# МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 539.3

Д.В. Бабич, В.В. Даруга, М.П. Малежик

## ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНО-КРИХКИХ ТІЛ ЗА УМОВ ПРОГРЕСУЮЧОГО ТРІЩИНОУТВОРЕННЯ

### Вступ

Сучасна наука про міцність матеріалів базується на концепціях механіки руйнування, які передбачають дефектність і складність структури матеріалів [1–4]. Руйнування являє собою процес зародження, розвитку і поширення тріщин, які ділять тіло на частини і розглядаються в статичному, кінетичному та динамічному аспектах. Сьогодні в цій галузі є багато публікацій, які наповнили її і новими результатами з фізики і механіки руйнування гірських порід, і сучасними моделями і методами. Такі результати отримані для ізотропних і анізотропних, однорідних і неоднорідних тіл в умовах стаціонарних, динамічних і циклічних навантажень із врахуванням пружних і пружнопластичних властивостей реального матеріалу. Однак деякі аспекти механіки руйнування гірських порід вивчені ще недостатньо через складну природу явищ [3, 4].

Руйнування матеріалу – це складний процес навіть у випадку ідеалізованого ізотропного однорідного матеріалу, який значно ускладнюється, якщо матеріал анізотропний або в тілі відбуваються пластичні деформації, дефекти містяться в неоднорідній структурі або в полі залишкових деформацій.

Вивчення впливу цих факторів на руйнування гірських порід і міцність масивів у цілому потребує побудови нових моделей у межах механіки суцільного середовища [3, 4]. Теоретичний аналіз механізмів руйнувань за таких умов пов'язаний із значними труднощами, передусім математичного характеру. Особливо це стосується теоретичних досліджень оцінки міцності масивів гірських порід із дефектами типу тріщин.

На першій стадії руйнування розміри пошкоджень мікроструктури малі порівняно з лінійними розмірами частинок, на другій стадії руйнування вони досягають розмірів елементів мікроструктури. На відміну від субмікроскопічних пошкоджень, які при усуненні навантаження частково зникають (заліковуються), мікроскопічні пошкодження мають незворотний характер.

Основи структурної теорії пов'язаного процесу деформування і мікропошкоджуваності однорідного матеріалу, що базується на моделюванні пошкодженості за рахунок створення системи статистично однорідно ізотропно розсіяних по об'єму мікропор, розглянуті в праці [5].

### Постановка задачі

У даній статті на основі структурного підходу пропонується континуальна модель деформування пружно-крихких матеріалів із врахуванням пошкоджуваності у вигляді утворення плоских мікротріщин відривом у стохастично розорієнтованих структурних елементах, мікроміцність яких має випадковий характер.

Для побудови рівнянь стану ізотропного матеріалу, який зазнає пошкодження, пропонується модифікація енергетичного методу [6–10], розвинутого стосовно опису деформування середовищ із врахуванням пошкодження у вигляді заданого ансамблю мікротріщин, що описується деякою функцією розподілу. Суть модифікації зводиться до об'єднання енергетичного методу визначення ефективних деформаційних характеристик матеріалу, який зазнає пошкодження, і способу описання процесу тріщиноутворення в матеріалі при різних варіантах напруженого стану в одній процедурі.

Для опису процесу мікропошкоджуваності використовується структурна модель накопичення пошкоджень Даніелса [6] з використанням силового критерію мікроміцності структурних елементів матеріалу.

При побудові моделі вважають, що в процесі деформування мікротріщини не ростуть і не взаємодіють між собою, а об'ємна щільність (концентрація) мікродефектів змінюється з ростом рівня середніх однорідних напружень з огляду на неоднорідність мікроміцності матеріалу і визначається відносною об'ємною частиною зруйнованих структурних елементів.

Для побудови рівнянь стану матеріалів, які зазнають пошкодження, застосовується енергетичний метод [8–10], який стосовно побудови рівнянь стану для ізотропних матеріалів із заданим ансамблем мікротріщин докладно викладений у [6, 7].

**Рівняння стану для матеріалу з пошкодженнями у вигляді плоских мікротріщин**

При невеликих концентраціях розсіяних мікродефектів, коли можна знехтувати їх взаємодією, а це правомірно у випадку, коли відстані між тріщинами переважають над їх характерними розмірами [9, 10], пошкоджений матеріал згідно з принципом Ешелбі [8] у загальному випадку можна моделювати анізотропним неперервним середовищем з рівняннями вигляду

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, \; l = 1, 2, 3, \tag{1}$$

де середні однорідні макронапруження $\sigma_{kl}$ вважаються заданими в лабораторній системі координат $Ox_1x_2x_3$, зв'язаній з уявним об'ємом, а макродеформації $\varepsilon_{ij}$ підлягають осередненню.

