

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н.О.Якуніна, І.М.Іванова

ФІЗИКА-1. ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА 1 ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний
посібник для студентів закладів вищої освіти, які навчаються
за спеціальністю «Інформаційні системи та технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 537.8

ББК 22.33

Ф 48

Рецензент: В.Й Котовський завідувач кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла КПІ ім. Ігоря Сікорського, доктор т.н., професор

Відповідальний редактор: В.М. Локтев В.М., завідувач кафедри загальної та теоретичної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, академік, доктор фіз.-мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 24.06.2021 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 5 від 26.05.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Якуніна Наталія Олександрівна, доцент кафедри загальної та теоретичної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, к.ф.-м. наук, доцент,

Іванова Ірина Михайлівна, старший викладач кафедри загальної та теоретичної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, к.ф.-м.наук.

Ф 48 Фізика-1. Загальна Фізика 1. Лабораторний практикум . Навч. посібник / Н.О. Якуніна, І.М.Іванова – К. : Вид-во «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 16 с.

У лабораторному практикумі представлені теоретичні відомості, опис лабораторної роботи з теми «Визначення характеристик тіл, що взаємодіють при ударі, за допомогою законів збереження», що викладається для майбутніх фахівців за спеціальністю «Інформаційні системи та технології», наведені методичні вказівки до виконання цієї роботи, містяться контрольні питання для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Посібник призначений для студентів, які навчаються у закладах вищої освіти і вивчають нормативну навчальну дисципліну «загальна фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки за спеціальністю «Інформаційні системи та технології».

Посібник може бути корисним для науково-педагогічних працівників, які викладають курс фізики, під час планування та підготовки завдань до лабораторних робіт та модульних контрольних робіт з навчальної дисципліни «Фізика-1. Загальна Фізика 1».

© Н.О. Якуніна, І.М.Іванова, 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

Лабораторна робота № 7(1)

Визначення характеристик тіл, що взаємодіють при ударі, за допомогою законів збереження

Мета роботи: дослідити застосування законів обертального руху та законів збереження для визначення характеристик системи, що обертається; визначення модуля кручення дроту; визначення швидкості руху тіла-кулі.

Короткі теоретичні відомості. Якщо в системі діють короткочасні сили, для яких залежність від часу невідома, то безпосереднє вимірювання параметрів такої системи, безумовно, є ускладненим. Розглядати таку взаємодію за допомогою законів Ньютона важко. Набагато простіше користуватися непрямими методами, серед яких широко поширені методи, при яких досліджують пружні та непружні зіткнення (удар). Теорія цих процесів не розглядає докладно процес взаємодії у часі, а базується на застосування законів збереження (додаток 1). В механіці обертального руху такі задачі розв'язують за допомогою закону збереження енергії та закону збереження моменту імпульсу. До числа методів, заснованих на цій ідеї відносяться методи балістичного і крутильного маятників. Якщо на маятник, що знаходиться в рівновазі впливати силою, то перше його максимальне відхилення від отриманого поштовху пропорційне моменту імпульсу.

У даній роботі використаний метод балістичного крутильного маятника, що дозволяє звести вимірювання параметрів системи до вимірювання відхилення маятника після абсолютно непружного удару.

Крутильний маятник – це тіло, яке може обертатись (коливатись) відносно довільної осі під дією пружної сили, що виникає при деформації кручення дроту, на якому закріплене тіло.

Коливання визначаються кутом відхилення тіла від положення рівноваги φ ,

вектором кутової швидкості $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$ та вектором кутового прискорення

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

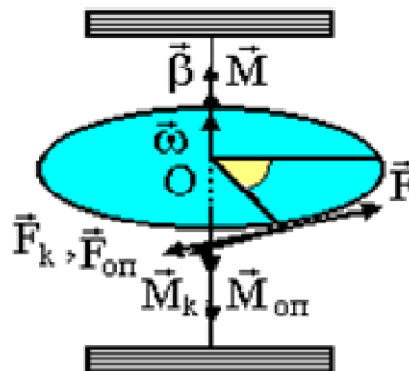


Рис. 5.1

Тіло здійснює малі періодичні коливання під дією моменту зовнішньої сили $\vec{F}$, моменту сили опору $F_{\text{оп}}$ та моменту $M_k = -D\varphi$ пружної сили деформації кручення $\vec{F}_k$ (рис.5.1). Коефіцієнт D називається модулем кручення. Лінійна залежність моменту сил кручення від кута повороту виконується лише для малих коливань.

