри ризику та допомогу користувачу прийняти рішення.	Використання мови програмування Python	Наявні	Доступні
2		Використання мови програмування JavaScript	Не наявні, необхідні допрацювання	Доступні
3		Використання мови програмування R	Наявні, необхідні допрацювання	Доступні
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: R				

4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Проведемо попередній аналіз ринку для запуску стартап-проекту та наведемо у таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ п/п	Показники ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	2
2	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	5000
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Позитивна, зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Відсутні
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Відсутні
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	13%

Наступним кроком – проведемо характеристику потенційних клієнтів, які можуть бути зацікавлені в проекті та наведемо результати у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Довгострокове інвестування	Гравці фондового ринку	Цікавлять комплексні прогнози на довгий термін	Комплексний опис кожного етапу прогнозування
2	Короткострокові інвестування	Громадяни країн	Цікавлять прогнози на короткі терміни	Простота у використанні
3	Прогнозування та контроль ціноутворення акцій самим підприємством	Малі та великі підприємства, що вийшли на IPO	Цікавлять прогнози на різні періоди часу, а також ризику та їх вплив на акції	Можливість працювати з великою кількістю даних (своєї та чужих компаній)

Тепер для вибудови стратегії виходу на ринок, необхідно обрахувати важливі фактори загроз (таблиця 4.7) та можливостей (таблиця 4.8). Необхідно проаналізувати загрози, щоб зрозуміти можливі перешкоди при запуску продукт на ринок. Фактори можливостей же треба обрахувати, щоб знати усі сприятливі умови та по можливості ними скористатися.

Таблиця 4.7 – Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Ринок вже давно являється рожевим океаном, а тому є конкуренція як існуючих, так і нових компаній	Знайти точки додаткової цінності для користувача
2	Ресурси та обсяги хмарних сховищ	Необхідно правильно спланувати ресурси, щоб бути готовими до різних об'ємів навантаження	Орендувати додаткові ресурси та сховища та активувати їх за необхідності
3	Ціна збуту	Конкуренти можуть коштувати менше через нижчу якість	Акцентувати увагу на якості та продумати комунікаційну стратегію

Таблиця 4.8 – Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Проста масштабованість	Моделі можуть легко адаптуватися під різні компанії та різні зовнішні впливи	Створити максимальний список можливих розширень, щоб запропонувати користувачам великий асортимент

Продовження таблиці 4.8

2	Низький поріг входу	Мати максимально низький поріг входу для користувача, щоб продукт був доступним для будь-якого користувача, навіть без досвіду в інвестуванні	Створити зручний та простий користувацький інтерфейс та відповідні інструкції до нього
3	Зрозуміла зовнішня комунікація	Комунікувати із користувачами через чітко окреслені способи вирішення їх проблем, без перебільшень та зайвих обіцянок	Визначити чітко цільову аудиторію та відповідні посили для них
4	Якість та гарантії	Надавати найбільш якісні послуги та сервіси	Пропонувати моделі з найкращими результатами, а також надавати усю необхідну технічну підтримку

Далі розглянемо питання конкуренції, а саме визначимо її тип та рівень.

Результати аналізу наведемо у таблиці 4.9.

Таблиця 4.9 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	У чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Вказати тип конкуренції: досконала конкуренція	Представлено багато продуктів та експертів	Зробити максимальну кількість різних видів доданої вартості
2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнародний	Представлені проекти, розроблені та доступні у різних країнах	Розширити цільову аудиторію, зробити мультимовність, додати компанії різних країн світу
3. За галузевою ознакою: внутрішньогалузева	Можуть працювати з різними галузями	Покращити масштабованість та персоналізації
4. Конкуренція за видами товарів: товарно-родова	Конкуренція з прогнозами інших систем та експертів	Розширити кількість доступних функцій
5. За характером конкурентних переваг: нецінова	Різні компанії пропонують різну точність	Розробляти точніші та покращувати існуючі алгоритми

Продовження таблиці 4.9

6. За інтенсивністю: марочна	Вже представлені і з сильними компаніями брендом	Предметно створити комунікаційну стратегію для вибудови свого бренду
------------------------------	--	--

Далі необхідно виконаємо аналіз конкуренції за моделлю 5 сил конкуренції Майкла Портера, результати якого зведено у таблиці 4.10.

Таблиця 4.10 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

Складові аналізу	Прямі конкуренти у галузі	Потенційні конкуренти	Постачальники	Клієнти	Товарозамінники
	Інші існуючі СППР та експерти	Якість, формування цін, капіталовкладення	Витрати постачальників, диференціація витрат	Контроль якості, порівняння цін, система інформації	Сила бренду, якість, ціна, масштаби
Висновки	Конкуренція з великою інтенсивністю, а також підігрітий ринок	Можливості входження на ринок, нові потенційні конкуренти	Постачальники не мають прямий вплив на ринок	Клієнти не впливають на умови роботи на ринку	Обмеження для роботи на ринку через товарозамінники

Маючи результати аналізу конкуренції (таблиця 4.10), характеристики ідеї стартап-проекту (таблиця 4.5), характеристики потенційних клієнтів і їх

вимоги до продукту (таблиця 4.6) та фактори ринкового середовища (таблиці 4.7 і 4.8) було сформульовано та обґрунтовано перелік факторів конкурентоспроможності (таблиця 4.11).

Таблиця 4.11 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Якість прогнозів	Система будує якісні прогнози з урахуванням як історії змін самих акцій, так і різні зовнішні чинники
2	Масштабованість та гнучкість	Система може легко пристосуватися до побажань клієнтів щодо методів, списку компаній, зовнішніх подій тощо
3	Низький поріг входу	Система не вимагає ґрунтовних знань в області фондових ринків для початку взаємодії з нею
4	Сервіс та обслуговування	Технічна підтримка завжди готова допомогти клієнтам вирішити будь-які їх питання та проблеми

Тепер можна провести аналіз сильних та слабких сторін продукту (таблиця 4.12).

Таблиця 4.12 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін системи

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів						
			-3	-2	-1	0	1	2	3
1	Якість прогнозів	20					+		
2	Масштабованість та гнучкість	16				+			
3	Низький поріг входу	10		+					
4	Сервіс та обслуговування	10		+					

Далі проведемо SWOT-аналіз продукту (таблиця 4.13).

Таблиця 4.13 – SWOT-аналіз стартап-проекту

Сильні сторони Якість прогнозів Масштабованість та гнучкість Низький поріг входу Сервіс та обслуговування	Слабкі сторони Відсутність сильного бренду Не сформована база клієнтів Не підключені альтернативні канали маркетингу
Можливості Мультимовність Партнерства з компаніями Покращення системи	Загрози Нові системи та експерти Зміни умов участі у фондових ринках

Дякуючи проведенню SWOT-аналізу, ми змогли визначити сильні та слабкі сторони, можливості та загрози, пов'язані з конкуренцією та плануванням стартап-проекту. Далі спроектуємо альтернативну ринкову поведінку для інтеграції стартап-проекту на ринок та приблизний час реалізації системного комплексу, з урахуванням потенційних проектів, що можуть бути виведені на ринок (таблиця 4.14).

Таблиця 4.14 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Вихід на ринок без мультимовності	70%	4,5 місяці
2	Створення маркетинг стратегії без узгодженої комунікаційної стратегії	20%	4 місяці
3	Презентація продукту з меншою кількістю готових моделей	60%	2 місяці

Отже, був проведений детальний аналіз ринку та продукту. Зокрема, по результатах проведеного конкурентного аналізу, визначених факторів ринку та його сприятливості, описання ідеї та характеристик стартап-проекту, можемо зробити висновок, що існують достатньо сприятливі умови для виходу продукту на ринок.