Ефективні податливості $a_{ijkl}$ континуальної моделі пошкодженого середовища визначаються енергетичним методом [8, 9], що базується на еквівалентності енергії пошкодженого середовища і неперервного суцільного середовища, що моделює перше [8]:

$$W = W^0 + \bar{W}, \tag{2}$$

де $W$ — густина енергії деформування неперервного середовища, що моделює пошкоджений матеріал:

$$W = \frac{1}{2} a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}; \tag{3}$$

$W^0$ — густина енергії суцільного непошкодженого середовища:

$$W^0 = \frac{1}{2} a^0_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}; \tag{4}$$

$\bar{W}$ — приріст густини енергії деформування пошкодженого середовища, пов'язаний із вивільненням внутрішньої енергії внаслідок порушення зв'язків при нормальному відриві і зміщенні поверхонь тріщин у структурних елементах.

Густина вивільненої енергії пошкодженого матеріалу згідно з принципом Ешелбі [8] визначається у вигляді роботи взаємного зміщення поверхонь тріщин, викликаного напруженнями, які б мали місце при заданому навантаженні в суцільному середовищі в місцях, які зайняті тріщинами:

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{3} \bar{W}_i^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{3}\int_{S_n} U_i^n \sigma_{i3}^n \, dS_n, \tag{5}$$

де $N_0$ — кількість тріщин в одиниці об'єму; $U_i^n$, $i = 1, 2, 3,$ — переміщення в точках поверхні $n$-ї тріщини; $S_n$ — повна поверхня $n$-ї тріщини; $\sigma_{i3}^n$, $i = 1, 2, 3,$ — компоненти тензора заданих напружень у власній системі координат $n$-ї тріщини $O^n x_1^n x_2^n x_3^n$.

У випадку еліптичних тріщин осі $O^n x_i^n$, $i = 1, 2,$ направлені відповідно по більшій $(a^n)$ і меншій $(b^n)$ півосях, а вісь $O^n x_3^n$ — по нормалі до їх поверхонь; $\bar{W}_i^n$, $i = 1, 2, 3,$ — роботи взаємного зміщення поверхонь $n$-ї тріщини в напрямках осей $O^n x_i^n$. Локальні напруження $\sigma_{i3}^n$ і задані в тілі середні напруження $\sigma_{kl}$ зв'язані перетворенням

$$\sigma_{i3}^n = \sigma_{kl}\alpha_{ik}^n \alpha_{3l}^n, \tag{6}$$

де $\alpha_{ik}^n, \alpha_{3l}^n$ визначаються кутами Ейлера ($0 \le \vartheta^n \le \pi$ — кут нутації, $0 \le \psi^n \le 2\pi$ — кут прецесії, $0 \le \varphi^n \le 2\pi$ — кут власного обертання); напрямні косинуси власної системи координат $n$-ї тріщини відносно лабораторної системи координат визначаються формулами [13]

$$\begin{gathered}
\alpha_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\
\alpha_{13} = \sin\varphi\sin\vartheta, \\
\alpha_{12} = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\
\alpha_{23} = \cos\varphi\sin\vartheta, \\
\alpha_{21} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\
\alpha_{31} = \sin\psi\sin\vartheta, \\
\alpha_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\
\alpha_{32} = -\cos\psi\sin\vartheta, \\
\alpha_{33} = \cos\vartheta.
\end{gathered} \tag{7}$$

У випадку шорстких поверхонь тріщин для описування зсувної взаємодії берегів тріщин за законом сухого тертя $(\sigma_{33}^n < 0)$ вводяться ефективні зсувні напруження [6, 7]:

$$\tilde{\sigma}_{i3}^{n} = |\sigma_{i3}^{n}| - f|\sigma_{33}^{n}| \quad \text{при} \quad |\sigma_{i3}^{n}| > f|\sigma_{33}^{n}|,$$
$$\tilde{\sigma}_{i3}^{n} = 0 \quad \text{при} \quad |\sigma_{i3}^{n}| \le f|\sigma_{33}^{n}|, \; i = 1,2. \tag{8}$$

Тут $f$ – коефіцієнт тертя ковзання.