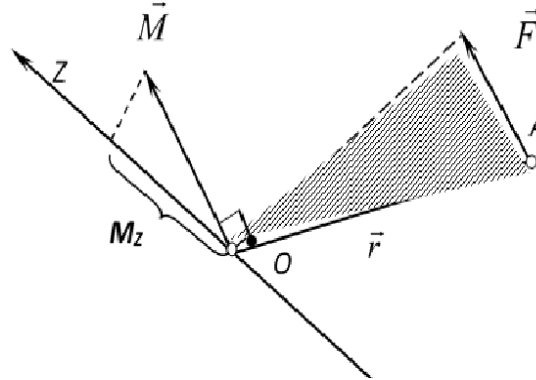


Рис. 5.2

Щоб тверде тіло із закріпленою віссю привести в обертовий рух, необхідно хоча б в одній з його точок прикласти зовнішню силу $\vec{F}$, яка не проходить через вісь обертання й не паралельну їй, тобто подіяти моментом сил. Загалом розрізняють момент сили відносно точки та момент сили відносно вісі.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно нерухомої точки O називається осьовий вектор $\vec{M}$, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O в точку A прикладання сили $\vec{F}$, на саму цю силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

Вектор $\vec{M}$ спрямований перпендикулярно площині векторів $\vec{r}$ та $\vec{F}$ (рис. 5.2). Його модуль $M = Fr \sin \alpha = F\ell$, де α – кут між $\vec{r}$ та $\vec{F}$, $\ell = r \sin \alpha$ – плече сили $\vec{F}$, яке дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного із точки O на лінію дії сили $\vec{F}$.

Моментом сили F_z відносно осі називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно будь-якої точки, обраної на даній осі.

Аналогічно для механічної системи вводиться поняття моменту імпульсу(рис. 5.3).

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки O

називається осьовий вектор $\vec{L}$, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}_i$ точки прикладання імпульсу, на вектор імпульсу цієї матеріальної точки $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{V}_i]$$

Момент імпульсу системи матеріальних точок відносно точки О визначається як сума векторів моментів імпульсу відносно тієї ж точки всіх матеріальних точок системи.

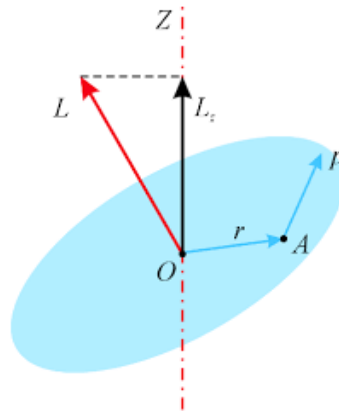


Рис.5.3

Моментом імпульсу механічної системи відносно осі Z називається проекція L_Z на цю вісь вектора моменту імпульсу системи відносно будь-якої точки, обраної на даній осі.

Для системи точок виконується **основний закон динаміки обертального руху**: швидкість зміни моменту імпульсу системи дорівнює сумарному моменту $M_{Z \text{ зовн}}$ всіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї осі (рівняння моментів):

$$\frac{d}{dt} L_Z = \sum M_{Z \text{ зовн}} \quad (1)$$

Момент імпульсу системи відносно осі Z можна визначити як добуток моменту інерції твердого тіла I_Z на його кутову швидкість ω : $L_Z = I_Z \omega$.

Якщо сумарний момент зовнішніх сил дорівнює нулю: $\sum M_{Z \text{ зовн}} = 0$, то твердження (1) приймає вигляд **закону збереження моменту імпульсу**:

$$\begin{aligned} L_Z &= \text{const} \\ \text{або} \quad I_Z \omega &= \text{const} \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо цей закон використовується у розв'язуванні задачі крутильного балістичного маятника, у який горизонтально потрапляє тіло-куля, що летить.

Методика проведення експерименту.