4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту

Для розробки ринкової стратегії продукту, у першу чергу, необхідно проаналізувати цільову аудиторію проекту (таблиця 4.15).

Таблиця 4.15 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит у межах цільової групи (сегменту)	Інтенсивність конкуренції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Гравці фондового ринку	Висока	15%	Висока	Середня
2	Громадяни країн	Середня	5%	Низька	Висока
3	Малі та великі підприємства, що вийшли на IPO	Низька	20%	Середня	Середня
Які цільові групи обрано: 1, 2					

Маючи аналіз цільових груп, визначимо базову стратегію розвитку продукту (таблиця 4.16).

Таблиця 4.16 – Визначення базової стратегії розвитку

№ п/п	Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспромо жні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку*
1	1 та 2	Диференційованого маркетингу	Масштабування та персоналізація	Оптимальних витрат

Для роботи в обраних сегментах ринку сформовано базову стратегію розвитку (таблиці 4.17, 4.18).

Таблиця 4.17 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

Чи є проект «першопрохідцем » на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки*
Ні	Так	Ні	Виклику лідера

Таблиця 4.18 – Визначення стратегії позиціонування

Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспроможні позиції власного стартап-проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
Висока точність прогнозу Простота у використанні Масштабованість	Оптимальних витрат	Якість прогнозів Масштабованість та гнучкість Низький поріг входу Сервіс та обслуговування	Найбільш якісні прогнози на фондових ринках Система, яка легко масштабується та розширюється Система за доступною ціною пропозицією

4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Після проведеного комплексного аналізу, вже з'явилася можливість повноцінно сформулювати ключові переваги концепції потенційного товару (таблиця 4.19) та побудувати концепцію маркетингових комунікацій (таблиця 4.20)

Таблиця 4.19 – Ключові переваги концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Якісні короткострокові прогнози	Побудова прогнозів на основі відкритих даних та зовнішніх впливів	Постійне покращення та навчання моделей, які зможуть враховувати максимальну кількість даних
2	Довгострокові прогнози із детальним описом метрик та параметрів	Опис базових статистик та моделей із можливістю розширення списку	Опис має бути чіткий та зрозумілий у різних доступних форматах, зручних для користувачів
3	Проста масштабованість	Прогноз для найбільш відомих компаній із відкритими даними із можливістю розширення списку	Можливість легко додати у список компаній будь-яку компанію, завантажити або знайти у відкритих джерелах її історію та додати бажані дати подій

Таблиця 4.20 – Концепція маркетингових комунікацій

№ п/п	Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення	Концепція рекламного звернення
1	Пошук спеціалізованих систем з додатковими функціями	Професійні канали комунікації, спільноти та професійна література	Точність Якість Зовнішні та внутрішні чинники	Виокремитися на фоні конкурентів та підсвітити свої сильні сторони	Реклама у професійних учасників ринку Таргетована реклама на цільову аудиторію
2	Пошук доступного та дешевого продукту	Інтернет, форуми, реклами від інфлюенсерів	Простота Дешева ціна	Вселити довіру у бренд та продукт	Реклама у лідерів думок Вивіски в публічних місцях Таргетована реклама на цільову аудиторію

Висновки до розділу 4

Даний розділ було присвячено початковому етапу розробки стратегій виходу на ринок та маркетинг-стратегії. Для цього була сформована інформаційна картка проекту, описана його ідея та визначена його технологічна здійсненність. Далі був проведений змістовний аналіз конкурентів на предмет їх пропозицій та переваг.

Після проведених процесів, були опрацьовані ринкові можливості запуску стартап-проекту. Для цього був ґрунтовно досліджений ринок та потенційну цільову аудиторію, визначені фактори загроз та можливостей, а також проведений конкурентний аналіз у розрізі чітко визначених ніш на ринку, після чого був проведений SWOT-аналіз продукту.

Наступним кроком було формування стратегій проекту, а саме ринкової та маркетингової. У рамках цього були обрані базові стратегії виходу на ринок для залучення необхідної цільової аудиторії. Далі було сформоване позиціонування продукту, після якого вдалося сформулювати концепт маркетингових активностей та посилів.

ВИСНОВКИ

В даній магістерській дисертації було реалізовано систему підтримки прийняття рішення для моделювання залежності ризиків та оцінювання міри ризику за допомогою копул. У роботі ми розглянули поняття ризику та копули. Розглянули які бувають види ризиків. Розглянули поняття копули, методи оцінки параметрів копули та побудови багатовимірного розподілу, спосіб використання для моделювання залежності курсів валют.

Показано актуальність та перспективність розробки такої системи, на основі чого сформульовано постановку задачі дипломної роботи та виділено етапи її розв'язку.

Запропоновано метод побудови комбінованих маргінальних розподілів, який дозволяє враховувати важкі хвости одновимірних розподілів ризиків. Маргінальні розподіли поєднані у спільні розподіли ризиків через структуру залежності, що характеризується копулами.

У роботі були розглянуті практичні методи для моделювання залежності ризиків за допомогою копул. Виконано аналіз можливості застосування класу спеціальних функцій – копул до опису багатовимірних розподілів у задачах менеджменту ризиків.

На основі аналізу методів побудови сімейств копул запропоновано використовувати для моделювання ризиків кілька сімейств копул із корисними для менеджменту ризиків властивостями. Був проведений збір необхідних для моделювання даних.

Застосований методу максимальної правдоподібності до оцінювання параметрів функції розподілу з їх подальшим використанням для оцінювання міри ризику.

Проведена розробка і застосування системи підтримки прийняття рішення. Використані і проаналізовані в роботі зібрані статистичні дані.

Розроблена і описана СППР, яка може виконувати такі функції:

- завантаження та обробка даних через веб-інтерфейс;
- моделювання сумісних розподілів;
- оцінювання міри ризику.

Був проведений огляд програмного забезпечення з точки зору функціональності.

Проведений збір необхідних для роботи прогнозу даних.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Nelsen R. B. An introduction to copulas. 2nd ed. New York, NY : Springer, 2004. 269 p.
2. Patton A. J. Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence using the Conditional Copula. SSRN Electronic Journal. 2001. URL: <https://doi.org/10.2139/ssrn.275591> (date of access: 10.12.2022).
3. Ane T., Ureche-Rangau L., Labidi-Makni C. Time-varying conditional dependence in Chinese stock markets. Applied Financial Economics. 2008. Vol. 18, no. 11. P. 895–916. URL: <https://doi.org/10.1080/09603100701259772> (date of access: 10.12.2022).
4. Jondeau E., Rockinger M. The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application. Journal of International Money and Finance. 2006. Vol. 25, no. 5. P. 827–853. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2006.04.007> (date of access: 10.12.2022).
5. Liu, W. Currencies Portfolio Return: A Copula Methodology. Department of Economics, University of Toronto, Toronto, 2006. 55 p.
6. Romano, C. Calibrating and simulating copula functions: An application to the Italian stock market. Working Paper of CIDEM, Universit Degli Studi di Roma 12. 40 p.
7. van den Goorbergh R. W. J., Genest C., Werker B. J. M. Bivariate option pricing using dynamic copula models. Insurance: Mathematics and Economics. 2005. Vol. 37, no. 1. P. 101–114. URL: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.01.008> (date of access: 10.12.2022).
8. Embrechts P., McNeil A. J., Straumann D. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. Risk Management. 2002. C. 176–223.
9. Frees E. W., Valdez E. A. Understanding Relationships Using Copulas. North American Actuarial Journal. 1998. T. 2, № 1. C. 1–25.

