

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Теорія Автоматичного Керування

Лабораторний практикум Частина 1

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-
енергетичних систем" спеціальності G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка

Укладачі: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 681.5
Ш87

Укладачі: *Штіфзон Олег Йосипович*, ст. викладач
Новіков Павло Валерійович, канд. техн. наук, доц.

Рецензент *Ковалюк Д.О.*, к.т.н., доцент, доцент кафедри технічних та програмних засобів автоматизації КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Бунке О.С.*, к.т.н., доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 04.06.2026 р.)
за поданням вченої ради навчально-наукового інституту атомної та теплової енергетики
(протокол № 4 від 25.05.2026 р.)*

Ш87 Теорія автоматичного керування. [Електронний ресурс] : лаб. практикум, частина 1: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем» G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 178 с.

Метою посібника «Теорія автоматичного керування. Лабораторний практикум. Частина 1: Навчальний посібник» є формування у студентів знань, умінь та навичок з розв'язання задач аналізу та синтезу автоматичних систем керування, та дослідження стійкості безперервних систем керування.

УДК 681.5

Реєстр. № НП 25/26-401. Обсяг 8,1 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$W(p)$ – функція передачі

$W(j\omega)$ – амплітудно-фазова характеристика (комплексна частотна характеристика)

$P(\omega), Q(\omega)$ – дійсна та уявна частини комплексної частотної характеристики

$A(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика (амплітудна характеристика)

$\varphi(\omega)$ – фазо-частотна характеристика

$L[\dots]$ – оператор Лапласа

$h(t)$ – перехідна функція

$w(t)$ – вагова функція

ω – частота

$x(t)$ – вхідне збурення

$y(t)$ – вихідна величина (координата)

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

САУ – система автоматичного управління

АСР – автоматична система регулювання

АФЧХ/АФХ – амлітудно-фазо-частотна характеристика

АЧХ – амлітудно-частотна характеристика

ФЧХ – фазо-частотна характеристика

РС – розімкнена система

ЗС – замкнена система

ЛОДР – лінійне однородне диференціальне рівняння

ЕЛ – елементарна ланка

АП – аперіодична ланка

ДЛ – диференціальна ланка

ІЛ – інтегруюча ланка

РДЛ/РД – реальна диференціальна ланка

ІДЛ /ІД – інтегро-диференціальна ланка

ЗМІСТ

1. Лабораторна робота №1 Методи дослідження математичних моделей.....	6
1.1. Мета роботи.....	6
1.2. Завдання.....	6
1.3. Теоретичні відомості.....	7
1.4. Варіанти завдань.....	20
1.5. Приклад виконання роботи	22
1.6. Контрольні запитання.....	42
2. Лабораторна робота №2 Типові елементарні ланки та їх характеристики.	43
2.1. Мета роботи.....	43
2.2. Завдання.....	43
2.3. Теоретичні відомості.....	43
2.4. Варіанти завдань.....	68
2.5. Приклад виконання роботи	71
2.6. Контрольні запитання.....	85
3. Лабораторна робота №3 Зворотній зв'язок. Перетворення структурних схем	86
3.1. Мета роботи.....	86
3.2. Завдання.....	86
3.3. Теоретичні відомості.....	87
3.4. Варіанти завдань.....	103
3.5. Приклад виконання роботи	104
3.6. Контрольні запитання.....	116
4. Лабораторна робота №4 Розімкнені системи. Стійкість.....	117
4.1. Мета роботи.....	117
4.2. Завдання.....	117
4.3. Теоретичні відомості.....	118
4.4. Варіанти завдань.....	130
4.5. Приклад виконання роботи	131
4.6. Контрольні запитання.....	144
5. Лабораторна робота №5 Дослідження стійкості замкнутої системи	145
5.1. Мета роботи.....	145
5.2. Завдання.....	145
5.3. Теоретичні відомості.....	146
5.4. Варіанти завдань.....	149
5.5. Приклад виконання роботи	151
5.6. Контрольні запитання.....	177
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	178
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	178

1. Лабораторна робота №1

Методи дослідження математичних моделей.

1.1. Мета роботи

Закріпити навички з вирішення диференціальних рівнянь аналітичними та числовими методами. Навчитися отримувати з диференціальних рівнянь передавальні функції та частотні характеристики. Дослідити взаємозв'язок часових та частотних характеристик.

1.2. Завдання

- У відповідності до варіанту обрати для досліджень дві моделі у вигляді диференціальних рівнянь.
- Вирішити диференціальні рівняння за допомогою аналітичних методів: методу Ейлера за допомогою характеристичного рівняння та операторним методом.
- Вирішити диференціальні рівняння числовим методом (наприклад, методом кінцевих різниць 1-го порядку).
- Побудувати графіки отриманих у попередніх пунктах результатів розв'язків, навести таблиці та порівняти різні методи вирішення диференціальних рівнянь.
- Перетворити диференціальні рівняння у функції передачі.
- Виконати перетворення Фур'є та отримати аналітичні вирази для частотних характеристик моделей АФЧХ, АЧХ, ФЧХ.
- Побудувати графіки АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, навести таблиці.
- Зробити висновки про взаємозв'язок виду диференціальних рівнянь з отриманими характеристиками та властивостями моделей.

1.3. Теоретичні відомості

Класичний метод вирішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо ЛНДР II-го порядку.

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1.1)$$

За теоремою про структуру вирішення ЛНДР II-го порядку загальний розв'язок (1.1) складається із суми загального розв'язку відповідного йому ЛОДР і часткового розв'язку [1].

Розв'яжемо рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1.2)$$

(ЛОДР II-го порядку з постійними коефіцієнтами) за допомогою характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (1.3)$$

1) Корені (1.3) дійсні різні - загальний розв'язок у вигляді [1]

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}; \quad (1.4)$$

2) корені (1.3) дійсні співпадаючі – загальний розв'язок у вигляді

$$y = e^{\lambda x} (c_1 + x c_2); \quad (1.5)$$

3) корені (1.3) комплексні ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)- загальний розв'язок у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad (1.6)$$

У разі, коли права частина рівняння (1.1) є константою, частковий розв'язок (1.1) запишеться у вигляді

$$y = \bar{y} + c_0, \quad (1.7)$$

де $\bar{y}$ - загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

За відомих початкових умов знаходяться перша і друга похідні, а потім, разом зі знайденою функцією y з невизначеними коефіцієнтами c_i , початковими умовами підставляються в (1.1) [1].

Застосування перетворення Лапласа у ТАК

Рівняння динаміки АСК в символічній формі мають вигляд [2, 3, 4]:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) f(t), \quad (1.8)$$

$$p \equiv \frac{d}{dt}$$

або
$$A(p)y(t) = B(p)f(t) \quad (1.9)$$

Для знаходження інтеграла функції $y(t)$ потрібно розв'язати характеристичне рівняння [2, 3, 4]:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (1.10)$$

Рівняння п'ятої і вище ступенів в радикалах не розв'язуються, а розв'язок рівнянь третього і четвертого ступенів громіздкі. Тому при аналізах АСК переходять від класичних методів розв'язку диференціальних рівнянь до їхніх розв'язків за допомогою перетворень Лапласа.

Перетворення Лапласа - функціональне перетворення, при якому функція дійсної змінної $f(t)$ перетворюється у функцію комплексної змінної $F(p)$.

Функцію $f(t)$ можливо перетворити за Лапласом, якщо вона визначена і однозначна для всієї області і якщо

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \text{ (кінцевий)}, \quad (1.11)$$

Функцію $f(t)$ називають оригіналом. Функцію $F(p)$ - зображенням (по Лапласу). Перетворення оригіналу в зображення називають прямим перетворенням Лапласа і здійснюють за допомогою інтеграла [1, 4]:

$$F(p) = \int_{+0}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.12)$$

Перетворення зображення в оригінал називають зворотним перетворенням Лапласа і здійснюють за допомогою інтеграла [1, 4]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (1.13)$$

Операції прямого та зворотного перетворень Лапласа будемо позначати через L і L^{-1} відповідно.

Зв'язок між оригіналом і зображенням записується у вигляді:

$$f(t) = F(p) \quad (1.14)$$

Основні теореми перетворення Лапласа:

1. Теорема лінійності [1, 2, 3, 4]

$$Laf(t) = aLf(t), a = \text{const}, \quad (1.15)$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = LF^{(n)}(p) = (-t)^n f(t) Lf_2(t). \quad (1.16)$$

2. Теорема про кінцеве і початкове значення оригіналу [1, 2, 3, 4]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p), \quad (1.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (1.18)$$

3. Теорема запізнення оригіналу [1, 2, 3, 4]

Якщо функція $f(t)$ зміщена на величину τ від початку координат (рис.1.1), то таку функцію називають функцією з аргументом, що запізнюється і записують як $f(t - \tau)$.

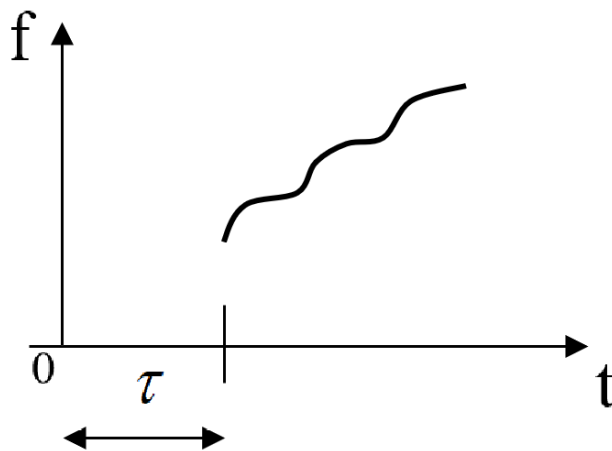


Рисунок 1.1 – Графік функції з аргументом, що запізнюється

Зображення такої функції має вигляд:

$$Lf(t - \tau) = e^{-\tau p} F(p) \quad (1.19)$$

4. Теорема зміщення [1, 2, 3, 4]

$$Le^{\pm \alpha t} f(t) = F(p \mp \alpha), \quad (1.20)$$

де α – величина зміщення в комплексній площині.

5. Теорема подібності [1, 2, 3, 4]

$$Lf(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a = \text{const} \quad (1.21)$$

$$Lf\left(\frac{t}{a}\right) = aF(ap), \quad a = \text{const} \quad (1.22)$$

6. Диференціювання оригіналу при нульових початкових умовах [1, 2, 3, 4]

$$L \frac{d^n f(t)}{dt^n} = Lf^{(n)}(t) = p^n F(p), \quad (1.23)$$

де n - порядок похідної.

7. Інтегрування оригінала при нульових початкових умовах [1, 2, 3, 4]

$$L \int_0^t f^{(-n)}(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p^n}, \quad (1.24)$$

8. Диференціювання зображення [1, 2, 3, 4]

Диференціювання зображення зводиться до множення оригіналу на $(-t)$.

$$F^{(n)}(p) = (-t)^n f(t) \quad (1.25)$$

9. Інтегрування зображення [1, 2, 3, 4]

$$L \frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(p) dp \quad (1.26)$$

10. Теорема згортки оригіналів [1, 2, 3, 4]

Якщо

$$f_1(t) = F_1(p) \text{ і } f_2(t) = F_2(p), \quad (1.27)$$

то

$$F_1(p)F_2(p) = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau, \quad (1.28)$$

де τ - змінна інтегрування.

Нижче наведено перетворення Лапласа (таблиця 1.1) для основних функцій, що найчастіше зустрічаються при аналізі систем автоматичного керування.

Таблиця 1.1 – Перетворення Лапласа [2]

$x(t) (t > 0)$	$X(p) = L[x(t)]$
$1(t)$	$1/p$
$\delta(t)$	1
t	$1/p^2$
t^n	$n!/p^{n+1}$
e^{at}	$1/(p - a)$
e^{-at}	$1/(p + a)$
$t \cdot e^{at}$	$1/(p - a)^2$
$t^n \cdot e^{at}$	$n!/(p - a)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot p + \cos(\varphi) \cdot \omega]/(p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot p - \sin(\varphi) \cdot \omega]/(p^2 + \omega^2)$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\omega/[(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$(p - a)/[(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$[\sin(\varphi) \cdot (p - a) + \cos(\varphi) \cdot \omega]/[(p - a)^2 + \omega^2]$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$[\cos(\varphi) \cdot (p - a) - \sin(\varphi) \cdot \omega]/[(p - a)^2 + \omega^2]$

($n!$ – вираз факторіалу, що дорівнює: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$).