Балістичний крутильний маятник будують за допомогою достатньо довгого стержня, який розташовують у горизонтальній площині та закріплюють його центр мас на вертикальному пружному дроті. У тілі стержня або на ньому обладнують мішень. Зовнішній момент сили передається в момент непружного зіткнення з тілом-кулею. Після зіткнення з кулею маятник здійснює крутильні коливання у горизонтальній площині. Час співудару тіла-кулі з маятником τ значно менший порівняно з періодом виникаючих

коливань T . Тому систему «тіло-куля» можна розглядати як замкнену та застосовувати до неї до неї закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії.

Крутильний балістичний маятник являє собою симетричну відносно осі OZ хрестовину із двома вантажами мас m_0 , які можуть переміщатися по горизонтальній частині хрестовини та потрібні для зміни моменту інерції

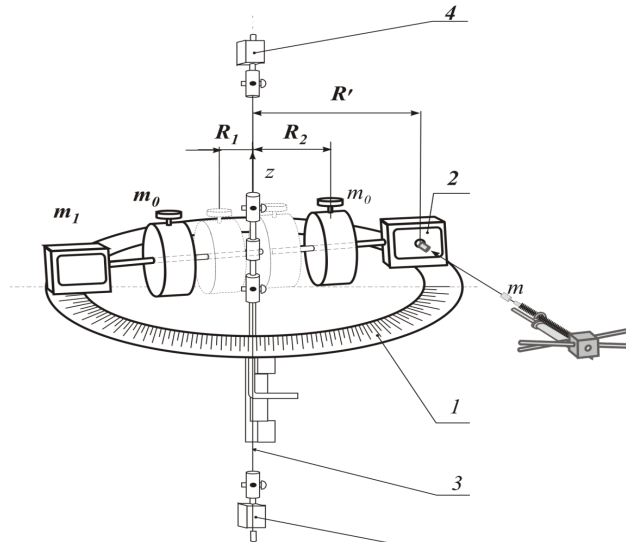


Рис. 5.4

маятника (рис. 5.4). Нерухомий вантаж-насадка масою m_1 потрібен для урівноважування мішені 2. Хрестоподібний маятник укріплений на кронштейнах 4 за допомогою пружного дроту 3 і може робити коливання навколо вертикальної осі OZ . Після влучення тіла-кулі в мішень 2 маятник відхиляється на деякий кут φ , величина якого визначається по круговій шкалі 1.

Куля масою m , що летить горизонтально, і крутильний балістичний маятник представляють собою механічну систему, у якій $\sum M_{Z \text{ зовн}} = 0$, а тому виконується закон збереження моменту імпульсу

$$\vec{L}_K + \vec{L}_M = \vec{L}'_K + \vec{L}'_M, \quad (3)$$

$\vec{L}_K$ і $\vec{L}_M$ – вектори моментів імпульсу, відповідно, кулі й маятника до влучення кулі в мішень; $\vec{L}'_K$ і $\vec{L}'_M$ – вектори моментів імпульсу кулі й маятника після влучення кулі.

Оскільки напрямки векторів моментів імпульсу збігається з віссю обертання маятника OZ , суму їхніх векторів можна замінити алгебраїчною сумою їхніх проекцій:

$$L_{MZ} + L_{KZ} = L'_{MZ} + L'_{KZ} \quad (4)$$

де L_{MZ} , L_{KZ} , L'_{MZ} , L'_{KZ} – проекції векторів моментів імпульсу кулі та маятника на вісь OZ . Проекція моменту імпульсу тіла-кулі, що летить, на вісь OZ

$$L_{KZ} = mvR, \quad (5)$$

де m – маса кулі; v – швидкість кулі; R – відстань від точки влучення кулі в мішень 2 до осі обертання маятника.

Оскільки маятник до удару не рухається, проекція моменту імпульсу маятника на вісь OZ :

$$L_{MZ} = 0, \quad (6)$$

Після влучення, коли тіло-куля застрягне в мішені (абсолютно непружний удар), маятник почнуть обертатися відносно осі OZ з деякою початковою кутовою швидкістю ω_0 , тому

$$L'_{MZ} + L'_{KZ} = I\omega_0, \quad (7)$$

де I – сумарний момент інерції маятника й застряглої в ньому тіла-кулі.

