

Складні процеси відновлення: асимптотична поведінка і застосування у фінансовій і актуарній математиці, теорії надійності і теорії масового обслуговування

Н. М. Зінченко¹

¹*Київський столичний університет ім. Бориса Грінченка,
Київ, Україна*

nm.zinchenko@kubg.edu.ua

Анотація

Аналіз асимптотики складних процесів відновлення $D(t)$ є дієвим інструментом дослідження їх можливих застосувань у фінансах і страхуванні та у різноманітних технічних дисциплінах. З цією метою наводимо цілий ряд граничних теорем для $D(t)$, зокрема твердження типу «сильного принципу інваріантності», що дають достатні умови апроксимації процесів $D(t)$ за допомогою вінеровського процесу чи стійкого процесу і слугують підґрунтям для подальшого дослідження швидкості зростання складних процесів відновлення $D(t)$ і флуктуації їх приростів.

Ключові слова: складний процес відновлення; складний процес Пуассона; процеси ризику; граничні теореми; сильний принцип інваріантності; закон повторного логарифму.

Процеси відновлення $N(t)$ і складні процеси відновлення – це випадкові процеси, що тісно пов'язані з класичною схемою сум незалежних випадкових величин. Нехай $\{z_i, i \geq 1\}$ – невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.), $Z(x) = \sum_{i=1}^{[x]} z_i$, $x > 0$, $Z(0) = 0$. **Процес відновлення (рахуючий процес)** визначається як

$$N(t) = \inf\{x \geq 0 : Z(x) > t\}.$$

Нехай $\{X_i, i \geq 1\}$ інша послідовність н.о.р.в.в. незалежних від $\{z_i, i \geq 1\}$, $S(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X_i$, $t > 0$, $S(0) = 0$.

Означення 1. *Складний процес відновлення* визначається співвідношенням

$$D(t) = S(N(t)) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \quad (1)$$

Складні процеси відновлення в теорії масового обслуговування, в теорії черг та в теорії надійності часто інтерпретують, як загальний час очікування обслуговування на інтервалі часу $[0, t]$, час безвідмовної роботи системи і т.п.; у фінансовій математиці – як загальну зміну ринкової вартості до моменту часу t ; в актуарній (страховій) математиці – як загальну суму звернень до страхової компанії на відшкодування збитків на інтервалі часу $[0, t]$. Наприклад, в *класичній динамічній моделі ризику Крамера – Лундберга* процес ризику $U(T)$, що описує зміни резервного капіталу страховика для певного портфелю страхових договорів, визначається як

$$U(t) = u + ct - D(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2)$$

де розміри виплат $\{X_i, i \geq 1\}$ – н.о.р.в.в. з функцією розподілу (ф.р.) $F(x)$ та скінченним математичним сподіванням $m = EX_1$, $\{z_i, i \geq 1\}$ – моменти надходження вимог на виплати, u – початковий капітал, c – швидкість (інтенсивність) надходження страхових внесків, $N(t)$ – процес надходження вимог – процес Пуассона, проміжки часу між надходженнями вимог мають експоненційний розподіл. Отже, тут $D(t)$ – *складний процес Пуассона*. У більш загальній ситуації (*модель Спарре – Андерсена*) $N(t)$ – процес відновлення. Подальше узагальнення моделі колективного ризику приводить до розгляду процесів ризику зі *стохастичними преміями*:

$$U^*(t) = u + \Pi(t) - D(t) = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} y_i - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (3)$$

де $N(t)$ і $N_1(t)$ – незалежні процеси відновлення, $N(t)$ моделює кількість позовів, $N_1(t)$ моделює кількість страхових полісів, придбаних на інтервалі часу $[0, t]$, $\{X_i, i \geq 1\}$ – розміри позовів, $\{y_i, i \geq 1\}$ – вартості страхових полісів.

Страховика часто цікавить знаходження такого показника як *ймовірність банкрутства* $\psi(U) = P(U(t) < 0 \text{ для деякого } t > 0)$, що впливає на визначення обсягу резерву та вартості страхових полісів. Оскільки знайти точні формули для $\psi(U)$ вдається лише в окремих випадках, потужним інструментом дослідження процесу ризику і процесу сумарних виплат $D(t)$ є граничні теореми, що дозволяють дослідити асимптотичну поведінку $U^*(t)$, $U(t)$, $D(t)$ і відповідно оцінити $\psi(U)$ в залежності від вимог, що накладаються на випадкові величини (в.в.) $\{X_i, i \geq 1\}$, $\{y_i, i \geq 1\}$ та процеси відновлення $N(t)$ і $N_1(t)$.