Слід зазначити, що вигляд оригіналу функцій, наведених у таблиці, визначений тільки для $t > 0$, тобто значення змінної t обмежені областю додатних значень. Для від’ємних t значення функції $x(t)$ дорівнює нулю [3].

Операційний метод розв'язку лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо ЛНДР II-го порядку.

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad (1.29)$$

де a_i - постійні коефіцієнти, $x = x(t)$ - невідома функція, $x(t)$ і $f(t)$ є оригіналами.

Виходячи з перетворень Лапласа і теореми про диференціювання оригіналу, одержимо

$$x(t) \rightarrow X(p)$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) \quad (1.30)$$

$$x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$$

Початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \quad (1.31)$$

$$f(t) \rightarrow F(p) \quad (1.32)$$

Якщо підставити (1.30) і (1.32) в (1.29) і замінити початкові умови на значення з (1.30), то одержимо операційне рівняння.

$$a_2(p^2 X(p) - px_0 - x_1) + a_1(pX(p) - x_0) + a_0(X(p)) = F(p) \quad (1.33)$$

Знайдемо $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) + a_2(px_0 + x_1) + a_1x_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} \quad (1.34)$$

(1.34) є розв'язком операційного рівняння.

За формулами і правилами операційного числення від зображення $X(p)$ переходимо до оригіналу $x(t)$, який є розв'язком рівняння (1.29) з початковими умовами (1.31), тобто вирішенням задачі Коші.

Метод Ейлера

Метод Ейлера – це найпростіший з однокрокових методів числової інтеграції, який безпосередньо можна одержати з визначення похідної [2, 3, 4].

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (1.35)$$

Звідси, для деякого h приблизно маємо

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \cong y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1.36)$$

і остаточно

$$y(x+h) = y(x) + f(x, y(x)) \cdot h \quad (1.37)$$

або, для випадку рівномірного розбиття інтервалу інтеграції, тобто у випадку

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const} \quad (1.38)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.39)$$

Метод Ейлера має порядок точності, рівний h^2 . Тобто він має невисоку точність. Крім того, йому властиве накопичення похибки в процесі інтеграції.

Функція передачі

Функцією передачі $W(p)$ називається відношення перетворення за Лапласом вихідної координати системи до перетворення за Лапласом вхідної координати за нульових початкових умов. Чисельник передавальної функції називається оператором дій, а корені чисельника - нулями функції передачі. Знаменник даної функції називається власним оператором, а корені знаменника - полюсами передавальної функції. У ТАУ знаменник функції передачі називається характеристичним рівнянням. Передавальна функція повністю визначає динамічні властивості системи [2, 3, 4].

$$W(p) = \frac{L[x_{\text{вих}}(t)]}{L[x_{\text{вх}}(t)]} \quad (1.40)$$

$$L[x_{\text{вих}}(t)] = Y(p) = W(p)L[x_{\text{вх}}(t)] \quad (1.41)$$

Так, щоб одержати зображення вихідної величини, потрібне зображення вхідної величини помножити на передавальну функцію системи. Процедура

дослідження системи за допомогою перетворень Лапласа зводиться до наступного:

- 1) За заданою вхідною дією, використовуючи таблиці відповідностей, знаходять зображення;
- 2) За початковим ДР знаходять функцію передачі системи $W(p)$;
- 3) За допомогою формули (1.3.40) знаходять зображення $Y(p)$;
- 4) Знаходять оригінал $y(t)$, відповідний до зображення $Y(p)$.

Перетворення Фур'є

В основі перетворення Фур'є лежить надзвичайно проста ідея - майже будь-яку періодичну функцію можна зобразити сумою окремих гармонійних складових (синусоїд і косинусоїд з різними амплітудами A , періодами T_i , частотами ω) [4]. Приклад однієї з таких функцій $S(t)$, що складається з гармонік $C_i(t)$, наведено на рис.1.3.2.

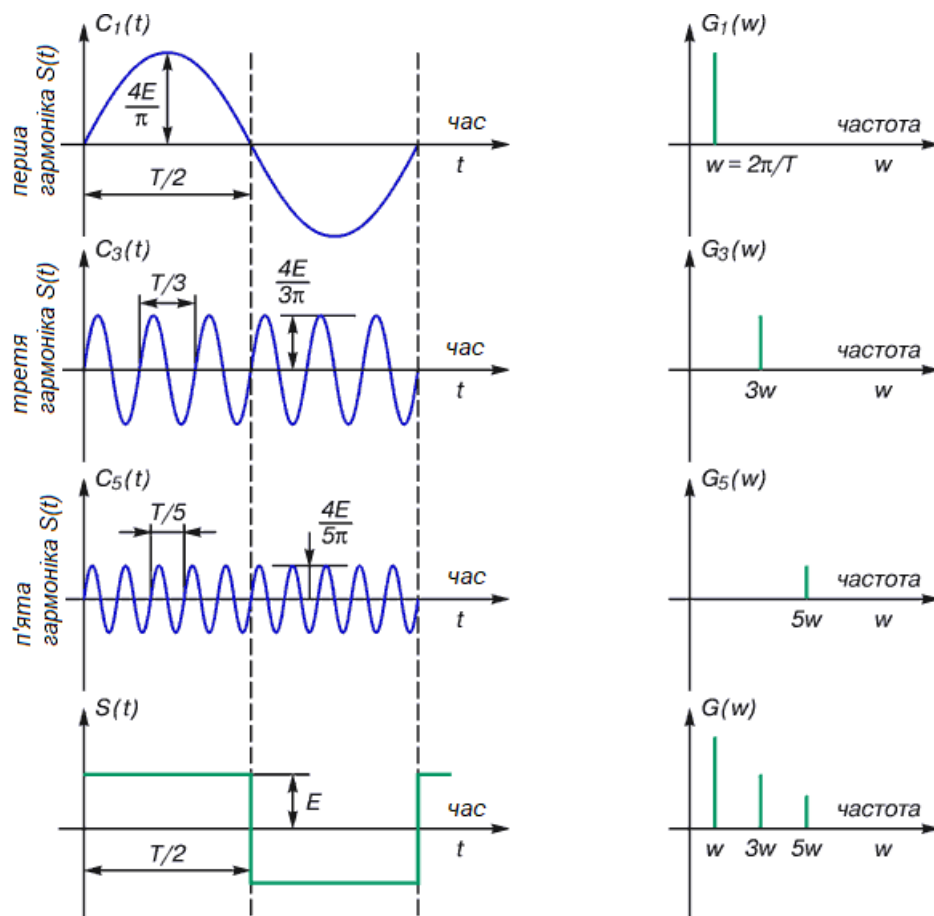


Рисунок 1.2 – Представлення прямокутного імпульсу сумою гармонійних складових

Поняття «зобразити в частотній області якусь функцію від часу» і «намалювати спектр цієї функції» - рівнозначні. Якщо подивитися на рис.1.2 по горизонталі зліва направо, то здійсниться перехід від функції часу до її спектру - завдяки перетворенню Фур'є. А нижня частина малюнка є ілюстрацією одного з основних принципів перетворення Фур'є - спектр сумарної функції часу дорівнює сумі спектрів її гармонійних складових.

Пара безперервного перетворення Фур'є (інтеграл Фур'є) має вигляд:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (1.42)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.43)$$

де $S(\omega)$ спектр сигналу $s(t)$.

Частотні характеристики

Частотні характеристики описують усталені вимушені коливання на виході ланки, викликані гармонійним збуренням на вході. Розглянемо такий режим.

Нехай на вхід ланки подано гармонійне збурення

$$x = x_{max} \cdot \sin(\omega t), \quad (1.44)$$

де x_{max} - амплітуда, а ω - кутова частота цього збурення.

Після закінчення перехідного процесу на виході ланки будуть існувати гармонійні коливання з тією ж частотою, що і вхідні коливання, але відрізнятимуться в загальному випадку за амплітудою і фазою. Тобто в сталому режимі вихідна величина ланки [4]:

$$y = y_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.45)$$

де y_{max} - амплітуда вихідних сталих коливань.

При фіксованій амплітуді вхідних коливань амплітуда й фаза сталих коливань на виході ланки залежать від частоти коливань. Якщо поступово збільшувати від нуля частоту коливань і визначати значення, що встановилися для амплітуди і фази вихідних коливань для різних частот, можна одержати

залежність від частоти відношення амплітуд $A = \frac{y_{max}}{x_{max}}$ і зсуву фаз φ вихідних і вхідних сталих коливань.

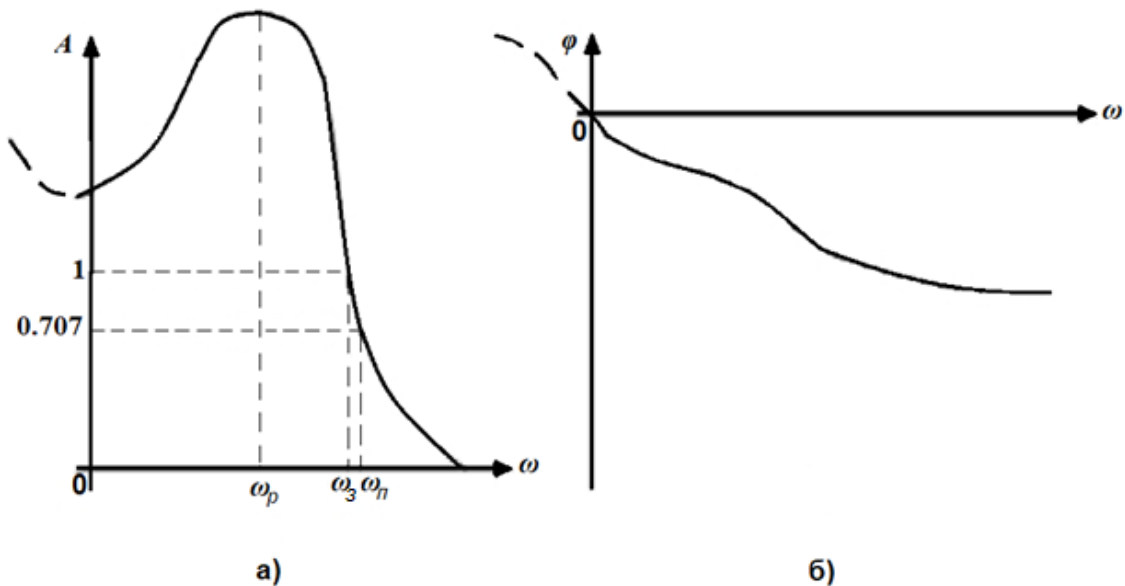


Рисунок 1.3 – Частотні характеристики: а) АЧХ; б) ФЧХ

Ці залежності називаються відповідно $A(\omega)$ - амплітудною частотною характеристикою (АЧХ) і $\varphi(\omega)$ - фазовою частотною характеристикою (ФЧХ). Зразковий вид цих характеристик для звичайних інерційних ланок зображений на рис.1.3 а) і б). Як показано на цих малюнках, у таких ланок в силу їх інерційності амплітудна частотна характеристика зі збільшенням частоти зрештою спадає до нуля. При цьому чим менше інерційна ланка, тим довше її амплітудна частотна характеристика, тобто тим більша смуга частот, що пропускаються ланкою, або, інакше кажучи, його смуга пропускання.

Спектр частотної характеристики може розглядатися від 0 до ∞ , але практично, смуга пропускання обмежується значенням частоти, при якому значення амплітуди складає $A(\omega) = 0.707 A(0)$. Вважається, що в діапазоні від $-\omega_{\Pi}$ до $+\omega_{\Pi}$ елемент системи управління пропускає гармонійний сигнал без помітного ослаблення. Смуга пропускання $\Delta\omega_{\Pi} = 2\omega_{\Pi}$. Наявність максимуму в АЧХ говорить про резонансні властивості ланки. Частота, що відповідає максимуму амплітудної характеристики, називається резонансною (ω_p).