10. Bouchaud J.-P. Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management. 2-ге вид. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. 379 с..
11. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2007. 310 с.
12. Extreme Value Theory and Applications, Vol. 3 International conference NIST, 1993, 2-7 May. – Gaithersburg, 1993. – 230 с.
13. Extreme Value Theory and Applications, Vol. 3 International conference NIST, 1993, 2-7 May. – Gaithersburg, 1993. – 230 p.
14. Bassi F., Embrechts P., Kafetzaki M. Risk management and quantile estimation: A Practical Guide to Heavy Tails; Ed. R.J. Adler. - Boston: Birkhauser, 1998. - P. 111-130.
15. Embrechts P. Extremes in Economics and the Economics of Extremes: Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment; Eds. B. Finkenstadt, H. Rootzen. – London: Chapman and Hall, CRC, 2001. – P. 169-183.
16. Embrechts P., Haan L. de, Huang X. Modelling multivariate extremes. Extremes and Integrated Risk Management; Ed. P. Embrechts. – London: RISK Books, 2000. – P. 59-67.
17. Bouye E. Multivariate extremes at work for portfolio risk measurement. Finance. – 23, No.2. – Paris: Presses universitaires de France, 2002. – P. 125-144.
18. Rootzen H. Tajvidi N. The multivariate generalized Pareto distribution. Bernoulli. - 12. – 2006. – P. 917-930.
19. Бідюк П.І., Кроптя А.В. Аналіз і методи розв'язання задачі оцінювання екстремальних значень : Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2005. – No.4. – С. 34-47.
20. Blum P., Dias A., Embrechts P. The ART of dependence modelling: the latest advances in correlation analysis: Alternative Risk Strategies. – London: RISK Books, 2002 – P. 339-356.

21. Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D. Correlation: Pitfalls and alternatives Risk. – 12. – 1999. – P. 69–71.
22. Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D. Correlation and dependence in risk management. Risk Management: Value at Risk and Beyond; Ed. M.A.H. Dempster. - Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – P. 176-223.
23. Frees, Edward W., Valdez E. Understanding relationships using copulas North American Actuarial Journal. – 1998. – 2, N 1. – P. 1-25.
24. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006. – 270 p.
25. Newey W.K., McFadden D. Large Sample Estimation and Hypothesis Testing. Handbook of Econometrics. – 4. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1994 – P. 2111-2245.

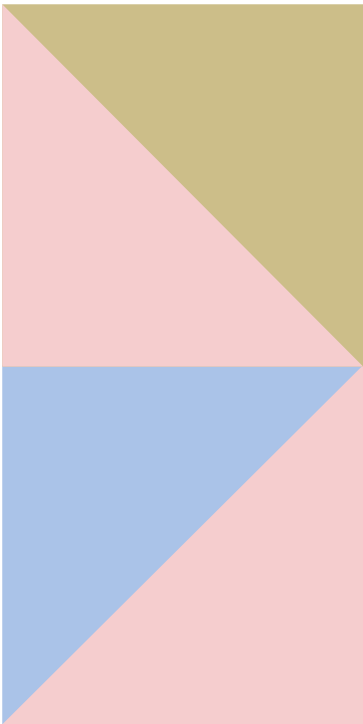
ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДІ



МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ФАКТОРІВ РИЗИКУ ЗА ДОПОМОГОЮ КОПУЛ

Шепель Ірина Олександрівна
д.т.н., проф. Бідюк Петро Іванович

2



Об'єктом дослідження є ризики у складних фінансових та економічних системах.

Предмет дослідження – математичні методи аналізу, моделювання і оцінювання характеристик ризиків.

Метою роботи є розробка та використання статистично-ймовірностних багатовимірних моделей ризиків, що виникають у складних фінансово-економічних системах, спрямованої на зменшення можливих втрат внаслідок виникнення ризикових ситуацій завдяки підвищенню якості математичного опису ризиків.

Ризик – це випадкова подія, яка характеризується двома невід’ємними величинами – рівнем випадкових виплат або втрат та ймовірністю цієї події.



Функція розподілу перевищень

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u), x + u \leq x_F$$

Узагальнений розподіл Парето (перевищень)

$$GPD_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

Теорема Склера

Нехай H – n -вимірна функція спільного розподілу з маргінальними розподілами $F_1, \dots, F_n$.

Тоді існує така n -копула $\mathcal{C}$, що

$$H(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{C}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ для всіх } \vec{x} \in R^n.$$

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Для оцінювання можливих втрат при виконанні валютних операцій часто застосовують відому модель VaR (Value-at-Risk). Ця модель використана для аналізу обмінних курсів HRK, PLN, CZK відносно EUR. Для оцінювання параметрів моделі взяті щоденні курси з 04.2003 по 01.2008, що дало вибірку розміром 1598 спостереження.

БАГАТОВИМІРНІ РОЗПОДІЛИ

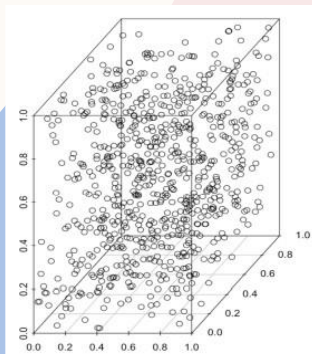


Рис. 1. Спільний розподіл на основі копули Гумбела

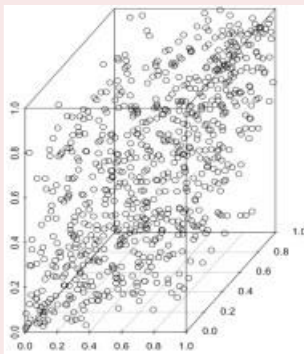


Рис. 2. Спільний розподіл на основі нормальної копули

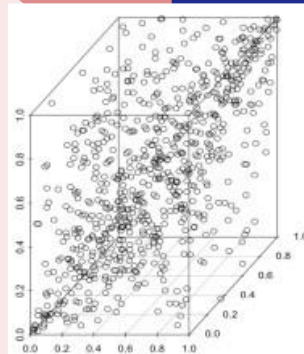


Рис. 3. Спільний розподіл на основі копули Франка

РЕЗУЛЬТАТИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ КОПУЛ

6

Копула	Параметр	Значення	Середньоквадр. похибка
Гумбела	θ	1.8736	0.0155
Нормальна	ρ_1	0.6617	0.0119
	ρ_2	0.3541	0.0138
	ρ_3	0.6038	0.0117
	ρ_4	0.8313	0.0055
	ρ_5	0.8672	0.0052
	ρ_6	0.8078	0.006
Франка	β	4.8546	0.0923

