УДК 517.9

А.Л. Гречко

ГЛАДКІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН СТРОГО МОНОТОННИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ

Вступ

Теорія монотонних диференціальних рівнянь виникла на початку XX сторіччя в працях В. Мюллера, Е. Камке, Г. Біркгофа та інших учених [1]. У подальшому М. Красносельский, М. Хірш розширили межі застосування до загальних монотонних відображень у конусах та монотонних динамічних систем або напівпотоків [1—3]. У працях А.М. Самойленка введено і фундаментально досліджено багато питань якісної поведінки лінійних розширеннях динамічних систем [4, 5], які мають безпосередній зв'язок з диференціальними рівняннями та потоками на многовидах. Тому зараз актуальним є дослідження питань гладкості інваріантних множин (многовидів) на монотонних лінійних розширеннях. Важливість цих питань в останні роки підтверджується бурхливим розвитком математичної біології та медицини, в основі яких лежить саме теорія монотонної еволюції.

Постановка задачі

Метою даної статті є отримання зручного критерію гладкості інваріантних, компактних множин монотонних лінійних розширень. Питання гладкості інваріантних множин (многовидів) динамічних систем досліджувалось у багатьох працях (див., наприклад, [6]), гладкість інваріантних множин монотонних напівпотоків розглядали П. Бруновський, В. Миржинський, І. Терещак та інші вчені [7, 8]. Тому доцільно досліджувати гладкість інваріантних множин у застосуванні до лінійних розширень динамічних систем.

Означення і попередні відомості

Розглянемо лінійне розширення

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(\varphi), \\ \dot{x} &= A(\varphi)x, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\varphi \in R^m, x \in R^n, \omega(\varphi)$ є C^k та її k-а похідна r-гельдерова $A(\varphi) \in C^k(R^m)$; також позначимо гладкий потік, який задається першим рівнянням в (1), через φ^t, а оператор еволюції π^t — потік, який задається лінійним розширенням (1) на тривіальному векторному розшаруванні $R^m \times R^n$, $t \in R$. Позначимо $\|\pi^t|_K\| = \sup_{x \in K} \|\pi^t(x)\|$, де $\|\cdot\|$ є операторною нормою в R^n. Одним із найважливіших інструментів монотонних динамічних систем є гільбертова псевдометрика та біркгофовський коефіцієнт стиснення [9]. Позначимо для потоку φ^t на K біркгофовський коефіцієнт стиснення як $\Delta(\varphi^t, K) = \sup_{t \in R} \sup_{x \in K} \Delta(\pi^t(x))$. Довільну інваріантну, компактну множину I потоку φ^t будемо позначати $H = H(\varphi^t, I)$ — мінімальний центр тяжіння Хільмі [10]. Нарешті, центральним припущенням є строга монотонність лінійного розширення (1): для довільних $x_1, x_2 \in R^n$ з нерівності $x_1 \le x_2, x_1 \ne x_2$, випливає нерівність $\pi^t(x_1) < \pi^t(x_2)$ $\forall t > 0$ [11].

Основний результат

У подальшому під $C^{k,r}$-многовидом будемо розуміти многовид, в якого заміни координат є $C^{k,r}$-відображення. Також введемо область тяжіння потоку φ^t відносно компактної, інваріантної множини K:

$$S(K, \varphi^t) = \{x \in X : \lim_{t \to \infty} \rho(\varphi^t(x), K) = 0\},$$

де ρ — метрика на метричному просторі (X, ρ).

Теорема 1. Нехай π^t — строго монотонне лінійне розширення, I — компактна інваріантна множина та H — центр Хільмі потоку φ^t. Нехай справджуються умови:

1) $\omega(\varphi)$ є $C^{1+k,r}$ для $k \in N$ і $0 \le r < 1$;

2) $\Delta(\varphi^t, H)^{1+k+r} \|\pi^t|_H\|^{k+r} < 1$.

