

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичного моделювання та аналізу даних**

«На правах рукопису»
УДК 532

«До захисту допущено»
В.о. завідувача кафедри
_____ Іван ТЕРЕЩЕНКО
«___» _____ 2025 р.

Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою
«Математичні методи моделювання,
розпізнавання образів та комп'ютерного зору»

зі спеціальності: 113 Прикладна математика
на тему: «**Моделювання горизонтально однорідного примежового шару атмосфери**»

Виконав:
студент IV курсу, групи ФІ-12
Юрчук Олексій Миколайович _____

Керівник:
професор каф. ММАД, док. техн. наук, с.н.с.
Ковалець Іван Васильович _____

Рецензент:
доцент, к.ф.-м.н., доц. каф. ММЗІ
Южакова Ганна Олексіївна _____

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»**

**Навчально-науковий фізико-технічний інститут
Кафедра математичного моделювання та аналізу даних**

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський)
Спеціальність — 113 Прикладна математика,
ОПП «Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та
комп'ютерного зору»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри

_____ Іван ТЕРЕЩЕНКО

«___» _____ 2025 р.

**ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу**

Студент: Юрчук Олексій Миколайович

1. Тема роботи: *«Моделювання горизонтально однорідного примежового шару атмосфери»*, науковий керівник дисертації: професор каф. ММАД, док. техн. наук, с.н.с. Ковалець Іван Васильович,

затверджені наказом по університету № 1761-с від «26» травня 2025 р.

2. Термін подання студентом роботи: «06» червня 2025 р.

3. Об'єкт дослідження: Планетарний граничний шар з його властивостями та особливостями.

4. Предмет дослідження: Існуючі моделі турбулентності та математичні методи їх реалізації.

5. Перелік завдань:

1) Провести огляд опублікованих джерел на тему планетарного граничного шару та дослідити існуючі моделі для моделювання турбулентності на переваги та недоліки;

2) Провести верифікацію згідно класичних вимірів "Лейпцигського профілю" вертикальних профілів геострофічного вітру;

3) Розглянути приземний шар та провести його моделювання;

- 4) Реалізувати чисельні алгоритми розв'язання модифікованих рівнянь $(k - \varepsilon)$ моделі для умов планетарного граничного шару;
- 5) Запропонувати покращення вже існуючих моделей.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: презентація доповіді
7. Орієнтовний перелік публікацій: –
8. Дата видачі завдання: 10 вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання бакалаврської роботи	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	01-15 вересня 2024 р.	Виконано
2	Огляд класичних та сучасних джерел за тематикою дослідження	Вересень-Грудень 2024 р.	Виконано
3	Моделювання планетарного граничного шару атмосфери з використанням різних моделей	Січень-Березень 2025 р	Виконано
4	Проведення моделювання приземного шару за наявності теплообміну	Квітень-Травень 2025 р	Виконано
5	Аналіз та систематизація отриманих результатів.	Червень 2025 р	Виконано

Студент _____ Олексій ЮРЧУК

Керівник _____ Іван КОВАЛЕЦЬ

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 76 стор., 17 рисунків, 26 джерел.

Дана дипломна робота була присвячена дослідженню і моделюванню явища турбулентності за допомогою існуючих реалізацій моделей, перевірка цих моделей на узгодженість з емпіричними даними отриманими у горизонтально однорідному нейтрально стратифікованому планетарному граничному шарі та приземному шарі за наявності конвективного теплообміну.

Було здійснено відтворення основних характеристик компонент явища турбулентності та запропоновано чисельний метод, завдяки якому здійснюється точніша апроксимація правої частини, яка описує генерацію турбулентності, і знижується похибка моделювання, яку можна відслідковувати по максимальному значенню коефіцієнта дифузії. Модифікація моделі дозволила відтворити характеристики турбулентності у помірно нестійкому приземному та планетарному граничному шарі.

Ключові слова: ПЛАНЕТАРНИЙ ГРАНИЧНИЙ ШАР, ТУРБУЛЕНТНІСТЬ, МАСШТАБ ОБУХОВА, МЕТОД ЗВАЖЕНИХ СУМ

ABSTRACT

The thesis consists of 76 pages, 17 figures and 26 references

This thesis was devoted to the research and simulation of the turbulence effect using existing model implementations, and to the verification of these models for agreement with empirical data obtained in a horizontally homogeneous neutrally stratified planetary boundary layer and the surface layer in the presence of convective heat transfer.

The main characteristics of the components of the turbulence phenomenon were reproduced and a numerical method was proposed, which allows for a more accurate approximation of the right-hand side that describes the generation of turbulence and reduces the simulation error, which can be tracked by the maximum value of the diffusion coefficient. The modification of the model made it possible to reproduce the characteristics of turbulence in a slightly unstable surface and planetary boundary layer.

Keywords: ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER, TURBULENT, OBUKHOV SCALE, WEIGHTED SUM METHOD

ЗМІСТ

Вступ	7
1 Теорії та моделі турбулентності в атмосфері	9
1.1 Загальні відомості.....	9
1.2 Моделі динаміки атмосфери	11
1.3 Планетарний граничний шар	14
1.4 Приземний граничний шар за наявності теплообміну	26
Висновки до розділу 1	29
2 Моделі горизонтально однорідного атмосферного примежового шару	30
2.1 Теоретичні відомості	30
2.2 Двопараметрична модель турбулентності та її сучасні модифікації... 31	
2.3 Постановка задачі про моделювання планетарного граничного шару	34
2.4 Постановка задачі про моделювання приземного шару за наявності теплообміну.....	39
Висновки до розділу 2	44
3 Чисельні методи розв’язання рівнянь для моделі турбулентності	45
Висновки до розділу 3	51
4 Результати розрахунків.....	52
4.1 Дані вимірювань	52
4.2 Результати моделювання планетарного граничного шару.....	53
4.3 Результати моделювання приземного шару з конвективним тепло- обміном	61
4.4 Обговорення результатів.....	64
Висновки до розділу 3	67
Висновки	68
Перелік посилань.....	70
Додаток А Матрична форма рівнянь чисельних схем	74

ВСТУП

Актуальність дослідження. Планетарний граничний шар є критично важливим для комфортного проживання людей на Землі. Саме тут відбуваються основні обміни тепла і вологи між Землею та повітрям. Цей шар має повторювані цикли з дня в день, але, в той же час, він також має хаотичну, турбулентну поведінку, яку нелегко описати математично та важко передбачити. Моделювання цього шару допомагає науковцям в різних сферах – метеорології, сільському господарстві, авіоніці, логістиці, містопроєктуванні та багатьох інших сферах.

Метою дослідження є дослідження моделей турбулентності та їх узгодження з вимірами, отриманими для асимптотичних випадків горизонтально однорідного граничного шару атмосфери. Для досягнення зазначеної мети необхідно розв’язати **задачу дослідження**, яка полягає в моделюванні планетарного граничного шару. Для розв’язання задачі необхідно вирішити такі завдання:

- 1) Зробити детальний огляд опублікованих джерел на тему планетарного граничного шару;
- 2) Дослідити існуючі моделі для моделювання турбулентності;
- 3) Відтворити згідно класичних вимірів "Лейпцигського профілю" вертикальні профілі вітру та інших характеристик нейтрально стратифікованого горизонтально однорідного планетарного граничного шару;
- 4) Провести моделювання приземного шару за наявності конвективного теплообміну;
- 5) Запропонувати покращення вже існуючих моделей.

Об’єктом дослідження виступає планетарний (примежовий) граничний шар з його властивостями та особливостями.

Предметом дослідження слугують існуючі моделі турбулентності та математичні методи їх реалізації.

При розв’язанні поставлених завдань використовувались такі *методи дослідження*: методи лінійної алгебри, статистичного моделювання, аналізу розмірностей, чисельного аналізу для розв’язання диференціальних рівнянь,

зокрема методи скінченних різниць, методи комп'ютерного моделювання для побудови вертикальних профілів вітру, а також аналітичні методи порівняльного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у вперше здійсненому моделюванні $(k - \varepsilon)$ моделлю з використанням чисельної схеми – методу зважених сум. Показано, що використані модифікації $(k - \varepsilon)$ моделі дозволяють відтворити основні характеристики нейтрально стратифікованого планетарного граничного шару та приземного шару при за умов помірної конвекції.

Практичне значення роботи полягає в тому, що розроблені методи можуть бути застосовані як складова чисельних метеорологічних моделей, зокрема, у складі систем прогнозування погоди та атмосферних забруднень, для прогнозування динаміки атмосферного приземного шару

1 ТЕОРІЇ ТА МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ В АТМОСФЕРІ

1.1 Загальні відомості

Моделювання горизонтально однорідного примежового шару атмосфери, також відомого як планетарний граничний шар (ПГШ), є критично важливим для комфортного життя людей на Землі. В даному шарі відбувається багато процесів, над якими в повсякденному житті люди не надто замислюються. Цією роботою ми хочемо підкреслити доцільність подальшого дослідження ПГШ, провівши власне моделювання явищ, які відбуваються у планетарному і приземному граничних шарах, навести наяві методи моделювання та обчислення, а також оцінити їх переваги у відтворенні реально спостережувальних явищ.

Шодня ми ходимо по поверхні Землі і маємо щосекундний контакт з повітрям, яке циркулює біля земної поверхні. Як відомо, атмосфера складається з п'яти шарів: екзосфери (більше 700 км), термосфери (80-700 км), мезосфери (50-80 км), стратосфери (12-50 км) та тропосфери (0-12 км). В нашому дослідженні ми зосередимо нашу увагу на розгляді тропосфери, а точніше найнижчої її частини – примежового шару, який складає $\sim 1/6$ частину тропосфери. Примежовий шар це частина атмосфери, яка безпосередньо контактує з земною поверхнею. Саме тут відбуваються основні обміни тепла і вологи між Землею та повітрям. Планетарний граничний шар має повторювані цикли з дня в день, але, в тому числі, він також має хаотичну, турбулентну поведінку, яку нелегко описати математично та важко передбачити. Ці повторювані цикли і хаотична поведінка мають величезний вплив на якість повітря, яким ми дихаємо, на джерела тепла і водяної пари, які необхідні для формування погоди, оскільки саме цей шар відіграє значну роль в таких процесах як: виникнення хмарності, утворення опадів і циркуляції повітрях мас (виникнення вітру) [1]. Моделювання допомагає оцінювати рівень забрудненості повітря, спрогнозувати ризики утворення смогів та пилових бурей, оскільки в межах ПГШ відбувається накопичення забруднюючих речовин в нашій атмосфері. У сільському господарстві дані про температури на

висоті до 2 м, ґрунтову вологість, швидкість вітру та випаровування є життєво необхідними. Моделювання ПГШ дозволяє визначати терміни сівби, зрошування, захисту від заморозків і шкідників. ПГШ є важливою ланкою у зворотних зв'язках кліматичної системи. Наприклад, зміни в землекористуванні (ліс/аграрна зона) чи танення льодових покривів впливають на альбедо, температуру поверхні та турбулентні потоки. Без урахування цих процесів кліматичні прогнози будуть неточними. Дослідження даного шару є важливим не лише з точки зору метеорології. До прикладу, задля ефективного розташування і експлуатації вітрових турбін моделі допомагають визначати енергетичний потенціал регіону та надають інженерам необхідне уявлення про вертикальний профіль вітру в ПГШ на висотах 10-200 м. У авіації – проектування злітно-посадкових смуг, врахування турбулентності та горизонтальних зсувів вітру, обledenіння крил літаків під час польоту є критичними факторами. Вітер, що створюється в ПГШ, має важливе для морської та сухопутної логістики, наприклад у оптимізації маршрутів, а також для визначення мікрокліматичних умов у місцях зведення мостів, будівництва хмарочосів, портів тощо. У містопроектуванні примежовий граничний шар також безпосередньо відіграє важливу роль. В наш час у містах спостерігається явище так званих теплових островів (підвищення температури міста, порівняно з оточуючим ландшафтом), через нерівномірну забудову змінюється циркуляція повітря, накопичуються викиди шкідливих речовин від підприємств та автотранспорту. Грамотне урахування можливих повітряних потоків дозволяє оптимізувати проектування інфраструктури задля комфортного проживання людини, оскільки такі складові ПГШ як вітер, температура, вологість повітря визначають рівень теплового навантаження на людину, особливо у містах. Це актуально у зв'язку з глобальним потеплінням і збільшенням смертності під час напливів спеки [2]. Отже, моделювання даного шару дозволяє науковцям наочно розуміти, які зміни відбуваються в природній оболонці Землі та який вплив вони несуть на наше життя.

В наступній частині даного розділу буде здійснено огляд базових рівнянь і теорій гідротермодинаміки атмосфери та планетарного граничного шару, які слугують основою для подальшого дослідження. Проаналізовано недоліки

існуючих моделей та потреби у подальших дослідженнях. На підставі огляду сформульовано мету дослідження.

1.2 Моделі динаміки атмосфери

В основі моделей для чисельного прогнозу погоди лежать певні методи розрахунку, так звані рівняння гідротермодинаміки, також відомі як рівняння мезометеорології. [3]

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{G} + \vec{F}_k - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \vec{u}' u'_i \rangle, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{c_p} \Phi + Q_r - \frac{\partial \langle u'_i \theta' \rangle}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\Phi - \frac{\partial \langle u'_i q' \rangle}{\partial x_i}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\rho} \right) = \Phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle m' u'_i \rangle}{\partial x_i}, \quad (1.4)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{u} = 0. \quad (1.5)$$

Зазначимо, що в рівняннях (1.1)-(1.5) по індексу i відбувається підсумовування; метеорологічні змінні взяті осередненими за Рейнольдсом, але для певного спрощення запису, оператор усереднення (трикутні дужки) записані виключно по відношенню до турбулентних потоків.

Стосовно рівняння (1.1) маємо наступне:

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ – вектор середніх по ансамблю реалізацій в розкладі за Рейнольдсом швидкостей частинки,

$\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) = (u', v', w')$ – пульсаційна складова (по відношенню до всіх інших метеорологічних змінних застосовується аналогічний розклад),

$d/dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ – лагранжовий оператор похідної по часу, який пов'язує швидкість змін характеристики рухомої частинки середовища з характеристиками відповідних полів, як функцій координат і часу,

ρ – густина повітря,

$\vec{F}_k$ – сила Коріоліса,

$\vec{G}$ – гравітаційна сила,

P – тиск.

Ліва його частина являє собою зміну швидкості частинки вздовж обраної траєкторії, в той час як права складається з гравітаційної сили, сили Коріоліса, сили тиску оточуючого середовища на частинку повітря і власне тензора турбулентних напруг за рахунок взаємодій турбулентних пульсацій. В ньому залишена лише одна складова – вертикальна похідна тензора турбулентних напруг, оскільки в атмосфері зазвичай вертикальний турбулентний обмін набагато інтенсивніший за горизонтальний. Тензор в'язких напруг також відсутній, оскільки в атмосфері числа Рейнольдса завжди великі, і "в'язкими" членами можна знехтувати.

Що стосується другого рівняння (1.2):

$\theta = T (p_0/p)^{R/c_p}$ – потенціальна температура,

c_v – теплоємність при сталому об'ємі,

c_p – теплоємність при сталому тиску,

R – газова стала для повітря, $R = 287,2$ Дж/(моль · К),

L – прихована теплота конденсації (або сублімації),

Q_r – радіаційна складова припливу тепла, що рівна дивергенції різниці

потоків випромінювань, що падають на Землю і випускаються в космос:

$$Q_r = \frac{1}{\rho c_p} \cdot \left(\frac{\partial (F_D - F_U)}{\partial z} \right),$$

Швидкість утворення рідкої фази $\Phi = 0$ при $q < q_n$ та $\Phi = -\frac{dq_n}{dt} + \Delta_\alpha q_n$,

де q_n – питома вологість насичення, m – водність.

Останні члени в правих частинах рівнянь (1.1)-(1.4) являють собою турбулентні потоки відповідних змінних [3].

Для повноти картини рівнянь (1.1)-(1.5) необхідно параметризувати ряд членів, таких як радіаційні потоки тепла, турбулентні потоки тепла і імпульсу. Наведемо один з підходів параметризації.

Турбулентні потоки (для стисливої рідини) параметризуються за допомогою наступних градієнтних співвідношень, які зберігають тензорну інваріантність

відносно перетворень системи координат, до прикладу, якщо у нас тензор-напруг рівний нулю середовище рухається за законом обертання як суцільного твердого тіла, то в такому випадку, при такій параметризації, це буде виконуватись. А також задовільняють необхідні асимптотичні співвідношення (сума зліва і справа при $i = j$ має збігатися): покладемо i на рівні j і зробимо підсумовування лівої і правої частини. Зліва вийде: $-2/3k$, а праворуч вийде: $\text{div}\vec{u} - 2/3k - \text{div}\vec{u} = -2/3k$ [4]:

$$\begin{cases} -\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(k + \nu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \\ -\langle u'_i \varphi' \rangle = \frac{\nu_T}{\sigma_\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (1.6)$$

де

ν_T – турбулентна в'язкість,

φ – деяка скалярна величина,

$k = \frac{1}{2} \sum_i \langle u_i'^2 \rangle$ – турбулентна кінетична енергія,

δ_{ij} – символ Кронекера.

У випадку розвиненої турбулентності, турбулентну вязкість можна обчислити виходячи з відомих співвідношень Колмогорова-Прандтля [5]:

$$\nu_T \approx C'_\mu \sqrt{k} l, \quad (1.7)$$

де l – інтегральний масштаб турбулентності (характерний розмір великих енергонасичених вихорів), для якого можна використовувати алгебраїчні співвідношення, а C'_μ – деяка константа. Ця емпірична числова величина в загальному випадку, залежить від турбулентного числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{k} L}{\nu_T},$$

де $\nu_T = \mu_T / \rho$ – кінематичний коефіцієнт молекулярної в'язкості. Проте для випадку з повністю розвинутою турбулентністю ($\text{Re} \rightarrow \infty$) вважають, що $C'_\mu = \text{const}$. Інший підхід для параметризації полягає в тому, що застосовується

зв'язок турбулентної в'язкості зі швидкістю дисипації турбулентної енергії ε :

$$\nu_T = C'_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Для k і ε зазвичай виписуються окремі рівняння (див. [5]) ($(k - \varepsilon)$ модель), яка буде розглянута далі в даній роботі. Зауважимо, що в стандартних метеорологічних задачах частенько можна знехтувати усіма похідними, які входять у параметризацію турбулентних потоків (1.6), окрім похідних по вертикалі. Але в задачах пов'язаних з мікромасштабом, наприклад, обтікання споруди, необхідно враховувати усі доданки в системі рівнянь (1.6) [6].

Мезомасштабні метеорологічні моделі широко застосовуються на практиці використовуючи інструменти чисельного передбачення погоди (numerical weather prediction). Найбільш використовуваними є [7]:

- WRF (Weather Research and Forecasting Model) – для локального поточного прогнозу погоди;
- ARPS (Advanced Regional Prediction System) – для моделювання штормів у глобальних масштабах та розробки регіональної моделі прогнозування погоди;
- COSMO (Consortium for Small-scale Modeling) – використовується здебільшого європейськими науковцями для дослідження негідростатичної моделі атмосфери;
- HARMONIE-AROME – для надання точного і детального прогнозу (до 51 години), оскільки вона враховує конвективні процеси в атмосфері.

1.3 Планетарний граничний шар

Планетарним граничним шаром називається шар атмосфери, в якому існує турбулентність. Основна відмінність його від звичайного граничного шару є такою, що на його характеристики додатково впливає обертання Землі.