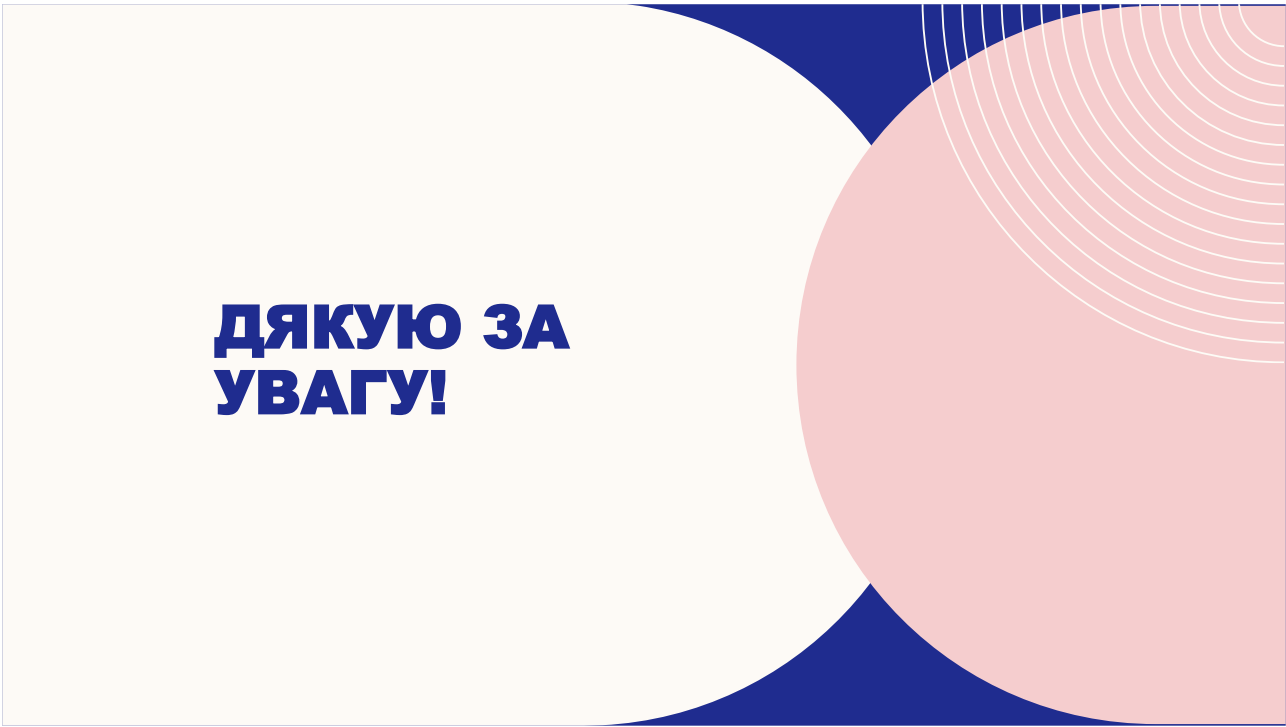
ОЦІНКИ МІР РИЗИКУ

Копула	Квантиль	Значення
Гумбела	0,03	3,5752
	0,01	3,6479
Нормальна	0,03	3,6475
	0,01	3,7733
Франка	0,03	3,5662
	0,01	3,6548

Емпірична оцінка міри ризику VaR для квантиля 0,03, тобто для 47 спостережень, що перевищують поріг, дорівнює 3,2412; для квантиля 0,01, відповідно для 15 спостережень, що перевищують поріг, оцінка міри ризику складає 3,7045. Наявних спостережень для квантиля 0,03 достатньо для отримання можливості використання цієї емпіричної оцінки на практиці, а для квантиля 0,01 вибірка є замалою.

ВИСНОВКИ

- Виконано аналіз можливості застосування класу спеціальних функцій – копул до опису багатовимірних розподілів у задачах менеджменту ризиків.
- Запропоновано метод - побудови комбінованих маргінальних розподілів який дозволяє враховувати важкі хвости одновимірних розподілів ризиків. Маргінальні розподіли поєднані у спільні розподіли ризиків через структуру залежності, що характеризується копулами.
- На основі аналізу методів побудови сімейств копул запропоновано використовувати для моделювання ризиків кілька сімейств копул із корисними для менеджменту ризиків властивостями.
- В експерименті над тривимірними розподілами змін курсів валют продемонстрована можливість застосування запропонованого в роботі методу до моделювання багатовимірного розподілу через комбіновані маргінальні розподіли і структуру залежності між ними.
- Наведено приклад застосування методу максимальної правдоподібності до оцінювання параметрів функції розподілу з їх подальшим використанням для оцінювання міри ризику.

The graphic features a large, light beige circle on the left and a large, light pink circle on the right. These two circles overlap in the center. The background is a solid dark blue. In the top right corner, there are several thin, white concentric circular lines. The text "ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!" is positioned in the center of the beige circle.

**ДЯКУЮ ЗА
УВАГУ!**

ДОДАТОК Б ЛІСТИНГ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

```

library(copula)
library(actuar)
set.seed(1)
n=1000
#logNormal distribution
x1 = (rlnorm(n, meanlog=1.9, sdlog=exp(-1)))*100000
x2 = (rlnorm(n, meanlog=2.4, sdlog=exp(-0.6)))*100000
x3 = (rlnorm(n, meanlog=2.4, sdlog=exp(-.8)))*100000
x4 = (rlnorm(n, meanlog=1.9, sdlog=exp(-0.6)))*100000
#the Burr distribution
x5=(rburr(n, 3, 1.5, rate =5 , scale = 2.5))*100000
x6=(rburr(n, 1.5, 3, rate =5 , scale = 2.5))*100000
x7=(rburr(n, 1.5, 2, rate =5 , scale = 2.5))*100000
x8=(rburr(n, 2, 1.5, rate =10 , scale = 5))*100000
#single parameter Pareto or the European Pareto
x9=rpseudo1(n, 3.2, 100000)
x10=rpseudo1(n, 2.6, 100000)
x11=rpseudo1(n, 2.1, 100000)
x12=rpseudo1(n, 1.8, 100000)
#inverse of the Weibull distribution
x13=(rinverseweibull(n, 1.8, rate =5, scale = 2.5))*100000
x14=(rinverseweibull(n, 1.5, rate =5, scale = 2.5))*100000
x15=(rinverseweibull(n, 2.1, rate =10, scale = 5))*100000
x16=(rinverseweibull(n, 1.5, rate =10, scale = 5))*100000
library(MASS)
kx1=density(x1)
q_range<-range(0,x1,x2,x3,x4)
plot(kx1,col="black",lwd=2.5, xlab="Loss",
main="Log-Normal distribution densities",
xlim= q_range)
kx2=density(x2)
103
104

```

```

lines(kx2,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=2)
kx3=density(x3)
lines(kx3,col="black",lwd=2.5, type="l", pch=23, lty=3)
kx4=density(x4)
lines(kx4,col="black",lwd=2.5, type="l", pch=24, lty=4)
legend(6500000, 1.0e-06,c("X1", "X2", "X3", "X4" ),
lwd=2.5, cex=1, lty=1:4, title="LoB")
kx5=density(x5)
q1_range<-range (0,x5,x6,x7,x8)
plot(kx5,col="black",lwd=2.5, xlab="Loss",
main="Burr distribution densities", xlim= q1_range)
kx6=density(x6)
lines(kx6,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=2)
kx7=density(x7)
lines(kx7,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=3)
kx8=density(x8)
lines(kx8,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=4)
legend(4500000, 3e-06, legend=c("X5", "X6", "X7", "X8" ),
lwd=2.5, cex=1, lty=1:4,
title="LoB")
kx9=density(x9)
q2_range<-range (0,x9,x10,x11,x12)
plot(kx9,col="black",lwd=2.5, xlab="Loss",
main="Single parameter Pareto distribution
densities", xlim= q2_range)
kx10=density(x10)
lines(kx10,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=2)
kx11=density(x11)
lines(kx11,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=3)
kx12=density(x12)
lines(kx12,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=4)
legend(3200000, 1.0e-05, legend=c("X9", "X10", "X11", "X12" ),
lwd=2.5, cex=1, lty=1:4, title="LoB")
kx13=density(x13)
q3_range<-range (0,x13,x14,x15,x16)
plot(kx13,col="black",lwd=2.5, xlab="Loss",
main="Inverse Weibull distribution
densities", xlim=c(0,4.5e+7))

```

```

kx14=density(x14)
lines(kx14,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=2)
kx15=density(x15)
lines(kx15,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=3)
kx16=density(x16)
lines(kx16,col="black",lwd=2.5, type="l", lty=4)
105
legend(3.3e+7, 1.0e-06, legend=c("X13", "X14", "X15", "X16" ),
lwd=2.5, cex=1, lty=1:4, title="LoB")
106