Тоді $S(H, \varphi^t|_I)$ є $C^{1+k,r}$.

Доведення. Нехай $U \subset I$ є фундаментальний окіл множини H в I, який має компактне замикання. За припущенням строгої монотонності лінійного розширення за теоремою 2.6 з [11] можна, без обмежень загальності, припускати дискретність часу $t \in N$ і стверджувати виконання нерівностей

$$\|\pi^t(x)|_{E_x}\| \le a \|\pi^t(x) u(x)\|,$$

$$\|\pi^t(x)|_{E_x}\|^{1+k+r} \le b\|\pi^t(x)u(x)\|$$

для деяких $a<1$ і $b<1$; E_x є шаром множини E вздовж точки x.

Введемо відображення $g=\varphi^{-t}$. Тоді останні нерівності $\forall x\in H$ набудуть вигляду

$$\|Dg(x)u(x)\| \le am(Dg(x)|_{E_x}),$$

$$\|Dg(x)u(x)\| \le b(m(Dg(x)|_{E_x}))^{k+1+r},$$

де $m(A)=\inf\{\|Av\|:\|v\|=1\}$ — мінімальна норма; $Dg(x)$ — матриця Якобі відображення g. Також за теоремою з 2.6 з [11] при фіксованому $\varepsilon>0$ існує окіл $W\subset U$ множини I та розбивка $E'\oplus L'$ дотичного розшарування $T_W R^m = W\times R^m$, тобто для всіх $x\in W$ похідна $Dg(x)\colon E'_x\oplus L'_x \to \to E'_{g(x)}\oplus L'_{g(x)}$ має блочний вигляд

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix},$$

причому $\|B_x\|\le\varepsilon, \|C_x\|\le\varepsilon, \|A_x - Dg(x_1)|_{E_{x_1}}\|\le\varepsilon$, $\|D_x - Dg(x_1)|_{L_{x_1}}\|\le\varepsilon$, де x_1 — найближча точка до x в H.

Тепер виберемо $k\in N$ достатньо великим, щоб виконувалось включення $\varphi^{tk}(U)\subset W$ та покладемо $X=\varphi^{tk}(U)$. Нехай $L(E'_x, L'_x)$ є простором лінійних відображень з E'_x до L'_x і нехай $\Pi: L\to X$ є векторним розшаруванням над X, причому його шари належать $L(E'_x, L'_x)$. Нехай $D_x\subset L(E'_x, L'_x)$ є одиничною кулею в $L(E'_x, L'_x)$ і нехай D є розшаруванням, причому його шар знаходиться в точці x є D_x.

Нехай $X_0=\varphi^t(X)=g^{-1}(X)$, $h=g|_{X_0}$ і $D_0 = = D\cap\Pi^{-1}(X_0)$. Якщо ε є достатньо малим, ми зможемо визначити шарове відображення, яке накриває h

$$\begin{array}{c} F: D_0 \to D, \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ h: X_0 \to X, \end{array}$$

за формулою

$$F(x,P)=(h(x),F_x(P)),$$

де

$$F_x(P)=(C_x+D_xP)\circ(A_x+B_xP)^{-1}.$$

Далі доведення проводимо за індукцією по $k\in N$. Відомо [8], що I є C^1 і $T_x I = E_x$ для всіх $x\in H$. Припустимо, що I є $C^k, k\in N$, $k\ge 1$, і $\omega(\varphi)$ є $C^{1+k,r}$. Нехай l_x є ліпшицева константа відображення $F_x: D_x\to D_{h(x)}$ та позначимо $\alpha_x=\|Dh^{-1}(h(x))\|$. Неважко переконатися, що з означення F випливає

$$l_x = \frac{\|Dg(x_1)|L_{x_1}\|}{m(Dg(x_1)|_{E_{x_1}})} + O(\varepsilon),$$

$$\alpha_x = \frac{1}{m(Dh(x))} = \frac{1}{m(Dg(x_1)|_{E_{x_1}})} + O(\varepsilon).$$