Частота, на якій коефіцієнт підсилення вхідного сигналу дорівнює одиниці, називається частотою зрізу ω_z [3].

Фазова частотна характеристика показує фазові зміщення, що вносяться елементом системи управління на різних частотах. У звичайних інерційних ланок, як показано на рис.1.3 б), при додатних значеннях частоти ω ФЧХ завжди від'ємна ($\varphi < 0$), тобто вихідні коливання відстають по фазі від вхідних, і це відставання зростає з частотою [3].

Звичайні амплітудна і фазова частотні характеристики можуть бути об'єднані в одну характеристику – амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ), використовуючи $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ як полярні координати (рис.1.4). Будується вона на комплексній площині. Кожна точка АФЧХ відповідає певному значенню частоти ω . Сукупність усіх точок при зміні частоти від нуля до нескінченності є безперервною лінією (яка називається годографом), що відповідає частотній передавальній функції $W(j\omega)$. Значення ω для кінцевої кількості точок характеристики наносяться уздовж характеристики, як показано на рис.1.3. Маючи АФЧХ, можна по цим точкам побудувати характеристики $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ [2, 3, 4].

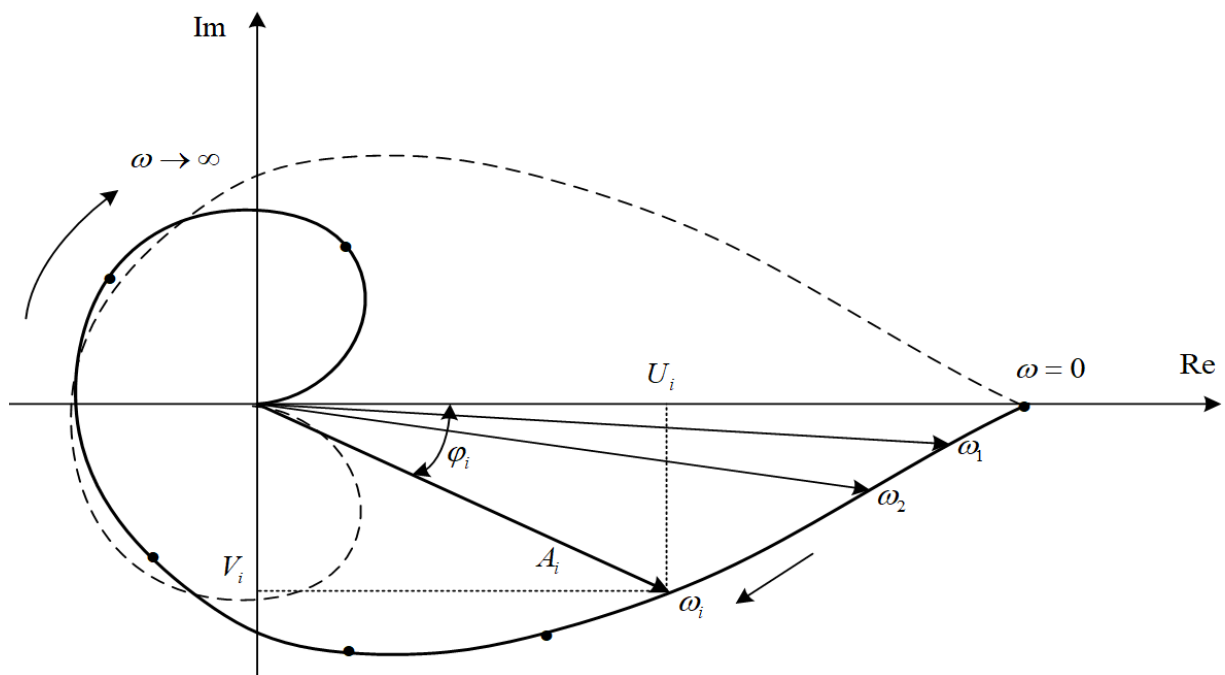


Рисунок 1.4 – Годограф амплітудно-фазово-частотної характеристики (АФЧХ)

АФЧХ будується як для додатних, так і для від'ємних частот. При заміні у $W(j\omega)$ ω на $-\omega$ виходить спряжена комплексна величина. Тому АФЧХ для від'ємних частот є дзеркальним відображенням АФЧХ для додатних частот відносно дійсної осі. На рис.1.4 АФЧХ для від'ємних частот показана пунктирною лінією.

АФЧХ можна будувати і в прямокутній системі координат – у комплексній площині. При цьому координатами будуть показані на рис.1.4 проекції U і V вектора A на відповідні осі. Залежності $U(\omega)$ і $V(\omega)$ називаються відповідно дійсною та уявною частотними характеристиками.

Аналітичні вирази для розглянутих вище частотних характеристик можуть бути легко отримані з передавальної функції. Якщо у вираз функції передачі ланки $W(p)$ підставити $p = j\omega$, то вийде комплексна величина $W(j\omega)$, яка є функцією ω та є амплітудно-фазовою частотною (або просто частотною) характеристикою ланки. Її модуль є амплітудною частотною характеристикою $A(\omega)$, а аргумент – фазовою частотною характеристикою $\varphi(\omega)$.

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.46)$$

Формула (1.3.46) визначає шуканий зв'язок передавальної функції з частотними характеристиками ланки, зазначеними вище: модуль частотної функції $W(j\omega)$ є $A(\omega)$, а аргумент – $\varphi(\omega)$.

Якщо виразити $W(j\omega)$ не в показниковій, а в алгебраїчній формі, то

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1.47)$$

де $U(\omega)$ і $V(\omega)$ будуть введеними раніше дійсною та уявною частотними характеристиками, які є координатами амплітудно-фазової характеристики в комплексній площині.

Згідно (1.46) і (1.47), зв'язок між наведеними вище частотними характеристиками наступний:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (1.48)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad (1.49)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (1.50)$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega) \quad (1.51)$$

Порядок отримання виразу для перерахованих вище частотних характеристик за функцією передачі ланки нескладний. Після підстановки у вираз для передавальної функції $s = j\omega$ отримуємо:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)}, \quad (1.52)$$

де індексами R і Q позначені частини відповідних комплексних величин у чисельнику і знаменнику.

Позбувшись комплексності в знаменнику остаточно, маємо:

$$W(j\omega) = \frac{[U_R(\omega) + jV_R(\omega)][U_Q(\omega) - jV_Q(\omega)]}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1.53)$$

де

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}; \quad (1.54)$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_Q(\omega) - U_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)} \quad (1.55)$$

1.4. Варіанти завдань

Початкові умови – нульові.

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0; \quad X(t) = 1(t)$$

Таблиця 1.2 – Варіанти завдань для першої роботи

1.	$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 21 \frac{dy}{dt} + 30y = 6x$	$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 21 \frac{dy}{dt} = 5x$
2.	$25 \frac{d^2 y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} + 20y = 15x$	$25 \frac{d^2 y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} = 5x$
3.	$0.1 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.2 \frac{dy}{dt} + 0.5y = 0.8x$	$0.1 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.2 \frac{dy}{dt} = 0.8x$
4.	$0.2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.7 \frac{dy}{dt} + 0.3y = x$	$0.2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.8 \frac{dy}{dt} = x$
5.	$0.5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.4 \frac{dy}{dt} + 0.08y = 3x$	$0.5 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 3x$
6.	$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 28 \frac{dy}{dt} + 100y = 3x$	$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 3x$
7.	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 1.1 \frac{dy}{dt} + 0.3y = 3x$	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} = 33x$
8.	$0.5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 32y = 0.25x$	$0.5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = 0.25x$
9.	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 9.25y = 4x$	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = 4x$
10.	$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 45 \frac{dy}{dt} + 168y = 0.9x$	$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 45 \frac{dy}{dt} = 0.9x$
11.	$10 \frac{d^2 y}{dt^2} + 16 \frac{dy}{dt} + 8.9y = 5x$	$10 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 5x$
12.	$5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 27 \frac{dy}{dt} + 34y = 4x$	$5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} = x$
13.	$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 8y = 7x$	$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} = 7x$
14.	$5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = 5x$	$7 \frac{d^2 y}{dt^2} + 15 \frac{dy}{dt} = 8x$

15.	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 17y = 8x$	$0.3\frac{d^2y}{dt^2} + 1.8\frac{dy}{dt} = 1.1x$
16.	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} + 16y = 9x$	$9\frac{d^2y}{dt^2} + 34\frac{dy}{dt} = 17x$
17.	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 56\frac{dy}{dt} + 200y = x$	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} = 3x$
18.	$0.4\frac{d^2y}{dt^2} + 0.8\frac{dy}{dt} + 0.2y = 0.3x$	$11\frac{d^2y}{dt^2} + 27\frac{dy}{dt} = 9x$
19.	$10\frac{d^2y}{dt^2} + 40\frac{dy}{dt} + 40y = 7x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 2x$
20.	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 5x$	$0.7\frac{d^2y}{dt^2} + 1.3\frac{dy}{dt} = 0.5x$
21.	$7\frac{d^2y}{dt^2} + 17\frac{dy}{dt} + y13 = 10x$	$2\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} = 12x$
22.	$6\frac{d^2y}{dt^2} + 24\frac{dy}{dt} + 24y = x$	$5\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = 6x$
23.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 5x$	$5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} = 6x$
24.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 1.9\frac{dy}{dt} + 0.7y = 0.7x$	$3\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = 5x$
25.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 7x$	$4\frac{d^2y}{dt^2} + 17\frac{dy}{dt} = 9x$
26.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 16y = 5x$	$7\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 2x$
27.	$2\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 8y = 6x$	$9\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} = 3x$
28.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 12y = 9x$	$8\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} = x$
29.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = x$	$11\frac{d^2y}{dt^2} + 33\frac{dy}{dt} = 121x$
30.	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 5x$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = x$

1.5. Приклад виконання роботи

1.5.1 Дослідження рівняння I типу:

$$\begin{aligned}0.1y'' + 0.2y' + 0.5y &= 0.8x \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0\end{aligned}\tag{1.56}$$

Розв'язання аналітичним методом

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (1.5.1). Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння:

$$0.1y'' + 0.2y' + 0.5y = 0\tag{1.57}$$

Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння:

$$0.1\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.5 = 0\tag{1.58}$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.2 \pm \sqrt{0.04 - 4 \cdot 0.1 \cdot 0.5}}{2 \cdot 0.1} = \frac{-0.2 \pm \sqrt{-0.16}}{0.2} = \frac{-0.2 \pm 0.4i}{0.2} = -1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = -1 - 2i$$

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

Отже, рівняння (1.58) має два комплексних корені. Тоді розв'язок рівняння (1.57) запишеться у вигляді:

$$y(t)_o = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)\tag{1.59}$$

де $y(t)_o$ – розв'язок відповідного рівнянню (1.56) однорідного рівняння.