Над планетарним граничним шаром члени, які відповідають за турбулентність, прямують до нуля, а тому рівняння динаміки атмосфери (1.1) зводяться

до простого балансу двох сил між членами Коріоліса і градієнтом тиску:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} - \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} - \frac{\partial (\overline{v'w'})}{\partial z}.$$

За відсутністю тертя ця умова служить визначенням геострофічного вітру, компонентами якого є:

$$f v_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad f u_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}. \quad (1.9)$$

А тому попередні рівняння набудуть вигляду:

$$f (\bar{v} - v_g) = \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}, \quad (1.10)$$

$$-f (\bar{u} - u_g) = \frac{\partial (\overline{v'w'})}{\partial z}, \quad (1.11)$$

де $f = 2\Omega \sin \varphi, \in [0; \infty)$ – параметр Коріоліса, що залежить від широти φ . $f = 0$ на екваторі, і $f \rightarrow \infty$ на полюсах. Рівняння (1.10) і (1.11) показують, що в середньому вітер у стаціонарному одновимірному ПГШ є результатом вертикальних градієнтів вихрових коваріацій або напружень. Зауважимо, що для цього випадку $\bar{w} = 0$ [8].

Досить легко зробити дані безрозмірними. Наприклад, можна стверджувати, що всі швидкості, з якими ми маємо справу в природі можна порівняти зі швидкістю світла, а всі довжини, які ми зустрічаємо, – з радіусом Землі, або ж відстанню від Землі до Сонця. Отже, як бачимо, проблема полягає власне не в безрозмірності, а у виборі вдалих параметрів масштабування для найкращого висвітлення особливостей планетарного граничного шару. Тобто можна задатися питанням, що є відповідним масштабом для температури, швидкості та довжини [9].

Розглянемо випадок в нейтрально стратифікованому горизонтально однорідному шарі баротропної атмосфери. Баротропною називається атмосфера, в якій густина залежить виключно від тиску, тобто $\rho = \rho(p)$. Характеризується

відсутністю горизонтальних градієнтів температури на ізоповерхнях тиску. В реальних ситуаціях по окремої і баротропність, і бароклінність трапляється часто, а спостережувані випадки одночасного поєднання усіх припущень теорії ПГШ: нейтральна стратифікація, баротропність, бароклінність, відсутність вертикальних рухів, горизонтальна однорідність цих спрощень одночасно, зустрічаються дуже рідко. Геострофічним вітром називають явище, коли швидкість вітру, що виникає у випадку врівноваження сили Коріоліса градієнтною силою тиску. Рівняння яке описує геострофічний вітер є наступним:

$$\vec{f} \times \vec{v}_g = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p,$$

де $\vec{v}_g = (v_{gx}, v_{gy})$ – геострофічна швидкість, $\vec{\nabla} p$ – горизонтальний градієнт тиску. Геострофічна швидкість – це швидкість, що існує в верхніх шарах атмосфери, вона має постійний напрям і не змінюється у припущеннях теорії горизонтально однорідного граничного шару. Вона змінюється за напрямком і величиною виключно лише якщо враховується вплив поверхні Землі. На ”нескінченній” (дуже великій) висоті ця швидкість буде направлена вздовж одного й того самого вектору. У баротропній атмосфері геострофічна швидкість є однаковою на всіх рівнях, оскільки вертикальний зсув відсутній, тому геострофічний вітер незмінний з висотою. Нейтрально стратифікований шар – це проміжний шар в атмосфері, в якому на вертикальний рух частинок немає ні посилюючого, ні послаблюючого ефекту від потоків тепла що спрямовані від поверхні Землі. Іншими словами, це стан при якому вертикальний градієнт температури дорівнює сухоадіабатичному градієнту, тобто температура з висотою змінюється так, що не виникає ані стійкості, ані нестійкості до вертикальних переміщень. Глибина цього шару є змінною, але характерним значенням приймається приблизно 100 м. Нейтральна стратифікація – це не рідкісне явище, у наших помірних широтах вона спостерігається приблизно у половині випадків. У нейтрально стратифікованому приземному шарі температуру можна вважати незалежною від висоти від поверхні Землі Швидкість вітру U в цьому граничному шарі має такий самий порядок, як і геострофічна швидкість вітру G , $G = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}$. Тоді їх відноше-

ння $U/G \sim 1$, а G виступатиме як відповідна шкала швидкості для вітрового поля біля земної поверхні. Всупереч цьому постає питання: чи точно G – вдалий вибір? Оскільки в граничному шарі швидкість вітру є функцією від висоти, тобто $u(z)$, то нам необхідно визначити відповідний масштаб для z . Насправді, можливі два варіанти. Перший пов'язаний з вибором масштабу шорсткості z_0 , а другий – з вибором масштабу довжини, який характеризує горизонтальний масштаб, на якому геострофічна швидкість може суттєво змінюватись. Тобто два масштаби: малий ($z_0 \approx 0,1$ м), для більшості поверхні суші та дуже великий ($G/f \approx 10^5$ м), при $G = 10$ м/с та $f = 10^{-4}$ с $^{-1}$. Їх відношення $Ro = G/fz_0$ це так зване поверхневе число Россбі, яке є центральним безрозмірним параметром у планетарній теорії прибережного шару [8; 10].

Якщо ми вирішимо використовувати висоту шорсткості z_0 як відповідний масштаб для z в поверхневому шарі, ми можемо стверджувати, що має місце так функціональна залежність $U/G = F(z/z_0)$. Дане твердження є неповним, оскільки у нас немає жодних підстав вважати, що U/G не є функцією від числа Россбі. Базуючись на цьому, можна сказати що, вище зазначене твердження є дуже загальним і не несе в собі практичної користі. Шукаючи альтернативу, можна зауважити, що поверхневе напруження тертя також є функцією від числа Россбі. Характерна швидкість, що залежить від поверхневого напруження, називають швидкістю тертя та позначають як u_* . Вона визначається з рівняння:

$$\tau_0 = \rho u_*^2.$$

А напруга тертя визначається як кореляція пульсацій, тобто відхилень від усереднених миттєвих швидкостей u та v :

$$\tau_x = \langle u'w' \rangle \quad \tau_y = \langle v'w' \rangle, \quad \tau_0 = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (1.12)$$

Якщо τ_0 є функцією від G/fz_0 , то і u_* також:

$$\frac{u_*}{G} = F_g(G/fz_0). \quad (1.13)$$

Оскільки ми передбачаємо, що u_*/G зростає зі зменшенням G/fz_0 , то ми маємо

остаточно вирішити яку з двох шкал швидкостей (u_* чи G) слід використовувати для безрозмірних профілів вітру в нейтрально стратифікованому планетарному прилежовому шарі [11].

Швидкість тертя є залежним зовнішнім параметром по відношенню до течії в планетарному прилежовому шарі, але при цьому вона враховує вплив великомасштабного поля тиску та шорсткості поверхні. Поміж цим, оскільки поверхневий тиск дорівнює турбулентному потоку імпульсу в повітрі безпосередньо над поверхнею, u_* в певному розумінні є представником турбулентних коливань вітру в нижніх шарах атмосфери. І нарешті, оскільки приземний вітер спостерігається в узгодженості з поверхневим напруженням, то використання u_* для шкалювання швидкості, не спричиняє жодних проблем, які могли б виникнути через різницю напрямків τ_0 і G . Отже, при застосуванні u_* як шкали, в найнижчих 100 м має перевагу над використанням G .

Як ми припустили вище, найбільш відповідним масштабом для висоти z є висота шорсткості z_0 . Запишемо профіль вітру в нейтральному приземному шарі як:

$$\frac{U}{u_*} = f_X(z/z_0). \quad (1.14)$$

Побудувавши профіль вітру в такому вигляді, можна очікувати, що він не покаже явної залежності від числа Россбі. Ця перевага не обходиться без витрат: швидкість тертя є залежним, внутрішнім параметром прилежового шару, так що закон подібності поверхневого шару (1.14) є співвідношенням, що базується на внутрішній параметризації. Рівняння (1.13), (1.14) містять неявну залежність від G/fz_0 , а проблему представлення даних не можна вважати вирішеною, доки не будуть відомі обидва параметра: F_g у (1.13) та f_X в рівнянні (1.14) [11]. Рівняння (1.13), можна представити у вигляді залежності:

$$u_{*0} = GF_g(G/fz_0), \quad (1.15)$$

що має вигляд закону опору, і дає поверхнєве напруження або шкалу швидкостей внутрішнього прилежового шару атмосфери u_* , як функцію геострофічного вітру, і величини Ro – згадане поверхнєве число Россбі. Це число, це безрозмір-

ний параметр в ПГШ, яки поєднує три важливі зовнішні параметри. Величина $(u_{*0}/G)^2$ також відома як коефіцієнт геострофічного опору. Якщо використовувати альтернативну шкалу довжин u_{*0}/f , то з рівняння (1.15) можна отримати співвідношення:

$$u_{*0}/G = F(u_{*0}/fz_0), \quad (1.16)$$

яке також є законом опору, що дає коефіцієнт геострофічного опору як неявну функцію поверхневого числа Россбі. Параметр u_{*0}/f_0 називається числом тертя Россбі [8].

Для висоти граничного шару побудована теорія, яка в кінцевому випадку визначає, що висота граничного шару буде пропорційна u_* :

$$H \sim \frac{u_*}{f}$$

де u_* – напруга тертя біля поверхні Землі (параметр задачі), $u_* = \sqrt{\tau}$, f – параметр Коріоліса. В задачі τ змінюється, але біля поверхні Землі воно виступає теж параметром задачі. І оскільки τ має розмірність $(\text{м/с})^2$, то корінь з цього виразу власне має розмірність швидкості м/с. Цю швидкість називають динамічною швидкістю. Експериментальним шляхом було показано, що

$$H \sim \frac{u_*}{f} \approx (0.2 \pm 0.05) \cdot \frac{u_*}{f}.$$

З цього можна зробити такий висновок: Якщо, наприклад, $u_* = 1 \text{ м/с}$ – характерне значення для високого вітру в атмосфері, а $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, то $H \approx 2000 \text{ м}$. В наших, помірних широтах, характерне значення для H це $\sim 1000 \text{ м}$. А влітку, при сильній конвекції, може досягати рівня 1500-2000 м. З цього можна зробити висновок, що теорія подібності, дає лише ось такі асимптотичні значення. Реальний же атмосферний граничний шар має динаміку, H змінюється у часі та просторі, тому необхідно мати моделі, щоб мати змогу якнайточніше це моделювати.

Схожа ситуація відбувається в приземному шарі. Ми можемо знехтувати ще й в'язкими напруженнями $\mu \partial^2 \vec{u} / \partial z^2$ і $\mu \partial^2 \vec{v} / \partial z^2$. Як було зазначено раніше,

висота z_0 є відповідним масштабом довжини для течії в безпосередній близькості від шорсткої поверхні, а u_* – відповідним масштабом швидкості. Ліві частини рівнянь (1.10)-(1.11) є дуже малими. Типовими значення є такі:

$$u_g = 10 \text{ м/с}^{-1}; v_g = 5 \text{ м/с}^{-1}; u_*^2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}^{-2}; f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}; z_0 = 0,01 \text{ м}.$$

Отже ліві частини (1.10)-(1.11) набувають значень $5 \cdot 10^{-5}$, 10^{-4} відповідно. Здається правдоподібним припустити, що ці числа будуть зменшуватися з подальшим збільшенням значення поверхневого числа Россбі, тобто на межі $G/(fz) \rightarrow \infty$, ліві частини цих рівнянь обнуляються, і вони набудуть:

$$\frac{d(\langle uw \rangle)/u_*^2}{dz/z_0} = 0, \quad \frac{d(\langle vw \rangle)/u_*^2}{dz/z_0} = 0. \quad (1.17)$$

Амплітуда геострофічного вітру визначається як $G = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}$. Вісь X зручно сумістити з напрямком поверхневих напружень, так що $\vec{u}_g = (u_g, 0, 0)$. На рівні шорсткості поверхні $z = z_0$ маємо:

$$\tau_X = -\rho \langle uw \rangle = \tau_0 = \rho u_*^2, \quad (1.18)$$

$$\tau_Y = -\rho \langle vw \rangle = 0. \quad (1.19)$$

Ці граничні умови свідчать про те, що компоненти напружень Рейнольдса $\rho \langle uw \rangle$ і $\rho \langle vw \rangle$, доцільно замінити поверхневими напруженнями. Цей вибір зберігає нормовані напруження $\langle uw \rangle/u_*^2$ та $\langle vw \rangle/u_*^2$ скінченними, незалежно від того, наскільки великим стає поверхнєве число Россбі. А вибір нормалізуючої швидкості для різниць швидкостей $(u - u_g)$ і $(v - v_g)$ не є таким простим. Тут нам потрібно запозичити спостережену поведінку інших типів примежових шарів [12]. Їх лабораторний досвід роботи з течіями показує, що u_* є відповідним масштабом швидкості для геострофічних компонентів вітру і цей вибір узгоджується з використанням u_* як нормалізуючого фактора для профілю вітру в шарах атмосфери < 100 м (див. розділ 1.2). Перетворення Галілея, пов'язане з використанням $u - u_g$ і $v - v_g$ як залежних змінних, зводиться до спостереження планетарного примежевого шару з повітряної кулі, що дрейфує разом з геострофічним вітром.

Різниця вітру, що спостерігається з цієї кулі, спричинена тертям, тому здається логічним масштабувати її за швидкістю тертя [11].

Базуючись на вище зазначеному, зокрема на рівняннях (1.17)-(1.19) стосовно граничних умов на напруження, можна прийти до висновку, що напруження зсуву є приблизно постійним для всіх значень z/z_0 , які не є надто великими:

$$-\langle uw \rangle = u_*^2, \quad -\langle vw \rangle = 0.$$

Це є основою для так званої теоретичної концепції "шару постійних напружень" поблизу нижньої частини планетарного приземного шару. Зазначимо, що ця концепція є наслідком прийнятого масштабування, що початкові рівняння руху показують, що напруження зсуву змінюється найшвидше поблизу поверхні, але (1.17) припускає, що ці зміни повільні, а тому не є помітними, якщо ми фокусуємось на дуже великих значеннях G/fz_0 і обмежуємо наш розгляд малими значеннями z/z_0 [11].

З таким сильно обмеженим полем зору ми не можемо бачити геострофічний вітер у верхній частині приземного шару атмосфери, і правильним способом представлення профілів вітру над сушею є узагальнення рівнянь (1.14) до наступного вигляду:

$$\frac{u}{u_*} = f_X(z/z_0), \quad \frac{v}{u_*} = 0. \quad (1.20)$$

Друге з них є тривіальним, оскільки поверхневе напруження не має y компоненти, а аналізуючи порядок величини, що впливає з (1.10)-(1.11), свідчить про те, що вплив параметра Коріоліса є незначним в найнижчих шарах атмосфери, тому немає жодних підстав припускати, що вітер змінюватиме напрям зі зміною висоти. Шар, у якому справджується умова (1.20), називають приземним граничним шаром або примежовим шаром. У примежевому шарі вітер паралельний поверхневому напруженню. Крім цього, оскільки вплив сили Коріоліса тут є незначним, (1.20) не залежить явно від поверхневого числа Россбі (G/fz_0). Цей безрозмірний профіль вітру, як і його аналог у верхніх шарах, таким чином, демонструє подібність за числом Россбі. Примежовий шар, що описується рівняннями (1.20), не є рідкісним явищем у безпосередніх польових дослідженнях.

Незважаючи на відносно невеликі спостережувально ефективні часові та просторові масштаби поверхневого шару (z/u_* , z відповідно) лишається можливим знайти умови, які є достатньо стаціонарними та однорідними для отримання даних без надмірного розсіювання [11].

Так званий закон подібності примежового шару (1.20), з очевидних причин не є застосовним для великих значень відношення z/z_0 . А інші закони подібності, які припускають ігнорування поверхневих граничних умов, свобода від явних параметрів і аналіз околу сингулярної точки на окремому масштабі:

$$\frac{u - u_g}{u_*} = f_X\left(\frac{zf}{u_*}\right), \quad \frac{v - v_g}{u_*} = f_Y\left(\frac{zf}{u_*}\right), \quad (1.21)$$

навпаки, не можуть бути поширені на дуже малі значення z/z_0 через дуже круті градієнти у цій області. Відсутні граничні умови забезпечуються процесом, відомим в теорії сингулярних збурень як "асимптотичне узгодження" (asymptotic matching). Узгодження – це метод, за допомогою якого вимагається, щоб закони подібності "верхнього рівня" (1.21) були ідентичними закону подібності в примежовому шарі (1.20) у випадку з подвійною межею:

– $zf/u_* \rightarrow 0$ – дивлячись вниз на поверхню з середніх рівнів у планетарному примежовому шарі;

– $z/z_0 \rightarrow \infty$ – дивлячись вгору з поверхневого шару.

Завдячуючи галілеївському перетворенню, між лівими частинами (1.20) та (1.21), можна провести узгодження u -компоненти з компонентою вітрового зсуву $\partial u / \partial z$.

З (1.21) ми отримуємо наступне:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f \cdot \frac{\partial f_X}{\partial \eta}, \quad \eta = zf/u_*, \quad (1.22)$$

а з (1.20):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{z_0} \cdot \frac{\partial f_X}{\partial \xi}, \quad \xi = z/z_0. \quad (1.23)$$

Ми отримали два ідентичні рівняння для процесу з подвійною межею ($\eta \rightarrow 0$,

$\xi \rightarrow \infty$). Домноживши на z/u_* , прирівняємо вище наведені рівняння:

$$\frac{z}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \eta \frac{\partial f_X}{\partial \eta} = \xi \frac{\partial f_X}{\partial \xi}. \quad (1.24)$$

Можна бачити, що вираз по центру є функцією лише від η , вираз праворуч – функцією виключно від ξ . Однак якщо η наближається до нуля, а ξ зростає безмежно, то єдиний спосіб, у який ці два вирази можуть бути рівними, не приводячи до сингулярних або тривіальних результатів, – це випадок, коли обидві величини наближаються до ненульової асимптоти:

$$\frac{z}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\kappa}, \quad (1.25)$$

де κ – постійна, також відома як константа Кармана. З практичної точки зору (1.25) означає, що в шарі, де відношення z/z_0 є настільки великим, що вплив z_0 є мізерним, в той час як zf/u_* настільки мале, що вплив сили Коріоліса f має бути незначним, а зсув вітру $\partial u/\partial z$ може залежати тільки від швидкості тертя u_* і висоти z . Перші формулювання (1.25) так чи інакше ґрунтувалися на припущенні, що повинен існувати шар, в якому висота z слугуватиме власне масштабом для довжини. А фактично, як показує вищенаведений аналіз, існування шару вільного від явної залежності від зовнішніх масштабів довжин, є безпосереднім слідуванням з подвійного граничного процесу ($z/z_0 \rightarrow \infty$, $zf/u_* \rightarrow 0$) [13].

Інтегруючи (1.25) ми отримаємо всім відомий логарифмічний профіль вітру:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_r} \right), \quad (1.26)$$

де z_r – довільна константа інтегрування. Логарифмічний профіль вітру – це певна напівемпірична залежність, що часто використовується для опису вертикального розподілу середньої горизонтальної швидкості вітру в найнижчій частині планетарного граничного шару і, як правило, обмежується найнижчими 100 м атмосфери (тобто, приземним шаром атмосферного граничного шару) [14]. Оскільки асимптотичний аналіз показує, що цей профіль підпоряд-

ковується законам поверхневого шару (1.20) і верхнього рівня (1.21), то існують дві альтернативні форми для запису (1.26):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(z/z_0), \text{ при } z/z_0 \gg 1, \quad (1.27)$$

та

$$\frac{(u - u_g)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} [\ln(zf/u_*) + A], \text{ при } zf/u_* \ll 1 \quad (1.28)$$

Область виконання обидвох умов (1.27), (1.28) була названа ”інерційним підшаром” з відсилкою на інерційний піддіапазон у спектрі турбулентної кінетичної енергії [15].