```

A.2 Copula Models Fitting

```

> library(copula)
> library(actuar)

#first line of business
> gmb<-gumbelCopula(3, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(gmb, c("exp","exp","exp","exp"),
list(list(rate=300),
list(rate=300),list(rate=300),list(rate=300)))
> x <- matrix(1/c(x1,x2,x3,x4),byrow=T,ncol=4)
> Fitted4<-fitMvdc(x, myCDF, c(3,3,3,3),method="SANN")
> par(mfrow = c(2, 2))
> K <- density(1/x[,1])
> #x[,1] gets risk 1 results
> plot(K, main="Marginal 1",xlab="Loss",lwd=4)
> K <- density(1/x[,2])
> #x[,2] gets risk 2 results
> plot(K, main="Marginal 2",xlab="Loss",lwd=4)
> K <- density(1/x[,3])
> #x[,3] gets risk 3 results
> plot(K, main="Marginal 3",xlab="Loss",lwd=4)
> K <- density(1/x[,4])
> #x[,1] gets risk 4 results
> plot(K, main="Marginal 4",xlab="Loss",lwd=4)

#second line of business
> gmb<-gumbelCopula(3, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(gmb, c("exp","exp","exp","exp"),
list(list(rate=300),
list(rate=300),list(rate=300),list(rate=300)))

```

```

> x <- matrix(1/c(x5,x6,x7,x8),byrow=T,ncol=4)
> Fitted5<-fitMvdc(x, myCDF, c(3,20,20,20,20),
method="SANN")
> par(mfrow = c(2, 2))
> K <- density(1/x[,1])
> #x[,1] gets risk 1 results
> plot(K, main="Marginal 1",xlab="Loss",lwd=4)
> K <- density(1/x[,2])
> #x[,2] gets risk 2 results
> plot(K, main="Marginal 2",xlab="Loss",lwd=4)
> K <- density(1/x[,3])
> #x[,3] gets risk 3 results
plot(K, main="Marginal 3",xlab="Loss",lwd=4)
107
> K <- density(1/x[,4])
> #x[,1] gets risk 4 results
> plot(K, main="Marginal 4",xlab="Loss",lwd=4)
#third class of business
> gmb<-gumbelCopula(3, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(gmb, c("exp","exp","exp","exp"),
list(list(rate=300),
list(rate=300),list(rate=300),list(rate=300)))
> x <- matrix(1/c(x9,x10,x11,x12),byrow=T,ncol=4)
> Fitted6<-fitMvdc(x, myCDF, c(3,20,20,20,20),
method="SANN")
#fourth class of business
gmb<-gumbelCopula(3, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(gmb, c("exp","exp","exp","exp"),
list(list(rate=300),
list(rate=300),list(rate=300),list(rate=300)))
> x <- matrix(1/c(x13,x14,x15,x16),byrow=T,ncol=4)
> Fitted7<-fitMvdc(x, myCDF, c(3,20,20,20,20),
method="SANN")
> K <- density(1/x[,1])
> #x[,1] gets risk 1 results
> plot(K, main="Marginal 1")
> K <- density(1/x[,2])
> #x[,1] gets risk 1 results

```

```

> plot(K, main="Marginal 2")
> K <- density(1/x[,3])
> #x[,1] gets risk 1 results
> plot(K, main="Marginal 3")
> K <- density(1/x[,4])
> #x[,1] gets risk 1 results
> plot(K, main="Marginal 4")
#The second tire
fra<-frankCopula(2, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(fra, c("norm","norm","norm","norm"),
list(list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2),list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2)))
> x <- cbind(x21,x22)
> Fitted11<-fitMvdc(x, myCDF, c(2,1,1,1,1,1,1,1),
method="SANN")
> E=rexp(10000000,3)
> E1=density(E)
> plot(E1, main="Marginal 1",col="red",
xlab="Variable X21",lty="dashed")
> K <- density(x[,1])
> #x[,1] gets risk 1 results
> lines(K, main="Marginal 1",lwd=4,col="black")
> N=rnorm(10000000,.49,.28)
> N1=density(N)
> lines(N1,lwd=2,col="blue",lty="dashed")
> #lines(K, main="Marginal 2",lwd=4,col="blue",lwd=2)
> legend(1.5, 1.15, legend=c("Exponential",
"Normal","Normal marginal"),
lwd=2.2, col=c("red","blue", "black"))
fra<-frankCopula(2, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(fra, c("norm","norm","norm","norm"),
list(list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2),list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2)))
> x <- cbind(x23,x24)
> Fitted12<-fitMvdc(x, myCDF, c(2,1,1,1,1,1,1,1),
method="SANN")

```

```

fra<-frankCopula(2, dim = 4)
> myCDF<- mvdc(fra, c("norm","norm","norm","norm"),
list(list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2),list(mean=.5,sd=2),
list(mean=.5,sd=2)))
> x <- cbind(x31,x32)
> Fitted13<-fitMvdc(x, myCDF, c(2,1,1,1,1,1,1,1,1),
method="SANN")
>library(copula)
>myCop.norm <- ellipCopula(family = "normal", dim = 3,
dispstr = "ex",param = 0.5)
>myCop.t <- ellipCopula(family = "t", dim = 3,
dispstr = "toep",param = c(0.8, 0.5), df = 8)
>#simulation and plotting
>par(mfrow = c(1, 2), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
>u <- rcopula(myCop.norm, 5000)
>scatterplot3d(u, xlab="x", ylab="y", zlab="z",
main="Normal Copula")
>v <- rcopula(myCop.t, 5000)
>scatterplot3d(v,xlab="x", ylab="y", zlab="z",
main="t Copula")
>myCop.norm1 <- ellipCopula(family = "normal",
dim = 2, dispstr = "ex",param = 0.5)
>myCop.t1 <- ellipCopula(family = "t", dim = 2,
dispstr = "toep",param =c(0.5), df = 8)
>par(mfrow = c(1, 2), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
persp(myCop.norm1, dcopula, xlab = "x",
ylab = "y", zlab = "Density",
main = "Normal Copula",theta = 30, phi = 35,
expand = 0.7, col = "lightblue",
ltheta = 10, shade = 0.5, ticktype = "detailed")
persp(myCop.t1, dcopula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "Density",main = "t Copula",
theta = 30, phi = 35, expand = 0.7, col = "lightblue",
ltheta = 10, shade = 0.5,
ticktype = "detailed")

```

```

myCop.norm1 <- ellipCopula(family = "normal", dim = 2,
dispstr = "ex",param = 0.5)
myCop.t1 <- ellipCopula(family = "t", dim = 2,
dispstr = "toep",param = c(0.5), df = 8)
par(mfrow = c(1, 2), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
persp(myCop.norm1, pcpula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "cdf",main = "Normal
Copula",theta = 30, phi = 35, expand = 0.7,
col = "lightblue",ltheta = 10,
shade = 0.5, ticktype = "detailed")
persp(myCop.t1, pcpula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "cdf",main = "t Copula",
theta = 30, phi = 35, expand = 0.7, col =
"lightblue",ltheta = 10,
shade = 0.5, ticktype = "detailed")
par(mfrow = c(1, 2), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
contour(myCop.norm1, dcpula, xlab = "x",
ylab = "y",main = "Normal Copula",
sub = NULL, col = "black")
contour(myCop.t1, dcpula, xlab = "x",
ylab = "y",main = "t Copula",
sub = NULL, col = "black")
#Archimedean copulas
myMvd1 <- mvdc(copula = archmCopula
(family = "clayton", param = 2),margins =
c("norm", "norm"), paramMargins = list(list
(mean = 0,sd = 1), list(mean = 0, sd = 1)))
myMvd2 <- mvdc(copula = archmCopula(family =
"frank", param = 5.736),
margins = c("norm",
"norm"), paramMargins = list(list(mean = 0,sd = 1),
list(mean = 0, sd = 1)))
myMvd3 <- mvdc(copula = archmCopula(family = "gumbel",
param = 2),margins = c("norm",
"norm"), paramMargins = list(list(mean = 0,sd = 1),
list(mean = 0, sd = 1)))