Частинний розв'язок рівняння (1.56) має вид:

$$y(t)_ч = A\tag{1.60}$$

Тоді $y'(t)_ч = y''(t)_ч = 0$. Підставляємо значення $y(t)_ч$, $y'(t)_ч$, $y''(t)_ч$ у формулу (1.56):

$$0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0 + 0.5 \cdot A = 0.8$$

$$A = \frac{0.8}{0.5} = 1.6$$

Загальний розв'язок рівняння (1.5.1) має вигляд:

$$y(t)_3 = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 1.6\tag{1.61}$$

Визначимо C_1 та C_2 із початкових умов:

$$y'(t)_3 = C_1(-e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t) + C_2(-e^{-t}\sin 2t + 2e^{-t}\cos 2t) \quad (1.5.7)$$

$$\begin{cases} y(0)_3 = C_1 + 1.6 = 0 \\ y'(0)_3 = -C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = -1.6$$

$$C_2 = -0.8$$

Остаточно загальний розв'язок рівняння (1.56) має вигляд:

$$\boxed{y(t)_3 = e^{-t}(-1.6\cos 2t - 0.8\sin 2t) + 1.6} \quad (1.62)$$

Розв'язання за допомогою операційного числення

Нехай $y(t) \doteq Y(p)$, тоді

$$\begin{aligned}y'(t) &\doteq p \cdot Y(p) - y(0) \\y''(t) &\doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) \\0.8 &\doteq \frac{0.8}{p}\end{aligned}\tag{1.63}$$

Підставляємо ці вирази в рівняння (1.56) і отримуємо:

$$0.1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0.2 \cdot p \cdot Y(p) + 0.5 \cdot Y(p) = \frac{0.8}{p}\tag{1.64}$$

звідки

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{0.8}{(0.1p^2 + 0.2p + 0.5) \cdot p} = \frac{Ap + B}{0.1p^2 + 0.2p + 0.5} + \frac{C}{p} = \\&= \frac{Ap^2 + Bp + 0.1Cp^2 + 0.2Cp + 0.5C}{(0.1p^2 + 0.2p + 0.5) \cdot p}\end{aligned}\tag{1.65}$$

За методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему рівнянь і розв'язуємо її:

$$\begin{aligned}\begin{cases} A + 0.1C = 0 \\ B + 0.2C = 0 \\ 0.5C = 0.8 \end{cases} \\ \begin{cases} A = -0.16 \\ B = -0.32 \\ C = 1.6 \end{cases} \\ Y(p) = \frac{-0.16p - 0.32}{0.1p^2 + 0.2p + 0.5} + \frac{1.6}{p} = \frac{-0.16(p + 2)}{0.1(p^2 + 2p + 5)} + \frac{1.6}{p} = \\ = -1.6 \left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{(p+1)^2 + 2^2} \right) + \frac{1.6}{p}\end{aligned}\tag{1.66}$$

Відповідно $y(t)$ набуде вигляду:

$$y(t) = -1.6 \left(e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right) + 1.6\tag{1.67}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t}(-1.6 \cos 2t - 0.8 \sin 2t) + 1.6}\tag{1.68}$$

Розв'язання за допомогою числового методу Ейлера

Замінімо похідні наступними формулами числового диференціювання:

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \quad (1.69)$$

$$y''_i = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta t^2} \quad (1.70)$$

де Δt – крок по часу.

Підставимо наведені вище вирази в рівняння (1.56):

$$0.1 \cdot \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta t^2} + 0.2 \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} + 0.5 \cdot y_i = 0.8 \quad (1.71)$$

$$y_i \left(\frac{0.1 + 0.2\Delta t + 0.5\Delta t^2}{\Delta t^2} \right) + y_{i-1} \left(\frac{-0.2 - 0.2\Delta t}{\Delta t^2} \right) + y_{i-2} \left(\frac{0.1}{\Delta t^2} \right) = 0.8 \quad (1.72)$$

$$y_i = \left(\frac{0.8\Delta t^2}{0.1 + 0.2\Delta t + 0.5\Delta t^2} \right) + y_{i-1} \left(\frac{0.2 + 0.2\Delta t}{0.1 + 0.2\Delta t + 0.5\Delta t^2} \right) + y_{i-2} \left(\frac{-0.1}{0.1 + 0.2\Delta t + 0.5\Delta t^2} \right) \quad (1.73)$$

Отримана рекурентна формула є розв'язком диференціального рівняння (1.56).

Порівняння отриманих результатів

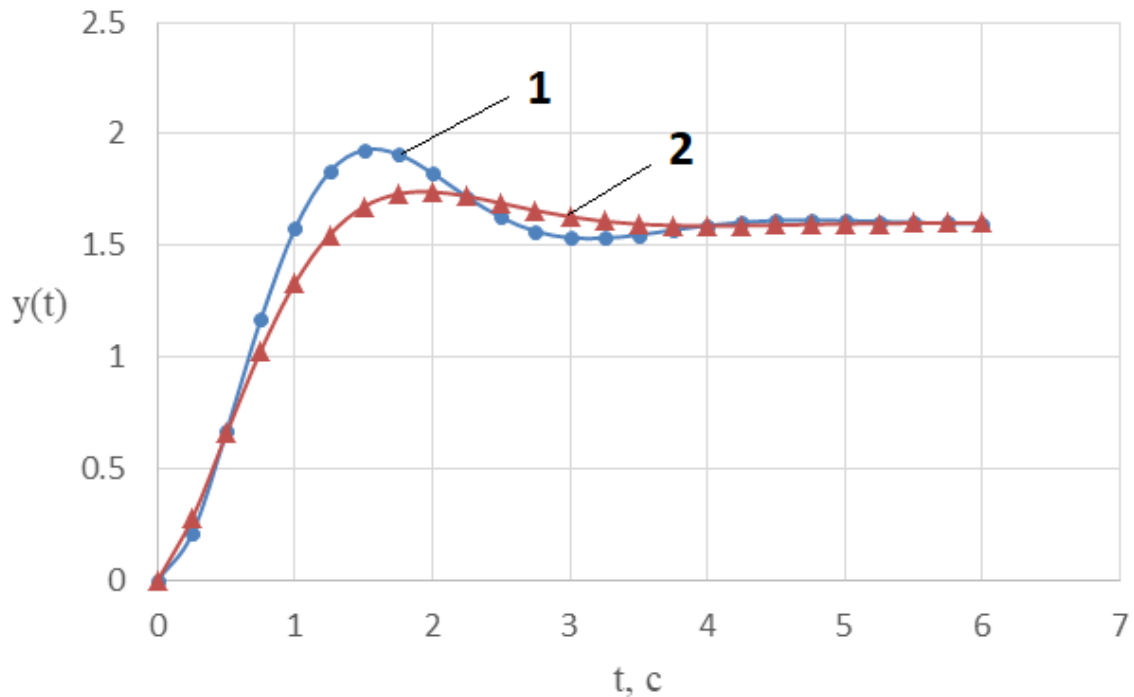
Перші два методи відносяться до точних розв'язків, а останній – до числового.

В таблиці 1.3 наведені значення функції, отриманої з рівняння (1.56), в різні моменти часу для точного та числового розв'язків.

На рис.1.56 наведене порівняння точного та числового розв'язків диференціального рівняння (1.56) у вигляді графіків.

Таблиця 1.3 – Значення функції, отриманої з рівняння (1.56), в різні моменти часу для точного та числового розв’язків

t	Точний розв’язок	Числовий розв’язок		
	y(t)	y(i-2)	y(i-1)	y(i)
0	0	0	0	0
0,25	0,207759234	0	0	0,275862069
0,5	0,667361776	0	0,275862069	0,656361474
0,75	1,169591164	0,275862069	0,656361474	1,028988478
1	1,577337522	0,656361474	1,028988478	1,333026053
1,25	1,83007827	1,028988478	1,333026053	1,546800913
1,5	1,928244991	1,333026053	1,546800913	1,67391792
1,75	1,909136422	1,546800913	1,67391792	1,731306972
2	1,823475335	1,67391792	1,731306972	1,740330764
2,25	1,717973075	1,731306972	1,740330764	1,721114448
2,5	1,625715582	1,740330764	1,721114448	1,689630542
2,75	1,563596958	1,721114448	1,689630542	1,656806569
3	1,534642521	1,689630542	1,656806569	1,628902555
3,25	1,532740856	1,656806569	1,628902555	1,608524038
3,5	1,547703178	1,628902555	1,608524038	1,595811056
3,75	1,569308954	1,608524038	1,595811056	1,589519229
4	1,589767299	1,595811056	1,589519229	1,587854906
4,25	1,604627736	1,589519229	1,587854906	1,58903064
4,5	1,61253221	1,587854906	1,58903064	1,59157059
4,75	1,614323715	1,58903064	1,59157059	1,594425288
5	1,61197826	1,59157059	1,594425288	1,596961451
5,25	1,607685598	1,594425288	1,596961451	1,598884602
5,5	1,603240446	1,596961451	1,598884602	1,60013796
5,75	1,599767893	1,598884602	1,60013796	1,600805682
6	1,597717297	1,60013796	1,600805682	1,601035169



1 - Точний розв'язок **2** - Числовий розв'язок

Рисунок 1.5 – Порівняння точного та числового розв'язків диференціального рівняння (1.56)

Перехід від диференціального рівняння до функції передачі

Ми можемо перейти до функції передачі, адже у нас задані нульові початкові умови.

$$\begin{aligned} y'(t) &\doteq p \cdot Y(p) \\ y''(t) &\doteq p^2 \cdot Y(p) \\ x &\doteq X(p) \end{aligned} \tag{1.74}$$

Підставивши ці вирази в рівняння (1.5.1), отримаємо:

$$0.1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0.2 \cdot p \cdot Y(p) + 0.5 \cdot Y(p) = 0.8X(p) \tag{1.75}$$

$$Y(p) = \frac{0.8X(p)}{0.1p^2 + 0.2p + 0.5} \tag{1.76}$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0.8}{0.1p^2 + 0.2p + 0.5} \tag{1.77}$$

$$p \doteq j\omega$$

i – уявна одиниця.

$$\begin{aligned}
W(i\omega) &= \frac{0.8}{0.1(i\omega)^2 + 0.2j\omega + 0.5} = \frac{0.8}{-0.1\omega^2 + 0.2j\omega + 0.5} = \\
&= \frac{0.8((0.5 - 0.1\omega^2) - 0.2j\omega)}{((0.5 - 0.1\omega^2) + 0.2j\omega)((0.5 - 0.1\omega^2) - 0.2j\omega)} = \\
&= \frac{0.4 - 0.08\omega^2}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2} - j \frac{0.16\omega}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$W(i\omega)$ – функція передачі.

$$\boxed{Re(\omega) = \frac{0.4 - 0.08\omega^2}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}} \tag{1.79}$$

$$\boxed{Im(\omega) = \frac{-0.16\omega}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}} \tag{1.80}$$

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{0.4 - 0.08\omega^2}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-0.16\omega}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{(0.4 - 0.08\omega^2)^2 + 0.0256\omega^2}}{(0.5 - 0.1\omega^2)^2 + 0.04\omega^2}
\end{aligned} \tag{1.81}$$

де A – амплітуда.

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right) \tag{1.82}$$

де φ – кут повороту.

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{-0.16\omega}{0.4 - 0.08\omega^2}\right)} \tag{1.83}$$

Побудова частотних характеристик

В таблиці 1.4 наведені залежності дійсної, уявної, амплітудної величини АФЧХ, а також кута повороту від частоти для рівняння (1.5.1).