Переміщення на поверхнях тріщин $U_i^n$ знаходяться за допомогою розв’язування задач про напружено-деформований стан необмеженого ізотропного середовища з ізольованою тріщиною при однорідних поперечному, поздовжньому зміщеннях і нормальному до поверхні тріщини розтягу напруженнями на нескінченності, з якими ототожнюються середні напруження в уявному об’ємі. Отримані в [9, 10] вирази для робіт взаємного зміщення берегів індивідуальної еліптичної тріщини $\bar{W}_i'$ при зміщеннях і розкритті тріщини мають вигляд

$$\bar{W}_i' = \frac{4\pi a' b'^2}{3} B_i', \; B_i' = A_i'(\sigma_{i3}')^2, \; i = 1,2,3,$$
$$A_i' = \left(\frac{1-\nu_0{}^2}{E_0}\right) Q_i', \; i = 1,2,3; \tag{9}$$

$$Q_1' = k'^2[(k'^2 - \nu_0 k_1'^2)E(k') + \nu_0 k_1'^2 K(k')]^{-1},$$
$$Q_2' = k'^2[(k'^2 + \nu_0 k_1'^2)E(k') - \nu_0 k_1'^2 K(k')]^{-1}, \tag{10}$$
$$Q_3' = 1/E(k'),$$

де $k'^2 = 1 - b'^2/a'^2$; $k_1'^2 = 1 - k'^2$; $K(k')$, $E(k')$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду; $E_0, \nu_0$ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона непошкодженого середовища. Позначення штрихом величин в (9) і (10) вказує на неперервну залежність їх кутів орієнтації і розмірів тріщин у зв’язку з припущенням про континуальний розподіл останніх по об’єму. Далі будуть розглядатися подібні або однакові тріщини, для яких справедлива рівність $k' = \text{const}$.

У випадку кругової тріщини робота взаємного зміщення берегів тріщини визначатиметься формулою (9) при $a' = b'$ і таких значеннях коефіцієнтів $A_i'$:

$$A_1' = A_2' = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}, \; A_3' = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}. \tag{11}$$

Рівняння стану для середовища, яке зазнає пошкодження, у вигляді (1) отримують із рівняння (2). Для цієї мети складові рівняння (2) записуються в компонентах тензора середніх напружень $\sigma_{ij}$ в тілі. Прирівнювання коефіцієнтів при однакових виразах відносно напружень $\sigma_{ij}$ в (2) дає вираз для визначення податливості середовища $a_{ijkl}$, яке моделює матеріал, під час пошкодження:

$$a_{ijkl} = a_{ijkl}^0 + \bar{a}_{ijkl}. \tag{12}$$

Тут $a_{ijkl}^0$ – податливості непошкодженого середовища; $\bar{a}_{ijkl}$ – результат осереднення густини вивільненої енергії $\bar{W}$, який залежить від критерію міцності структурних елементів матеріалу, закону розподілу мікроміцності і характеру напруження тіла. Технічні сталі пошкодженого матеріалу через податливості визначаються співвідношеннями [14]

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}, -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, \frac{1}{G_{ij}} = a_{ijij}, \; i, j = 1,2,3, \tag{13}$$

де $E_{ii}, G_{ij}, \nu_{ij}$ – модулі пружності, модулі зсуву і коефіцієнти Пуассона.

**Рівняння стану для пружно-крихкого матеріалу, що зазнає пошкодження**

Для опису процесу прогресуючої мікропошкоджуваності використовується структурна модель накопичення пошкоджень Даніелса [12]. Фізичний зміст моделі Даніелса стосовно структурно неоднорідного середовища розкритий в [11]. Сутність моделі Даніелса зводиться до такого.

Нехай у лабораторній (нерухомій) системі координат $Ox_1x_2x_3$, осі якої напрямлені по взаємно перпендикулярних радіусах випадкової кулі одиничного радіуса, вибраного як уявний об’єм, задані середні напруження $\sigma_{ij}$. Локальні системи координат $O'x_1'x_2'x_3'$ вибираються таким чином, щоб осі $O'x_3'$ були напрямлені по нормалі до поверхні кулі. На поверхні випадкової кулі навколо напрямку $O'x_3'$ виділяється елементарна область площею $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\psi$ ($\vartheta$ – довгота, $\psi$ – широта), яка перетинає $N$ структурних елементів.