Таким чином, маємо:

(i) відображення F,h,h^{-1} є C^k і h є накриваючим відображенням ($X_0\subset h(X_0)$);

(ii) при малих ε маємо $\sup\limits_{x\in X_0} l_x \le a+O(\varepsilon)<1$ та $\sup\limits_{x\in X_0}(\alpha_x)^{k+r} l_x \le b+O(\varepsilon)<1$, тобто, згідно з теоремою про гельдеровський переріз та інваріантний многовид [6, теорема 3.5, 3.8], існує єдиний переріз $\sigma: X_0\to D_0$, причому

$$F(\mathrm{image}(\sigma))\cap E_0 = \mathrm{image}(\sigma).$$

Більше того, σ є $C^{k,r}$. Для заданого $x\in X_0$ нехай $P_x\in L(E'_x, L'_x)$ є лінійним відображенням, графіком якого є $T_x I$. Доведемо, що $P_x=\sigma(x)$. Оскільки $E_x = T_x I$ для $x\in K$ і $x\in X\to E'_x$ апроксимує $x\in K\to E_x$, то завжди можна (вибираючи U достатньо малим околом) вважати, що $\|P_x\|\le 1$, тобто маємо переріз $P: X_0\to D_0$ у вигляді $x\to P_x$. За означенням F отримаємо

$$\mathrm{graph}\, h(F_x(P_x)) = Dh(x)T_x I = T_{h(x)} I = \mathrm{graph}\, h(P_{h(x)}),$$

тобто $P_{h(x)} = F_x(P_x)$. Таким чином, P є інваріантним перерізом і за єдиністю маємо $P=\sigma$. Це доводить, що I є $C^{1+k,r}$ в околі X_0 і H, тобто остаточно маємо $S(H,\varphi^t|_I) = \bigcup\limits_{t\in N}\varphi^{-t}(X_0)$ і

φ^t є $C^{1+k,r}$, причому $S(H,\varphi^t|_I)$ є $C^{1+k,r}$. Теорему доведено.

З метою послаблення другої умови теореми 1 застосуємо елементи ергодичної теорії, а саме мультиплікативну ергодичну теорему [10, гл. 11]. Як і раніше, без обмежень загальності, розглядаємо дискретний випадок лінійного розширення $\pi^n, n\in N$, та потоку (каскаду) φ^n. Нагадаємо [7—11], що верхньою та нижньою ляпуновськими експонентами лінійного розширення π^n називаються вирази

$$\lambda_i^{\pm} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\min_{x\in H}\inf_{\|v\|=1}\|\pi^n(x)v\|,$$

$$\lambda_s^{\pm} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\max_{x\in H}\sup_{\|v\|=1}\|\pi^n(x)v\|,$$

де H — борелевський компакт, причому $\mu(H)= =1\ \forall x\in H$; μ — борелевська, інваріантна, нормована, ергодична міра потоку φ^n на H. Таким чином, маємо впорядковану послідовність ляпуновських експонент міри μ:

$$\lambda_1(\mu) > \lambda_2(\mu) > \ldots > \lambda_k(\mu).$$

Теорема 2. Нехай π^n — строго монотонне лінійне розширення, I — компактна інваріантна множина та H — центр Хільмі потоку φ^t. Нехай справджуються умови:

1) $\omega(\varphi)$ є $C^{1+k,r}$ для $k\in N$ та $0\le r<1$,

2) $(1+k+r)\lambda_2(\mu) > \lambda_1(\mu) > 0$.

Тоді $S(H,\varphi^t|_I)$ є $C^{1+k,r}$.