```

```

par(mfrow = c(1, 3), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
contour(myMvd1, dmvdc, xlim = c(-3, 3),
ylim = c(-3, 3), main="Clayton")
contour(myMvd2, dmvdc, xlim = c(-3, 3),
ylim = c(-3, 3),main="Frank")
contour(myMvd3, dmvdc, xlim = c(-3, 3),
ylim = c(-3, 3),main="Gumbel")
clayton.cop <- claytonCopula(sqrt(3), dim = 3)
frank.cop <- frankCopula(sqrt(3), dim = 3)
gumbel.cop <- archmCopula("gumbel", sqrt(3),dim = 3)
par(mfrow = c(1, 3), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
scatterplot3d(rcopula(clayton.cop, 5000),
main="Clayton", xlab="x", ylab="y", zlab="z")
scatterplot3d(rcopula(frank.cop, 5000),
main="Frank", xlab="x", ylab="y", zlab="z")
scatterplot3d(rcopula(gumbel.cop, 5000),
main="Gumbel", xlab="x", ylab="y", zlab="z")
clayton.cop1 <- claytonCopula(sqrt(3), dim = 2)
frank.cop1 <- frankCopula(sqrt(3), dim = 2)
gumbel.cop1 <- archmCopula("gumbel", sqrt(3),dim = 2)
par(mfrow = c(1, 3), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
persp(clayton.cop1, dcopula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "Density",main = "Clayton",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,
ticktype = "detailed")
persp(frank.cop1, dcopula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "Density",main = "Frank",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,
ticktype = "detailed")
persp(gumbel.cop1, dcopula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "Density",main = "Gumbel",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,

```

```

ticktype = "detailed")
par(mfrow = c(1, 3), mar = c(2, 2, 1, 1),
oma = c(1, 1, 0, 0),mgp = c(2, 1, 0))
persp(clayton.cop1, pcpula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "CDF",main = "Clayton",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,
ticktype = "detailed")
persp(frank.cop1, pcpula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "CDF",main = "Frank",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,
ticktype = "detailed")
persp(gumbel.cop1, pcpula, xlab = "x", ylab = "y",
zlab = "CDF",main = "Gumbel",
theta = 30, phi = 30, expand = 0.78, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75,
library(copula)
gumbel11.cop <- archmCopula("gumbel", 24.59428,dim = 2)
kendallsTau(gumbel11.cop)
spearmanRho(gumbel11.cop)
tailIndex(gumbel11.cop)
gumbel12.cop <- archmCopula("gumbel", 20.45,dim = 2)
kendallsTau(gumbel12.cop)
spearmanRho(gumbel12.cop)
tailIndex(gumbel12.cop)
gumbel13.cop <- archmCopula("gumbel", 23.43973,dim = 2)
kendallsTau(gumbel13.cop)
spearmanRho(gumbel13.cop)
tailIndex(gumbel13.cop)
gumbel14.cop <- archmCopula("gumbel", 19.80858,dim = 2)
kendallsTau(gumbel14.cop)
spearmanRho(gumbel14.cop)
tailIndex(gumbel14.cop)
gumbel15.cop <- archmCopula("gumbel", 11.3086,dim = 2)
kendallsTau(gumbel15.cop)
spearmanRho(gumbel15.cop)
tailIndex(gumbel15.cop)

```

```

gumbel16.cop <- archmCopula("gumbel", 17.95782,dim = 2)
kendallsTau(gumbel16.cop)
spearmanRho(gumbel16.cop)
tailIndex(gumbel16.cop)
gumbel17.cop <- archmCopula("gumbel", 14.35448,dim = 2)
kendallsTau(gumbel17.cop)
spearmanRho(gumbel17.cop)
tailIndex(gumbel17.cop)
gumbel18.cop <- archmCopula("gumbel", 11.8632,dim = 2)
kendallsTau(gumbel18.cop)
spearmanRho(gumbel18.cop)
tailIndex(gumbel18.cop)
gumbel19.cop <- archmCopula("gumbel", 25.86368,dim = 2)
kendallsTau(gumbel19.cop)
spearmanRho(gumbel19.cop)
tailIndex(gumbel19.cop)
gumbel110.cop <- archmCopula("gumbel", 22.24507,dim = 2)
kendallsTau(gumbel110.cop)
spearmanRho(gumbel110.cop)
tailIndex(gumbel110.cop)
gumbel111.cop <- archmCopula("gumbel", 21.4728,dim = 2)

kendallsTau(gumbel111.cop)
spearmanRho(gumbel111.cop)
tailIndex(gumbel111.cop)
gumbel112.cop <- archmCopula("gumbel", 19.98291,dim = 2)
kendallsTau(gumbel112.cop)
spearmanRho(gumbel112.cop)
tailIndex(gumbel112.cop)
gumbel113.cop <- archmCopula("gumbel", 17.46607,dim = 2)
kendallsTau(gumbel113.cop)
spearmanRho(gumbel113.cop)
tailIndex(gumbel113.cop)
gumbel114.cop <- archmCopula("gumbel", 14.86397,dim = 2)
kendallsTau(gumbel114.cop)
spearmanRho(gumbel114.cop)
tailIndex(gumbel114.cop)
gumbel115.cop <- archmCopula("gumbel", 19.41276,dim = 2)

```

```

kendallsTau(gumbel115.cop)
spearmanRho(gumbel115.cop)
tailIndex(gumbel115.cop)
gumbel116.cop <- archmCopula("gumbel", 12.79195, dim = 2)
kendallsTau(gumbel116.cop)
spearmanRho(gumbel116.cop)
tailIndex(gumbel116.cop)
gumbel22.cop <- archmCopula("gumbel", 18.35061, dim = 2)
kendallsTau(gumbel22.cop)
spearmanRho(gumbel22.cop)
tailIndex(gumbel22.cop)
gumbel23.cop <- archmCopula("gumbel", 19.83296, dim = 2)
kendallsTau(gumbel23.cop)
spearmanRho(gumbel23.cop)
tailIndex(gumbel23.cop)
gumbel24.cop <- archmCopula("gumbel", 16.89746, dim = 2)
kendallsTau(gumbel24.cop)
spearmanRho(gumbel24.cop)
tailIndex(gumbel24.cop)
gumbel25.cop <- archmCopula("gumbel", 10.59436, dim = 2)
kendallsTau(gumbel25.cop)
spearmanRho(gumbel25.cop)
tailIndex(gumbel25.cop)
gumbel26.cop <- archmCopula("gumbel", 16.37294, dim = 2)
kendallsTau(gumbel26.cop)
spearmanRho(gumbel26.cop)
tailIndex(gumbel26.cop)
gumbel27.cop <- archmCopula("gumbel", 13.1148, dim = 2)
114
kendallsTau(gumbel27.cop)
spearmanRho(gumbel27.cop)
tailIndex(gumbel27.cop)
gumbel28.cop <- archmCopula("gumbel", 11.28093, dim = 2)
kendallsTau(gumbel28.cop)
spearmanRho(gumbel28.cop)
tailIndex(gumbel28.cop)
gumbel29.cop <- archmCopula("gumbel", 21.92459, dim = 2)
kendallsTau(gumbel29.cop)