У перерізах структурних елементів, які перетинаються, діє однакове локальне істинне напруження $\bar{\sigma}_{33}'$ (істинні напруження $\bar{\sigma}_{33}'$ відрізняються від умовних $\sigma'_{33}$ тим, що перші належать до площадок пошкодженого середовища, другі – до площадок суцільного середовища). Вважають, що всі структурні елементи в кулі мають однакові характеристики пружності. Як критерій зруйнування мікроелементів матеріалу відривом береться співвідношення першої теорії міцності

$$\bar{\sigma}'_{33} \geq \sigma . \tag{14}$$

В (14) $\sigma$ є випадковою величиною, яка позначає граничні значення істинного, такого, що розтягує або що стискує, нормального напруження для орієнтованих різними способами структурних елементів. Для апроксимації розподілу міцнісних властивостей кристалітів і зерен різної орієнтації в мікронеоднорідних матеріалах використовується степеневий закон [7]:

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{0i}, \\ (\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i} / (\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}, & \sigma_{0i} \leq \sigma \leq \sigma_i, \\ 1, & \sigma > \sigma_i . \end{cases} \tag{15}$$

В (15) $\sigma_{0i}, \sigma_i$ – мінімальна і максимальна величини граничних значень $\sigma$ при стисненні $(i = 1)$ і розтяганні $(i = 2)$; $\alpha_i$ – параметр розкиду мікроміцності.

Елемент зруйнується, коли напруження $\bar{\sigma}'_{33}$ досягне граничного значення $\sigma$ для цього елемента. Руйнування окремих елементів утворює сукупність незалежних випадкових подій. Взаємодія елементів між собою полягає лише в тому, що після руйнування частини з них відбувається перерозподіл напружень між цілими елементами, які залишились.

Кількість зруйнованих елементів $n$ є випадковою величиною, для якої справедлива схема незалежних випробувань Бернуллі. У цій схемі ймовірність реалізації $n$ результатів із загальної кількості випробувань $N$ визначається формулою

$$P_N^n = C_N^n p^n q^{N-n} ,$$

де $C_N^n$ – біноміальні коефіцієнти; $p$ – ймовірність даного результату в довільно взятому випробуванні; $q = 1 - p$. У даному випадку $p = F(\sigma)$. При досягненні істинними розтягуючими нормальними напруженнями $\bar{\sigma}'_{33}$ граничних значень ці елементи руйнуються утворенням у них мікротріщин з площинами, нормальними до напрямку дії напруження $\bar{\sigma}'_{33}$. У випадку стискаючих напружень $(\sigma'_{33} < 0)$ мікротріщини, які утворюються, орієнтуються головним чином паралельно напрямку дії $\sigma'_{33}$ [14]. У зв'язку з цим має місце рівність $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$, оскільки зруйновані структурні елементи матеріалу чинять опір стисненню як суцільні.

Якщо умовне локальне розтягуюче напруження $\sigma'_{33}$ є незалежним параметром навантаження, то в рамках моделі, що розглядається, істинне локальне напруження в перерізах незруйнованих структурних елементів є випадковою величиною $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33} \Big/ \left(1 - \dfrac{n}{N}\right)$. Розподіл істинного локального напруження $\bar{\sigma}'_{33}$ залежить від розподілу числа $n$. Математичне сподівання цього числа становить $E(n) = NF(\bar{\sigma}'_{33})$, а коефіцієнт варіації – $w_n = \left[\dfrac{1 - F(\bar{\sigma}'_{33})}{NF(\bar{\sigma}'_{33})}\right]^{1/2}$. З останньої формули випливає, що при деякому значенні $\bar{\sigma}'_{33}$ коефіцієнт варіації числа $n$ обернено пропорційний квадратному кореню з кількості структурних елементів, що перетинаються поверхнею виділеного у випадковій кулі тілесного кута. Для реальних матеріалів ця кількість досить велика порівняно з одиницею. У зв'язку з цим допустимо знехтувати розкидом величини $n$ і, як наслідок, величини $\bar{\sigma}'_{33}$. В результаті заміни останньої математичним сподіванням із врахуванням фізичної суті (15) отримуємо вираз

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F(\bar{\sigma}'_{33})} . \tag{16}$$

У рамках моделі суцільного середовища останню формулу можна інтерпретувати таким чином. Якщо припустити, що структурні елементи при розтягуванні руйнуються утворенням у них наскрізних тріщин завдяки відриву при досягненні локальним (істинним) напруженням $\bar{\sigma}'_{33}$ граничного значення $\sigma$, то внаслідок руйнування елементів структури, які перетинаються поверхнею кулі, ефективна площа зменшується, в результаті чого істинні напруження збільшуються при сталих умовних напруженнях. Відносна зміна ефективної площі при розтягненні визначатиметься величиною $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$. При стисканні утворюються тріщини, паралельні до напрямку дії локальних нормальних напружень [14]. У зв'язку з цим ефективна площа не змінюється, внаслідок чого матимемо $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$.