Доведення. Позначимо $X=\{(x,v): x\in H, v\in E_x, \|v\|=1\}$. Враховуючи компактність X та теорему 2.6 з [11], можна стверджувати існування послідовності $(x_n,v_n)\in X$, такої, що існує границя

$$q(\varphi^n,H,t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{\|\pi^n(x_n)v_n\|}{\|\pi^n(x_n)u(x_n)\|}.$$

Визначимо відображення $D: X\to X$ таким чином:

$$D(x,v) = \left(f(x), \frac{\pi^1(x)v}{\|\pi^1(x)v\|}\right).$$

Нехай $\{\xi_n\}_{n\ge 0}$ — послідовність нормованих мір, визначених на X такою формулою:

$$\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{D^i(x_n,v_n)}.$$

Враховуючи компактність X, завжди можна припускати (замінюючи послідовність ξ_n деякою підпослідовністю), що послідовність ξ_n слабко збігається до деякої нормованої міри ξ. Зауважимо, що з неперервності D випливає, що ξ є D-інваріантною.

Нехай $w: X\to R$ є відображенням, яке визначається так: $w(x,v) = \ln\left(\dfrac{\|\pi^1(x)v\|^t}{\|\pi^1(x)u(x)\|}\right)$. За ланцюговим правилом отримаємо

$$w(D^i(x,v)) = \ln\left(\frac{\|\pi^{i+1}(x)v\|^t}{\|\pi^1(x)v\|^t\,\|\pi^1(\pi^1(x))\cdot u(\varphi^i(x))\|}\right).$$

Враховуючи $u(\varphi^i(x)) = \dfrac{\pi^i(x)u(x)}{\|\pi^i(x)u(x)\|}$, неважко останній вираз перетворити таким чином:

$$w(D^i(x,v)) = \ln\left(\frac{\|\pi^{i+1}(x)v\|}{\|\pi^i(x)v\|}\frac{\|\pi^i(x)u(x)\|}{\|\pi^{i+1}(x)u(x)\|}\right).$$

Використавши мультиплікативну ергодичну теорему [7, 10], отримаємо

$$\int_X w\,d\xi = \lim_{n\to\infty}\int_X w\,d\xi_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{\|\pi^n(x_n)v_n\|^t}{\|\pi^n(x_n)u(x_n)\|} = q(\varphi^t,H,t).$$

Умови теореми дають змогу застосувати до міри ξ теорему про ергодичну декомпозицію [10, теорема 6.4]

$$\int_X w d\xi = \int_X\left(\int_X w\,d\xi_{(x,v)}\right)d\xi,$$

де $\xi_{(x,v)}$ — ергодичні, D — інваріантні, нормовані міри, тобто маємо, що для довільного $\varepsilon>0$ існує ергодична, D-інваріантна міра $\zeta = =\xi_{(x,v)}$ для деяких (x,v), така, що виконується нерівність

$$\int_X w\,d\zeta \ge q(\varphi^t,H,t)-\varepsilon.$$

З ергодичної теореми осереднення Біркгофа [10] випливає існування борелевської множини $X_1\subset X$, такої, що $\zeta(X_1)=1$ і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\|\pi^n(x)v\|}{\|\pi^n(x)u(x)\|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}w(D^i(x,v))=\int_X w\,d\zeta\ge q(\varphi^t,H,t)-\varepsilon$$

для всіх $(x,v)\in X_1$. Нехай μ — нормована міра на X, яка має вигляд

$$\mu(P)=\zeta\{(x,v)\in X : x\in P\}.$$

Цілком зрозуміло, що μ є φ^t — інваріантною та ергодичною. З іншого боку, застосовуючи мультиплікативну теорему та її наслідки [10, гл. 11], остаточно отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\|\pi^n(x)v\|^t}{\|\pi^n(x)u(x)\|}\right)=t\lambda_2(\mu)-\lambda_1(\mu)$$

для μ — майже всіх $x\in H$ і $v\in E_x$. Остаточно

$$\sup_{\mu_{\text{epr}}} t\lambda_2(\mu)-\lambda_1(\mu)\ge q(\varphi^t,H,t),$$

звідки отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\sup_{x\in H}\frac{\|\pi^n(x)|_{E_x}\|^t}{\|\pi^n(x)u(x)\|}\right)=\sup_{\mu}(t\lambda_2(\mu)-\lambda_1(\mu))$$

$$\forall t\ge 0.$$

Зауважимо, що твердження теореми 2 тепер випливає з теореми 1 та теореми 1 праці [7]. Доведення теореми 2 завершено.