Момент інерції тіла-кулі малий порівняно з моментом інерції маятника I_M , тому, нехтуючи ним, вважатимемо, що $I \approx I_M$ (8)

Підставивши значення моментів імпульсу тіла-кулі та маятника у формулу (4), знайдемо швидкість тіла-кулі

$$v = \frac{I_M \omega_0}{mR} \quad (9)$$

У цьому виразі невідомі значення початкової кутової швидкості ω_0 і моменту інерції маятника I_M . Безпосередньо їх виміряти складно, тому їх необхідно виразити через легко вимірювані величини. Практично роблять так: значення ω_0 визначають через початковий кут закручування φ_0 та період коливань T .

При малих деформаціях у дроті, що закручується, виникає гальмуючий момент пружних сил M_Z , який, за аналогією із законом Гука, можна вважати пропорційним куту повороту дроту φ :

$$M_Z = -D\varphi,$$

де D – модуль крутіння дроту. Підставляючи M_Z в основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла з нерухомою віссю обертання:

$$I_Z \beta_Z = M_Z \quad (10)$$

Отримаємо $I_M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi$ або $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D\varphi}{I_M} = 0$.

Це рівняння при малих кутах закручування ($\varphi \ll 2\pi$) має рішення $\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I_M}} \cdot t + \alpha\right)$ з якого випливає, що маятник здійснює гармонійні коливання із циклічною частотою $\sqrt{\frac{D}{I_M}}$ і кутовою амплітудою φ_0 .

Потенційна енергія закрученого дроту, яка дорівнює $E_{\pi} = \frac{D \varphi_0^2}{2}$, при його розкручуванні переходить у кінетичну $E_K = \frac{I \omega_0^2}{2}$. За відсутності тертя відповідно до закону збереження механічної енергії:

$$\frac{D \varphi_0^2}{2} = \frac{I \omega_0^2}{2}, \quad (11)$$

звідки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_M}} \cdot \varphi_0$$

Циклічна частота коливань $\sqrt{\frac{D}{I_M}}$ пов'язана з періодом коливань T співвідношенням $\sqrt{\frac{D}{I_M}} = \frac{2\pi}{T}$. Отже $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot \varphi_0$ (12)

Значення I_M можна розрахувати або виходячи із властивості адитивності моменту інерції, або виразити його також, як і ω_0 , через період коливань T . У другому випадку скористаємося співвідношенням (12):

$$I_M = \frac{DT^2}{4\pi^2} \quad (13)$$

Щоб знайти коефіцієнт жорсткості пружини D , можна виходити із властивості адитивності моменту інерції. Запишемо його величину для двох симетричних відносно осі положень вантажів масою m_0 – коли вони максимально здвинуті та коли роздвинуті. При цьому відстані від центрів мас вантажів до осі обертання рівні R_1 та R_2 , відповідно. Отже, момент інерції маятника складається з моментів інерції I_{m_0} двох грузів масою m_0 , рівних по величині моментів інерції мішені й противаги $I_{\text{миш.}}$, а також з моменту інерції стержня $I_{\text{ст.}}$ (моментом інерції тіла-кулі ми нехтуємо, тому що її маса m значно менша за масу елементів, що складають маятник):

$$I_M = 2I_{m_0} + 2I_{\text{миш.}} + I_{\text{ст.}}$$

З урахуванням (13) і розглядаючи вантажі масою m_0 як точкові маси, розташовані симетрично на відстанях R_1 та R_2 від осі обертання, для першого і другого експериментів, відповідно, запишемо:

$$\frac{DT_1^2}{4\pi^2} = 2m_0R_1^2 + 2I_{\text{миш.}} + I_{\text{ст.}}$$

$$\frac{DT_2^2}{4\pi^2} = 2m_0R_2^2 + 2I_{\text{миш.}} + I_{\text{ст.}},$$

де T_1 і T_2 – періоди коливань маятника при здвинутих і роздвинутих вантажах, відповідно. Віднявши від другого рівняння перше та виконавши елементарні перетворення, одержимо вираз для модуля крутіння дроту:

$$D = 8\pi^2 m_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (14)$$

Підставивши (14) в (13), одержимо вираз для моменту інерції маятника через легко вимірювані величини:

$$I_M = 2m_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2} T^2 \quad (15)$$