На підставі викладеного середні густини мікродефектів на поверхні випадкової кулі при заданих напруженнях $\sigma_{ij}$, що розтягують або стискають, відповідно визначаються формулами

$$\varepsilon_{+} = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33}) d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi,$$
$$\varepsilon_{-} = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_1(\sigma'_{33}) d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_1(\sigma'_{33}) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi, \quad (17)$$

де $\sigma'_{33}$ виражається через $\sigma_{ij}$ формулами (6), (7); $\bar{\sigma}'_{33}$ – формулами (6), (7), (16); $\bar{N} = 4\pi$ – нормуючий множник, який виникає з умови

$$\frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi = 1 \text{ при } \bar{\sigma}'_{33} = \sigma_2. \quad (18)$$

Фізична суть величин $\varepsilon_{+}, \varepsilon_{-}$ полягає в тому, що вони являють собою середні відносні частки одиниці площі поверхні випадкової кулі, на якій нормальні напруження, які розтягують і стискають, досягають границь міцності $\sigma$ мікрочастин, які перетинаються поверхнею кулі. Об'ємна концентрація плоских мікродефектів визначатиметься відношенням кількості зруйнованих мікрочастинок $N_0$ до їх загальної кількості $N$ $(p = N_0/N)$ в уявному об'ємі. Скориставшись прийомом, що застосовується в петрографії для аналізу тонких зрізів осадів [15], можна показати, що $p = \varepsilon$.

Приріст густини енергії деформування $\bar{W}$ за рахунок утворення еліптичних або кругових мікротріщин у неоднорідному матеріалі знаходиться таким чином.

Нехай при розтяганні тіла в елементарному тілесному куті $d\Omega^i$, виділеному у випадковій кулі навколо деякої нормалі $O^i x_3^i$, під дією локального нормального напруження $\bar{\sigma}_{33}^i$ утворюється $n_i$ компланарних мікротріщин, неперервним чином розорієнтованих у власних еквідистантних площинах (за кутом власного обертання $\varphi$). Тоді приріст енергії в елементарному тілесному куті визначатиметься формулою

$$d\bar{W}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{3} \frac{4\pi}{3} a_j b_j^2 B'_k, \quad j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

В (19) $B'_k$ для тріщини з орієнтацією, яка визначається кутами Ейлера $\varphi_j, \psi_i, \vartheta_i$, дається співвідношеннями (9), (10), а $(4\pi/3) a_j b_j^2$ є областю збурення (релаксації) матеріалу, яка вноситься еліптичною тріщиною з півосями $a_j, b_j$. У випадку кругових тріщин $(a_j = b_j)$ у формулі (19) вираз для $B'_k$ записується, як це подано в (9), (11).

Мається на увазі, що матеріал складається з щільно упакованих подібних або однакових структурних елементів у вигляді еліпсоїдів обертання з півосями $a_j, b_j$ (куль радіуса $a_j$). Оскільки істинний характер руйнування мікрочастинок невідомий, то вважають, що тріщини утворюються в меридіональних перерізах структурних елементів. Такого виду мікроруйнування найбільш несприятливі для матеріалу, оскільки ступінь впливу мікротріщин на жорсткість матеріалу пов'язана переважно з площею порушення суцільності матеріалу. Прийняте допущення узгоджується з явищем масштабного руйнування. Із врахуванням вказаних припущень область збурення (релаксації), що вноситься тріщиною в структурний елемент, можна ототожнювати з об'ємом останнього. Ввівши в (19) заміну $(4\pi/3) a_j b_j^2 \approx (4\pi/3) < a_j b_j^2 \geq d\Omega^i / N_i$ ($N_i$ – кількість всіх структурних елементів в $i$-му елементарному тілесному куті) і здійснивши осереднення за кутом власного обертання тріщин $0 \le \varphi \le 2\pi$, можна визначити приріст густини вивільненої енергії в елементарному тілесному куті наближеним виразом

$$d\bar{W}_i \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{n_i}{N_i} < B_k^i > d\Omega^i =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} F(\bar{\sigma}_{33}^i)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_k^i d\varphi\right) d\Omega^i. \qquad (20)$$

У випадку однакових структурних елементів наближена рівність (20) переходить у точну.