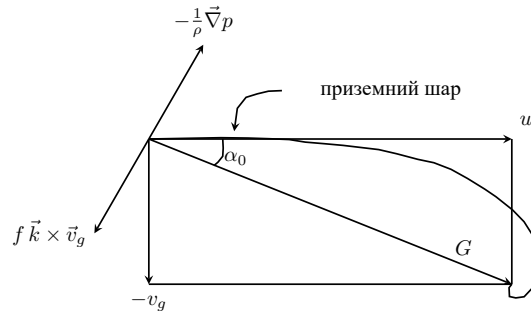


Рисунок 1.1 – Вітрова спіраль у нейтральному баротропному прилежовому шарі.

Віднявши (1.27) від (1.28), отримуємо:

$$\frac{u_g}{u_*} = \frac{1}{\kappa} (\ln u_*/fz_0 - A). \quad (1.29)$$

А щоб отримати співвідношення v_g/u_* можна зрівняти другі члени рівнянь (1.21) та (1.20) на рівні близькому до поверхні. Маємо наступне:

$$\frac{v_g}{u_*} = F_Y(0) = -\frac{B}{\kappa}. \quad (1.30)$$

Кут α_0 між поверхневим вітром і геострофічним вітром дорівнює $\arctan(-v_g/u_g)$

(див. рис. 1.1), тобто:

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{v_g}{u_g} \right) = \arctan \left(\frac{B}{\kappa} \cdot \frac{u_*}{u_g} \right). \quad (1.31)$$

Співвідношення u_*/u_g можна взяти з рівняння (1.29). Зауважимо, що кут збільшується із збільшенням шорсткості поверхні, як це і очікувалося.

За вже даним раніше означенням амплітуди геострофічного вітру G , з рівнянь (1.29)-(1.30) маємо:

$$\frac{G}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \cdot \left([\ln(u_*/fz_0) - A]^2 + B^2 \right)^{1/2}. \quad (1.32)$$

Це неявна залежність коефіцієнта геострофічного опору u_*/G від поверхневого числа Россбі G/fz_0 . Логарифмічний закон тертя (1.32) дає формулу для визначення поверхневого напруження, якщо задані зовнішні параметри G , f , z_0 . Оскільки планетарні примежові шари в багатьох випадках ніколи не задовольняють усім умовам, які накладає подібність за числом Россбі, експериментальні дані щодо значень констант A і B у рівняннях (1.29)-(1.32) демонструють значну розбіжність [11].

Характерним значенням констант вважають [10]:

$$\kappa = 0,4 \pm 0,04; \quad A \approx 2; \quad B \approx 5.$$

Найбільш типовими параметрами ПГШ у середніх широтах виступають:

$$f = 10^{-4} \text{с}^{-1}; \quad u_* = 0,4 \text{м/с}.$$

У нейтрально-стратифікованих умовах діапазон висот на якому виконується логарифмічний профіль вітру ($l = \kappa z$) часто є порядку 100 метрів, і очевидно, що інерційний підшар є товстішим за шар з постійним напруженням [10].

1.4 Приземний граничний шар за наявності теплообміну

Випадки з присутністю теплового потоку в дуже рідких випадках є стійкими. Горизонтальні градієнти температури утворюють перенесення тепла, так що геострофічний вітер починає залежати від висоти, температурного профілю, який вже не буде адіабатичним і інших параметрів. Це одна з причин, що обмежує використання теорію подібності чисел Россбі і натякає на необхідність врахування масштабу Обухова. Вже згадувалося, що логарифмічний профіль, який описує розподіленість метеорологічних величин в приземному шарі, є істинним для випадку наближеності до нейтральної стратифікації. При стійкій та нестійкій стратифікації спостерігаються певні частотні відхилення основних характеристик ПГШ (профілю швидкості вітру, вологості, температури) від логарифмічних. При наближенні до земної поверхні вітер повністю починає відповідати логарифмічному профілю, проте варто зауважити, що чим ближчою стратифікація є до нейтрального стану, тим при більшій висоті z це відбуватиметься. Однією з основних теорій, яка б максимально враховувала вплив стратифікації на профіль вітру, є теорія Моніна-Обухова, яка застосовна до приземного шару землі. Аналіз розмірних величин, таких як температура і зміна швидкості вітру з висотою, підштовхнула вчених до висновку: безрозмірні співвідношення швидкостей вітру u/u_* і температур T/T_* є універсальними функціями безрозмірного відношення, більш відомого як параметра статичної стійкості або ж просто масштабом Обухова [4].

$$\zeta = \frac{z}{L}, \quad (1.33)$$

де ζ – безрозмірна висота, z – висота, а L – масштаб висоти Моніна-Обухова. Цей масштаб задається як:

$$L = -\frac{u_*^2}{\kappa\beta T_*},$$

де

u_* – швидкість тертя, або ж масштаб швидкості;

κ – константа Кармана;

β – параметр плавучості, $\beta = g/T_0$,

g – прискорення вільного падіння, T_0 – температура;

ε – турбулена кінетична енергія, ρ – щільність повітря, c_p – питома теплоємність повітря при постійному тиску.

В більш звичному вигляді:

$$L = -\frac{u_*^3}{\kappa \frac{g}{T_0} Q}. \quad (1.34)$$

Дана залежність описує вертикальну поведінку безрозмірних середніх властивостей потоку та турбулентності загалом в приземному шарі, що складає $\sim 10\%$ прикордонного шару атмосфери. Фактично, тут у знаменнику стоїть масштаб Архімедових сил або сил плавучості, які приводять до утворення турбулентності за рахунок конвекції, а в чисельнику стоїть масштаб інтенсивності генерування турбулентності за рахунок вертикального зсуву швидкості. Тобто два механізми породження турбулентності. Зсув швидкості біля поверхні Землі – швидкість зменшується, це призводить до нестійкості та виникнення турбулентності. І потік тепла, якщо він додатній, це приводить до конвекції, яка в свою чергу теж спонукає створення турбулентного ефекту. Залежно від знаку Q , тобто залежно від випадків куди спрямований потік тепла, змінюється значення L . До прикладу, якщо потік тепла спрямований від поверхні Землі в атмосферу, тобто поверхня Землі тепліша за атмосферу, $Q > 0$, то $L < 0$. Це випадок стійкої стратифікації. При $L < 0$ – нестійкої, а при $Q \rightarrow 0$, $|L| \rightarrow \infty$ – нейтральної. Можна зробити такий висновок, що чим більше масштаб Моніна-Обухова по модулю, тим більше домінує зсув швидкості і менше відносний вплив сил плавучості і взагалі потоку тепла. І навпаки, чим менше параметр L , тим важливіше вплив теплового потоку.

Застосовані шкали:

- $u_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ – швидкість тертя/зсуву (шкала швидкості);
- $T_* = Q_0/u_*$ – шкала температури поверхневого шару;
- (1.34) – довжина Обухова (шкала довжини).

Ці три вищезазначені шкали можуть бути використані в розмірному аналізі

для вираження всіх властивостей потоку поверхневого шару як безрозмірних універсальних функцій z/L [16].

Відповідно до теорії подібності Моніна-Обухова та згідно до II-теореми в інерційному підшарі безрозмірний зсув вітру відношення швидкості, до комбінації безрозмірних змінних, має бути функцією від ζ , позначили $\varphi_u(\zeta) = \zeta \cdot g_u(\zeta)$. Це зроблено для того, щоб при $L \rightarrow \infty$ та $\zeta \rightarrow 1$, наступні формули сходилися до логарифмічного профілю вітру [4]. Тобто:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa L} g_u(\zeta) = \frac{u_* \zeta}{\kappa z} g_u(\zeta) = \frac{u_*}{\kappa z} \varphi_u(\zeta), \quad (1.35)$$

за умови, що $\varphi_u(0) = 1$. І за діабатичних умов профіль температур $\langle w'T' \rangle = Q_0$ також має бути заданим в безрозмірній формі:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q_0}{u_* \kappa L} g_T(\zeta) = -\frac{Q_0 \zeta}{u_* \kappa z} g_T(\zeta) = -\frac{Q_0}{u_* \kappa z} \varphi_T(\zeta), \quad (1.36)$$

також за умови, що $\varphi_T(0) = 1$. Відомо, що кінематичні коефіцієнти турбулентної в'язкості та теплопровідності через універсальні функції задаються наступним чином:

$$\nu_T = \frac{\kappa z u_*}{\varphi_T(\zeta)}, \quad K = \frac{\kappa z u_*}{\varphi_u(\zeta)}. \quad (1.37)$$

Коефіцієнт турбулентної теплопровідності також може задаватися через число Шмідта для температури (Sc_T): $K = \nu_T / \sigma_T = \nu_T / Sc_T$, де $\sigma_T = \nu_T / K = \varphi_u / \varphi_T$. В повітрі цей коефіцієнт близький до 1.

Використання ζ , як певного фундаментального параметра діабатичного примежового шару, стало основним результатом теорії подібності Моніна-Обухова. При слабкій стратифікації ($\zeta \ll 1$), універсальну функцію можна представити у вигляді степеню ряду, і знехтувавши доданками 2 степеня малості, вона набуватиме вигляду: $\varphi(\zeta) \approx 1 + \alpha z/L$, де α – певний коефіцієнт розкладу. Дана теорія є основною гіпотезою подібності для горизонтально однорідного поверхневого шару, проте теорія не надає жодних методів для визначення аналітичної форми функцій φ_u , φ_T . Форма цих функцій визначається безпосередньо за допомогою експериментів [4; 11].

Емпіричні формули (залежності Бусінгера-Даєра) були отримані у 1970

році [4]. Фактично, ці залежності можна вважати вимірами, тому що емпіричні функції були підібрані шляхом експериментів і перевірені групою вчених [17].

$$\varphi_u(\zeta) = (1 - 15 \cdot \zeta)^{-1/4}, \zeta < 0 \quad \varphi_u(\zeta) = 1 + 4,7 \cdot \zeta, \zeta > 0 \quad (1.38)$$

$$\varphi_T(\zeta) = 0,74 \cdot (1 - 9 \cdot \zeta)^{-1/2}, \zeta < 0 \quad \varphi_T(\zeta) = 0,74 + 4,7\zeta, \zeta > 0 \quad (1.39)$$

Важливі параметри з даного розділу: Висота z над поверхнею, коефіцієнт плавучості g/T_0 , що є відношенням сил інерції та плавучості, кінематичне поверхнєве напруження τ_0/ρ та поверхневий кінематичний потік тепла, іншими словами – температурна напруга $Q_0 = H_0/(\rho C_p) = \langle w'T' \rangle$, де g – прискорення вільного повітря, T_0 – температура, τ_0 – турбулентне напруження на поверхні землі, Q_0 – кінематичний потік на поверхні, H_0 – динамічний (“справжній”) тепловий потік на поверхні, $\langle w'T_0 \rangle$ – коваріація вертикальної швидкості w з T_0 біля поверхні Землі.

За допомогою цих рівнянь та гіпотези про те, що потоки в поверхневому шарі є однорідними по висоті, можна визначити потік імпульсу, потік тепла та потоки водяної пари та інших газів.

Висновки до розділу 1

Ми провели загальний огляд методів, теорій та моделей гідродинаміки, які використовуються для прогнозування і моделювання турбулентних явищ. Розглянули рівняння, які моделюють процеси утворення геострофічного вітру, турбулентності без та з урахуванням процесу теплообміну, навели значення основних констант. З проведеного аналізу можемо сформулювати мету нашого дослідження: дослідити моделі турбулентності та їх узгодження з вимірами, отриманими для асимптотичних випадків горизонтально однорідного граничного шару атмосфери. Все вище перераховане допоможе нам в наступних розділах чітко окреслити постановку задачі.

2 МОДЕЛІ ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРІДНОГО АТМОСФЕРНОГО ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

2.1 Теоретичні відомості

Поле швидкості вітру визначається розв'язанням класичних стаціонарних (без зміни у часі) рівнянь гідродинаміки для нестисненої рідини, осереднених за Рейнольдсом, без урахування процесів теплообміну [4]. Для стаціонарних, тобто не залежних від часу, гідродинамічних полів система рівнянь нерозривності та збереження імпульсу (більш відома як рівняння Нав'є-Стокса) набуває вигляду:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} - \vec{\nabla} \cdot (v_T \vec{\nabla} \vec{U}) = - [\vec{f} \times (\vec{U} - \vec{U}_g)] - \vec{\nabla} p, \quad (2.2)$$

де

$\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор швидкостей,

v_T – кінематична турбулентна в'язкість.

Рівняння (2.1) та (2.2) описують вплив сили Коріоліса на процеси, що відбуваються в примежевому шарі атмосфери. В рівнянні (2.2), вектор $\vec{f} = (0, 0, f)$ – вектор Коріоліса, де $f = 2\Omega \sin(\varphi)$. Тут

Ω – кутова швидкість обертання Землі,

φ – географічна широта,

$\vec{U}_g$ – вектор швидкості вітру на верхній межі примежового шару, який приймається рівним відповідному значенню геострофічного вітру [8].

Коефіцієнт турбулентної в'язкості параметризується за допомогою відомого співвідношення, яке описує залежність цього параметра потоку від кінетичної енергії турбулентних пульсацій k та швидкості дисипації турбулентної кінетичної енергії ε (див. формулу (1.8)). Для розрахунку кінетичної енергії турбулентності у

стаціонарному випадку використовується стандартне рівняння [6]:

$$u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right].$$

Тензор напруг τ_{ij} для нестисливої рідини можна обрахувати за допомогою формули (1.6), поклавши дивергенцію рівною нулю [4]:

$$\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle = -v_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \cdot k$$

Є три альтернативні підходи, які можна використати для розрахунку швидкості розсіювання (dissipation rate). У першому варіанті використовується відоме співвідношення дисипації для розвинутої турбулентності [10]:

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{l}. \quad (2.3)$$

Бачимо, що кінетична енергія ε є обернено пропорційною до l – домінуючого масштабу турбулентних пульсацій. Для масштабу турбулентних збурень використовуються різні алгебраїчні співвідношення, в залежності від геометричних характеристик обчислювальної області і інших особливостей задачі (див. наприклад [10]).

2.2 Двопараметрична модель турбулентності та її сучасні модифікації

Другий підхід – полягає в розв'язанні рівнянь для швидкості дисипації енергії турбулентних пульсацій, яка буде детальніше розглянута нижче.

Стандартною моделлю турбулентності ми називаємо $(k - \varepsilon)$ модель. Це дуже поширена в інженерних, в геофізичних застосуваннях модель турбулентності, яка базується на ідеях Колмогорова, але розвиває їх в повноцінну модель, яка застосовується на практиці. Вона є найзагальнішою моделлю, використовується в CFD (Computational Fluid Dynamics) та найчастіше використовується для моделювання середніх характеристик потоку для турбулентного режиму

поток. Основне припущення цієї моделі є наступним: турбулентна в'язкість є ізотропною, інакше кажучи – відношення напруги Рейнольдса та середньої швидкості деформації є однаковою у будь-якому напрямку. Наведемо два рівняння переносу, що є складовою цієї моделі та які застосовуються для загального нестационарного випадку турбулентності:

Для турбулентної кінетичної енергії k маємо:

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\mu_T E_{ij} E_{ij} - \rho \varepsilon.$$

Для дисипації ε :

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_T E_{ij} E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k},$$

де

u_i – являє собою компоненту швидкості у певному напрямку,

E_{ij} – представляє компоненту швидкості деформації і власне є тензором

напруг: $E_{ij} = \frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i}$

μ – коефіцієнт молекулярної динамічної в'язкості,

μ_T – коефіцієнт динамічної турбулентної в'язкості, $\mu_T = \rho \nu_T$, де ν_T – кінематична турбулентна в'язкість і визначається за формулою (1.8).

Також у рівняннях фігурують регульовані константи C_μ , σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, значення яких було підібрано шляхом численних ітеративних прогонок на даних турбулентних течій з широкого діапазону.

$$C_\mu = 0,09; \sigma_k = 1,00; \sigma_\varepsilon = 1,30; C_{1\varepsilon} = 1,44; C_{2\varepsilon} = 1,92. \quad (2.4)$$

Формули читаються як: "Швидкість зміни k або ε в часі + Перенесення k або ε шляхом адвекції дорівнює Перенесення k або ε шляхом дифузії + Швидкість генерації k або ε – Швидкість руйнування k або ε . Ця модель була розроблена для випадків, коли є плоскі зсувні шари і рециркулярні течії. Вона є широко використовуваною і надійною моделлю турбулентності та має досить широке застосування як у сфері промислових, так і у сфері екологічних течій. Найбільш

корисною дана модель є для течій, що мають вільний зсув шару/ів з відносно невеликим градієнтом тиску, а також для випадків обмежених течій, де найважливішим є напруження зсуву Рейнольдса.

Дану модель можна назвати навіть найпростішою, оскільки для неї необхідно ввести лише початкові та/або граничні умови. Проте, $(k - \varepsilon)$ модель має і свої недоліки: вона є дорожчою в плані використанні пам'яті у програмній реалізації, оскільки потребує додатково двох диференціальних рівнянь у часткових похідних. Також не є застосовною для задач, що містять отвори оскільки, експериментально доведено, що точність моделі для потоку/ів падає зі збільшенням градієнтів тиску. І на додачу, найбільший її мінус в тому, що вона погано працюватиме в найпоширеніших випадках, таких як криволінійні примежові шари та необмежені течії.

Наведемо опис найбільш поширених модифікацій $(k - \varepsilon)$ моделі [18]:

- Стандартна $(k - \varepsilon)$ модель. В ній передбачено розв'язання двох рівнянь переносу: кінетичної енергії k та швидкості її дисипації ε . Є найбільш застосовною моделлю, найкраще підходить для випадків повністю турбулентних потоків з великими числами Рейнольдса, але не враховує пристінних ефектів, розділений потоків та несприятливих градієнтів тиску;

- Реалізована (Realizable) $(k - \varepsilon)$ модель. Забезпечує покращене моделювання плоского і круглого потоків, шарів які включають в себе такі явища як рециркуляція/сепарація та вдало справляється з моделюванням потоків які містять обертання, але є доволі складною у моделюванні;

- Модель з низьким числом Рейнольдса (Low-Reynolds Number Model), або ж $(k - \omega)$ модель. Ця модель застосовується для розв'язання задач турбулентності без використання пристінних функцій, де потрібна хороша точність моделювання турбулентного ефекту біля стінок, але вимагає дрібної сітки (масштабу моделювання);

- Модель ренормалізації груп (RNG model). Дозволяє досліджувати і виводити диференціальні рівняння складних потоків, спираючись на фундаментальну фізику та використовуючи чисельні методи. Покращує точність обрахунків для течій, які мають явища викривлення чи обтікання, додаючи додатковий член до

рівняння з ε . Але вона не працює при узагальненні моделі турбулентності на течії з потоками тепла.

2.3 Постановка задачі про моделювання планетарного граничного шару

Нашею задачею є провести моделювання нейтрально стратифікованого планетарного граничного шару з урахуванням ефектів обертання нашої планети.