Остаточна формула для визначення швидкості польоту кулі з урахуванням (12) і (15) набуває вигляду:

$$v = \frac{4\pi m_0 \varphi_0}{mR} T \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = A \frac{T \varphi_0}{R}; \quad (16)$$

де $A = \frac{4\pi m_0}{m} \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2}$; φ_0 – максимальний кут відхилення маятника від стану

рівноваги крутильного балістичного маятника після влучення кулі у конкретному досліді; T – період коливань, які виникають у цьому випадку; R – відстань від осі обертання маятника до місця влучення кулі у мішень.

Порядок виконання роботи.

Завдання 1. Визначення модуля крутіння хрестоподібного маятника.

- 1) Максимально здвинути вантажі-насадки m_0 одне до одного на відстань R_1 . Записати в табл.1 значення m_0 та R_1 .
- 2) Відхилити хрестоподібний маятник на кут $\varphi_0 \approx 10 \div 20^\circ$.
- 3) Відпустити маятник та одночасно з тим включити таймер: виміряти час t_{11} п'яти коливань. Записати значення t_{11} в табл.1.
- 4) Визначити період $T_{11} = \frac{t_{11}}{5}$ коливання.
- 5) Повторити ще двічі вимірювання часу коливань t_{12} та значення t_{13} .
- 6) Визначити періоди коливань T_{12} та T_{13} .
- 7) Обчислити середній період коливань маятника при здвигнутих насадках:

$$T_1 = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{3}.$$
- 8) Максимально роздвинути вантажі-насадки до відстані R_2 .
- 9) Повторити вимірювання згідно з вимогами пунктів 2), 3), 4).
- 10) Обчислити середній період коливань маятника T_2 при роздвинутих насадках.
- 11) Результати вимірювань та обчислень занести до таблиці 1.
- 12) Обчислити модуль крутіння D_i згідно з формулою (14), знайти $\langle D \rangle$.

Таблиця 1.

	R_i^2 м ²	m_0 кг	t_{ii}	T_{ii}	T_i	T_i^2	D_i	$\langle D \rangle$
Насадки здвинуті $R_1 =$ м					$T_1 =$			
Насадки роздвинуті $R_2 =$ м					$T_2 =$			

Завдання 2. Визначити швидкість польоту кулі за допомогою крутильного балістичного маятника

- 1) Максимально наблизити вантажі-насадки m_0 друг до друга. Встановити маятник у положення рівноваги ($\varphi = 0$).
- 2) Записати масу кулі m .
- 3) Підготувати пружинний пістолет до пострілу.
- 4) Вистрілити з пістолета і виміряти максимальний кут відхилення маятника φ_0 .

Перевести значення кута φ_0 із градусів у радіани.

- 5) Одночасно з вимірюванням максимального кута відхилення включити секундомір та виміряти t – час $n = 5$ коливань маятника. Обчислити період T за формулою $T = \frac{t}{n}$.

- 6) Виміряти відстань R від осі обертання маятника до місця влучення кулі в мішень.

Результати занести в табл. 2.

- 7) Повторити дослід по пунктах 3–5 ще два рази.

- 8) Максимально віддалити вантажі-насадки m_0 один від одного, повторити серію експериментів аналогічно пунктам 2–5 три рази, записуючи при цьому в таблицю 2 значення φ_0 , T і R .

- 9) З табл. 1 занести в табл. 2 значення модуль крутіння дроту

Таблиця 2.

	m	A	$\langle D \rangle$	φ_{0i}	R	t_{ii}	T_{ii}	T_i	v_i	$\langle v \rangle$	Δv
Насадки здвинуті											
$R_1=$ м.											
Насадки роздвин уті											
	$R_2=$ м.										

- 10) Разрахувати для кожного з шістьох дослідів швидкість польоту кулі за формулою (16).
- 11) Знайти середнє значення швидкості $\langle v \rangle$ та похибку вимірювань Δv ,
- 12) Результати занести до таблиці 2.
- 13) Зробити висновки по отриманим експериментальним результатам.