Таблиця 1.4 – Залежності дійсної, уявної, амплітудної величини АФЧХ, а також кута повороту від частоти для рівняння (1.56)

ω	Re	Im	A	ϕ
0	1,6	0	1,6	0
0,1	1,600635122	-0,064153712	1,601920252	0,040058719
0,2	1,602481261	-0,12923236	1,607683798	0,080471011
0,3	1,605355545	-0,196173794	1,617297308	0,121596727
0,4	1,608935576	-0,265939765	1,630765969	0,163808196
0,5	1,612732095	-0,339522546	1,648083848	0,207496226
0,6	1,616049039	-0,417943717	1,669218813	0,253075652
0,7	1,617929964	-0,5022399	1,694090401	0,300989974
0,8	1,61709072	-0,593427787	1,722538515	0,351714336
0,9	1,611840682	-0,692437524	1,75428051	0,405755593
1	1,6	-0,8	1,788854382	0,463647609
1,1	1,578829521	-0,916470962	1,825546954	0,525939103
1,2	1,545004774	-1,041576252	1,86330911	0,593170516
1,3	1,494685625	-1,174073301	1,900666524	0,665835797
1,4	1,423754215	-1,311352567	1,935645014	0,744325385
1,5	1,328301887	-1,449056604	1,965744374	0,828849059
1,6	1,205414485	-1,580871455	1,988008712	0,919343099
1,7	1,054202759	-1,698715347	1,999244179	1,015375809
1,8	0,876843364	-1,793543244	1,996409691	1,116077052
1,9	0,679204256	-1,856817391	1,977141686	1,220124988
2	0,470588235	-1,882352941	1,940285	1,325817664
2,1	0,262395695	-1,867901557	1,886241694	1,431233379

Продовження таблиці 1.4

2,2	0,066028392	-1,815780786	1,816980906	1,534448706
2,3	-0,109206792	-1,732245659	1,735684633	1,633756482
2,4	-0,257435133	-1,625906104	1,646160231	1,727826103
2,5	-0,376470588	-1,505882353	1,552228	1,81577499
2,6	-0,467190486	-1,380335528	1,457255338	1,897155144
2,7	-0,532494674	-1,255664296	1,363907402	1,971882445
2,8	-0,576275314	-1,13631752	1,274092125	2,04014188
2,9	-0,602631875	-1,025004363	1,189032851	2,10229432
3	-0,615384615	-0,923076923	1,109400392	2,15879893
3,1	-0,617837201	-0,830930726	1,035455783	2,210155601
3,2	-0,612707841	-0,748345455	0,967177243	2,256866089
3,3	-0,602156364	-0,674742275	0,904361335	2,299410126
3,4	-0,58785576	-0,609362678	0,846697861	2,33823235
3,5	-0,571076923	-0,551384615	0,793822301	2,37373655
3,6	-0,5527701	-0,499993056	0,745350816	2,406284482
3,7	-0,53363587	-0,454419498	0,700902505	2,436197388
3,8	-0,514183625	-0,413961393	0,660112744	2,463758938
3,9	-0,494778116	-0,377989158	0,622640496	2,489218801
4	-0,475675676	-0,345945946	0,588171698	2,512796367
4,1	-0,457051966	-0,317343448	0,556420132	2,534684334
4,2	-0,439023035	-0,291755814	0,527126816	2,555052037
4,3	-0,421661162	-0,268812898	0,500058506	2,57404844
4,4	-0,405006741	-0,248193546	0,475005786	2,591804792
4,5	-0,389077138	-0,229619294	0,451780964	2,608436948
4,6	-0,37387329	-0,212848655	0,430215977	2,624047392
4,7	-0,359384599	-0,197672044	0,410160367	2,638726981
4,8	-0,345592546	-0,183907341	0,391479397	2,652556455
5	-0,32	-0,16	0,357770876	2,677945045

На рис.1.6 наведена амплітудно-фазова характеристика (АФЧХ) для процесу, що описується рівнянням (1.56).

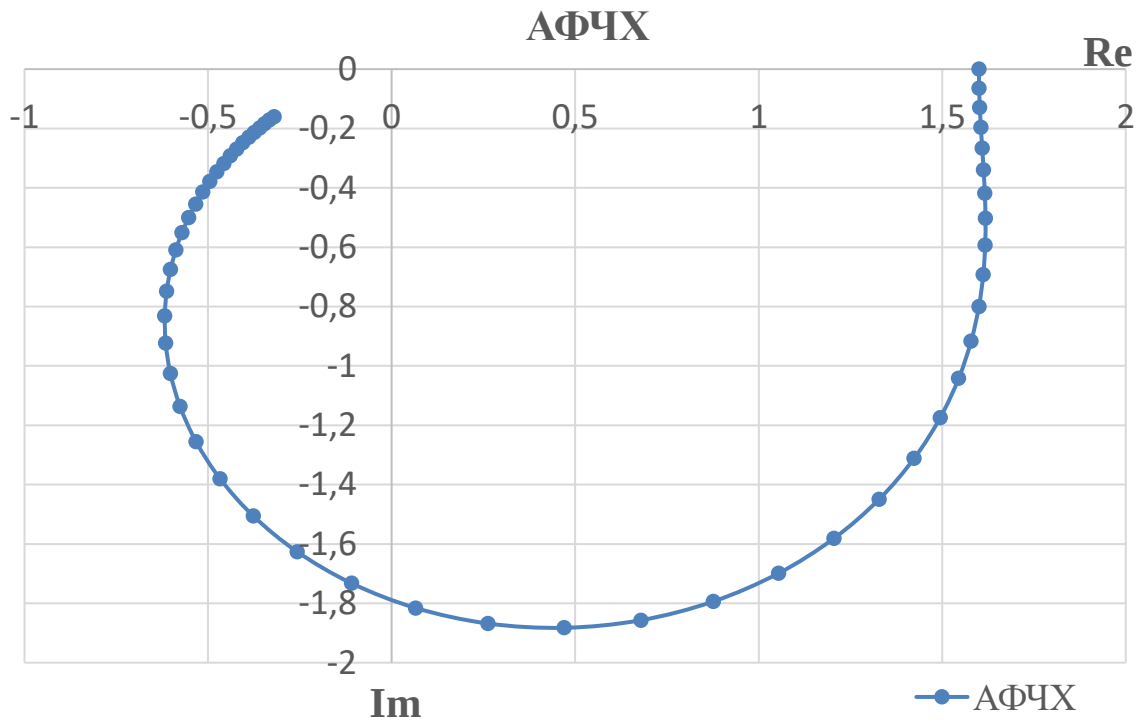


Рисунок 1.6 – Годограф амплітудно-фазово частотної характеристики для рівняння (1.56)

На рис.1.7 наведена амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) для процесу, що описується рівнянням (1.56)

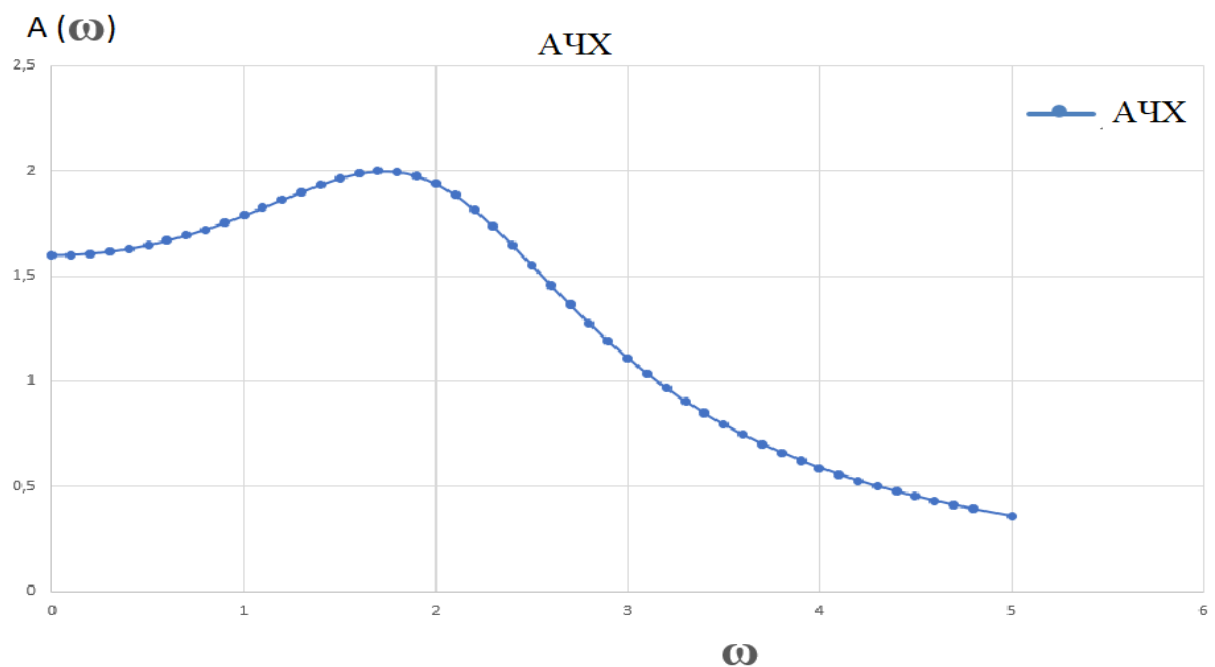


Рисунок 1.7 – Амплітудно-частотна характеристика для рівняння (1.56)

На рис.1.8 наведена фазово-частотна характеристика (ФЧХ) для процесу, що описується рівнянням (1.56).

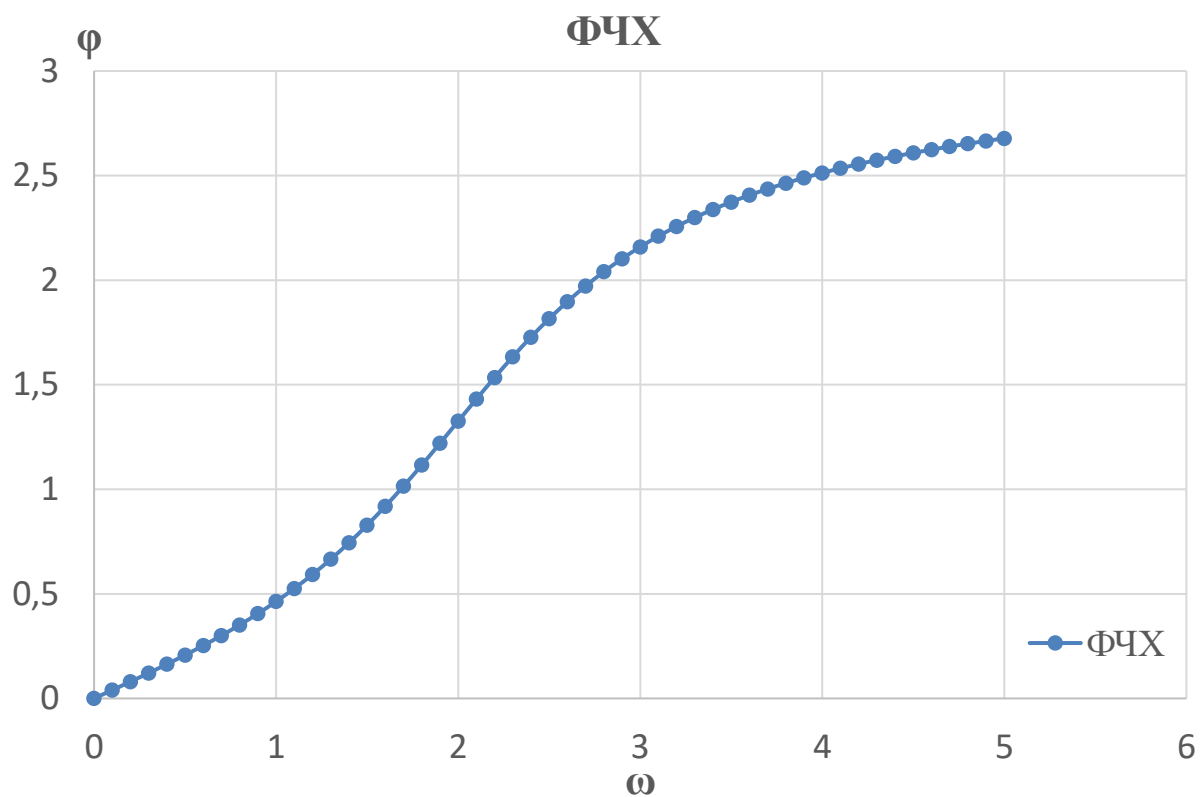


Рисунок 1.8 – Фазочастотна характеристика для рівняння (1.56)

1.5.2. Дослідження рівняння II типу:

$$0.1y'' + 0.2y' = 0.8x \quad (1.84)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$x = 1(t)$$

Розв'язання аналітичним методом

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку (1.84). Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння:

$$0.1y'' + 0.2y' = 0 \quad (1.85)$$

Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння:

$$0.1\lambda^2 + 0.2\lambda = 0 \quad (1.86)$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

Отже, рівняння (1.86) має два дійсних, різних кореня. Тоді розв'язок рівняння (1.85) запишеться у вигляді:

$$y(t)_o = C_1 e^0 + C_2 e^{-2t} \quad (1.87)$$

де $y(t)_o$ – розв'язок відповідного рівнянню (1.84) однорідного рівняння.