Наближення, які використовуються для рівнянь руху атмосфери вище планетарного граничного шару це:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - u_g), \quad (2.6)$$

де

$$v_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u_g \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

У випадку стаціонарного горизонтального однорідного нейтрально стратифікованого ПГШ рівняння імпульсу набувають наступного вигляду:

$$f(v - v_g) - \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$-f(u - u_g) - \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

В середині ПГШ ситуація є наступною: рух описується такими рівняннями планетарного граничного шару відносно усереднених компонент швидкості u і v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(v - v_g) - \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -f(u - u_g) - \frac{\partial \tau_y}{\partial z}. \quad (2.10)$$

u можна вважати направленою на захід/схід, або ж іншими словами, вздовж паралелей земної кулі, а v , не обмежуючи загальності, – вздовж меридіанів. В нашій задачі вважатимемо, що осі x, y направлені не вздовж паралелі і меридіану, як у загальних задачах, а вздовж вектору так званої геострофічної швидкості. Ці рівняння кажуть, що зміна з часом компонент швидкості вітру u та v визначається силою Коріоліса і вертикальним градієнтом сили тертя. Насправді, у формулі не позначено, що взято саме усереднені компоненти (тобто мало бути записано $\langle u \rangle, \langle v \rangle$), проте будемо мати саме їх на увазі, оскільки нас цікавлять не миттєві значення компонент швидкостей, турбулентної кінетичної енергії та швидкості дисипації. Оскільки шар є горизонтально однорідним, то тут викинуто усі доданки, які пов'язані з перенесення dy на dx , dx на dy і так далі. Залишається лише доданок з силою Коріоліса і вертикальний градієнт сили тертя. Правду кажучи, сила тертя це не зовсім коректний термін, правильніше було б сказати напруга тертя. Вертикальний градієнт напруги тертя визначається рівняннями (1.12).

Далі вони параметризуються з застосуванням градієнтних залежностей:

$$\tau_x = -v_T \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_y = -v_T \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

де v_T – в'язкість турбулентного моменту імпульсу. Щоб визначити v_T розв'язують рівняння для турбулентної кінетичної енергії (ТКЕ) та швидкості дисипації [19]. Іншими словами застосовують так звану $(k - \varepsilon)$ модель:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = v_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma_k} v_T \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \varepsilon, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} v_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} v_T \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right), \quad (2.12)$$

де перший доданок у рівняннях (2.11)-(2.12) описує генерацію турбулентності за рахунок зсуву вітру, k – середня кінетична енергія турбулентних пульсацій, а

ε – середня швидкість їх дисипації відповідно. Значення констант є наступним:
 $C_{1\varepsilon} = 1,44$, $C_{2\varepsilon} = 1,92$; $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

Повертаючись до проблеми з розділу 2.1, опишемо підходи розв’язання задачі. Перший підхід – це стандартна модель (2.4). Другий підхід – застосування $(k - \varepsilon)$ моделі зі змінними коефіцієнтами (2.13). В цьому випадку треба вирішити рівняння для дисипації кінетичної енергії ε (2.12), в якій враховується модифікація (2.13), оскільки обертання Землі має вплив на дисипацію енергії шляхом зміни параметра $C_{1\varepsilon}$. На відміну від стандартного випадку, даний параметр не буде сталим, а буде залежати від співвідношення двох масштабів довжин: локального масштабу турбулентного перемішування та геострофічного масштабу перемішування (2.16). На кожному часовому проміжку обраховується значення локального масштабу перемішування l_T та $C_{1\varepsilon}^*$ [6]:

$$C_{1\varepsilon}^* = C_{1\varepsilon} + (C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon}) \frac{l_T}{l_h}. \quad (2.13)$$

Тут значення $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ береться стандартним як для $(k - \varepsilon)$ моделі турбулентності.

В альтернативному, третьому, варіанті розрахунку у нашій роботі використовувались також алгебраїчні співвідношення для швидкості дисипації кінетичної енергії ε . Згідно з дослідженням [15] шкала довжин може бути параметризована як:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\kappa d} + \frac{1}{l_h}, \quad (2.14)$$

де $\kappa = 0,41$ – константа Кармана, d – мінімальна відстань до межі, а l_h – геострофічний масштаб змішування, що пояснює обмеження глибини атмосферного приземного планетарного шару. Скомбінувавши рівняння масштабу довжини (2.14) і врахувавши, що $C_D = C_\mu^{3/4}$ маємо:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l} = C_\mu^{3/4} k^{3/2} \left(\frac{1}{\kappa d} + \frac{1}{l_h} \right), \quad (2.15)$$

де значення l_h рівне:

$$l_h = \frac{C_h \cdot u_g}{f}, \quad (2.16)$$

де $C_h = 0,00023$ – константа, яка визначається як найкраще значення, отримане

шляхом практичного моделювання даних з Лейпцизького профілю. Це значення є близьким до теоретичного, що рівне $C_h = 0,00027$ [6; 15].

Можна бачити наступну картину: напруги тертя τ_x параметризуються по аналогії із в'язкістю, точніше в'язким тертям. Це значить, що напруга тертя вздовж вісі x рівна $-\nu_T \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$, ніби це створювалось власне в'язким тертям.

Якщо дане ν_T було постійним, як постійна в'язкість, наприклад, повітря або деякої рідини, то у нас би існував розв'язок рівнянь у вигляді спіралі Екмана (див. рис. 2.1):

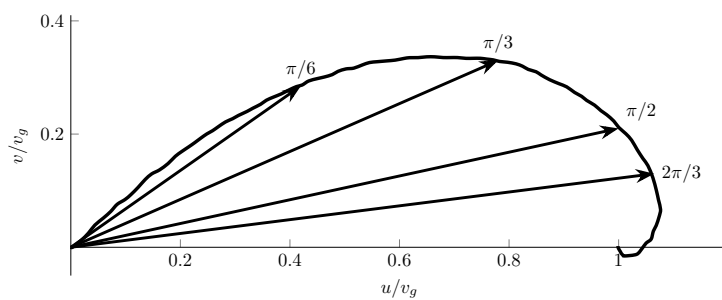


Рисунок 2.1 – Годограф спіралі Екмана.

Вона власне ілюструє аналітичний розв'язок цих рівнянь при постійному коефіцієнті в'язкості ν_T . Він характеризував себе наступний чином: якби ми брали вектор швидкості в залежності від висоти, цей вектор би повертався. І один виток спіралі здійснювався на певній висоті. Проте у випадку, який ми розглядатимемо у роботі, за рахунок того, що цей коефіцієнт ν_T не постійним, спіраль Екмана існує, але доволі дуже сильно відрізнятиметься від того розв'язку, який був би, якби ν_T був постійним.

Як хороший приклад розглянемо випадок, коли маємо справу з гіпотезою про постійність у часі та просторі коефіцієнта турбулентної в'язкості ν_T . Розв'язок даної задачі задається у вигляді спіралі Екмана.

Маючи на вході

$$\nu_T \frac{d^2 u}{dz^2} + f(v - v_g) = 0, \quad \nu_T \frac{d^2 v}{dz^2} - f(u - u_g) = 0$$

та у граничних випадках

$$u|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=0} = 0, \quad u \xrightarrow{z \rightarrow \infty} u_g, \quad v \xrightarrow{z \rightarrow \infty} v_g.$$

Зробимо наступне припущення – нехай геострофічний (зональний) вітер дорівнює нулю: $v_g = 0$, тобто $v \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$. Тоді розв'язавши рівняння руху ми отримаємо наступне:

$$u(z) = u_g \cdot (1 - e^{-\gamma z} \cos(\gamma z)), \quad v(z) = u_g e^{-\gamma z} \sin(\gamma z),$$

де $\gamma = \sqrt{f/2\nu_T}$.

Один виток спіралі Екмана задається таким чином:

$$\pi = \gamma z_g = \sqrt{\frac{f}{2\nu_T}}.$$

Звідси отримуємо висоту: $z_g = \pi \cdot \sqrt{2\nu_T/f}$, де $f = 10^{-4} \text{с}^{-1}$ – параметр сили Коріоліса. Для реально спостережуваного середовища можемо отримати наступні оцінки, виходячи з інтегральних оцінок ν_T для кожного випадку (див. рис. 2.2):

- 1) Приземний шар: $\bar{\nu}_T = 0.4u_*z$ при $u_* = 0.5 \text{ м/с}$, $\nu_T = 5 \text{ м}^2/\text{с}$, $z \approx 25 \text{ м}$;
- 2) Власне атмосфера: $\nu_T \approx (fz_g^2)/(2\pi^2) \approx 5 \text{ м}^2/\text{с}$, $z_g \approx 1000 \text{ м}$.

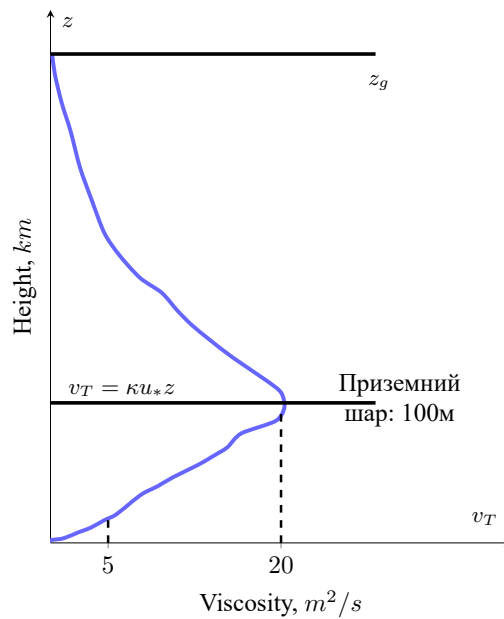


Рисунок 2.2 – Графік залежності висоти z від ν_T .

Під час розгляду потоків повітряних мас в атмосфері іноді стає необхідним включати вплив обертання Землі на ПГШ. Розглянемо наступні моделі турбулентності:

Використання емпіричної припущень, таких як зв'язок між висотою прилежового шару z і масштабом довжини l , обмежує застосовність моделей турбулентності у дуже нестаціонарних умовах, тому існує значний інтерес до використання турбулентних збурень вищих порядків у метеорологічному моделюванні. Найпростішим з таких наближень вищого порядку є рівняння для турбулентної кінетичної енергії та швидкості дисипації ($k - \varepsilon$).

Модель обчислювальної гідродинаміки (computational fluid dynamics) з модифікацією, наприклад у поєднанні з мезомасштабними моделями. Наочним прикладом є OpenForm модель з додаванням параметру впливу обертання Землі на явище турбулентності в ПГШ та поєднання її з сучасними методами формування сіток для розрахунку розподілу забруднюючих речовин в атмосфері на різних масштабах, враховуючи особливості міської архітектури та його рельєфу. Рівняння на яких базується модель це (2.12), (2.15). Щоб отримати чисельні рішення моделі OpenFoam використовувалася чисельна схема для зменшення загальної варіації (total variation diminishing) другого порядку з обмежувачем OSPRE моделі для апроксимації значень дивергенції [6].

2.4 Постановка задачі про моделювання приземного шару за наявності теплообміну

Тут використовуємо кінематичне визначення потоків. Для того, щоб отримати справжній потік тепла, треба домножити на густину ρ і питому теплеємність c_p , а щоб отримати справжній потік імпульсу – домножити на густину, поділену на одиницю маси.

$$\langle u'w' \rangle = \text{const} \quad (2.17)$$

$$\langle w'T' \rangle = \text{const} \quad (2.18)$$

З рівнянь (2.17)-(2.18) отримуємо прості рівняння для середніх компонент швидкості

$$\frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

та температури

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (2.20)$$

Ділення на σ_T , переводить турбулентну в'язкість v_T в турбулентну теплопровідність (див. рівняння (1.37)). Зазначимо, що формула для температури також може задаватися через число Прандтля Pr . Для конвективних умов в приземному шарі можна використовувати простий вираз для масштабу $l = \kappa z$, оскільки масштаб обмежений лише геометрією Землі. Параметрами цієї задачі виступатимуть Q_0 , u_* і власне сам масштаб Обухова L .

В приземному шарі потоки тепла і імпульсу дорівнюють константам, тобто на верхній границі ($z_n = h$) маємо наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} u(z = h) &= u_h = \text{const} \\ T(z = h) &= T_h = \text{const} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Чисельно проінтегрувавши співвідношення Бусінгера (1.35)-(1.36), ми отримаємо бажані граничні значення швидкості і температури для нашої моделі. А на нижній границі граничні умови задаються через потоки, згідно теорії Моніна-Обухова [4], рівняння (1.35)-(1.36) перетворюються

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dz} \right|_{z < z_1} &= \frac{u_*}{\kappa z} \varphi_u(\zeta) \\ \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z < z_1} &= -\frac{Q_0}{u_* \kappa z} \varphi_T(\zeta) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Спрямувавши u вздовж вісі X , отримуємо, що у горизонтально однорідному приземному шарі вітер за напрямом не змінюється, тобто зміна компоненти v відносно висоти не відбувається $\partial v / \partial z = 0$. І для турбулентної кінетичної

енергії рівняння (2.12) перетвориться на:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} = v_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \beta \frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} - \varepsilon, \quad (2.23)$$

де перші два доданки справа відповідають за генерацію ТКЕ: перший – так звана зсувна генерація, внаслідок взаємодії градієнта середньої швидкості з напругами Рейнольдса, другий – конвективна нестійкість, що виникає під впливом поля температур, іншими словами – через вплив сил плавучості. ε задається співвідношенням (2.15). Оскільки температура з висотою падає, виникає конвективний вихор, що розпадатиметься на багато дрібних вихорів, породжуючи турбулентність. Отже отримуємо замкнену задачу, яка складається з рівнянь (2.19)-(2.23).

В умовах дуже близько (< 100 м) до стінки (наприклад поверхня землі), виконується співвідношення для логарифмічного шару і можна припустити, що це будуть рівноважні умови (теплообмін відсутній) в яких генерація рівна дисипації:

$$v_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = C_D \frac{k^{3/2}}{l}, \quad (2.24)$$

де $C_D = C_\mu^{3/4}$, $l = \kappa z$, l – мінімальна відстань до стінки.

Зробимо перетворення (2.24), вважаючи що v_T визначається через (1.8), а $\partial u / \partial z = u_* / \kappa z$.

$$C_\mu k^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2 z^2} = \varepsilon^2.$$

Оскільки $\varepsilon = C_D \cdot k^{3/2} / l$, то

$$C_\mu k^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2 z^2} = C_D^2 \cdot \frac{k^3}{\kappa^2 z^2}$$

Скоротивши подібні і підставивши C_D :

$$C_\mu u_*^2 = C_\mu^{3/2} \cdot k$$

Остаточо для ТКЕ маємо:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

Також використовувалася модифікована модель, яка задавалася наступним чином. Замість стандартного рівняння (1.8) для визначення v_T робимо заміну константи C'_μ [20].

$$v_M = S_M \sqrt{k} l, \quad (2.25)$$

де v_M – коефіцієнт турбулентної дифузії, а $S_M = C'_\mu$ – коефіцієнт, який залежить від числа Річардсона $S_T(Ri)$ у даному вузлі сітки, яке являє собою безрозмірне співвідношення потоків тепла і імпульсу та задається як:

$$Ri = \frac{(g/T) \langle w'T' \rangle}{\langle u'w' \rangle}, \quad (2.26)$$

де

$$\begin{aligned} \langle w'T' \rangle &= -\frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} \\ \langle u'w' \rangle &= -v_T \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Причому для v_T та σ_T беруться значення з попереднього ітераційного (часового) кроку. Зауважимо, що ітерації організовані як розв'язання задачі на встановлення. Тобто для розв'язання стаціонарної задачі (2.19) розв'язується додатково допоміжна нестаціонарна задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v_T \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Для температури, до розв'язку стаціонарної задачі (2.20) також додається нестаціонарна:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Якщо зробити припущення, що генерація дорівнює розсіюванню, то маємо диференціальне рівняння для k [21]:

$$S_M (G_M, G_H) G_M - S_H (G_M, G_H) G_H - 2 = 0, \quad (2.29)$$

яке може бути переписаним відносно безрозмірних градієнтів лише G_M або

лише G_H , які залежать від градієнтного числа Річардсона:

$$Ri = \frac{G_H}{G_M} = \frac{N^2}{S^2} \quad (2.30)$$

де $G_H \equiv (\tau N)^2$, $G_M \equiv (\tau S)^2$, $N^2 \equiv g\alpha \partial T / \partial z$, $S^2 \equiv (\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2$.
Тоді рівняння (2.29) запишемо і розв'яжемо через G_M :

$$(c_1 Ri^2 - c_2 Ri + c_3) G_M^2 + (c_4 Ri + c_5) G_M + 2 = 0, \quad (2.31)$$

Після отримання значення G_M , можна визначити G_H через співвідношення (2.30). Далі знаходимо D :

$$D = 1 + d_1 G_H + d_2 G_M + d_3 G_H^2 + d_4 G_H G_M + d_5 G_M^2,$$

а також S_H :

$$S_H = \frac{1}{D} (s_4 + s_5 G_H + s_6 G_M),$$

і скориставшись формулою (2.29) ми знаходимо S_M . Також зазначимо, що число Прандтля σ_T знаходиться з співвідношення $\sigma_T = S_M / S_H$. Підставляємо S_M у (2.25) та знаходимо коефіцієнт турбулентної дифузії [21]. Турбулентну в'язкість отримаємо з цієї ж рівності (2.25), завваживши, що $S_T = C'_\mu / \sigma_T$.

$$v_T = v_M / \sigma_T = S_T \sqrt{k} l. \quad (2.32)$$

Отримавши значення v_T , далі діємо за планом стандартної $(k - \varepsilon)$ моделі.

Модифікація $(k - \varepsilon)$ моделі на підставі вищенаведених співвідношень дозволяє відтворити характеристики конвективно-граничного шару при помірних умовах стійкості. Загалом, умови стійкості – це вживаний термін в багатьох галузях, таких як, інженерія чи екологія, його класифікують за масштабом Обухова L .

- 1) $|L| \in (500, 1000)$ м – нейтральна (не)стійкість;
- 2) $|L| \in (250, 500)$ м – слабка (не)стійкість;
- 3) $|L| \in (100, 250)$ м – помірна (не)стійкість;
- 4) $|L| \in (0, 100)$ м – сильна (не)стійкість.

Якщо $L < 0$ – використовуємо поняття нестійкість, а якщо $L > 0$ – стійкість. Забігаючи наперед, можемо зазначити, що в нашому випадку виконуються узгодження вимірів зі співвідношеннями Бусінгера (1.35)-(1.36) і максимальне значення $z = 100$ м. Модифікація працює при $z/L < 1$, тобто при $L > 100$, при помірних умовах (не)стійкості.

Висновки до розділу 2

У даному розділі сформульовано математичні постановки задач щодо моделювання горизонтально однорідного нейтрально стратифікованого планетарного граничного шару, та горизонтально однорідного приземного шару з конвективним теплообміном, на підставі використання однопараметричної та двопараметричної моделей турбулентності, в яких коефіцієнти турбулентного обміну задаються різним чином: беруться за константне значення, параметризуються як функції кінетичної енергії турбулентності, масштабу турбулентності та швидкості дисипації. У наступних розділах буде наведено чисельний алгоритм розв'язання рівнянь моделей та результати їх застосування.

3 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Наразі існують певні обчислювальні методи та комп'ютерні програми для задовільного розв'язування диференціальних рівнянь для усереднених величин, але кількість цих рівнянь є доволі великою (порядка двадцяти), тому головною задачею для будь-якої моделі це виокремлення певного переліку диференціальних рівнянь, який зможе якнайкраще забезпечити універсальність застосування моделі та на основі експериментальних даних, применшити складність визначення необхідних констант і універсальних функцій.