На підставі (20) в результаті граничного переходу до неперервного розподілу тріщин по уявному об'єму і виконання операції осереднення за кутами орієнтацій тріщин $\psi, \vartheta$ із врахуванням (18) для приросту густини вивільненої енергії випливає, що

$$\bar{W} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\bar{W}' =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_2(\bar{\sigma}'_{33}) B'_k \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\varphi. \qquad (21)$$

У випадку розтягування точне обчислення інтеграла (21) технічно важко здійсненне у зв'язку з нелінійністю виразу $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$. З огляду на малість значень функції $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$ співвідношення (15) допускає спрощення. Для цього праву частину виразу (15), вважаючи, що $\sigma = \bar{\sigma}'_{33}$ і враховуючи (16), потрібно розкласти в ряд по малій величині $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$. Тоді при утриманні, наприклад, членів першого порядку відносно $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$ вираз (15) перетворюється в такий:

$$F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \approx F_2(\sigma'_{33}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \bar{\sigma}'_{33} < \sigma_{02}, \\ \dfrac{\left(\dfrac{\sigma'_{33}}{\sigma_2 - \sigma_{02}}\right)^{\alpha_2}\left(1 - \alpha_2 \dfrac{\sigma_{02}}{\sigma'_{33}}\right)}{1 - \left(\dfrac{\sigma'_{33}}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\left[1 + (1-\alpha_2)\dfrac{\sigma_{02}}{\sigma'_{33}}\right]} & \sigma_{02} \le \bar{\sigma}'_{33} \le \sigma_2, \\ 1, & \bar{\sigma}'_{33} > \sigma_2, \end{cases} \qquad (22)$$

де $\bar{\sigma}'_{33}$ при розтягуванні визначається формулою (16) із врахуванням спрощень $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$ (формула (22)). При двопараметричному розподілі мікроміцності $(\sigma_{02} = 0)$ вираз для $F_2(\bar{\sigma}'_{33})$ при $0 \le \bar{\sigma}'_{33} << \sigma_2$ набуває вигляду

$$F_2(\bar{\sigma}'_{33}) \approx F_2(\sigma'_{33}) = \left(\frac{\sigma'_{33}}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\left[1 + \alpha_2\left(\frac{\sigma'_{33}}{\sigma_2}\right)^{\alpha_2}\right]. \qquad (23)$$

При стисненні за рівністю $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$ приріст густини енергії визначається формулою

$$\bar{W} = \frac{1}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_1(\sigma'_{33}) B'_k \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\varphi, \qquad (24)$$

де у виразах $B'_k$ зсувні напруження на поверхнях тріщин $\sigma'_{13}, \sigma'_{23}$ беруться на площадках, паралельних напрямку дії нормальних напружень $\sigma'_{33}$, орієнтованих під кутом $\vartheta$, тобто в напрямних косинусах (7) для зсувних напружень замість кута нутації $\vartheta$ необхідно брати кут $\vartheta + \pi/2$. При врахуванні тертя на поверхнях тріщин для $\sigma'_{i3}$, $i = 1, 2$, беруться відповідні вирази з (8).

При заданих пружних і міцнісних характеристиках непошкодженого матеріалу рівняння стану ушкоджуваного матеріалу залежно від виду напруженого стану знаходять із використанням співвідношень (2)–(4), (6), (7), (12), (15), (16), (21)–(24).

**Рівняння стану для пошкоджуваного матеріалу за умов всебічного рівномірного розтягування і стискання**

Нехай розподіл мікроміцності матеріалу при стисканні і розтягуванні описується двопараметричним степеневим $(\sigma_{0i} = 0)$ законом

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} (\sigma/\sigma_i)^{\alpha_i}, & 0 \le \sigma \le \sigma_i, \\ 1, & \sigma > \sigma_i. \end{cases}$$

Припустимо, що порушення суцільності матеріалу відбувається утворенням в еліпсоїдальних структурних елементах із сталим відношенням півосей ($k' = \mathrm{const}$) плоских еліптичних тріщин з абсолютно гладкими поверхнями ($f = 0$). Тоді при всебічному рівномірному стисканні тіла $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_- < 0)$ прирости податливостей визначатимуться виразами

$$\bar{a}_{iiii} = \frac{2}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon_-, \; i = 1,2,3,$$
$$\bar{a}_{iijj} = -\frac{1}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon_-, \; i,j = 1,2,3, \qquad (25)$$