Частинний розв'язок рівняння (1.84) має вид:

$$y(t)_q = At \quad (1.88)$$

Тоді $y'(t)_q = A$, $y''(t)_q = 0$. Підставляємо значення $y(t)_q$, $y'(t)_q$, $y''(t)_q$ у формулу (1.84):

$$0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot A = 0.8$$

$$A = \frac{0.8}{0.2} = 4$$

Загальний розв'язок рівняння (1.5.30) має вигляд:

$$y(t)_3 = C_1 e^0 + C_2 e^{-2t} + 4t \quad (1.89)$$

Визначимо C_1 та C_2 із початкових умов:

$$y(t)_3 = C_1 + C_2 e^{-2t} + 4t \quad (1.90)$$

$$y'(t)_3 = -2C_2 e^{-2t} + 4 \quad (1.91)$$

$$\begin{cases} y(0)_3 = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0)_3 = -2C_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = 2$$

Остаточно загальний розв'язок рівняння (1.84) має вигляд:

$$\boxed{y(t)_3 = -2 + 2e^{-2t} + 4t} \quad (1.92)$$

Розв'язання за допомогою операційного числення

Нехай $y(t) \doteq Y(p)$, тоді

$$y'(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0)$$

$$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) \quad (1.93)$$

$$0.8 \doteq \frac{0.8}{p}$$

Підставляємо ці вирази в рівняння (1.84) і отримуємо:

$$0.1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0.2 \cdot p \cdot Y(p) = \frac{0.8}{p} \quad (1.94)$$

звідки

$$Y(p) = \frac{0.8}{(0.1p^2 + 0.2p) \cdot p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{0.1p + 0.2} = \frac{0.1Ap^2 + 0.2Ap + 0.1Bp + 0.2B + Cp^2}{(0.1p^2 + 0.2p) \cdot p} \quad (1.95)$$

За методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему рівнянь і розв'язуємо її:

$$\begin{cases} 0.1A + C = 0 \\ 0.2A + 0.1B = 0 \\ 0.2B = 0.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \\ C = 0.2 \end{cases}$$

$$Y(p) = \frac{-2}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{0.2}{0.1p + 0.2} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p+2} + \frac{4}{p^2} \quad (1.96)$$

Відповідно $y(t)$ набуде вигляду:

$$\boxed{y(t) = -2 + 2e^{-2t} + 4t} \quad (1.97)$$

Розв'язання за допомогою числового методу Ейлера

Замінімо похідні кінцевими різницями згідно формул (1.69) і (1.70):

Підставимо наведені вище вирази в рівняння (1.84):

$$0.1 \cdot \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta t^2} + 0.2 \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} = 0.8 \quad (1.98)$$

$$y_i \left(\frac{0.1 + 0.2\Delta t}{\Delta t^2} \right) + y_{i-1} \left(\frac{-0.2 - 0.2\Delta t}{\Delta t^2} \right) + y_{i-2} \left(\frac{0.1}{\Delta t^2} \right) = 0.8 \quad (1.99)$$

$$y_i = \left(\frac{0.8\Delta t^2}{0.1 + 0.2\Delta t} \right) + y_{i-1} \left(\frac{0.2 + 0.2\Delta t}{0.1 + 0.2\Delta t} \right) + y_{i-2} \left(\frac{-0.1}{0.1 + 0.2\Delta t} \right) \quad (1.100)$$

Отримана рекурентна формула є розв'язком диференціального рівняння (1.84).

Порівняння отриманих результатів

Перші два методи відносяться до точних розв'язків, а останній – до числового.

В таблиці 1.5 наведені значення функції, отриманої з рівняння (1.84), в різні моменти часу для точного та числового розв'язків.

На рис.1.9 наведене порівняння точного та числового розв'язків диференціального рівняння (1.84) у вигляді графіків.

Таблиця 1.5 – Значення функції, отриманої з рівняння (1.84), в різні моменти часу для точного та числового розв’язків

t	Точний розв’язок	Числовий розв’язок		
	y(t)	y(i-2)	y(i-1)	y(i)
0	0	0	0	0
0,05	0,009674836	0	0	0,018181818
0,1	0,037461506	0	0,018181818	0,052892562
0,15	0,081636441	0,018181818	0,052892562	0,102629602
0,2	0,140640092	0,052892562	0,102629602	0,166026911
0,25	0,213061319	0,102629602	0,166026911	0,241842646
0,3	0,297623272	0,166026911	0,241842646	0,32894786
0,35	0,393170608	0,241842646	0,32894786	0,426316236
0,4	0,498657928	0,32894786	0,426316236	0,53301476
0,45	0,613139319	0,426316236	0,53301476	0,648195237
0,5	0,735758882	0,53301476	0,648195237	0,771086579
0,55	0,865742167	0,648195237	0,771086579	0,900987799
0,6	1,002388424	0,771086579	0,900987799	1,037261635
0,65	1,145063586	0,900987799	1,037261635	1,179328759
0,7	1,293193928	1,037261635	1,179328759	1,326662509
0,75	1,44626032	1,179328759	1,326662509	1,478784099
0,8	1,603793036	1,326662509	1,478784099	1,635258272
0,85	1,765367048	1,478784099	1,635258272	1,795689338
0,9	1,930597776	1,635258272	1,795689338	1,95971758
0,95	2,099137238	1,795689338	1,95971758	2,127015982
1	2,270670566	1,95971758	2,127015982	2,297287256
1,05	2,444912857	2,127015982	2,297287256	2,470261142
1,1	2,621606317	2,297287256	2,470261142	2,645691947
1,15	2,800517687	2,470261142	2,645691947	2,823356316
1,2	2,981435907	2,645691947	2,823356316	3,003051196

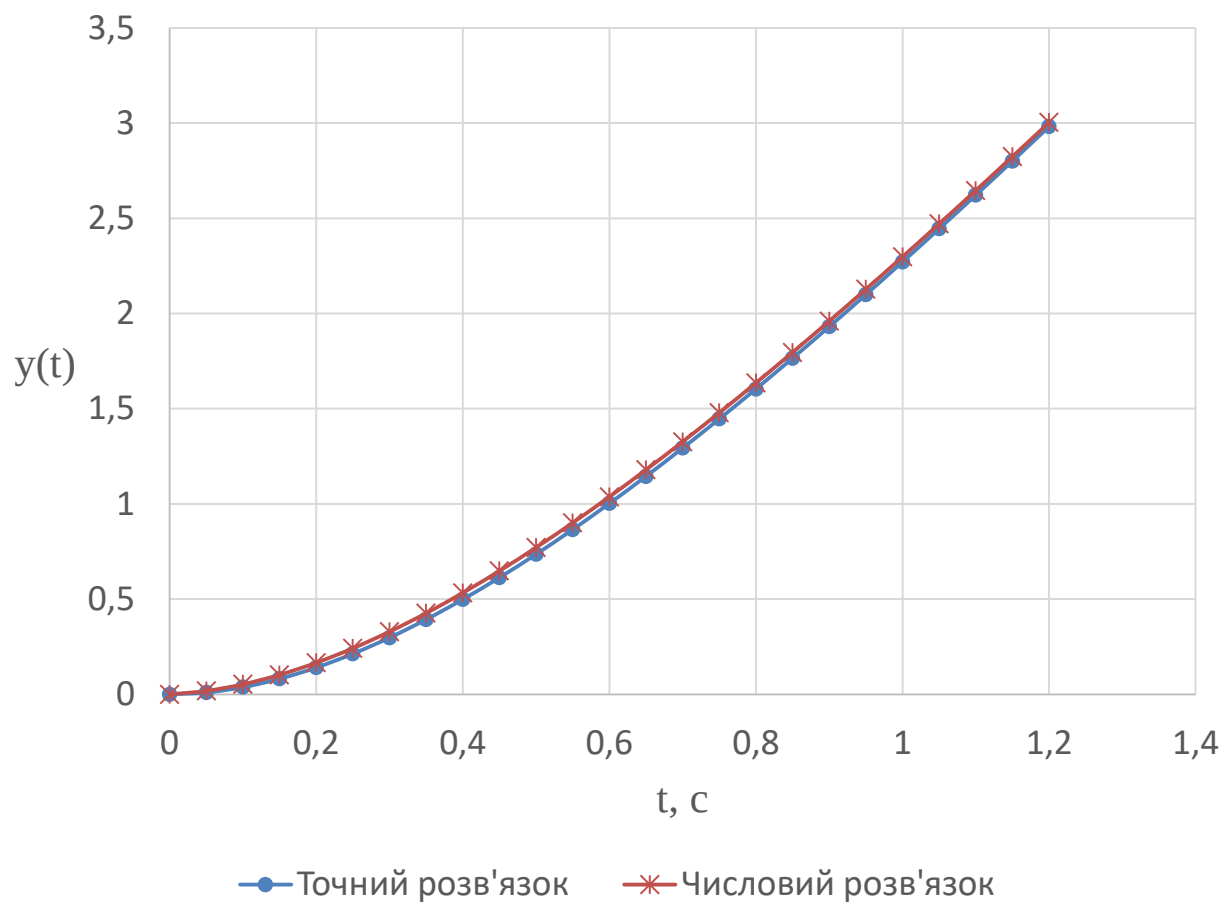


Рисунок 1.9 – Порівняння точного та числового розв'язків
диференціального рівняння (1.84)

Перехід від диференціального рівняння до функції передачі

Ми можемо перейти до функції передачі за формулами (1.74), адже у нас задані нульові початкові умови.

Підставивши ці вирази в рівняння (1.84), отримаємо:

$$0.1 \cdot p^2 \cdot Y(p) + 0.2 \cdot p \cdot Y(p) = 0.8X(p) \quad (1.101)$$

$$Y(p) = \frac{0.8X(p)}{0.1p^2 + 0.2p} \quad (1.102)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0.8}{0.1p^2 + 0.2p} \quad (1.103)$$

$$p \doteq i\omega$$

i – уявна одиниця.

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= \frac{0.8}{0.1(j\omega)^2 + 0.2j\omega} = \frac{0.8}{-0.1\omega^2 + 0.2j\omega} = \\ &= \frac{0.8(-0.1\omega^2 - 0.2j\omega)}{(-0.1\omega^2 + 0.2j\omega)(-0.1\omega^2 - 0.2j\omega)} = \\ &= \frac{-0.08\omega^2}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2} - i \frac{0.16\omega}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2} \end{aligned} \quad (1.104)$$

$W(i\omega)$ – функція передачі.

$$\boxed{Re(\omega) = \frac{-0.08\omega^2}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2}} \quad (1.105)$$

$$\boxed{Im(\omega) = \frac{-0.16\omega}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2}} \quad (1.106)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{-0.08\omega^2}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-0.16\omega}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{0.0064\omega^4 + 0.0256\omega^2}}{0.01\omega^4 + 0.04\omega^2} \end{aligned}} \quad (1.107)$$

де A – амплітуда.

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right) \quad (1.108)$$

де φ – кут повороту.

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{-0.16\omega}{-0.08\omega^2}\right) = \arctg\left(\frac{2}{\omega}\right)} \quad (1.109)$$

Побудова частотних характеристик

В таблиці 1.6 наведені залежності дійсної, уявної, амплітудної величини АФЧХ, а також кута повороту від частоти для рівняння (1.84).

Таблиця 1.6 – Залежності дійсної, уявної, амплітудної величини АФЧХ, а також кута повороту від частоти для рівняння (1.84)

ω	Re	Im	A	ϕ
0,1	-1,99501	-39,9002	49,93762	1,620755
0,2	-1,9802	-19,802	24,87593	1,670465
0,3	-1,95599	-13,0399	16,48227	1,719686
0,4	-1,92308	-9,61538	12,25726	1,768192
0,5	-1,88235	-7,52941	9,701425	1,815775
0,6	-1,83486	-6,11621	7,981886	1,862253
0,7	-1,78174	-5,09068	6,741845	1,907471
0,8	-1,72414	-4,31034	5,802979	1,951303
0,9	-1,6632	-3,696	5,066231	1,99365
1	-1,6	-3,2	4,472136	2,034444
1,2	-1,47059	-2,45098	3,572887	2,111216
1,4	-1,34228	-1,91755	2,925828	2,181522
1,6	-1,21951	-1,52439	2,440215	2,245537
1,8	-1,10497	-1,22775	2,064706	2,303611
2	-1	-1	1,767767	2,356194
2,4	-0,81967	-0,68306	1,333717	2,446854
2,8	-0,67568	-0,48263	1,037925	2,521343
3,2	-0,5618	-0,35112	0,828123	2,582993
3,6	-0,4717	-0,26205	0,674504	2,634494
4	-0,4	-0,2	0,559017	2,677945
7	-0,15094	-0,04313	0,196229	2,863293
10	-0,07692	-0,01538	0,098058	2,944197

На рис.1.10 наведена амплітудно-фазова характеристика (АФХ) для процесу, що описується рівнянням (1.84).