В першому наближенні рівняння (2.12) невіршуване. Натомість для визначення масштабу турбулентності l і кінематичної в'язкості ν_T використовувалися алгебраїчні співвідношення:

$$\nu_T = c_0 l \sqrt{k} + \nu, \quad (3.1)$$

де ε визначається за (2.3), $l(z) = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / l_h}$, де в свою чергу l_h визначається співвідношенням (2.16). Слід зауважити, що співвідношення для $l(z)$ визначає масштаб турбулентності, як сукупність двох масштабів: геометричного масштабу, що залежить від відстані до стінки і дорівнює κz , та висоти прилежового шару $l_h \sim u_* / f \sim U_g / f$, яка регулюється геострофічним вітром.

У другому наближенні турбулентна в'язкість визначається модифікованим співвідношенням (1.8):

$$\nu_T = c_k \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu, \quad (3.2)$$

де ν , як і в (3.1) – кінематична в'язкість повітря за нормальних умов. Вводиться для врахування ламінаризації атмосферного потоку з висотою, $\nu \approx 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. І рівняння (2.12) для дисипації стає вирішуваним. Як альтернатива, використовувалися більш складні взаємозв'язки так званої RNG моделі турбулентності, яка визнана найсучаснішим методом моделювання турбулентності з ламінаризацією. У цьому методі нормалізована в'язкість $\tilde{\nu} = \nu_T / \nu$ обчислюється як

функція від числа Рейнольдса $Re = k^2/(\varepsilon v)$ шляхом розв'язання звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d(\sqrt{Re})}{d\tilde{v}} = 1,72 \cdot \frac{\tilde{v}}{\sqrt{\tilde{v}^3 - 1 + 100}} \quad (3.3)$$

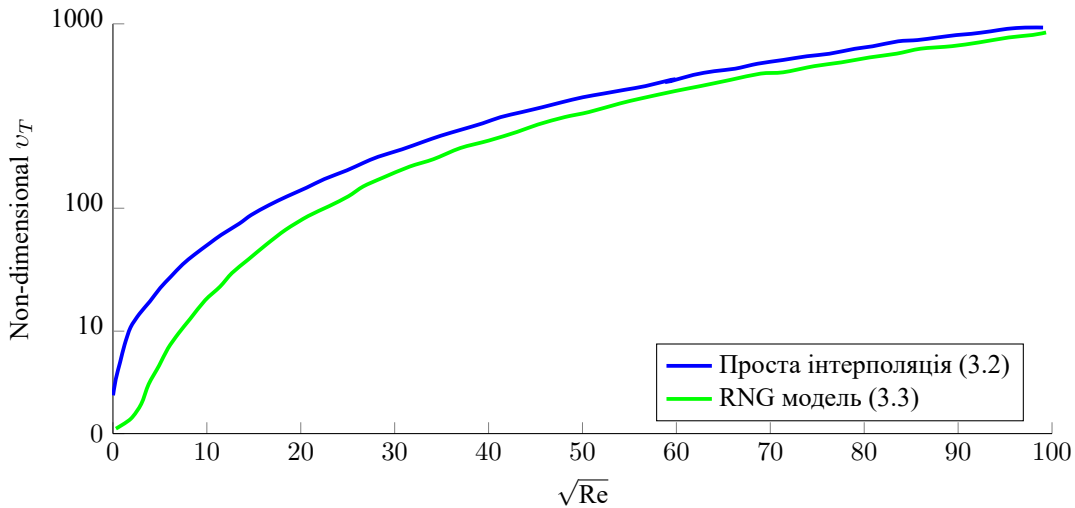


Рисунок 3.1 – Порівняння моделей RNG та модифікованої.

Порівнюючи отримане рішення (3.3) з результатом простої інтерполяційної формули (3.2), з малюнку можемо бачити, що при $Re \sim 10^{-3}$ різниця все ще є значною.

Зі співвідношення між дисипацією та генерацією турбулентної енергії можна вивести деякі співвідношення між константами. Оскільки в шарі постійного потоку (нижні 10-50 м прикордонного шару атмосфери) діють наступні співвідношення:

$$v_T = \kappa u_* z, \quad \varepsilon = u_*^3/(\kappa z) \quad (3.4)$$

Друга формула з (3.4) впливає з умови локальної рівності швидкостей генерації та розсіювання кінематичної турбулентної енергії. Для констант також маємо співвідношення:

$$c_\varepsilon = c_0^3; \quad c_k = c_0; \quad c_\varepsilon = c_0^4; \quad c_1 = c_2 - \kappa^2 \frac{1}{\sigma_\varepsilon c_0^2}. \quad (3.5)$$

З [19] отримаємо значення інших констант:

$$c_0 = 0,4; \quad c_1 = 1,13; \quad c_2 = 1,90; \quad \frac{1}{\sigma_k} = 1,35; \quad \frac{1}{\sigma_\varepsilon} = 0,77.$$

З урахуванням $U(z_1) = \sqrt{u^2(z_1) + v^2(z_1)}$ граничні умови в диференційному вигляді мають вигляд:

$$v_T \frac{du}{dz} \Big|_{z < z_1} = u_*^2 \frac{u(z_1)}{U(z_1)}, \quad (3.6)$$

$$v_T \frac{dv}{dz} \Big|_{z < z_1} = u_*^2 \frac{v(z_1)}{U(z_1)}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dk}{dz} \Big|_{z < z_1} = 0, \quad (3.8)$$

$$u_*^2 = \frac{\kappa U(z_1)}{\ln(z_1/z_0)} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(z_1) = \frac{u_*^3}{\kappa z} \quad (3.10)$$

Тут через z_2 позачено висоту першого обчислювального рівня, яка зазвичай становить від 10 до 50 м, а в наших розрахунках дорівнювала 30 м. Нехай n – індекс часу, $n \in (1, \infty)$; i – індекс дискретизації вздовж координати z , $i = \overline{1, N}$; s – індекс, що відповідає за номер ітерації; u_g, v_g – горизонтальні компоненти геострофічного вітру, $u_g = 17$ м/с, $v_g = 0$.

Нехай $K_{(i+1)/2} = \frac{2K_{i+1}K_i}{K_{i+1}+K_i}$, взято з реалізації ”найкращого” алгоритму для оператора дифузії [22] та $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$. Потім до рівнянь імпульсу були застосовані наступні наближення:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1,s+1} - u_i^n}{\Delta t} &= f v_i^{n+1,s+1} - f v_g + \frac{2}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \times \\ &\times \left[K_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{u_{i+1}^{n+1,s+1} - u_i^{n+1,s+1}}{\Delta z_i} - K_{i-1/2}^{n+1,s} \frac{u_i^{n+1,s+1} - u_{i-1}^{n+1,s+1}}{\Delta z_i - 1} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1,s+1} - v_i^n}{\Delta t} &= -f u_i^{n+1,s+1} + f u_g + \frac{2}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \times \\ &\times \left[K_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{v_{i+1}^{n+1,s+1} - v_i^{n+1,s+1}}{\Delta z_i} - K_{i-1/2}^{n+1,s} \frac{v_i^{n+1,s+1} - v_{i-1}^{n+1,s+1}}{\Delta z_i - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рівняння для ТКЕ (2.11) та для швидкості дисипації (2.12) були наближені за допомогою таких співвідношень:

$$\frac{k_i^{n+1,s+1} - k_i^n}{\Delta t} = Generation - \varepsilon_i^{n+1,s+1} + \frac{2}{\sigma_k (\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \times$$

$$\times \left[K_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{k_{i+1}^{n+1,s+1} - k_i^{n+1,s+1}}{\Delta z_i} - K_{i-1/2}^{n+1,s} \frac{k_i^{n+1,s+1} - k_{i-1}^{n+1,s+1}}{\Delta z_i - 1} \right], \quad (3.13)$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1,s+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = c_1 \frac{\varepsilon_i^{n+1,s+1}}{k_i^{n+1,s}} \cdot Generation - c_2 \frac{\varepsilon_i^{n+1,s}}{k_i^{n+1,s}} \varepsilon_i^{n+1,s+1} +$$

$$+ \frac{2}{\sigma_\varepsilon (\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \left[K_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{\varepsilon_{i+1}^{n+1,s+1} - \varepsilon_i^{n+1,s+1}}{\Delta z_i} - K_{i-1/2}^{n+1,s} \frac{\varepsilon_i^{n+1,s+1} - \varepsilon_{i-1}^{n+1,s+1}}{\Delta z_i - 1} \right], \quad (3.14)$$

в яких використовувалися 2 види для *Generation*.

Перший – звичайна різницева схема:

$$Generation = \frac{K_i^{n+1,s}}{(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})^2} \cdot \left[\left(u_{i+1}^{n+1,s+1} - u_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 + \left(v_{i+1}^{n+1,s+1} - v_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

другий – метод ”зважених сум”:

$$Generation = \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \right) \cdot K_{(i+1)/2} \left[\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta z_i} \right)^2 + \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta z_i} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left(\frac{\Delta z_{i-1}}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \right) \cdot K_{(i-1)/2} \left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta z_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}} \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

Доданок $v_T(du/dz)^2$ відповідає за генерацію турбулентності зі зсувом швидкості. Ми маємо справу з задачею на встановлення, тобто часткова похідна по часу зникне, оскільки виходить, що розв’язуємо задачу, ніби, зміну у часі, але настільки довго, що ці зміни припиняються. Це буде фактично ітераційний метод розв’язання стаціонарної задачі без часткових похідних. Забігаючи наперед, можна сказати, що зважена апроксимація була набагато кращою, порівняно зі звичайною (швидкість збіжності за рахунок цієї модифікації (3.16) була підвищена в ≈ 2 рази. Умовно замість трьох тисяч ітерацій нам знадобиться лише півтори тисячі).

У випадку, коли рівняння для швидкості дисипації не було вирішено,

апроксимація для ε в рівнянні ТКЕ була наступною: $\varepsilon \approx c_\varepsilon \sqrt{k^{n+1,s}} E^{n+1,s+1} / l$. Також були перевірені деякі інші наближення для члена ε^2/k в правій частині рівняння (2.12). Зокрема, було перевірено наступне наближення пов'язане з розкладанням ε^2/k в ряд Тейлора навколо $(\varepsilon^2/k)^n$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{n+1} &\approx \left(\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^n + \left(\frac{2\varepsilon}{k}\right)^n (\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n) - \left(\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)^n (k^{n+1} - k^n) = \\ &= 2 \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^n \varepsilon^{n+1} - \left(\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)^n k^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Стаціонарні результати розрахунків були нечутливі до цих модифікацій наближень, хоча швидкість збіжності могла дещо відрізнятись. Описаний метод розв'язання було реалізовано в MatLab, оскільки він дозволяв розв'язати систему рівнянь найпростішим способом, наприклад, беручи fv^{n+1} та fu^{n+1} в правій частині рівнянь (3.11)-(3.12) одночасно на рівні $n + 1$. Матрична форма рівнянь наведено в додатку.

Для граничних умов апроксимація була наступною:

На верхній межі:

$$\forall n, s: \quad u_n = u_g, \quad v_n = v_g, \quad k_n = 0, \quad \varepsilon_n = 0, \quad v_{T_n} = 0. \quad (3.18)$$

Де були присутні нульові співвідношення для ТКЕ та дисипації, вони були замінені на дуже малі числа k_0, ε_0 , які взяті були з умов: $c_0 k_0^2 / \varepsilon_0 \ll \nu_0$ (турбулентна в'язкість набагато менша за молекулярну), $\varepsilon_0 / k_0 \ll 1$ – коефіцієнт у правій частині рівняння дисипації є малим. Були обрані наступні значення: $k_0 = 10^{-10}$, $\varepsilon_0 = 10^{-14}$.

Наближення рівнянь, які описують процес в найнижчому вузлі ($i = 1$), враховують граничні умови (3.6)-(3.10) для $\forall n, s$:

$$u_*^{n+1,s+1} = \frac{\kappa \sqrt{\left(u_1^{n+1,s+1}\right)^2 + \left(v_1^{n+1,s+1}\right)^2}}{\ln((z_1 + z_0)/z_0)}, \quad (3.19)$$

$$K_1^{n+1,s} = u_*^{n+1,s} \kappa z_1, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1,s+1} - u_1^n}{\Delta t} &= K_{1/2} \frac{u_2^{n+1,s+1} - u_1^{n+1,s+1}}{\Delta z_1} - \frac{u_*^2}{\Delta z_1} \times \\ &\times \frac{u_1^{n+1,s+1}}{\sqrt{(u_1^{n+1,s})^2 + (v_1^{n+1,s})^2}} + f(v_1^{n+1,s+1} - v_g), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_1^{n+1,s+1} - v_1^n}{\Delta t} &= K_{1/2} \frac{v_2^{n+1,s+1} - v_1^{n+1,s+1}}{\Delta z_1} - \frac{u_*^2}{\Delta z_1} \times \\ &\times \frac{v_1^{n+1,s+1}}{\sqrt{(v_1^{n+1,s})^2 + (u_1^{n+1,s})^2}} + f(u_1^{n+1,s+1} - u_g), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{k_1^{n+1,s+1} - k_1^n}{\Delta t} = \frac{K_{1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_1^2} (k_2^{n+1,s+1} - k_1^{n+1,s+1}) + Generation - \varepsilon_1^{n+1,s+1}, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_1^{n+1,s+1} = \frac{u_*^3}{\kappa z_1}, \quad (3.24)$$

де z_0 – шорсткість поверхні, яка в нашому випадку становила 0,3 м.

Генерація в (3.23) була обчислена за допомогою зваженого наближення (3.16), де другому члені було встановлено нульову генерацію, виходячи з умови локальної рівності генерації та дисипації ТКЕ в поверхневому шарі (3.4). Початкові умови були взяті близькі до аналітичного рішення (виходячи з теорії подібності, див. [8]), щоб поліпшити збіжність моделі. Спершу було оцінено висоту області ПГШ. Ця верхня межа встановлювалася шляхом використання рівностей: $H_{abl} = 0,2u_*/f$, $H_{top} = 1,5H_{abl}$, де H_{top} – верхня межа області моделювання, H_{abl} – висота ПГШ. Для оцінки швидкості тертя використаємо (1.16), явно виразивши u_* через число Россбі: $u_* = G\sqrt{F(Ro)}$, де вигляд функції $F(Ro)$ може бути знайдений в [8].

Первісні профілі залежних змінних були визначені наступним чином:

$$\varepsilon_i^1 = \frac{u_*^3}{\kappa z}. \quad (3.25)$$

$$k_i^1 = \begin{cases} u_*^2/c_0^2, & z_i \leq z_1, \\ \frac{u_*^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{z_i - z_1}{H_{abl} - z_1}\right), & z_1 \leq z_i \leq H_{abl}, \\ 0, & H_{abl} < z_i \leq H_{top}. \end{cases} \quad (3.26)$$

$$u_i^1 = \begin{cases} u_*/\kappa \ln(z_i/z_0), & z_i \leq z_1, \\ \frac{u_*/\kappa \ln(z_i/z_0)(H_{abl} - z_i)}{H_{abl} - z_p} + G \frac{z - z_1}{H_{abl} - z_1}, & z_1 \leq z_i \leq H_{abl}, \\ G, & H_{abl} < z_i \leq H_{top}. \end{cases} \quad (3.27)$$

$$v_i^1 = 0. \quad (3.28)$$

$$K_i^1 = \begin{cases} \kappa u_* z_i, & z_i = z_1, \\ \kappa u_* z_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{H_{abl} - z_1}\right), & z_1 < z_i \leq H_{abl} \\ 0, & H_{abl} < z_i \leq H_{top}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Висновки до розділу 3

Сформульовано чисельний алгоритм розв'язання рівнянь моделі примежового шару атмосфери. Основна складність виникає при чисельній апроксимації правої частини рівняння для кінетичної енергії турбулентних пульсацій, яка описує генерацію турбулентності шляхом зсуву швидкості. Запропоновано два підходи для апроксимації відповідного доданку. Результати порівняння обох підходів будуть наведені у наступному розділі.

4 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

4.1 Дані вимірювань

В багатьох моделях, які стосуються турбулентного моделювання, виникають проблеми з верифікацією. Всі моделі погоди потребують достовірних наборів даних, задля перевірки коректності відображення фізичних явищ і процесів, на які спрямована обрана модель.

Для тестування моделі планетарного граничного шару обрано дані вимірів [23]. Це класичні виміри планетарного граничного шару, які отримали назву "Лейпцигський профіль" та підходять для перевірки моделей планетарного граничного шару в нейтральних умовах. Дані, чисельність яких складає 28 спостережень, були зібрані Мілднерном 20 жовтня 1931 року у проміжку з 9:15 до 16:15 на вкритому травною аеродромі на рівнинній місцині поблизу німецького міста Лейпциг за допомогою пілотованого аеростату з двома теодолітами (прилад для визначення горизонтальних і вертикальних кутів на місцевості) за ясної погоди. Під час експерименту поверхневі ізобари були прямолінійними, що вказує на те, що геострофічні умови були відносно стабільними, а горизонтальні градієнти були незначними, тобто конвективні процеси були відсутніми і спостереження здійснювалися майже в нейтральних умовах [24].

Параметри для відтворення Лейпцигського профілю за нейтральних умов є наступними:

- Швидкість геострофічного вітру: $u_g = 17,5 \text{ м/с}$, $v_g = 0$;
- Масштаб шорсткості: $z_0 = 0,3 \text{ м}$;
- Масштаб Обухова: $L = \infty$;
- Густина повітря: $\rho = 1,25 \text{ кг/м}^3$;
- Параметр Коріоліса: $f = 0,00014 \text{ с}^{-1}$;
- Турбулентна в'язкість: $\nu_T = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$.

Лейпцигський профіль неодноразово застосовувався у попередніх дослідженнях з моделювання ПГШ, зокрема, в роботах [6; 19; 25] з застосування

WRF до умов експерименту.

Завдання лейпцигського набору спостережень полягає в тому, щоб продемонструвати, наскільки добре моделі ПГШ відтворюють характерну спіраль Екмана, зумовлену однорідним геострофічним впливом. З часу публікації він був взятий за еталонний набір спостережень в ідеальних горизонтальних нейтральних однорідних умовах щодо припущень про сталий горизонтально рівномірний потік і усунення випадкових турбулентних коливань.

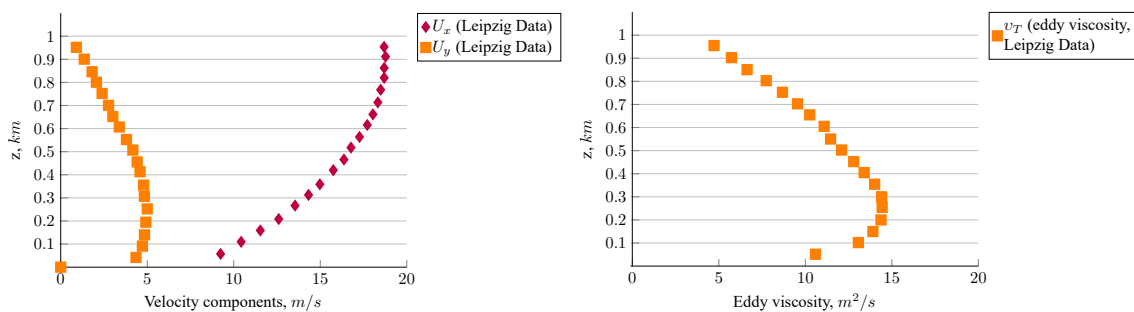


Рисунок 4.1 – Original Leipzig Data.