де $\varepsilon_- = (\sigma_-/\sigma_1)^2$ в розглядуваному випадку збігається з виразом для концентрації мікротріщин у вигляді (17), при всебічному стисканні пошкоджуваний матеріал моделюється ізотропним середовищем, технічні сталі пружності для якого визначаються співвідношеннями

$$E_- = \frac{E_0}{1 + E_0\left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2)\right]\varepsilon_-},$$
$$\nu_- = E_-\left[\frac{\nu_0}{E_0} + \frac{1}{15}(A_1 + A_2)\varepsilon_-\right]. \qquad (26)$$

Із врахуванням наближеної формули (23) при всебічному рівномірному розтягуванні ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_+ > 0$) співвідношення, що визначають прирости податливостей і технічні сталі напруження, мають вигляд

$$a'_{iiii} = \left[\frac{2}{5}A_3 + \frac{2}{15}(A_1 + A_2)\right]\bar{\varepsilon},$$

$$a'_{iijj} = \left[\frac{1}{15}A_3 - \frac{1}{15}(A_1 + A_2)\right]\bar{\varepsilon}, \; i, j = 1,2,3,$$

$$E_+ = \frac{E_0}{1 + E_0\left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2) + \frac{2}{5}A_3\right]\bar{\varepsilon}}, \qquad (27)$$

$$\varepsilon_+ = \left(\frac{\sigma_+}{\sigma_2}\right)^2, \; \bar{\varepsilon} = \varepsilon_+(1 + \varepsilon_+),$$

$$\nu_+ = E_+\left\{\frac{\nu_0}{E_0} + \left[\frac{1}{15}(A_1 + A_2) - \frac{2}{5}A_3\right]\bar{\varepsilon}\right\}.$$

При двовісному рівномірному стисненні ($\sigma_{11} = \sigma_{22} < 0, \sigma_{33} = 0$) і розтягуванні ($\sigma_{11} = \sigma_{22} > 0, \; \sigma_{33} = 0$) відповідні вирази для приростів податливостей внаслідок пошкоджуваності мають вигляд

$$\bar{a}_{iiii} = \frac{1}{35}(A_1 + A_2)\varepsilon_-,$$
$$\bar{a}_{iijj} = -\frac{1}{35 \times 9}(A_1 + A_2)\varepsilon_-, \; i, j = 1,2, \qquad (28)$$

$$\bar{a}_{iiii} = \frac{16}{3 \times 35}\varepsilon_+[A_3\varepsilon_1 + (A_1 + A_2)\varepsilon_2],$$

$$\bar{a}_{iijj} = \frac{16}{9 \times 35}\varepsilon_+[A_3\varepsilon_1 - (A_1 + A_2)\varepsilon_3];$$

$$\varepsilon_1 = 2(1 + 2\varepsilon_+), \; \varepsilon_2 = (1 + 0{,}74592\varepsilon_+),$$
$$\varepsilon_3 = (1 + 0{,}55944\varepsilon_+). \qquad (29)$$

### Деформування сферичної оболонки з пошкоджуваного матеріалу при зовнішньому і внутрішньому рівномірному тисках

Як ілюстративний приклад розглядається задача про вплив пошкоджуваності матеріалу у вигляді утворення розсіяних кругових мікротріщин на деформування замкненої сферичної оболонки радіуса $R$ і товщини $h$. Припускають, що оболонка навантажена рівномірним внутрішнім або зовнішнім тиском інтенсивністю $q$. Сталі пружних властивостей і параметри розподілу мікроміцності матеріалу вважаються однаковими:

$$E_0 = 4{,}2 \cdot 10^{11}\text{Па}, \; \nu_0 = 0{,}2, \; \sigma_1 = 2{,}8 \cdot 10^9\text{Па},$$
$$\sigma_2 = 2{,}0 \cdot 10^9\text{Па}, \; \alpha_1 = \alpha_2 = 2.$$

При варіантах навантаження, що розглядаються, в оболонці реалізується безмоментний напружений стан [16]

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{qR}{2h}.$$

Зв'язок між деформаціями ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$), напруженнями і нормальними переміщеннями точок серединної поверхні оболонки $w$ має вигляд

$$\varepsilon_{11} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{11}, \; \varepsilon_{11} = \frac{w}{R} = \frac{1-\nu}{E}\frac{qR}{2h}. \qquad (30)$$

У формулі (30) при мікроруйнуванні матеріалу сталі напруження $E, \nu$ залежно від інтенсивності зовнішнього і внутрішнього тисків визначаються співвідношеннями (28), (29) і (11)—(13). В таблиці наведені результати обчислення безрозмірних величин радіальних переміщень при різних рівнях навантаження із врахуванням мікроруйнувань матеріалу при внутрішньому $(w/R)_+$ і зовнішньому $(w/R)_-$ тисках, а також без врахування мікроруйнувань $(w/R)$ для оболонки з відносною товщиною $h/R = 10^{-2}$.