Далі наведемо ряд граничних теорем, в яких сформульовані достатні умови, що допускають майже напевне апроксимацію $D(t)$ і $U(t)$ за допомогою вінеровського

або стійкого процесу, де похибка апроксимації є не випадковою функцією. Клас подібних тверджень об'єднують спільною назвою *сильний принцип інваріантності*.

Теорема 1. *Нехай для складного процесу відновлення $D(t)$ виконуються умови:*

(i) $E|X_1|^{p_1} < \infty$, $E|z_1|^{p_2} < \infty$, $Ez_1 = 1/\lambda > 0$, $p = \min\{p_1, p_2\} > 2$, $EX_1 = m$, $Var X_1 = \sigma^2$, $Var z_1 = \tau^2$; позначимо $\nu^2 = \lambda\sigma^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2$, тоді $\{X_i\}$ та $N(t)$ можна побудувати на одному ймовірнісному просторі разом з вінерівським процесом $W(t)$ так, щоб

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |S(N(t)) - \lambda mt - \nu W(t)| = o(T^{1/p}); \quad (4)$$

(ii) якщо $p = 2$, тоді права частина (4) дорівнює $o(T \ln \ln T)^{1/2}$;

(iii) якщо $E \exp(uX_1) < \infty$, $E \exp(uz_1) < \infty$ для всіх $u \in (0, u_0)$, то права частина – це $O(\ln T)$.

Далі припустимо, що $\{X_i\}$ належать області нормального притягання α -стійкого закону з параметрами $1 < \alpha < 2$, $|\beta| \leq 1$, тоді апроксимуючий процес для $D(t)$ – це стійкий процес $Y_\alpha(t)$ (умова $\alpha > 1$ забезпечує існування скінченного мат.сподівання), і будемо використовувати наступне:

Умова (C): існують $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ і $l > \alpha$ такі, що для $|u| < a_1$

$$|f(u) - g_{\alpha,\beta}(u)| < a_2 |u|^l,$$

де $g_{\alpha,\beta}(u)$ – характеристична функція (х.ф.) стійкого закону з параметрами α, β , $f(u)$ – х.ф. в.в. $(X_1 - EX_1)$, коли $1 < \alpha < 2$, і х.ф. в.в. X_1 , коли $0 < \alpha \leq 1$.

Теорема 2. *Якщо $\{X_i\}$ задовольняє умові (C) з $1 < \alpha < 2$, $|\beta| \leq 1$, $Ez_1^2 < \infty$. Тоді $\{X_i\}$, $\{z_i\}$, $N(t)$ можна визначити разом з α -стійким процесом $Y_\alpha(t) = Y_{\alpha,\beta}(t)$, $t \geq 0$ так, щоб*

$$|S(N(t)) - m\lambda t - Y_{\alpha,\beta}(\lambda t)| = o(t^{1/\alpha - \varrho_1}), \quad \varrho_1 \in (0, \rho_0), \quad (5)$$

для деякого $\varrho_0 = \varrho_0(\alpha, l) > 0$.

Наслідок 1. *Твердження теорем 1, 2 виконуються, коли $N(t)$ – однорідний процес Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$.*

Теорема 3. *Нехай $\{X_i\}$ задовольняє умові (C) з $1 < \alpha_1 < 2$, а $\{z_i\}$ задовольняє (C) з $1 < \alpha_2 < 2$, $\alpha_1 < \alpha_2$, тоді*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |D(t) - m\lambda t - Y_{\alpha_1,\beta_1}(\lambda t)| = o(T^{1/\alpha_1 - \varrho_2}) \text{ a.s.} \quad (6)$$

для деякого $\varrho_2 = \varrho_2(\alpha_1, l) > 0$.