На графіках зображено залежності компонент геострофічної швидкості та вихрової в'язкості від висоти над поверхнею Землі. Дані взяті з вищезгаданого Лейпцигського профілю [24]. Швидкість тертя, визначена шляхом експерименту, становила $u_* = 0,65$ м/с. Виміряні вертикальні профілі компонентів швидкості та турбулентної в'язкості характеризувалися максимальними значеннями u -компоненти швидкості вітру ($u_g = 19$ м/с) та v -компонентою швидкості вітру ($v_g = 5$ м/с), що досягалися на висотах 800 м та на висоті близько 200 м відповідно. Максимальне значення коефіцієнту турбулентної в'язкості, яке вдалося зафіксувати, становило близько 15 m^2/s і досягалося на висоті близько 250 м.

4.2 Результати моделювання планетарного граничного шару.

Спочатку була зроблена спроба відтворити $(k - \varepsilon)$ модель без жодної модифікації і подивитися її кореляцію зі спостережувальними даними Лейпцигського профілю.

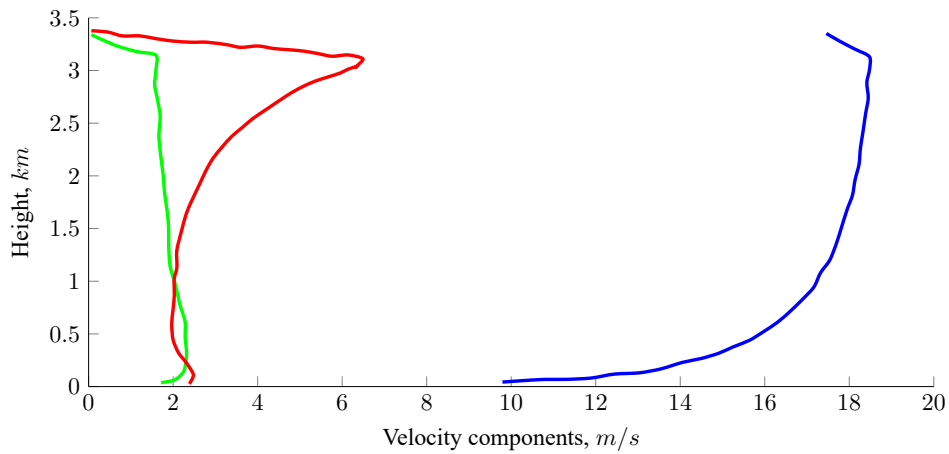


Рисунок 4.2 – Компоненти швидкості u , v , турбулентної енергії k обраховані при $c_0 = 0,538$; $E(1) = 2,4$; $u_* = 0,86$ і використаною апроксимацією (3.15).

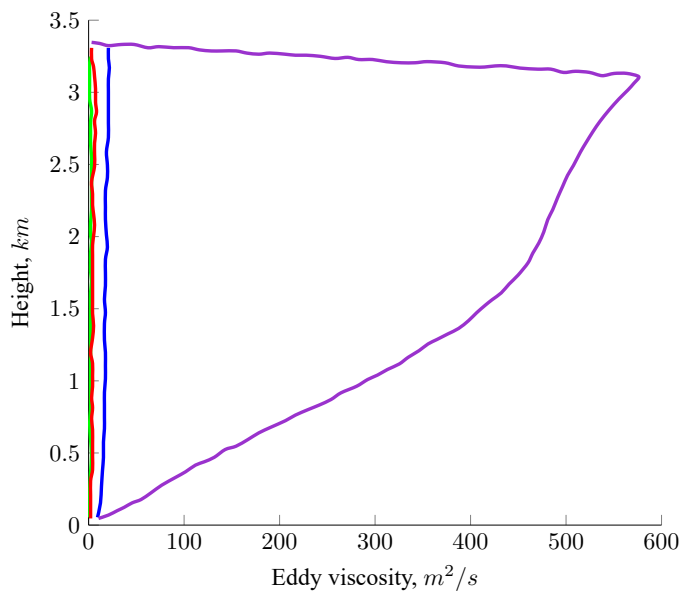


Рисунок 4.3 – ν_T – коефіцієнт турбулентної в'язкості, обрахований при $c_0 = 0,538$; $E(1) = 2,4$; $u_* = 0,86$ і використаною апроксимацією (3.15).

Синя крива моделює u компоненту швидкості, а зелена – виміри v компоненти швидкості. Графік турбулентної енергії k зображений червоним кольором, коефіцієнт турбулентної в'язкості ν_T – фіолетовим.

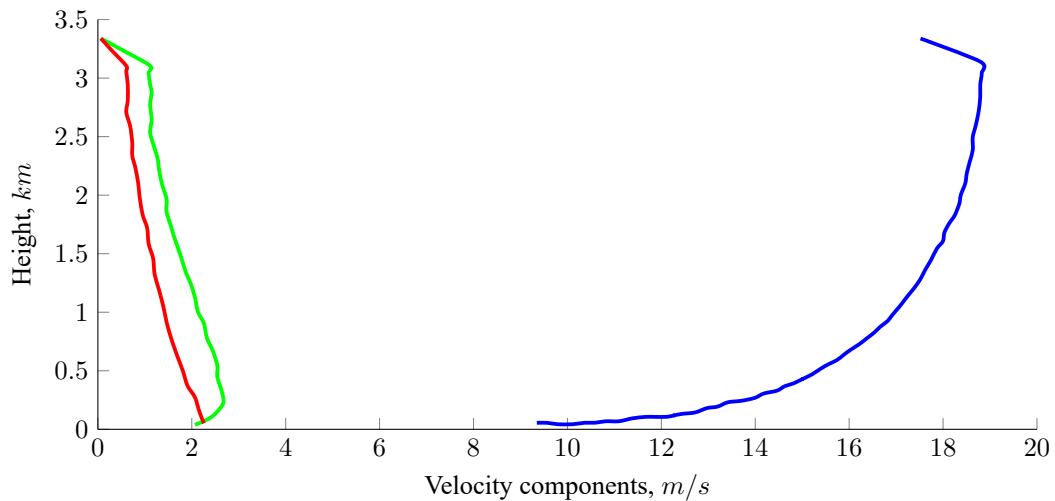


Рисунок 4.4 – Компоненти швидкості u , v , турбулентної енергії k

обраховані при $c_0 = 0,538$; $E(1) = 2,22$; $u_* = 0,83$

і використаною апроксимацією (3.16).

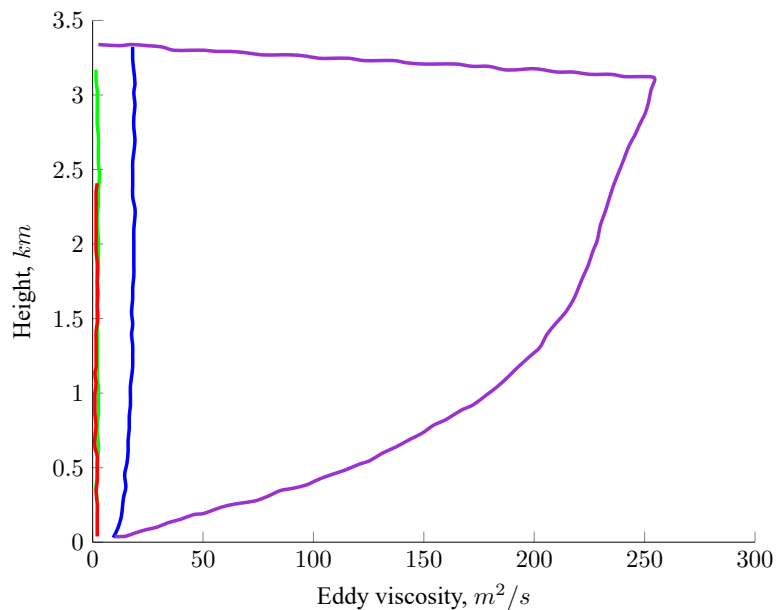


Рисунок 4.5 – ν_T – коефіцієнт турбулентної в'язкості,

обрахований при $c_0 = 0,538$; $E(1) = 2,22$; $u_* = 0,83$

і використаною апроксимацією (3.16).

Як було продемонстровано в роботах [6; 19; 25] і підтверджено в нашій роботі, немодифікована $(k - \varepsilon)$ модель демонструє "катастрофічний", але прогнозований результат, і не дозволяє передбачити структуру ПГШ, оскільки турбулентна в'язкість, розрахована за допомогою моделі $(k - \varepsilon)$, не зменшується

зі зміною висоти. Також розрахунки показують дуже сильну чутливість до використання результатів апроксимації генераційного члена. Індиктором хорошого результату слугує коефіцієнт турбулентної в'язкості, який у випадку зваженого наближення (3.16) дорівнює $\nu_T \approx 250 \text{ м}^2/\text{с}$, в той же час при використанні звичайної різницевої схеми (3.15) маємо $\nu_T \approx 580 \text{ м}^2/\text{с}$, що аж ніяк не узгоджується з емпіричними даними: $\nu_T \approx 15 \text{ м}^2/\text{с}$.

Наступним нашим кроком було застосування розглянутих модифікованих моделей при різних апроксимаціях доданку, відповідального за генерацію турбулентної кінетичної енергії (див. (3.15) та (3.16)). Моделювання проводилося з використанням умов Лейпцигського профілю (див. 4.1). Спершу застосували RNG модель, яка більш точно враховує ламінаризацію потоку, задля порівняння результатів з зображеними на малюнку 4.5.

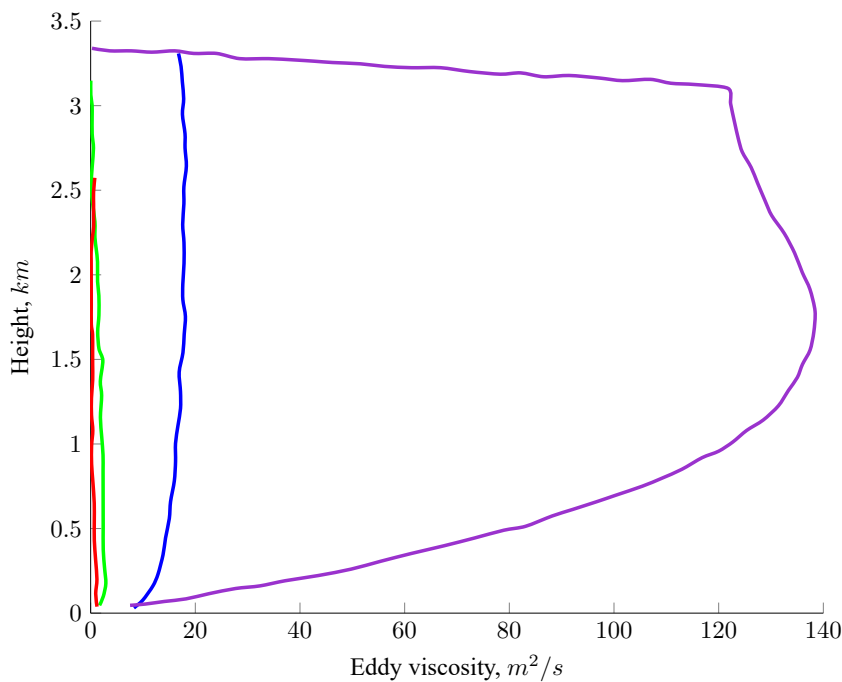


Рисунок 4.6 – ν_T – коефіцієнт турбулентної в'язкості, обчислений RNG моделлю і використаною апроксимацією (3.16).

Бачимо, що значення коефіцієнту турбулентної в'язкості зменшилося до $\nu_T \approx 140 \text{ м}^2/\text{с}$, що на порядок краще, чим значення ν_T , яке було отримано в попередньому моделюванні.

Однопараметрична модель показала наступне: з наближенням (3.15) результати зображені на малюнку 4.7, а з використанням наближення (3.16), показані на малюнку 4.8. Бачимо перший варіант переоцінює максимум коефіцієнту турбулентної в'язкості ($\nu_T = 25 \text{ м}^2/\text{с}$), у порівнянні з даними ($\nu_T = 14 - 15 \text{ м}^2/\text{с}$), яке отримано за допомогою апроксимації (3.16). Результати з наближення (3.15) також дуже чутливі до значення константи c_0 . Найкращі результати для випадку наближення (3.15) отримано для $c_0 = 0,5$ і відповідно наведено на рисунку 4.7, а для $c_0 = 0,4$ результати значно гірші. У випадку наближення (3.16) така чутливість не спостерігається.

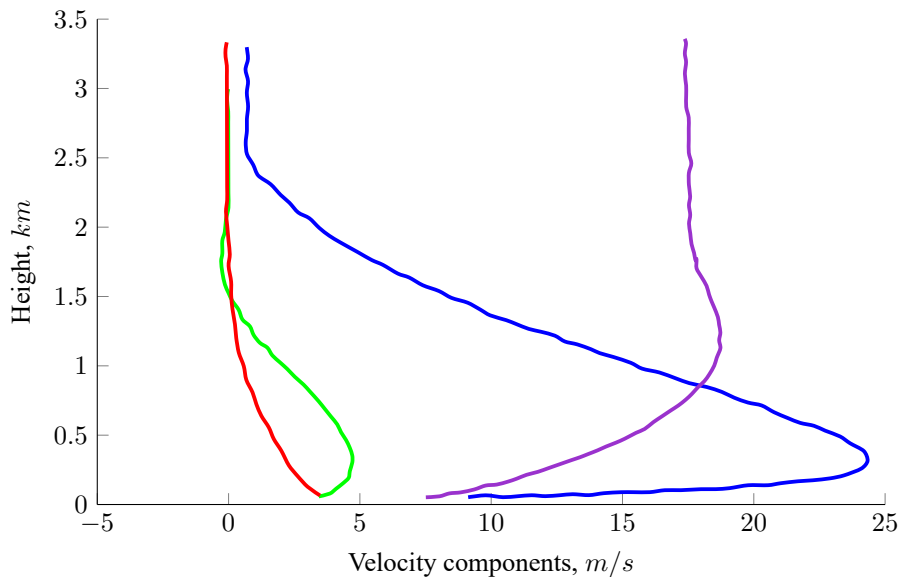


Рисунок 4.7 – Компоненти швидкості u , v , турбулентної енергії k

та ν_T – коефіцієнта турбулентної в'язкості,

обраховані у випадку наближення (3.15) і $c_0 = 0,538$.

Висота граничного шару ("нескінченна висота"), на якій вектор швидкості u стає близьким до геострофічного u_g , а складова v стала рівна нулю, згідно результатам моделювання складає 2000 м, тоді як згідно вимірів ця величина складає 1000 м (див. рис. 4.1). Бачимо, що модифікації $(k - \varepsilon)$ дозволяють відтворити характеристики планетарного граничного шару. Чисельна схема (3.16) дозволяє зменшити похибку. Найнаглядніше це показує коефіцієнт дифузії (турбулентної в'язкості). Похибка з 40 відсотків зменшується до трохи більше 1 – досягалось

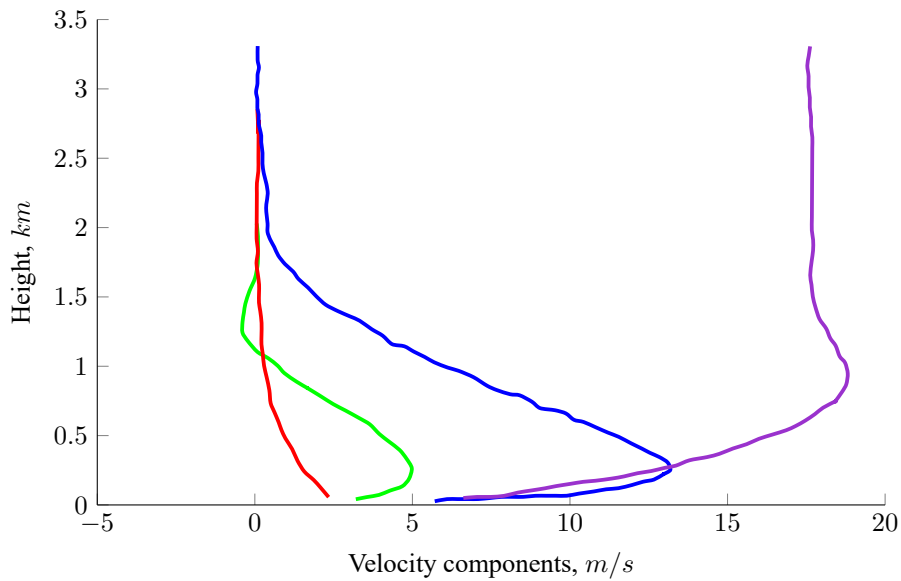


Рисунок 4.8 – Компоненти швидкості u , v , турбулентної енергії k

та v_T – коефіцієнта турбулентної в'язкості,

обраховані у випадку наближення (3.16) і $c_0 = 0,4$.

максимальне значення $25 \text{ м}^2/\text{с}$, на противагу $-15 \text{ м}^2/\text{с}$ у вимірах при використанні першої чисельної схеми, а за другої $\approx 15 \text{ м}^2/\text{с}$. Вертикальні профілі метеорологічних величини було взято з [23].

Для $(k - \varepsilon)$ моделі лише наближення (3.16) дає результати подібні до тих, які були отримані Дейтерінгом [19] (див. рис. 4.9-4.10). Зауважимо, що $(k - \varepsilon)$ і $k - l$ моделі були застосовані з інтеграційним часовим кроком в $dt = 10 \text{ с}$. У випадку наближення (3.15) модель $(k - \varepsilon)$ дає значення коефіцієнта турбулентної в'язкості, які в кілька разів перевищують значення, отримані за наближенням (3.16). Використання (3.15) для моделі $(k - \varepsilon)$ також призводить до нестабільностей або ж до суворих обмежень для часового кроку. Також був проведений контрольний розрахунок з кроком часу 1 с , який показав нечутливість до масштабу часу. Очевидно, що результати, отримані з використанням наближення (3.16), на жаль, також є поганими в порівнянні з висхідними вимірами. Але все ж вони узгоджуються з результатами, наведеними в роботі Детерінга [19], і демонструють не недолік наближень, а недолік власне використовуваної моделі.

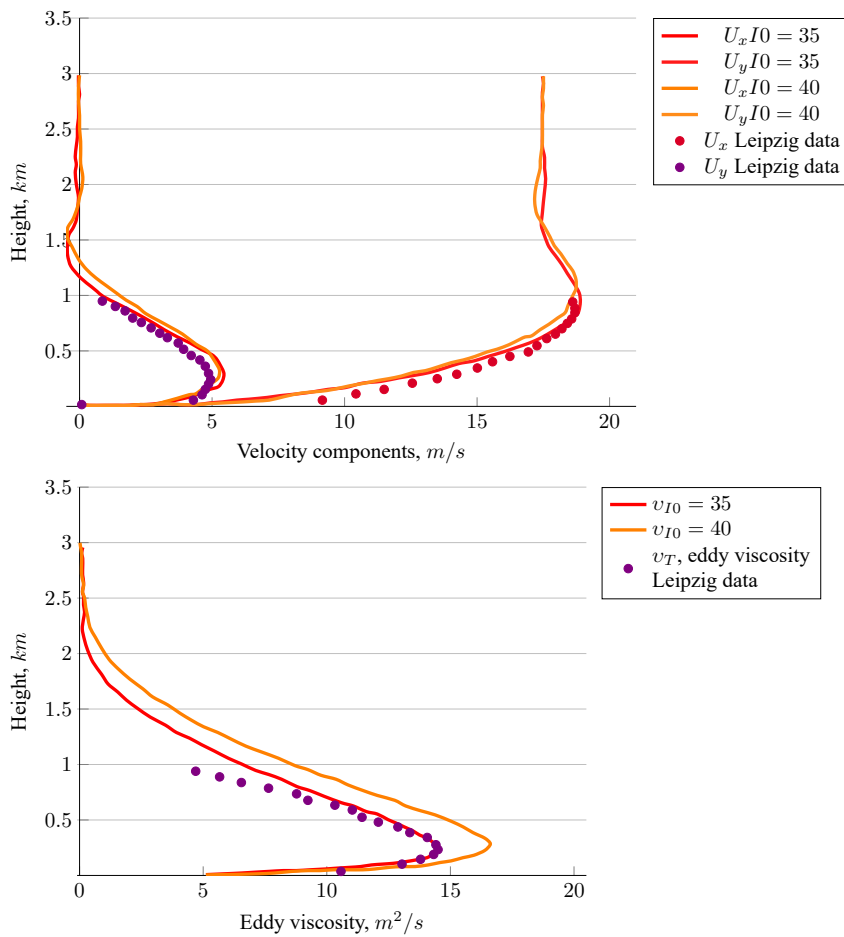


Рисунок 4.9 – Результати однопараметричної моделі.