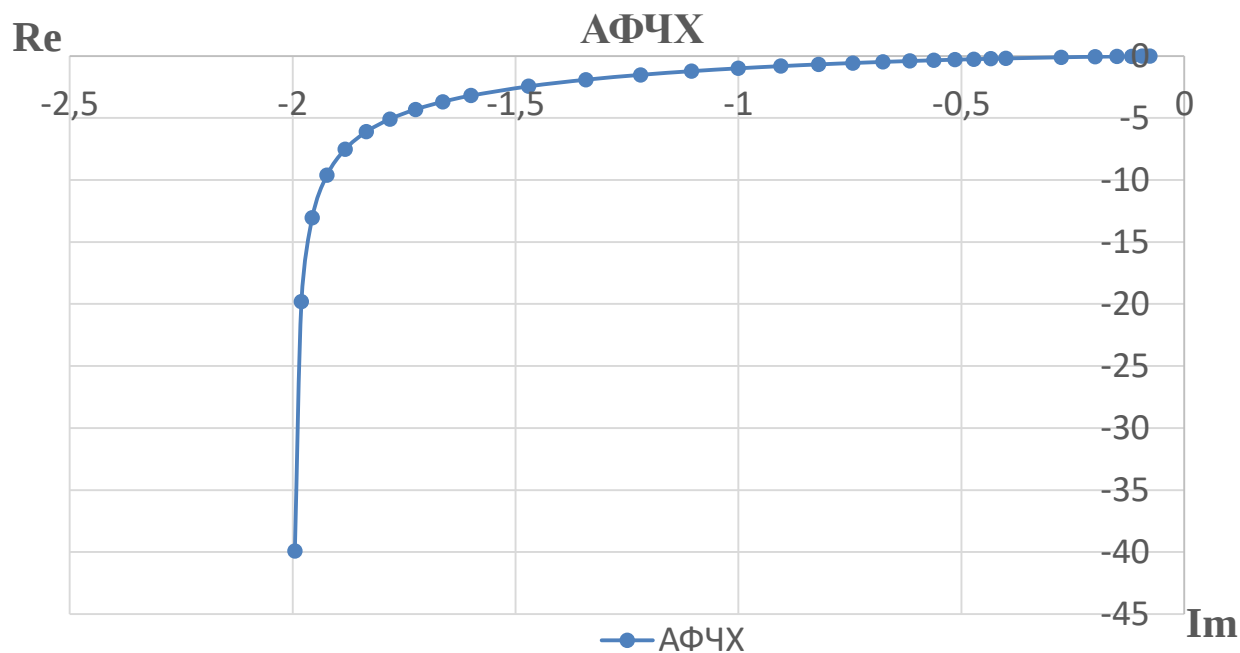


Рисунок 1.10 – Годограф АФЧХ для рівняння (1.84)

На рис.1.11 наведена амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) для процесу, що описується рівнянням (1.84)

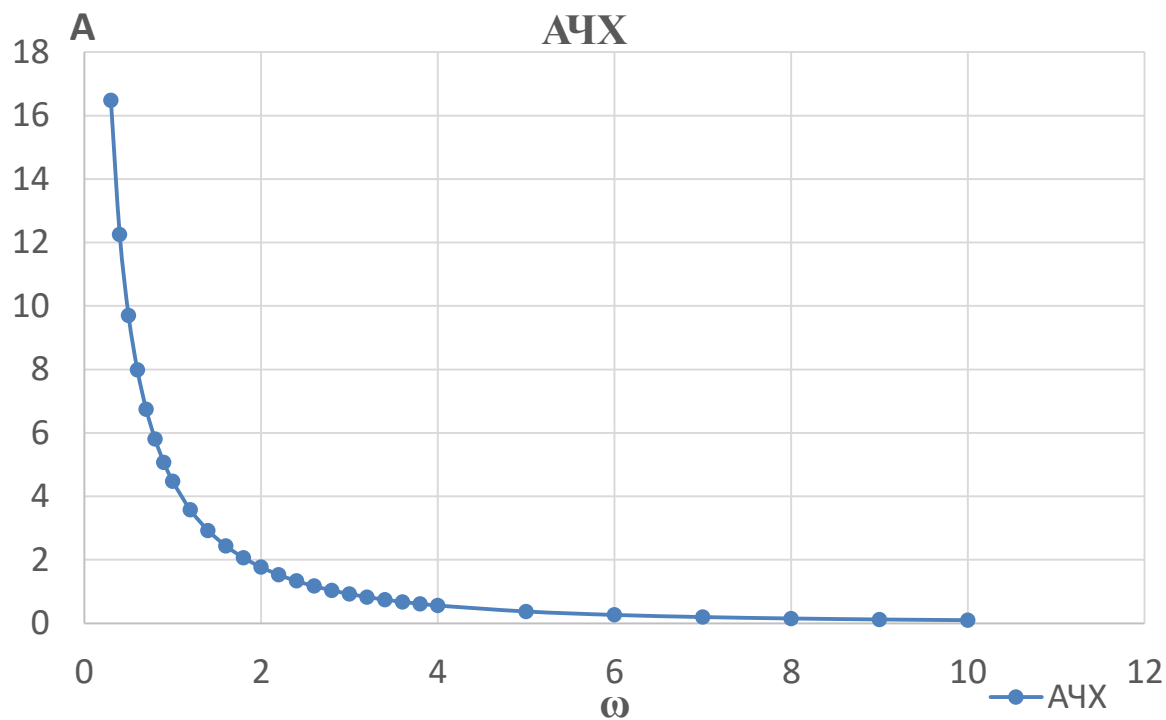


Рисунок 1.11 – Амплітудно-частотна характеристика для рівняння (1.84)

На рис.1.12 наведена фазочастотна характеристика (ФЧХ) для процесу, що описується рівнянням (1.84).

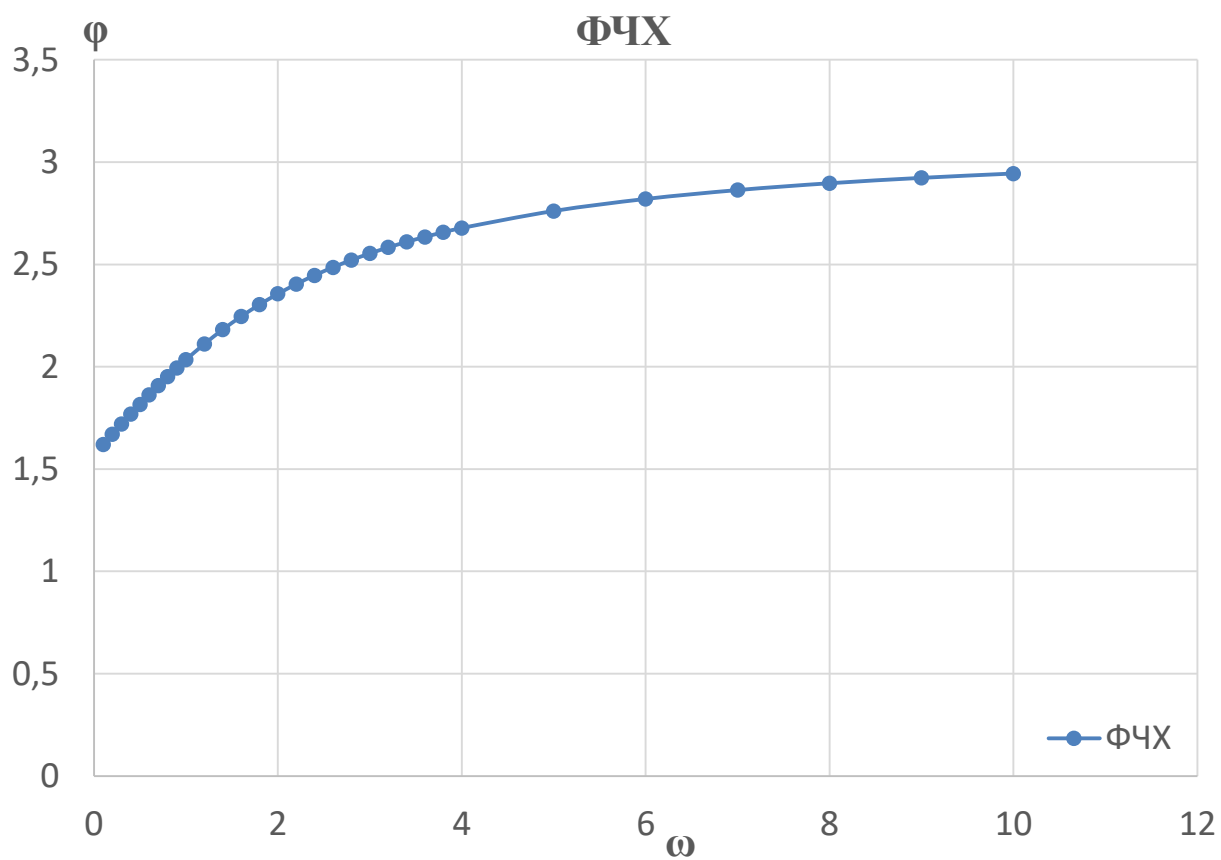


Рисунок 1.12 – Фазо-частотна характеристика для рівняння (1.84)

1.6. Контрольні запитання

1. Чисельне рішення диференціальних рівнянь.
2. Рішення ЛДУ за допомогою характеристичного рівняння.
3. Рішення ЛДУ методом операційного числення.
4. Перетворення Лапласа та його властивості.
5. Функція передачі.
6. Перетворення Фур'є та його властивості.
7. Частотні характеристики. АФЧХ, ФЧХ, АЧХ, ЛАЧХ.
8. Тестові сигнали, що використовуються в ТАУ.
9. Взаємозв'язок перехідних характеристик.

2. Лабораторна робота №2

Типові елементарні ланки та їх характеристики.

2.1. Мета роботи

Закріпити знання елементарних ланок та їх характеристик.
Застосувати на практиці послідовне та паралельне з'єднання ланок.
Дослідити властивості отриманих структур.

2.2. Завдання

- У відповідності до варіанту обрати структуру з'єднання ланок та досліджувати ланки.
- Визначити загальну передавальну функцію отриманої структури та визначити аналітичний розв'язок для перехідної характеристики.
- Побудувати перехідну характеристику заданої структури у середовищі Matlab Simulink.
- Отримати частотні характеристики заданої структури і охарактеризувати її, навести таблиці та графіки.
- З'ясувати вплив числових параметрів ланок, що досліджуються, на вигляд перехідної характеристики.
- Зробити висновки про вплив коефіцієнтів елементарних ланок, що досліджуються, та способу їх з'єднання на властивості отриманої структури та вигляд перехідного процесу.

2.3. Теоретичні відомості

В автоматичних системах використовуються різні функціональні елементи (автоматичні регулятори, датчики, перетворювачі та ін.), які мають різну природу й конструкцію, але їх поведінка описується однаковими математичними залежностями, що дає можливість виділити невелику кількість типових ланок. Кожній такій ланці відповідає математична модель –

залежність між вхідною та вихідною величинами, при цьому вона є достатньо простою, і ланки називають елементарними [2, 3, 4].

Елементарна ланка (ЕЛ) – це виділена ділянка (частка, елемент), яка має однонаправлену дію з відомою залежністю $x = f(U)$ (рис.2.1).

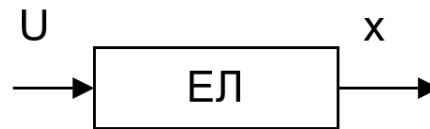


Рисунок 2.1 – Елементарна ланка

В теорії автоматичного керування введені такі ЕЛ, щоб за допомогою них можна було представити та описати систему різної природи та призначення. Використовуються такі елементарні ланки: аперіодична, підсилювальна, коливальна, інтегрувальна, диференціювальна, із транспортним запізнюванням. Всі ці ЕЛ є мінімально-фазовими елементами. При аналізі властивостей елементарних ланок необхідно знати: рівняння, передавальну функцію, часові та частотні характеристики, а також реальні об'єкти, властивості яких описуються конкретною елементарною ланкою.