Контрольні питання

1. Сформулюйте основний закон динаміки обертального руху твердого тіла. Як одержати закон динаміки твердого тіла у випадку обертання навколо нерухомої осі?
2. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
3. Що називається періодом коливань, як його можна виміряти експериментально?
4. Отримайте формулу для розрахунку швидкості польоту кулі. Чи зміниться період коливань маятника, якщо збільшити масу його стрижня, якщо збільшити масу кулі?
5. Яка методика вимірювання швидкості польоту кулі?
6. Чи виконується закон збереження механічної енергії при влученні кулі в мішень?
7. Вимірюванню яких параметрів варто приділити найбільшу увагу, щоб похибка вимірювання миттєвої швидкості була мінімальною?
8. У який вид енергії переходить кінетична енергія маятника, коли кут його відхилення максимальний?

Література

1. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики, т.1, Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка, вид. – К.: Техніка, 1999, § 3.1 – 3.7, 4.1 – 4.4.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд.–М.: Высшая школа, 1980, §31, 32, 34.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика, 3-е изд.–М.: Наука, 1989, §30.
4. Methodological instructions for laboratory work No. 7(1): Investigation of the rotational motion of a solid body and determination of the velocity of the bullet with the help of a torsion ballistic pendulum [<http://zitf.kpi.ua/>]: tutorial for students of specialty 163 Biomedical Engineering, of specializations Biomedical Informatics, Clinical Engineering, Rehabilitation Engineering / I. Sikorsky KPI; compilers: N.O. Iakunina, O.G. Danylevych, I.O. Yurchenko, T.L. Rebenchuk, V.V. Fedotov, O.S. Klymuk. - online text data (1 file: 1,26 Mb). - Kyiv: I. Sikorsky KPI, 2019. - 9p

Додаток 1

Один з основних прикладів використання закону збереження імпульсу та закону збереження енергії - це задача зіткнення тіл.

Зіткненням (або ударом) прийнято називати короточасну взаємодію тіл, в результаті якої швидкості тіл відчують значні зміни. Під час зіткнення тіл між ними діють короточасні ударні сили, величина яких, як правило, невідома. Тому не можна розглядати ударна взаємодія безпосередньо за допомогою законів Ньютона.

Застосування законів збереження енергії та імпульсу в багатьох випадках дозволяє виключити з розгляду сам процес зіткнення і отримати зв'язок між швидкостями тіл до і після зіткнення, минаючи всі проміжні значення цих величин.

Закон збереження імпульсу стверджує, що у замкненій системі довільної кількості тіл сумарний імпульс системи зберігається при будь-яких типах взаємодій в самій системі.

Повна механічна енергія системи складається з кінетичної енергії T та потенціальної енергії U тіл, які входять у дану систему: $E = T + U$.

Закон збереження механічної енергії стверджує, що повна механічна енергія системи, на яку діють лише консервативні сили, не змінюється з часом, тобто зберігається: $E_1 = E_2$ або $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$.

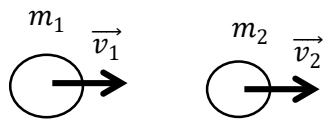
У механіці, як правило, використовуються дві моделі ударного взаємодії - абсолютно пружний і абсолютно непружних удари.

Непружними називаються такі зіткнення двох тіл, в результаті якого не виникає пружних сил.

Після непружного зіткнення тіла з'єднуються і далі рухаються як одне ціле. До класичних прикладів непружного зіткнення відносяться влучання кулі у рухому мішень чи злипання куль з пластиліну чи глини. При такому співударянні тіла зазнають деформації, а пружні сили та коливні процеси, що інколи виникають, з часом загасають і енергія цих коливань переходить у теплову енергію цих тіл. При абсолютно непружному ударі механічна енергія не зберігається.

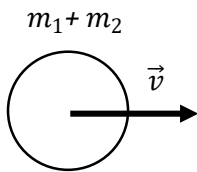
Розглянемо два тіла, які зазнають непружне центральне зіткнення. *Центральним ударом тіл називають зіткнення, при якому швидкості тіл до та після удару спрямовані по лінії, яка з'єднує центри мас тіл.*

До зіткнення імпульс першого тіла $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$, а другого тіла $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$.