```

```

spearmanRho(gumbel29.cop)
tailIndex(gumbel29.cop)
gumbel210.cop <- archmCopula("gumbel", 19.89369,dim = 2)
kendallsTau(gumbel210.cop)
spearmanRho(gumbel210.cop)
tailIndex(gumbel210.cop)
gumbel211.cop <- archmCopula("gumbel", 19.17953,dim = 2)
kendallsTau(gumbel211.cop)
spearmanRho(gumbel211.cop)
tailIndex(gumbel211.cop)
gumbel212.cop <- archmCopula("gumbel", 17.70546,dim = 2)
kendallsTau(gumbel212.cop)
spearmanRho(gumbel212.cop)
tailIndex(gumbel212.cop)
gumbel213.cop <- archmCopula("gumbel", 15.04316,dim = 2)
kendallsTau(gumbel213.cop)
spearmanRho(gumbel213.cop)
tailIndex(gumbel213.cop)
gumbel214.cop <- archmCopula("gumbel", 13.12138,dim = 2)
kendallsTau(gumbel214.cop)
spearmanRho(gumbel214.cop)
tailIndex(gumbel214.cop)
gumbel215.cop <- archmCopula("gumbel", 17.28395,dim = 2)
kendallsTau(gumbel215.cop)
spearmanRho(gumbel215.cop)
tailIndex(gumbel215.cop)
gumbel216.cop <- archmCopula("gumbel", 12.10579,dim = 2)
kendallsTau(gumbel216.cop)
spearmanRho(gumbel216.cop)
tailIndex(gumbel216.cop)
gumbel33.cop <- archmCopula("gumbel", 21.02007,dim = 2)
kendallsTau(gumbel33.cop)
spearmanRho(gumbel33.cop)
tailIndex(gumbel33.cop)
gumbel34.cop <- archmCopula("gumbel", 18.39264,dim = 2)
115
kendallsTau(gumbel34.cop)
spearmanRho(gumbel34.cop)

```

```

tailIndex(gumbel34.cop)
gumbel35.cop <- archmCopula("gumbel", 10.37714,dim = 2)
kendallsTau(gumbel35.cop)
spearmanRho(gumbel35.cop)
tailIndex(gumbel35.cop)
gumbel36.cop <- archmCopula("gumbel", 16.88054,dim = 2)
kendallsTau(gumbel36.cop)
spearmanRho(gumbel36.cop)
tailIndex(gumbel36.cop)
gumbel37.cop <- archmCopula("gumbel", 13.76924,dim = 2)
kendallsTau(gumbel37.cop)
spearmanRho(gumbel37.cop)
tailIndex(gumbel37.cop)
gumbel38.cop <- archmCopula("gumbel", 11.45215,dim = 2)
kendallsTau(gumbel38.cop)
spearmanRho(gumbel38.cop)
tailIndex(gumbel38.cop)
gumbel39.cop <- archmCopula("gumbel", 23.88196,dim = 2)
kendallsTau(gumbel39.cop)
spearmanRho(gumbel39.cop)
tailIndex(gumbel39.cop)
gumbel310.cop <- archmCopula("gumbel", 22.06464,dim = 2)
kendallsTau(gumbel310.cop)
spearmanRho(gumbel310.cop)
tailIndex(gumbel310.cop)
gumbel311.cop <- archmCopula("gumbel", 19.6937,dim = 2)
kendallsTau(gumbel311.cop)
spearmanRho(gumbel311.cop)
tailIndex(gumbel311.cop)
gumbel312.cop <- archmCopula("gumbel", 18.49001,dim = 2)
kendallsTau(gumbel312.cop)
spearmanRho(gumbel312.cop)
tailIndex(gumbel312.cop)
gumbel313.cop <- archmCopula("gumbel", 16.08886,dim = 2)
kendallsTau(gumbel313.cop)
spearmanRho(gumbel313.cop)
tailIndex(gumbel313.cop)
gumbel314.cop <- archmCopula("gumbel", 13.58637,dim = 2)

```

```

kendallsTau(gumbel314.cop)
spearmanRho(gumbel314.cop)
tailIndex(gumbel314.cop)
gumbel315.cop <- archmCopula("gumbel", 19.40581,dim = 2)
116
kendallsTau(gumbel315.cop)
spearmanRho(gumbel315.cop)
tailIndex(gumbel315.cop)
gumbel316.cop <- archmCopula("gumbel", 12.88396,dim = 2)
kendallsTau(gumbel316.cop)
spearmanRho(gumbel316.cop)
tailIndex(gumbel316.cop)
gumbel44.cop <- archmCopula("gumbel", 17.23922,dim = 2)
kendallsTau(gumbel44.cop)
spearmanRho(gumbel44.cop)
tailIndex(gumbel44.cop)
gumbel45.cop <- archmCopula("gumbel", 10.09766,dim = 2)
kendallsTau(gumbel45.cop)
spearmanRho(gumbel45.cop)
tailIndex(gumbel45.cop)
gumbel46.cop <- archmCopula("gumbel", 16.08946,dim = 2)
kendallsTau(gumbel46.cop)
spearmanRho(gumbel46.cop)
tailIndex(gumbel46.cop)
gumbel47.cop <- archmCopula("gumbel", 12.43129,dim = 2)
kendallsTau(gumbel47.cop)
spearmanRho(gumbel47.cop)
tailIndex(gumbel47.cop)
gumbel48.cop <- archmCopula("gumbel", 10.7525,dim = 2)
kendallsTau(gumbel48.cop)
spearmanRho(gumbel48.cop)
tailIndex(gumbel48.cop)
gumbel49.cop <- archmCopula("gumbel", 20.72022,dim = 2)
kendallsTau(gumbel49.cop)
spearmanRho(gumbel49.cop)
tailIndex(gumbel49.cop)
gumbel410.cop <- archmCopula("gumbel", 18.59881,dim = 2)
kendallsTau(gumbel410.cop)

```

```

spearmanRho(gumbel410.cop)
tailIndex(gumbel410.cop)
gumbel411.cop <- archmCopula("gumbel", 17.82808, dim = 2)
kendallsTau(gumbel411.cop)
spearmanRho(gumbel411.cop)
tailIndex(gumbel411.cop)
gumbel412.cop <- archmCopula("gumbel", 16.75534, dim = 2)
kendallsTau(gumbel412.cop)
spearmanRho(gumbel412.cop)
tailIndex(gumbel412.cop)
gumbel413.cop <- archmCopula("gumbel", 14.84369, dim = 2)
kendallsTau(gumbel413.cop)
spearmanRho(gumbel413.cop)
tailIndex(gumbel413.cop)
gumbel414.cop <- archmCopula("gumbel", 12.29216, dim = 2)
kendallsTau(gumbel414.cop)
spearmanRho(gumbel414.cop)
tailIndex(gumbel414.cop)
gumbel415.cop <- archmCopula("gumbel", 16.45009, dim = 2)
kendallsTau(gumbel415.cop)
spearmanRho(gumbel415.cop)
tailIndex(gumbel415.cop)
gumbel416.cop <- archmCopula("gumbel", 11.97745, dim = 2)
kendallsTau(gumbel416.cop)
spearmanRho(gumbel416.cop)
tailIndex(gumbel416.cop)
gumbel55.cop <- archmCopula("gumbel", 7.521216, dim = 2)
kendallsTau(gumbel55.cop)
spearmanRho(gumbel55.cop)
tailIndex(gumbel55.cop)
gumbel56.cop <- archmCopula("gumbel", 9.691672, dim = 2)
kendallsTau(gumbel56.cop)
spearmanRho(gumbel56.cop)
tailIndex(gumbel56.cop)
gumbel57.cop <- archmCopula("gumbel", 8.54854, dim = 2)
kendallsTau(gumbel57.cop)
spearmanRho(gumbel57.cop)
tailIndex(gumbel57.cop)