Приклад. Одним із головних застосувань теорії монотонних динамічних систем є різні підрозділи математичної біології, зокрема математична теорія популяцій [1]. Розглянемо векторне поле $F:R^3\to R^3$ та локальний потік $\{F^t\}$, що відповідає цьому векторному полю. Строга монотонність у даному випадку частіше за все розглядається як кооперативність векторного поля F:

$$\frac{\partial F_i}{\partial F_j}\ge 0 \quad i\ne j.$$

Тоді, застосовуючи теореми 1 і 2, маємо такий результат.

Наслідок. Нехай H — центр Хільмі кооперативного потоку $\{F^t\}$, який складається тільки з особливих точок c_i, $i=1,..,k$, потоку $\{F^t\}$ і $F\in C^{1+k}$. Якщо виконується умова

$$(1+k)\lambda_2(c_i)<\lambda_1(c_i)<0 \quad \forall i=1,...,k,$$

де $\lambda_1(c_i)>\lambda_2(c_i)$ — дві найбільші дійсні частини власних значень матриці Якобі векторного поля F в точці c_i. Тоді

$$S(H,F^t)\in C^{1+k}.$$

Висновки

Використовуючи доведену теорему, можна отримати зручний коефіцієнтний критерій перевірки гладкості інваріантних множин для частинних випадків монотонних диференціальних рівнянь (кооперативні або конкурентні динамічні системи математичної теорії популяцій). У подальших дослідженнях варто послабити складну другу умову теореми та надати аналоги доведеної теореми на нескінченновимірний випадок лінійних розширень на банахових розшаруваннях.

А.Л. Гречко

ГЛАДКОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ СТРОГО МОНОТОННЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ

Рассматриваются монотонные линейные расширения динамических систем. С помощью проективной динамики доказано условие гладкости инвариантных множеств (многообразий) линейного расширения.

A.L. Grechko

ON SMOOTHNESS OF INVARIANT SETS OF THE MONOTONE LINEAR EXTENSIONS

This paper considers the monotone linear extensions of dynamic systems. Moreover, we use the projection dynamics to prove the smoothness of invariant sets (manifolds) of linear extensions.

1. *Smith H.* Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative system. — AMS, Math. Surv. Monogr., Providence, 1995. — **11**. — 254 p.

2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Мир, 1984. – 560 с.
3. *Hirsch M.* Systems of differential equations that are competitive or cooperative I: Limit sets // SIAM. J. Math. Anal. – 1982. – **13**, N 1. – P. 167–179.
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219–1240.
6. *Hisch M.* Invariant manifolds: Lect. Notes in math. – Berlin: Springer, 1977. – **583**. – 172 p.
7. *Schreiber S.* Expansion rates and Lyapunov exponents // Discr. Cont. Dynam. Sys. – 1997. – **3**. – P. 433–439.
8. *Terescak I.* Dynamics of C^1 smooth strongly monotone discrete-time dynamical sysytems. – Preprint, 1996.
9. *Seneta E.* Nonnegative Matrices and Markov Chains. – Berlin: Springer, 1981. – 312 p.
10. *Mane R.* Ergodic theory and differential dynamics. – New York: Springer, 1987. – 388 p.
11. *Гречко А.Л.* Критерії існування обмежених розв’язків неоднорідних лінійних розширень динамічних систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 2008. – 109 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
20 серпня 2010 року