Імпульс системи до удару $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

Після непружного зіткнення тіла рухаються як одне ціле тіло масою $(m_1 + m_2)$. Швидкість системи позначимо $\vec{v}$.



Імпульс такої системи після удару:

$$\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}.$$

Напишемо для цієї системи закон збереження імпульсу :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} \quad \text{або} \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

Отже, швидкість тіл після зіткнення:

$$\vec{v} = \frac{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}.$$

Теплова енергія, що виділяється в результаті абсолютно непружного зіткнення є різницею суми кінетичних енергій тіл до зіткнення T_1, T_2 та кінетичної енергії нового тіла після зіткнення T

$$Q = T_1 + T_2 - T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2,$$

де $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$ – приведена маса системи.

Другий приклад зіткнення – абсолютно пружне зіткнення.

Пружними називаються такі зіткнення двох тіл, в результаті якого у обох тіл, що зазнають зіткнення, за рахунок дії сил пружності не залишається ніяких деформацій, а їх внутрішня енергія не змінюється.

Такий процес є ідеалізованим. Одне з найближчих наближень – це зіткнення бильярдних шарів.

Розглянемо центральне пружне зіткнення. Для пружного зіткнення працює закон збереження імпульсу та закон збереження повної механічної енергії.

За законом збереження імпульсу:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

або

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (1)$$

де $\vec{p}_1'$ та $\vec{p}_2'$, $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ – імпульси і швидкості відповідних тіл після зіткнення.

Закон збереження енергії: $T_1 + T_2 = T_1' + T_2'$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (2)$$

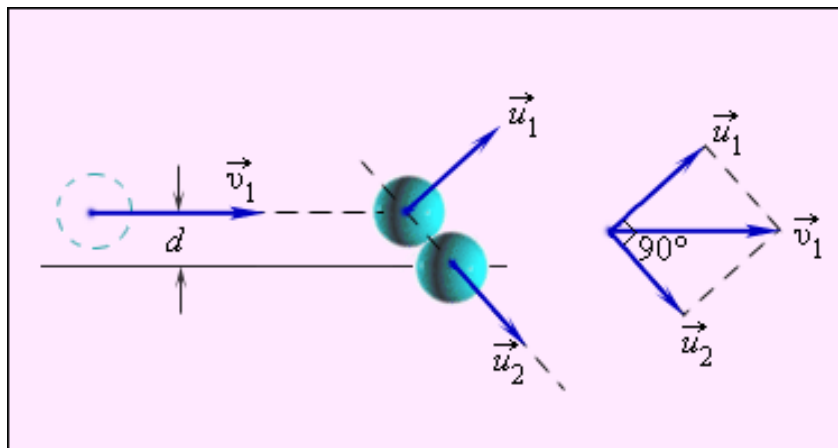
Якщо $v_1 \neq u_1$ та $v_2 \neq u_2$ то, розв'язавши (1) та (2), отримаємо:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

На практиці частіше ніж центральний (лобовий) удар реалізується нецентральне зіткнення.

При нецентральному пружному зіткненні швидкості частинок (куль) до і після зіткнення не спрямовані по одній прямій.

Окремим випадком нецентрального пружного удару може служити зіткнення двох бильярдних куль однакової маси, одна з яких до зіткнення була нерухомою, а швидкість другої була спрямована не по лінії центрів куль.



Після нецентрального зіткнення кулі розлітаються під деяким кутом один до одного. Для визначення швидкостей $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ після удару потрібно знати положення лінії центрів в момент удару або прицільну відстань d - відстань між двома лініями, проведеними через центри куль паралельно вектору швидкості $\vec{u}_1$ налітаючої кулі.

Якщо маси куль однакові, то вектори швидкостей $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ куль після пружного зіткнення завжди спрямовані перпендикулярно один до одного. Це легко показати, застосовуючи закони збереження імпульсу і енергії. При $m_1 = m_2 = m$ ці закони приймають вид: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$; $v_1^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Перше з цих рівностей означає, що вектори швидкостей $\vec{v}_1$, $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ утворюють трикутник (діаграма імпульсів), а друге - що для цього трикутника справедлива теорема Піфагора, це означає, що кут між катетами $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ дорівнює 90° .