На верхньому малюнку представлено компоненти швидкості, розкладені по осях x та y ; на нижньому – турбулентна в'язкість; Точки це власне вимірювання взяті з [24]; Лініями продемонстровані результати моделювання для масштабу висот $l_h = 35$ м (червона лінія) та $l_h = 40$ м (помаранчева лінія).

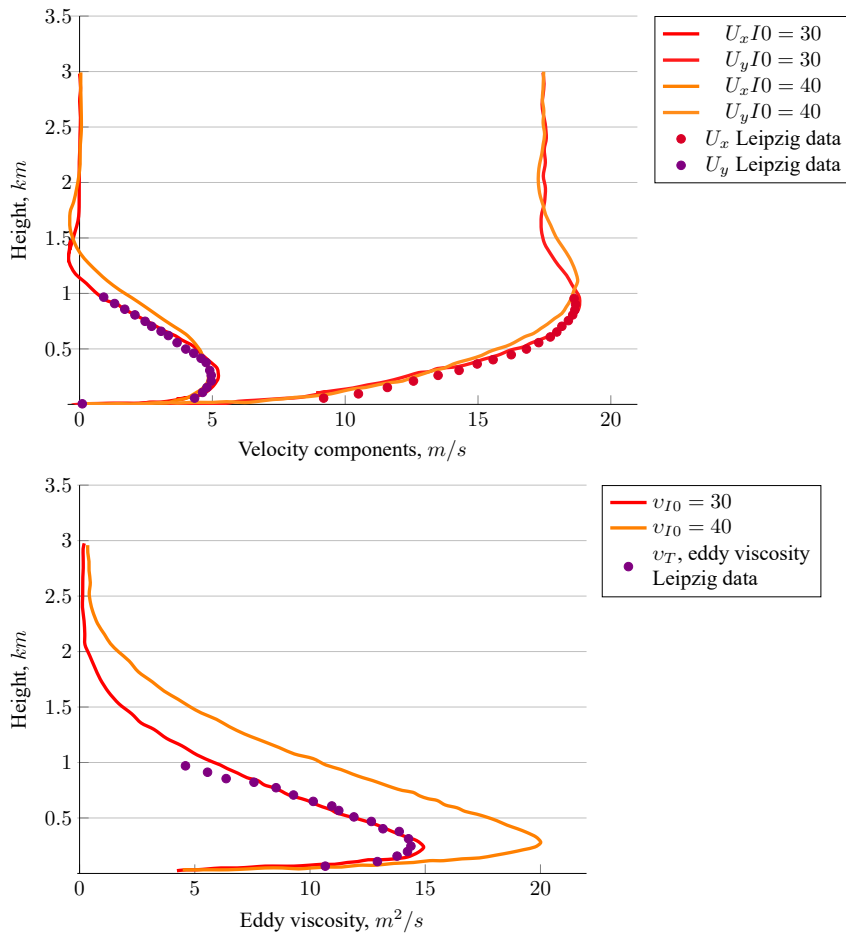


Рисунок 4.10 – Результати модифікованої $(k - \varepsilon)$ моделі.

Тут також на верхньому малюнку представлено компоненти швидкості, розкладені по осях x та y ; на нижньому – турбулентна в'язкість; Точки – вимірювання взяті з [24]; Лініями продемонстровані результати моделювання для $l_h = 30$ м (червона лінія) та $l_h = 40$ м (помаранчева лінія).

Використання однопараметричної моделі (2.15) дає перевагу над застосуванням модифікованої $(k - \varepsilon)$ моделі (2.13). Також варто зауважити, що найліпші результати в цих моделях отримуються при різних значеннях l_h , але при цьому їхня візуалізація є набагато кращою, чим у стандартній $(k - \varepsilon)$ моделі.

Існують більш точні, але більш обчислювально затратні методи моделювання граничних турбулентних течій. Той самий метод прямого моделювання, який заключається в тому, що ми розбиваємо нашу обчислювальну область з таким маленьким кроком, що всі вихори, усіх розмірів ми можемо описати нашою моделлю. Тоді нам не треба використовувати ніяких параметризацій турбулен-

тності. Ми просто розв'язуємо систему рівнянь Нав'є-Стокса (2.1)-(2.2). Але для цього нам треба моделювати, скажімо, область хоча б 10 на 10 кілометрів з кроком 1 мм і розв'язувати з таким кроком, при цьому ми вже можемо ігнорувати всі параметризації, розв'язуючи тривимірну систему рівнянь Нав'є-Стокса.

Зауважимо, що пряме моделювання також не дасть правильних значень висоти граничного шару, хоча пряме моделювання це настільки потужний інструмент, що його результати вважаються за вимір в багатьох областях, таких як літакобудування. Випробування літаків значно спростилися за рахунок того, що пряме моделювання дає дуже точні характеристики усіх сил, що діють на літак: опору, підйомної сили і т.д. Навіть не дивлячись на те, що це буде обчислювально складною задачею, це виходить набагато дешевше, ніж звичайні фізичні випробування літака.

4.3 Результати моделювання приземного шару з конвективним теплообміном

Для випадку планетарного шару з горизонтально однорідним конвективним теплообміном застосовувалася модель (2.13) зі спрощеннями (1.7) та $-\langle u'w' \rangle = \nu_T \partial u / \partial z$, а також її модифікація DETATOX (DENSE-Than-Air-TOXicant transport model), яка детально описана в роботах [20; 22; 26]. У граничних випадках застосовувалася теорія подібності Моніна-Обухова [4] та співвідношення які характерні для випадку горизонтально однорідного приземного шару (1.35)-(1.36). Обраний масштаб для моделювання був наступним: висота області – 100 м з кроком 0,05 м по вертикалі, а з висоти 1,5 м крок починав збільшуватися з коефіцієнтом 1,13.

При тестуванні моделі приземного шару використовувались параметризації універсальних функцій Бусінгера (1.38)-(1.39) отримані на підставі обробки великої кількості вимірів натурних експериментів [4] в атмосфері. Результат наших обчислень ми порівнювали з емпіричними узагальненими даними. Це дані, які було отримані шляхом узагальнення багатьох проведених конкретних

експериментів та побудови емпіричних кривих. Це так звана параметризація Брутсаерта (Brutsaert parametrization). Ми хотіли б застосовувати цю модель для загальних випадків неоднорідних шарів, змінних у часі, але спершу ми маємо переконатися, що ця модель в частковому випадку співпадає з відомими експериментальними залежностями. На малюнку нижче можна спостерігати узгодження моделей з емпіричними даними при різних параметрах L , Q , u_* .

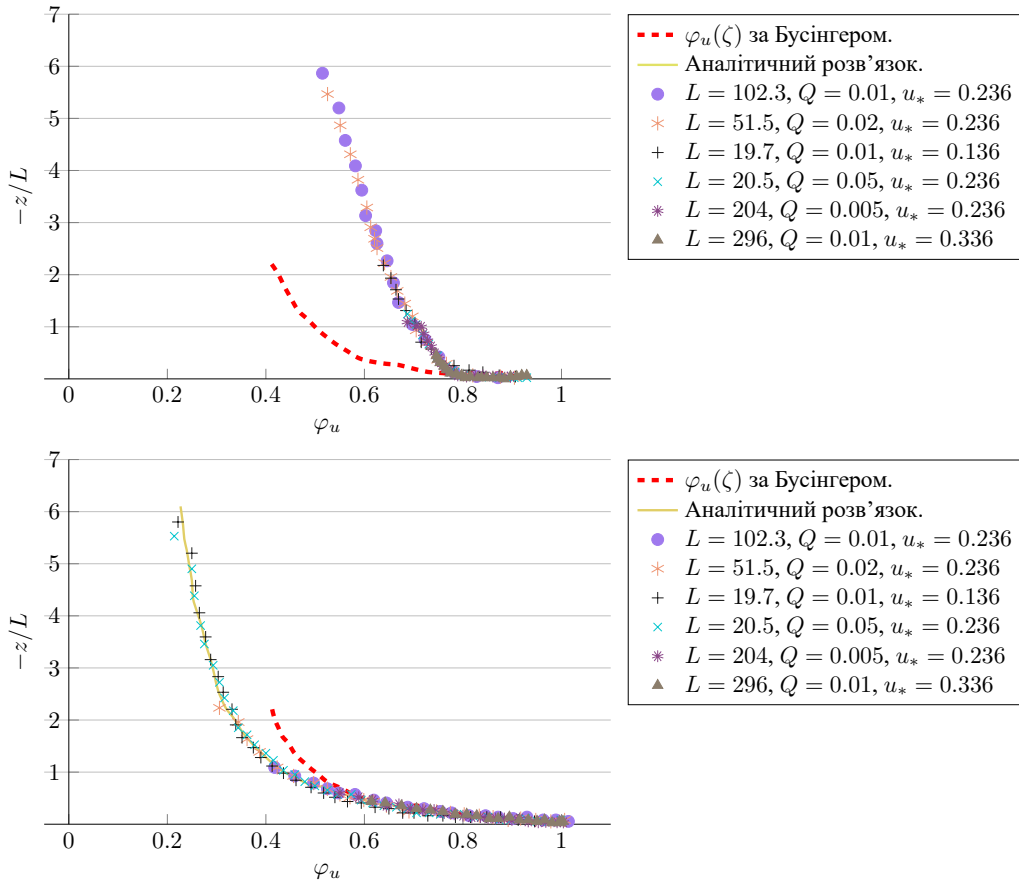


Рисунок 4.11 – Залежність універсальної функції $\varphi_u(\zeta)$ від безрозмірного співвідношення $-z/L$.

Можна спостерігати, що підправлена $(k - \varepsilon)$ модель (2.13) добре узгоджується з емпіричними даними, порівняно з оригінальною моделлю при $z/L < 1$, але і підправлена, при великих значеннях $|\zeta| = -z/L > 1$, теж розходиться від емпіричних значень функції (1.38).

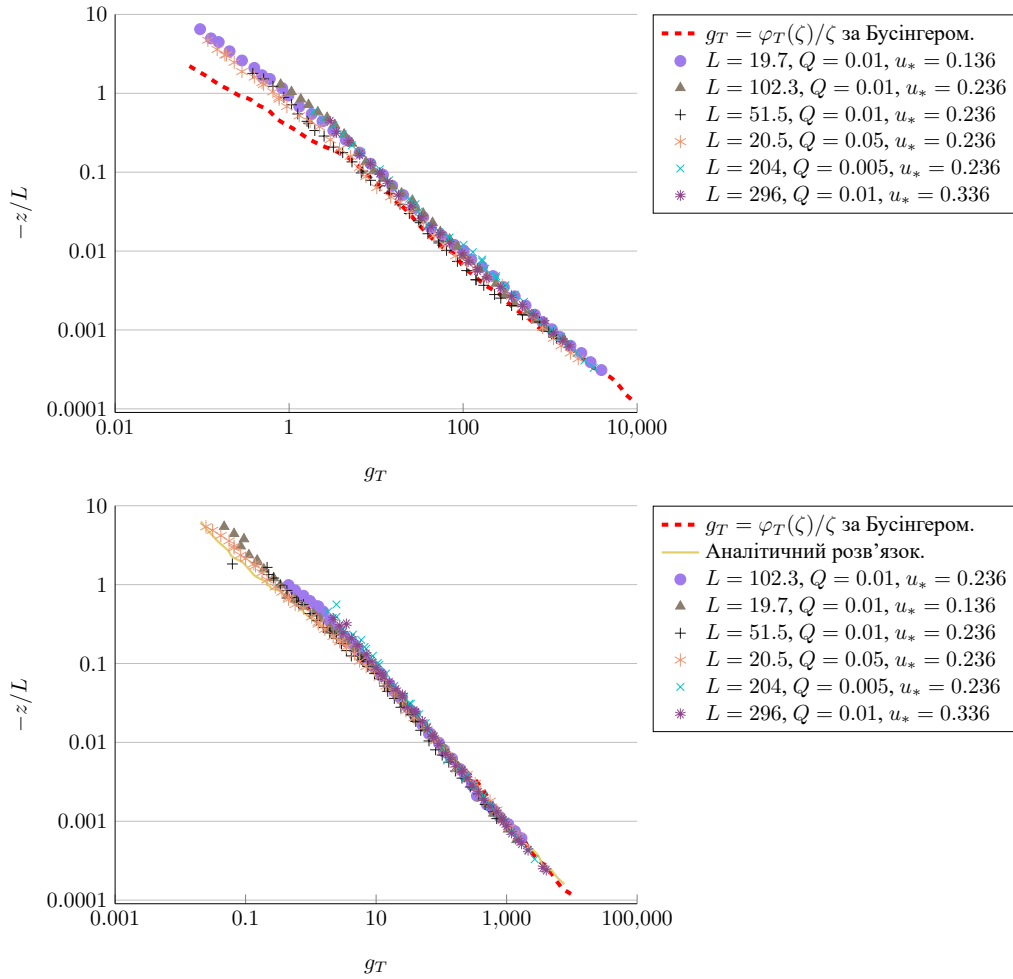


Рисунок 4.12 – Залежність функції $g_T = \varphi_T/\zeta$ від безрозмірного співвідношення $-z/L$.

Взяли три результати вимірів швидкостей при $L = -296$ м; $L = -19,7$ м; $L = \infty$, перенормували їх за допомогою швидкості на верхній границі ($u_i/u_{top} \in [0, 1]$), і побудували залежності отриманих швидкостей від висоти, щоб спостерігати за зміною потоку тепла. Зауважимо, що на нижній границі (при малій висоті) всі ці залежності прямують до нуля. Чорна пряма – це нейтрально стратифікований граничний шар без потоків тепла, а синя і помаранчеві криві – це випадки зі стратифікацією.

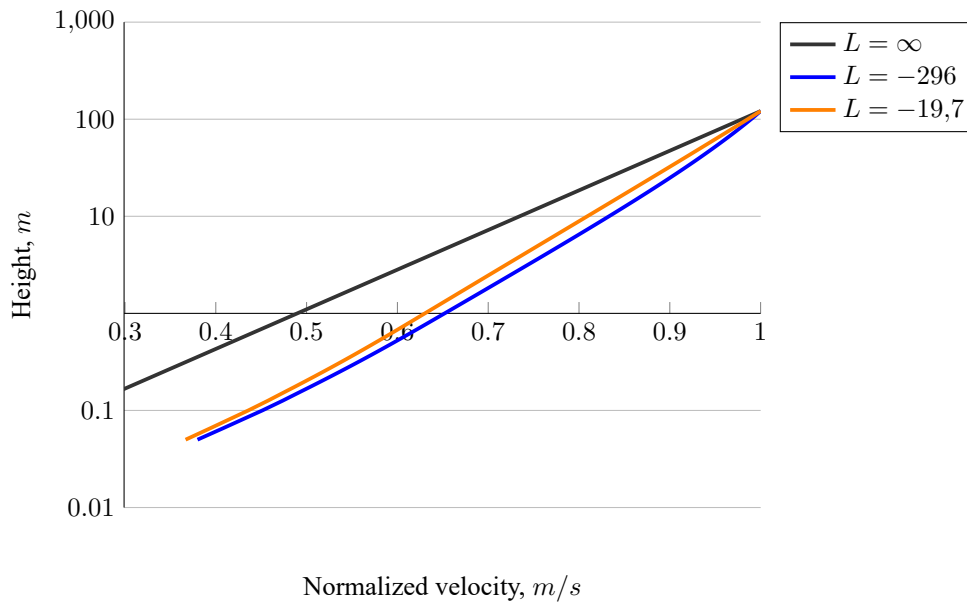


Рисунок 4.13 – Залежність нормованої швидкості від висоти під впливом стратифікації.

На графіку 4.13 можна спостерігати як впливає стратифікація (потік тепла) на обрану залежність і як вони відрізняються від кривої за відсутності стратифікації.

4.4 Обговорення результатів.

Ми можемо спостерігати наступну причину невдачі k -епсилонової моделі. Турбулентність в приземному шарі атмосфери характеризується двома масштабами довжини: геометричним масштабом довжини, який пропорційний відстані до Землі, та висотою ПГШ, яка залежить від градієнта тиску (геострофічний вітер). У випадку моделі змішаної довжини (mixing length model) обидва масштаби довжини явно враховуються співвідношенням (3.1). У випадку $(k - \varepsilon)$ моделі геометричний масштаб довжини вводиться в модель через граничні умови (3.4)-(3.10), а висота ПГШ повинна впливати з розв'язків. Однак, крім граничних умов для вітру (геострофії), градієнти тиску ніде більше не включаються до моделі. Геострофічні умови задаються на достатньо великій висоті (H_{top} , яка априорі є більшою за висоту ПГШ), а $(k - \varepsilon)$ модель відтворює майже логарифмічний профіль швидкості.

рифмічний профіль до значення висоти H_{top} . Нульові граничні умови для k та ε при H_{top} є недостатніми для коректного відтворення згасання турбулентності. Градієнти тиску можуть входити в модель у вигляді множника [4]:

$$G_b = (1/\rho^2) \langle u'_i \rho' \rangle \partial p / \partial x_i \Big|_{i=\overline{1,3}}.$$

При $i = 3$ використовуються гідростатичні наближення, які зводиться до стандартного члена генерації плавучості: $B = g \langle w' \rho' \rangle \rho_0^{-1}$, відомого в метеорологічних застосуваннях. Однак, коли горизонтальні градієнти тиску відмінні від нуля, при $i = \overline{1,2}$, частини вищезгаданого члена можуть мати суттєвий вплив. Введемо цей член в рівняння для ТКЕ і дисипації, виражаючи щільність через температуру і тиск, а градієнти тиску – через геострофічний вітер, враховуючи, що при постійному геострофічному вітрі ізобари повинні збігатися з ізотермами. Однак це не призводить до покращення результатів $(k - \varepsilon)$ моделі.

Вплив градієнту тиску можна проілюструвати на простому прикладі стаціонарного горизонтально однорідного потоку над поверхнею за наявності негативного градієнта тиску, який протилежно напрямлений до напрямку течії. У цьому випадку рівняння x -вої компоненти моменту: $\partial \tau / \partial z = -\partial p / \partial x \approx (0 - \tau_0) / H$, з якого випливає $H = \tau_0 / (\partial p / \partial x)$, де τ_0 – напруження зсуву біля стінки.