```

```

gumbel58.cop <- archmCopula("gumbel", 7.830925,dim = 2)
kendallsTau(gumbel58.cop)
spearmanRho(gumbel58.cop)
tailIndex(gumbel58.cop)
gumbel59.cop <- archmCopula("gumbel", 10.86895,dim = 2)
kendallsTau(gumbel59.cop)
spearmanRho(gumbel59.cop)
tailIndex(gumbel59.cop)
gumbel510.cop <- archmCopula("gumbel", 19.29592,dim = 2)
kendallsTau(gumbel510.cop)
spearmanRho(gumbel510.cop)
tailIndex(gumbel510.cop)
gumbel511.cop <- archmCopula("gumbel",10.44113,dim = 2)
kendallsTau(gumbel511.cop)
spearmanRho(gumbel511.cop)
tailIndex(gumbel511.cop)
gumbel512.cop <- archmCopula("gumbel", 10.0494,dim = 2)
kendallsTau(gumbel512.cop)
spearmanRho(gumbel512.cop)
tailIndex(gumbel512.cop)
gumbel513.cop <- archmCopula("gumbel", 9.290266,dim = 2)
kendallsTau(gumbel513.cop)
spearmanRho(gumbel513.cop)
tailIndex(gumbel513.cop)
gumbel514.cop <- archmCopula("gumbel", 8.627145,dim = 2)
kendallsTau(gumbel514.cop)
spearmanRho(gumbel514.cop)
tailIndex(gumbel514.cop)
gumbel515.cop <- archmCopula("gumbel", 10.4105,dim = 2)
kendallsTau(gumbel515.cop)
spearmanRho(gumbel515.cop)
tailIndex(gumbel515.cop)
gumbel516.cop <- archmCopula("gumbel", 8.303656,dim = 2)
kendallsTau(gumbel516.cop)
spearmanRho(gumbel516.cop)
tailIndex(gumbel516.cop)
gumbel66.cop <- archmCopula("gumbel", 14.61707,dim = 2)
kendallsTau(gumbel66.cop)

```

```

spearmanRho(gumbel66.cop)
tailIndex(gumbel66.cop)
gumbel67.cop <- archmCopula("gumbel", 11.74468,dim = 2)
kendallsTau(gumbel67.cop)
spearmanRho(gumbel67.cop)
tailIndex(gumbel67.cop)
gumbel68.cop <- archmCopula("gumbel", 10.00142,dim = 2)
kendallsTau(gumbel68.cop)
spearmanRho(gumbel68.cop)
tailIndex(gumbel68.cop)
gumbel69.cop <- archmCopula("gumbel", 19.57513,dim = 2)
kendallsTau(gumbel69.cop)
spearmanRho(gumbel69.cop)
tailIndex(gumbel69.cop)
gumbel610.cop <- archmCopula("gumbel", 16.92689,dim = 2)
kendallsTau(gumbel610.cop)
spearmanRho(gumbel610.cop)
tailIndex(gumbel610.cop)
gumbel611.cop <- archmCopula("gumbel", 16.55551,dim = 2)
kendallsTau(gumbel611.cop)
spearmanRho(gumbel611.cop)
tailIndex(gumbel611.cop)
gumbel612.cop <- archmCopula("gumbel", 15.40211,dim = 2)
kendallsTau(gumbel612.cop)
spearmanRho(gumbel612.cop)
tailIndex(gumbel612.cop)
gumbel613.cop <- archmCopula("gumbel", 13.42136,dim = 2)
kendallsTau(gumbel613.cop)
spearmanRho(gumbel613.cop)
tailIndex(gumbel613.cop)
gumbel614.cop <- archmCopula("gumbel", 12.11641,dim = 2)
kendallsTau(gumbel614.cop)
spearmanRho(gumbel614.cop)
tailIndex(gumbel614.cop)
gumbel615.cop <- archmCopula("gumbel", 16.07287,dim = 2)
kendallsTau(gumbel615.cop)
spearmanRho(gumbel615.cop)
tailIndex(gumbel615.cop)

```

```

gumbel616.cop <- archmCopula("gumbel", 11.34403,dim = 2)
kendallsTau(gumbel616.cop)
spearmanRho(gumbel616.cop)
tailIndex(gumbel616.cop)
gumbel77.cop <- archmCopula("gumbel", 10.15075,dim = 2)
kendallsTau(gumbel77.cop)
spearmanRho(gumbel77.cop)
tailIndex(gumbel77.cop)
gumbel78.cop <- archmCopula("gumbel", 9.026152,dim = 2)
kendallsTau(gumbel78.cop)
spearmanRho(gumbel78.cop)
tailIndex(gumbel78.cop)
gumbel79.cop <- archmCopula("gumbel", 14.50697,dim = 2)
kendallsTau(gumbel79.cop)
spearmanRho(gumbel79.cop)
tailIndex(gumbel79.cop)
gumbel710.cop <- archmCopula("gumbel", 13.80126,dim = 2)
kendallsTau(gumbel710.cop)
spearmanRho(gumbel710.cop)
tailIndex(gumbel710.cop)
gumbel711.cop <- archmCopula("gumbel", 12.86187,dim = 2)
kendallsTau(gumbel711.cop)
spearmanRho(gumbel711.cop)
tailIndex(gumbel711.cop)
gumbel712.cop <- archmCopula("gumbel", 12.30449,dim = 2)
kendallsTau(gumbel712.cop)
spearmanRho(gumbel712.cop)
tailIndex(gumbel712.cop)
gumbel713.cop <- archmCopula("gumbel", 11.21817,dim = 2)
kendallsTau(gumbel713.cop)
spearmanRho(gumbel713.cop)
tailIndex(gumbel713.cop)
gumbel714.cop <- archmCopula("gumbel", 10.33549,dim = 2)
kendallsTau(gumbel714.cop)
spearmanRho(gumbel714.cop)
tailIndex(gumbel714.cop)
gumbel715.cop <- archmCopula("gumbel", 12.56657,dim = 2)
kendallsTau(gumbel715.cop)

```

```

spearmanRho(gumbel715.cop)
tailIndex(gumbel715.cop)
gumbel716.cop <- archmCopula("gumbel", 9.608888,dim = 2)
kendallsTau(gumbel716.cop)
spearmanRho(gumbel716.cop)
tailIndex(gumbel716.cop)
gumbel88.cop <- archmCopula("gumbel", 8.380593,dim = 2)
kendallsTau(gumbel88.cop)
spearmanRho(gumbel88.cop)
tailIndex(gumbel88.cop)
gumbel89.cop <- archmCopula("gumbel", 11.7845,dim = 2)
kendallsTau(gumbel89.cop)
spearmanRho(gumbel89.cop)
tailIndex(gumbel89.cop)
gumbel810.cop <- archmCopula("gumbel", 11.28214,dim = 2)
kendallsTau(gumbel810.cop)
spearmanRho(gumbel810.cop)
tailIndex(gumbel810.cop)
gumbel811.cop <- archmCopula("gumbel",10.7309,dim = 2)
kendallsTau(gumbel811.cop)
spearmanRho(gumbel811.cop)
tailIndex(gumbel811.cop)
gumbel812.cop <- archmCopula("gumbel", 10.94955,dim = 2)
kendallsTau(gumbel812.cop)
spearmanRho(gumbel812.cop)
tailIndex(gumbel812.cop)
gumbel813.cop <- archmCopula("gumbel", 9.773103,dim = 2)
kendallsTau(gumbel813.cop)
spearmanRho(gumbel813.cop)
tailIndex(gumbel813.cop)
gumbel814.cop <- archmCopula("gumbel", 8.775602,dim = 2)
kendallsTau(gumbel814.cop)
spearmanRho(gumbel814.cop)
tailIndex(gumbel814.cop)
gumbel815.cop <- archmCopula("gumbel", 10.95028,dim = 2)

```