Наведені твердження (4) – (6) типу сильного принципу інваріантності з підходящою похибкою апроксимації дозволяють легко переносити відомі результати стосовно асимптотики вінерівського або α -стійкого процесу на асимптотичну поведінку складних процесів відновлення, зокрема на складні процеси Пуассона. Наприклад, поєднуючи твердження теореми 1 і закон повторного логарифму для вінерівського процесу, отримуємо аналог закону повторного логарифму для складних процесів відновлення:

Теорема 4. *Якщо $\{X_i\}$ і $\{z_i\}$ незалежні послідовності н.о.р.в.в. з $EX_1 = m < \infty$, $0 < Ez_1 = 1/\lambda < \infty$, $\sigma^2 = VarX_1 < \infty$, $\tau^2 = Varz_1 < \infty$, то м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|D(t) - m\lambda t|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \nu, \quad \nu^2 = \lambda\sigma^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2. \quad (7)$$

Коли ж доданки належать області притягання стійкого закону $G_{\alpha,\beta}$, тоді маємо:

Теорема 5. *Нехай $\{X_i, i \geq 1\}$ задовольняє (C) з $1 < \alpha < 2$ та $\beta = -1$, а $Ez_1^2 < \infty$. Тоді м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t) - m\lambda t}{t^{1/\alpha} (B^{-1} \ln \ln t)^{1/\theta}} = \lambda^{1/\alpha}, \quad (8)$$

$$B = B(\alpha) = (\alpha - 1)\alpha^{-\theta} |\cos(\pi\alpha/2)|^{1/(\alpha-1)}, \quad \theta = \alpha/(\alpha - 1). \quad (9)$$

Більш детально ця проблематика розглянута в роботах [Zinchenko, 2007], [Zinchenko, 2010], [Zinchenko, 2015].

Теореми 4 – 5 (формули (7) – (9)) дають змогу дослідити питання, стосовно швидкості зростання процесів ризику і їх приростів, як в класичних моделях Крамера–Лундберга і Спарре–Андерсена, так і для більш складних моделей із стохастичними преміями (3). Нижче наведено один з таких результатів, більше можна знайти в [Zinchenko, 2014], [Zinchenko, 2018], [Zinchenko, 2019].

Теорема 6. *Якщо в моделі (3) премії/вартості страхових полісів $\{z_i\}$, вимоги/збитки $\{X_i\}$, проміжки між надходженням вимог $\{z_i\}$ та надходженням премій $\{Z_i^*\}$ мають скінченні дисперсії, $EX_1 = m$, $Ez_1 = 1/\lambda$, $EZ_1^* = 1/\lambda^*$, $EY_1 = \mu$, $Var(X_1) = \sigma_x^2$, $Var(Y_1) = \sigma_y^2$, $Var(z_1) = \tau^2$, $Var(Z_1^*) = \tau_1^2$, тоді м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|Q(t) - (\lambda^* \mu - \lambda m)t|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \sigma^*,$$

$$de (\sigma^*)^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2, \quad \nu_1^2 = \lambda\sigma_x^2 + (\lambda^*)^3 \mu^2 \tau_1^2, \quad \nu_2^2 = \lambda^* \sigma_y^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2.$$

Перелік посилань

Zinchenko N.M. (2007). The strong invariance principle for renewal and randomly stopped processes. *Theory of Stoch.Processes*, vol. 13, no. 4, pp. 233–245.

Zinchenko N.M. (2010). Strong invariance principle for a superposition of random processes. *Theory of Stoch.Processes*, vol. 16, no. 1, pp. 130–138.

Zinchenko N.M. (2015). Almost Sure Approximation of the Superposition of the Random Processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 17, no. 1, pp. 235–250.

Zinchenko N.M. (2014). Strong limit theorems for the risk process with stochastic premiums. *Markov Processes and Related Fields*, vol. 20, no. 3, pp. 527–544.

Zinchenko N.M. (2018). Limit Theorems for Compound Renewal Processes: Theory and Applications. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM Journal)*, no. 3, pp. 355–368.

Zinchenko N.M. (2019). The Rate of Growth and Fluctuations of Compound Renewal Processes. *Book of Abstracts of the 19-th ASMDA (Applied Stochastic Models and Data Analysis, ASMDA 2019 and DEMOGRAPHICS), 11–14 June*, Florence, Italy, p.188. no. 3, p.p. 355–368.