Подібний механізм діє і для випадку примежового шару. Нехай вісь x співнапрявлена до градієнта тиску. Тоді рівняння імпульсу мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= -f u \end{aligned} \quad (4.1)$$

Помножимо перше рівняння на τ_x , а друге τ_y на і додамо між собою:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_x^2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{d \tau^2}{dz} = \underbrace{f (\tau_x v - \tau_y u)}_{=0} - \frac{\tau_x}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Врахуємо, що

$$\tau_x = \tau \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Маємо:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{u}{U} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Проінтегрувавши:

$$0 - \tau_0 \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^H \frac{u}{U} dz \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \alpha H, \quad (4.4)$$

де α – безрозмірна стала.

Виразивши градієнт тиску через геострофічний вітер, ми отримуємо:

$$\tau_0 \approx fG \int_0^H \frac{u}{U} dz \approx \alpha fGH, \quad (4.5)$$

з чого слідує, що:

$$H = \tau_0 / (\alpha fG) = \beta^2 G^2 / (\alpha fG) = \gamma \cdot (G/f) \quad (4.6)$$

Останнє співвідношення відоме у методі аналізу розмірностей (Dimensional analysis). Завважимо, що наведені вище вирази і особливо співвідношення (4.4) показують, що висота примежевого граничного шару контролюється через взаємодією градієнта тиску з вітровою складовою, паралельною до градієнту тиску (і перпендикулярною до геострофічного вітру). У цьому сенсі механізм згасання турбулентності в нейтрально стратифікованому ПГШ подібний до механізму згасання турбулентності потоку над поверхнею з несприятливим градієнтом тиску.

Тому, можливо, що труднощі які виникають в $(k - \varepsilon)$ моделі при моделюванні ПГШ подібні до труднощів цієї ж моделі у застосуванні до інженерних задач з несприятливими градієнтами тиску (див. роботи Rodi та Scheuerer (1986), Launder (2005)). До цього часу з'явилися роботи (наприклад, Venetsanos та ін. (2004)), в яких запропоновано універсальні алгебраїчні співвідношення для масштабу довжини, що можуть використовуватися як в метеорологічних, так і в інженерних застосуваннях, а от універсальних модифікацій $(k - \varepsilon)$ моделі для

врахування течії з градієнтами тиску досі не з'явилося.

Висновки до розділу 3

В нашій роботі, як і в попередніх дослідженнях [19; 25], підтверджується, що стандартна модель $(k - \varepsilon)$ не дозволяє передбачити будову нейтрально стратифікованого приземного шару атмосфери. Модель з алгебраїчними співвідношеннями для довжини змішування $(k - l)$ -модель та рівнянням для ТКЕ, в якій враховуються геометрична довжина та висота примежового шару, дуже добре прогнозує структуру ПГШ за умови використання відповідного чисельного наближення (такого як наближення (3.16) у даній роботі) при вирішенні рівняння для турбулентної кінетичної енергії. На основі теоретичних міркувань (рівняння (4.1)-(4.6)) обговорюється, що невдача $(k - \varepsilon)$ моделі, найімовірніше, пов'язана з її нездатністю відтворити висоту примежового шару через взаємодію градієнта тиску з агеострофічною складовою швидкості, яка паралельна до градієнта тиску. Проблеми моделі $(k - \varepsilon)$ у випадку потоків з градієнтами тиску відомі також в інженерних застосуваннях і, найімовірніше, мають той самий характер. Дотепер з'явилися роботи, в яких були запропоновані універсальні алгебраїчні співвідношення для масштабу довжини турбулентності, які можна використовувати як у метеорологічних, так і в інженерних застосуваннях. У метеорологічній та інженерній літературі були запропоновані різні модифікації $(k - \varepsilon)$ моделі для врахування потоків з градієнтами тиску, проте їх універсальність залишається невизначеною.

У роботі також показано, що модифікація двопараметричної $(k - \varepsilon)$ моделі, в якій замість констант у правій частині використовуються функціональні залежності, запропоновані іншими авторами, також дозволяє отримати задовільне порівняння результатів моделювання з вимірами "Лейпцигського профілю". У частині роботи, присвяченій моделюванню приземного шару показано, що використана модифікація однопараметричної $(k - l)$ моделі дозволяє відтворити характеристики приземного шару при помірних умовах конвективного теплообміну.

ВИСНОВКИ

Ми здійснили чисельне моделювання турбулентності у горизонтально однорідному нейтрально стратифікованому планетарному граничному шарі (ПГШ), а також у приземному шарі атмосфери за умови нестійкості, зумовленої конвективним теплообміном. Основною метою дослідження було дослідити існуючі моделі турбулентності, їх модифікації, подивитися на їхнє узгодження з вимірами, які отримані для асимптотичних випадків горизонтально однорідного граничного шару атмосфери та у контексті атмосферного примежового шару, що характеризуються рівняннями переносу імпульсу й тепла. Спершу було використано стандартну $(k - \varepsilon)$ модель турбулентності, а далі і її модифікації для перевірки ефективності опису структури потоку в нейтрально стратифікованому ПГШ. Зокрема, наведені у даній роботі чисельні розрахунки дозволили відтворити згідно класичних вимірів так званого "Лейпцигського профілю" вертикальні профілі геострофічного вітру, а також коефіцієнта турбулентної в'язкості ν_T , що є ключовими характеристиками для турбулентного режиму. По-друге, ми продемонстрували і реалізували удосконалений чисельний метод розв'язання $(k - \varepsilon)$ моделі, яка забезпечує підвищену точність моделювання. Зокрема, запропоновані підходи до апроксимації генеративного члену дозволили зменшити похибку у реалізації максимального коефіцієнта турбулентної дифузії з 40% до $\approx 2\%$, що є дуже суттєвим покращенням у порівнянні з іншими реалізаціями. Це підтверджує доцільність нашої адаптації моделі та свідчить про підвищення ефективності моделювання для прогнозування турбулентних течій. Також за допомогою модифікації емпіричних коефіцієнтів моделі ми змогли відтворити особливості турбулентного потоку приземному шарі атмосфери з помірною нестійкістю. Врахування впливу теплообміну на генерацію та розсіювання турбулентної енергії дозволяє більш детально описувати явище турбулентності в умовах від слабкої до помірної конвекції.

Отже, результати нашого дослідження наочно доводять ефективність запропонованої модифікації у покращенні точності чисельного моделювання, і у

відтворенні більш реалістичної конфігурації турбулентності при різних умовах в атмосфері. Розроблені методи можуть бути застосовані як складова чисельних метеорологічних моделей, зокрема, у складі систем прогнозування погоди та атмосферних забруднень, для прогнозування динаміки атмосферного прилежового шару. Подальший розвиток нашого підходу може включати в себе адаптацію моделі до умов сильної нестійкості, іншими словами надбудовою до універсальної моделі, яка узгоджувалася з усіма можливими випадками явища турбулентності.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. A Day in the Life of the Boundary Layer. — Дата звернення: 2025-04-30. <https://www.e-education.psu.edu/meteo300/node/697>.
2. *Takebayashi H.* Effects of air temperature, humidity, and wind velocity distribution on indoor cooling load and outdoor human thermal environment at urban scale // *Energy and Buildings*. — 2022. — Vol. 257. — DOI: 10.1016/j.enbuild.2021.111792.
3. *Pielke R. A.* Mesoscale meteorological modelling. — 3rd ed. — San Diego, US : Academic Press, 2013. — 760 p. — URL: <https://shop.elsevier.com/books/mesoscale-meteorological-modeling/pielke-sr/978-0-12-385237-3>.
4. *Monin A. S., Yaglom A. M.* Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence. Vol. 1. — 2 revised and enlarged by authors. — New York, US : Dover Publications, INC., 2007. — 769 p. — URL: https://books.google.com.ua/books?id=EtTyyI4_DvIC&printsec=frontcover&hl=uk#v=onepage&q&f=false.
5. *Халатов А. А., Мочалін Є. В., Дмитрієва Н. Ф.* Основи теорії примежового шару. — Київ, Україна : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 191 с. — URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/26035>.
6. *Khalchenkov A., Kovalets I. V.* Simulation of Atmospheric Transport of Pollutants From Micro- to City- Scale Using CFD Model and Unstructured Grids // *Journal of Theoretical and Applied Mechanic*. — Sofia, Bulgaria, 2022. — Apr. — Vol. 52. — P. 232–247. — DOI: 10.55787/jtams.22.52.3.232.
7. Evaluation of three mainstream numerical weather prediction models with observations from meteorological mast IJmuiden at the North Sea / P. Kalverla [et al.] // *Wind Energy*. — Netherlands, 2019. — Mar. — Vol. 22. — P. 34–48. — DOI: 10.1002/we.2267.
8. *Garratt J. R.* The atmospheric boundary layer. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1992. — 316 p.

9. *Кепич Т. Ю., Куценко О. Г.* Основи теорії подібності та аналізу розмірностей в механіці. — Київ, Україна : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2004. — 100 с. — URL: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/otparm.pdf>.
10. *Rotach M. W., Holtslag A. M.* Ideal and Real Atmospheric Boundary Layers. — 1st ed. — San Diego, US : Academic Press, 2025. — 334 p.
11. *Tennekes H.* Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling. — 1st ed. — Dordrecht, Netherlands : Springer, 1984. — P. 37–68. 358 p. — (Atmospheric and Oceanographic Sciences Library). — DOI: 10.1007/978-94-010-9112-1.
12. *Tennekes H., Lumley J. L.* A First Course in Turbulence. — 1st ed. — Massachusetts, US : The MIT Press, 1972. — P. 160–170. 310 p.
13. *Davidson P. A.* Turbulence. An Introduction for Sciences and Engineers. — 2nd ed. — New York, US : Oxford University Press, 2015. — 630 p. — URL: https://books.google.com.ua/books?id=VblDCQAAQBAJ&hl=uk&source=gb_s_navlinks_s.
14. *Holmes J. D., Bekele S.* Wind Loading of Structures. — 4th ed. — Boca Raton, US : CRC Press, 2020. — 658 p.
15. *Blackadar A. K.* The Vertical Distribution of Wind and Turbulent Exchange in a Neutral Atmosphere // Journal of Geophysical Research. — University Park, Pennsylvania, US, 1962. — July. — Vol. 67. — URL: http://www.turbulence.ens.fr/IMG/pdf/tcm2011_jz067i008p03095.pdf.
16. Monin-Obukhov similarity theory. — Дата звернення: 2025-04-08. https://glossary.ametsoc.org/wiki/Monin-obukhov_similarity_theory.
17. Comparison of dimensionless wind shear and of dimensionless temperature gradient observations with interpolation / J. A. Businger [et al.] // Journal of the Atmospheric Sciences. — Boston, US, 1971. — Mar. — Vol. 28. — DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<0181:FPRITA>2.0.CO;2.

18. *Lauder B. E., Spalding D. B.* The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — Netherlands, 1974. — Mar. — Vol. 3. — P. 269–289. — DOI: 10.1016/0045-7825(74)90029-2.
19. *Detering H. M., Etling D.* Application of the $E - \varepsilon$ turbulence model to the atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorol. — Toronto, Canada, 1985. — Oct. — Vol. 33. — P. 113–133. — DOI: 10.1007/BF00123386.
20. *Kovalets I. V., Maderich V. S.* Numerical simulation of interaction of the heavy gas cloud with the atmospheric surface layer // Environmental Fluid Mechanics. — 2006. — Aug. — Vol. 6. — P. 313–340. — DOI: 10.1007/s10652-005-4288-4.
21. *Cheng Y., Canuto V. M., Howard A. M.* An Improved Model for the Turbulent PBL // Journal of the Atmospheric Sciences. — New York, US, 2002. — May. — Vol. 59. — P. 1550–1565. — DOI: 10.1175/1520-0469(2002)059<1550:AIMFTT>2.0.CO;2.
22. *Ковалець І. В.* Чисельна гідродинамічна модель атмосферної дисперсії забруднень довкола будівель // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. — Київ, Україна, 2010. — Т. 57. — С. 3–10. — URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/28297>.
23. *Lettau H. H.* A Re-examination of the "Leipzig Wind Profile" Considering Some Relations Between Wind and Turbulence in the Frictional Layer // Tellus A. — Stockholm, Sweden, 1962. — Vol. 2. — DOI: 10.3402/tellusa.v2i2.8534.
24. *Mildner P.* Über die Reibung in einer speziellen Luftmasse in den untersten Schichten der Atmosphäre // Beitr Phys freien Atmosphäre. — 1932. — Jg. 19. — S. 151–158.
25. *Dai Y.* A realistic simulation of Leipzig Wind Profile : tech. rep. / Delft University of Technology. — 2019. — URL: https://repository.tudelft.nl/file/File_fd2fd2f0-f113-4a98-9557-a43870799716.

26. *Ковалець І. В.* Вплив неоднорідностей температури поверхні на теплообмін повітря із Землею // Математичні машини і системи. — Київ, Україна, 2012. — Т. 4. — С. 149—155. — URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/dspace/handle/123456789/83787>.

ДОДАТОК А МАТРИЧНА ФОРМА РІВНЯНЬ ЧИСЕЛЬНИХ СХЕМ

$$Ap = b \quad (\text{A.1})$$

$$Cq = d \quad (\text{A.2})$$

$$p^{n,s} = \begin{bmatrix} u^{n,s} \\ v^{n,s} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$q^{n,s} = \begin{bmatrix} k^{n,s} \\ \varepsilon^{n,s} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\dim(A) = \dim(C) = 2N \times 2N \quad (\text{A.5})$$

$$\dim(p) = \dim(q) = \dim(b) = \dim(d) = 2N \times 1 \quad (\text{A.6})$$

Матриця A має верхній індекс $A^{n+1,s}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1,1} = A_{N+1,N+1} = 1 \\ A_{N,N} = A_{2N,2N} = 1 \\ A_{i,i} = 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \left(\frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}} \right), \quad i \in (1, N) \\ A_{i,i-1} = -\frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}}, \quad i \in (1, N) \\ A_{i,i+1} = -\frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i}, \quad i \in (1, N) \\ A_{i+N,i+N} = 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \left(\frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}} \right), \quad i \in (1, N) \\ A_{i+N,i+N-1} = -\frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}}, \quad i \in (1, N) \\ A_{i+N,i+N+1} = -\frac{2\Delta t}{\Delta z_i + \Delta z_{i-1}} \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i}, \quad i \in (1, N) \\ A_{i,i+N} = -\Delta t f, \quad i \in (1, N) \\ A_{i+N,i} = \Delta t f, \quad i \in (1, N) \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

$$b_1^{n+1,s} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z_1}{z_0} \right) \frac{u_1^{n+1,s}}{\sqrt{\left(u_1^{n+1,s}\right)^2 + \left(v_1^{n+1,s}\right)^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$b_N^{n+1,s} = u_g \quad (\text{A.9})$$

$$b_{N+1}^{n+1,s} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z_1}{z_0} \right) \frac{v_1^{n+1,s}}{\sqrt{\left(u_1^{n+1,s}\right)^2 + \left(v_1^{n+1,s}\right)^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$b_{2N}^{n+1,s} = v_g \quad (\text{A.11})$$

$$b_i^{n+1,s} = u_i^n - f\Delta t v_g, \quad i \in (1, N-1) \quad (\text{A.12})$$

$$b_i^{n+1,s} = v_i^n + f\Delta t u_g, \quad i \in (N+1, 2N) \quad (\text{A.13})$$

Матриця C має верхній індекс $C^{n+1,s}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1,1} = 1 + \frac{K_{1/2}^{n+1,s} \Delta t}{h\Delta z_1} \\ C_{1,2} = -\frac{K_{1/2}^{n+1,s} \Delta t}{h\Delta z_1} \\ C_{N,N} = C_{N+1,N+1} = C_{2N,2N} = 1 \\ C_{i,i-1} = -\frac{2\Delta t}{\sigma_k(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}}, \quad i \in (1, N) \\ C_{i,i+1} = -\frac{2\Delta t}{\sigma_k(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i}, \quad i \in (1, N) \\ C_{i,i} = 1 + \frac{2\Delta t}{\sigma_k(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \left(\frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i} \right), \quad i \in (1, N) \\ C_{i,i+N} = -\Delta t, \quad i \in (1, N) \\ C_{i+N,i+N-1} = -\frac{2\Delta t}{\sigma_\varepsilon(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}}, \quad i \in (1, N) \\ C_{i+N,i+N+1} = -\frac{2\Delta t}{\sigma_\varepsilon(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i}, \quad i \in (1, N) \\ C_{i+N,i+N} = 1 - \frac{c_1 \Delta t}{k_i^{n+1,s}} \frac{K_i^{n+1,s}}{(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})^2} \times \\ \times \left[\left(u_{i+1}^{n+1,s+1} - u_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 + \left(v_{i+1}^{n+1,s+1} - v_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 \right] + c_2 \frac{\varepsilon_i^{n+1,s} \Delta t}{k_i^{n+1,s}} + \\ + \frac{2\Delta t}{\sigma_\varepsilon(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})} \left(\frac{K_{i-1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_{i-1}} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,s}}{\Delta z_i} \right), \quad i \in (1, N) \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

$$d_1^{n+1,s} = k_1^n + \left(\frac{u_*}{\kappa z_1} \right)^2 \Delta t \quad (\text{A.15})$$

$$d_i^{n+1,s} = k_i^n + \frac{K_i^{n+1,s} \Delta t}{(\Delta z_i + \Delta z_{i-1})^2} \times$$

$$\times \left[\left(u_{i+1}^{n+1,s+1} - u_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 + \left(v_{i+1}^{n+1,s+1} - v_{i-1}^{n+1,s+1} \right)^2 \right], \quad i \in (1, N) \quad (\text{A.16})$$

$$d_N^{n+1,s} = d_{2N}^{n+1,s} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$d_{N+1}^{n+1,s} = \frac{\left(u_*^{n+1,s} \right)^3}{\kappa z_1} \quad (\text{A.18})$$

$$d_i^{n+1,s} = 0, \quad i \in (N+1, 2N) \quad (\text{A.19})$$

$$u_*^{n+1,s+1} = \frac{\left(k_1^{n+1,s+1} \right)^{1/2}}{c_0} \quad (\text{A.20})$$

$$K_1^{n+1,s+1} = \kappa u_*^{n+1,s+1} z_1 \quad (\text{A.21})$$

$$K_i^{n+1,s+1} = \frac{c_k \left(k_i^{n+1,s+1} \right)^2}{\varepsilon}, \quad i \in (1, N); \quad c_k = 0,09 \quad (\text{A.22})$$

Альтернативна форма запису для коефіцієнту дифузії:

1) Через молекулярну в'язкість ν :

$$K_i^{n+1,s+1} = \frac{c_k \left(k_i^{n+1,s+1} \right)^2}{\varepsilon} + \nu, \quad i \in (1, N); \quad c_k = 0,09 \quad (\text{A.23})$$

2) Без використання рівняння для дисипації турбулентної енергії:

$$v_T = c_0 l k^{1/2}, \quad \varepsilon = c_0^3 \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l(z) = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / \lambda},$$

$$\lambda = b \frac{u_*}{f}; \quad b = 0,01; \quad u_* = 0,8 \quad (\text{A.24})$$

3) Без використання рівняння розсіювання турбулентної енергії, але з молекулярною в'язкістю:

$$v_T = c_0 l k^{1/2} + \nu, \quad \varepsilon = c_0^3 \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l(z) = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / \lambda},$$

$$\lambda = b \frac{u_*}{f}; \quad b = 0,01; \quad u_* = 0,8 \quad (\text{A.25})$$