***Таблиця.*** Результати обчислень безрозмірних радіальних переміщень

| $\frac{q}{\sigma_2}\cdot 10^2$ | $\left(\frac{w}{R}\right)_+\cdot 10^2$ | $\left(\frac{w}{R}\right)_-\cdot 10^2$ | $\left(\frac{w}{R}\right)\cdot 10^2$ |
|---|---|---|---|
| 0,20 | 0,0538 | 0,0534 | 0,0533 |
| 0,40 | 0,1112 | 0,1069 | 0,1067 |
| 0,60 | 0,1718 | 0,1606 | 0,1599 |
| 0,80 | 0,2465 | 0,2148 | 0,2133 |
| 1,00 | 0,3457 | 0,2695 | 0,2666 |

## Висновки

Отримана на основі структурного підходу та з використанням енергетичного методу континуальна модель зв’язаного процесу деформування і мікропошкоджуваності пружно-крихких ізотропних матеріалів дає можливість узгодити анізотропію деформативних властивостей і пошкоджуваності матеріалу залежно від виду напруженого стану в єдиній процедурі виводу рівнянь стану для пошкоджуваних тіл.

Результат розв’язку задачі про вплив пошкоджуваності матеріалу у вигляді утворення розсіяних кругових мікротріщин на деформування замкненої сферичної оболонки показав, що більш істотно вплив пошкоджуваності матеріалу проявляється при розтягуванні оболонки. У подальших дослідженнях розглядувана модель буде використана для отримання рівнянь зв’язку параметрів пошкоджуваності матеріалу із змінами діелектричної проникності в тілах діелектриків, які можна використати для експериментальної оцінки несучої здатності тіл за допомогою електромагнітних хвиль.

Д.В. Бабич, В.В. Даруга, М.П. Малежик

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГО-ХРУПКИХ ТЕЛ ПРИ ПРОГРЕССИРУЮЩЕМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИИ

На основе структурного подхода с применением энергетического метода строится континуальная модель связанного процесса деформирования и микроповреждаемости тел, которые считаются упруго-хрупкими изотропными материалами. Прогрессирующая с ростом нагрузки микроповреждаемость отождествляется с накоплением стохастически рассеянных по объему тела плоских круговых либо эллиптических микротрещин, образующихся вследствие растрескивания структурных элементов, в которых локальные напряжения достигают границы микропрочности, являющейся случайной функцией координат.

D.V. Babych, V.V. Daruga, M.P. Malezhyk

DEFORMING OF ELASTICALLY FRIABLE BODIES AT A PROGRESSING CRACKS INITIATION

Based on the structural approach with application of a strain-energy method, we construct a continuum model of the bound process of deformation and microdamage of bodies, which are considered to be elastic and friable isotropic materials. Through experiments conducted, we determine that microdamage, progressing with the growth of load, is identified with accumulation of flat circumferential or elliptical microfissures, stochastically dispersed by volume of the bodies. They are formed as a result of structural elements cracking, in which local stresses reach the border of microstrength, which is a stochastic function of coordinates.

1. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. – 264 с.
2. *Месинец В.Н., Пашков А.Д., Латышев В.А.* Разрушение горных пород. – М.: Недра, 1975. – 240 с.
3. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.* Проблемы динамики разрушения твердых тел. – СПб.: Изд-во Спб.ГУ, 1997. – 138 с.
4. *Александров К.С., Продайвода Г.Т.* Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 354 с.
5. *Хорошун Л.П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 10. – С. 120–127.
6. *Бабич Д.В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Пробл. прочности. – 1996. – № 3. – С. 20–30.
7. *Бабич Д.В.* Про особливості деформування пошкоджених матеріалів // Доп. НАНУ. – 1994. – № 7. – С. 49–54.
8. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1983. – 334 с.

9. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1973. – № 4. – С. 149–158.
10. *Budiansky B., O'Konnell R.J.* Elastic moduli of cracked solid // Inter. J. Solids Struct. – 1976. – **12,** N 2. – P. 81–97.
11. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
12. *Daniels H.E.* The statical theory of the strength of bundles of threads. I // Proc. Roy. Soc. – 1945. – **A 183**. – P. 405.
13. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 478 с.
14. *Германович Л.Н., Дыскин А.В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 2. – С. 118–131.
15. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
16. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. − М.: Физматгиз, 1963. − 880 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
11 грудня 2009 року