Функція передачі ланки (системи) $K(p)$ є відношенням зображень за Лапласом вихідної $X_{вих}(p)$ і вхідної $X_{вх}(p)$ величин при нульових початкових умовах [2]:

$$W(p) = \frac{X_{вих}(p)}{X_{вх}(p)}, \quad (2.1)$$

звідки:

$$X_{вих}(p) = W(p)X_{вх}(p), \quad (2.2)$$

тобто, знаючи зображення за Лапласом вхідного сигналу і передавальну функцію ланки (системи), можна визначити зображення вихідної величини цієї ланки (системи).

Перехідною функцією ланки (системи) $h(t)$ називається реакція ланки (системи) на сигнал виду одиничної ступеневої функції $1(t)$ при нульових

початкових умовах [2,4]. Перехідна функція може бути визначена із розв'язку диференціального рівняння звичайним чи операційним методами. Для визначення $h(t)$ операційним методом у рівняння (2.2) підставляємо зображення одиничної ступеневої функції $X_{ex}(p) = L[1(t)] = \frac{1}{p}$ і знаходимо зображення перехідної функції

$$H(p) = X_{вих}(p) = \frac{W(p)}{p} \quad (2.3)$$

тобто зображення перехідної функції дорівнює передавальній функції, поділеній на p . Перехідна функція знаходиться як обернене зображення Лапласа від $H(p)$:

$$h(t) = L^{-1}[H(p)] \quad (2.4)$$

Імпульсна перехідна функція (вагова функція) ланки (системи) $w(t)$ - це реакція ланки (системи) на одиничний імпульс $\delta(t)$ (миттєвий імпульс з нескінченно великою амплітудою і одиничною площею) [4]. Одиничний імпульс одержують диференціюванням одиничного стрибка $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$, або в операторній формі: $\delta(t) = pL[1(t)] = \frac{p}{p} = 1$. Тому

$$L[w(t)] = W(p)\delta(p) = W(p), \quad (2.5)$$

тобто зображення імпульсної перехідної функції дорівнює передавальній функції ланки (системи). Звідси випливає, що для характеристики динамічних властивостей ланки (системи) рівною мірою можуть бути використані як передавальна функція, так і імпульсна перехідна функція. Як видно з (2.5), для того, щоб одержати імпульсну перехідну функцію, потрібно знайти оригінал відповідно до передавальної функції $w(t) = L^{-1}[W(p)]$.

Відповідно до (2.3) $W(p) = pH(p)$, або при переході до оригіналів $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, тобто імпульсна перехідна функція ланки (системи) може бути також одержана диференціюванням перехідної функції.

Підсилювальна ланка (пропорційна)

Рівняння ланки має вигляд [3, 4]:

$$x = kU, \quad (2.6)$$

де k - коефіцієнт передачі.

Рівняння ланки в операторному вигляді:

$$x(p) = kU(p), \quad (2.7)$$

звідки передавальна функція:

$$W(p) = \frac{x(p)}{U(p)} = k, \quad (2.8)$$

Частотні характеристики отримаємо, підставивши $p = j\omega$, звідки амплітудно-фазова характеристика:

$$W(j\omega) = k, \quad (2.9)$$

дійсна частина $U(\omega) = k$, уявна $V(\omega) = 0$, амплітудно-фазова характеристика $\varphi(\omega) = 0$ (рис.2.2).

Перехідна функція підсилювальної ланки:

$$h(t) = k \cdot 1(t), \quad (2.10)$$

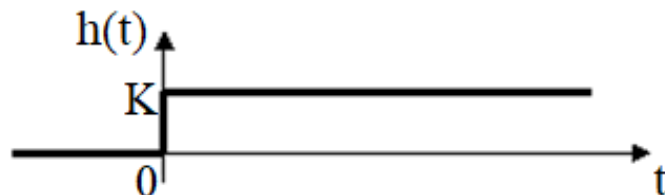


Рисунок 2.2 – Перехідна характеристика підсилювальної ланки

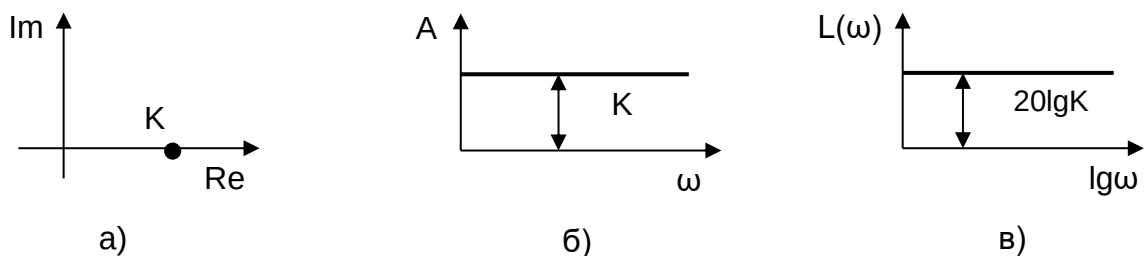


Рисунок 2.3 – Частотні характеристики підсилювальної ланки:

а) – амплітудно-фазова (АФХ), б) – амплітудно-частотна (АЧХ),

в) – логарифмічна амплітудно-частотна (ЛАЧХ)

а імпульсна характеристика

$$w(t) = k \cdot \delta(t), \quad (2.11)$$

Таким чином, підсилювальна ланка є безінерційною, і сигнали будь-якої частоти ($\omega = (0; \infty)$) проходять з однаковим відношенням амплітуд вхідної і вихідної змінної, яке дорівнює k .

Прикладом об'єкта, який описується підсилювальною ланкою, є електронний операційний підсилювач.

Аперіодична ланка I-ого порядку

Диференціальне рівняння ланки [3, 4]:

$$T \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (2.12)$$

де T - постійна часу, k - коефіцієнт передачі.

В операторному вигляді рівняння (2.12) записується так:

$$(Tp + 1)x(p) = kU(p), \quad (2.13)$$

звідки передавальна функція ЕЛ:

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}, \quad (2.14)$$

Амплітудно-фазова характеристика відповідає виразу (2.14) при $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega)+1}, \quad (2.15)$$

Домноживши вираз (2.15) на $(T(j\omega) - 1)$, отримуємо:

$$W(j\omega) = \frac{k - jTk\omega}{(T\omega)^2 + 1} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.16)$$

$$\text{де} \quad U(\omega) = \frac{k}{1+(T\omega)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1+(T\omega)^2}, \quad (2.17)$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}, \quad (2.18)$$

Фазочастотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg(T\omega), \quad (2.19)$$

Ці характеристики показані на рис.2.3.4.

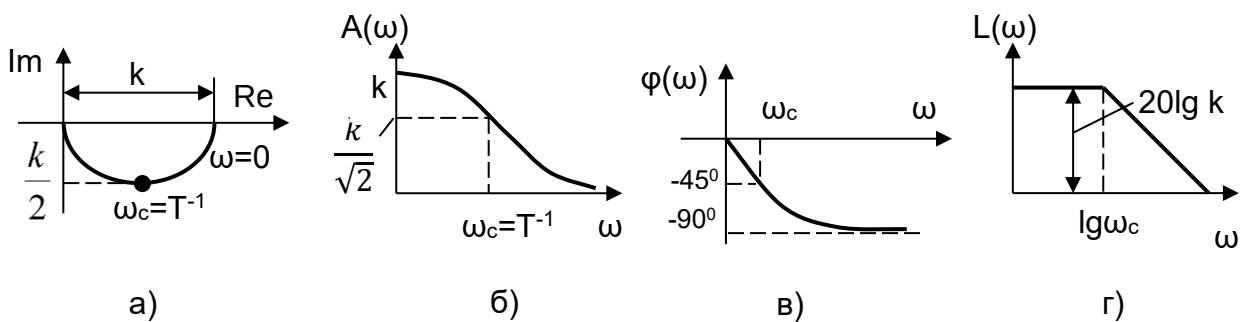


Рисунок 2.4 – Частотні характеристики аперіодичної ланки:

а) – АФХ, б) – АЧХ, в) – ФЧХ, г) – ЛАЧХ

Перехідна функція аперіодичної ланки знаходиться як сума загального та частинного роз’язків рівняння (2.12):

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t), \quad (2.20)$$

Імпульсна характеристика ланки визначається диференціюванням $h(t)$:

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t), \quad (2.21)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки показані на рис.2.5.

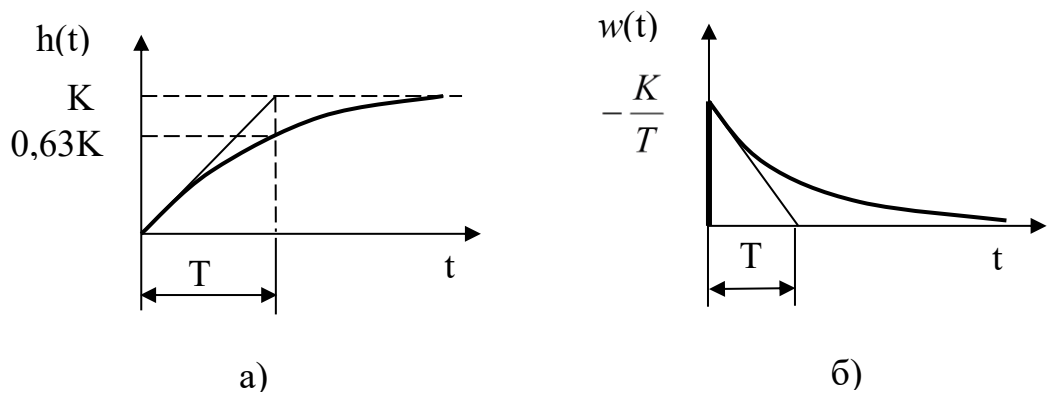


Рисунок 2.5 – Часові характеристики аперіодичної ланки,

а) – перехідна функція, б) – імпульсна характеристика

Проаналізувавши частотні характеристики ланки, визначили, що гармонійний сигнал малої частоти ($\omega < \omega_c$) пропускається добре, про що свідчить відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів. При збільшенні частоти ($\omega > \omega_c$) зменшується коефіцієнт передачі і при $\omega \rightarrow \infty$, $K \rightarrow 0$. Аперіодична ланка є мінімально-фазовою, тому що створює менший фазовий зсув, ніж інші ланки з такою характеристикою. Наприклад, нестійка ланка, частотна характеристика якої

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega - 1} \quad (2.22)$$

створює зсув за фазою

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg(\omega T) \quad (2.23)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки (рис.2.5) дають можливість оцінити постійну часу T , яка визначає інерційність ланки.

Аперіодичною ланкою можна описувати різні елементи, які можуть накопичувати та передавати енергію чи речовину: конструктивні, електричні, гідравлічні та ін.

В задачах аналізу та синтезу амплітудно-фазова характеристика аперіодичної ланки визначається за формулою:

$$W(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-\arctg(T\omega)} \quad (2.23)$$

Інтегрувальна ланка

Передавальна функція інтегрувальної ланки має вигляд [3, 4]:

$$W(s) = \frac{K}{p} = \frac{1}{T \cdot p}, \quad (2.24)$$

де K – коефіцієнт підсилення; T – стала часу (час інтегрування); $T = \frac{1}{K}$.

Інтегрувальна ланка описується диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\frac{dy(t)}{dt} = K \cdot x(t) \quad (2.25)$$

$$T \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (2.26)$$

У інтегральній формі це рівняння має вигляд:

$$y(t) = K \int_0^t x(\tau) d\tau \text{ або } y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

Перехідна функція інтегрувальної ланки має вигляд:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[\frac{K}{p^2} \right] = Kt = \frac{t}{T} \quad (2.28)$$

Вагова функція інтегрувальної ланки має вигляд:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1} \left[\frac{K}{p} \right] = K \cdot 1(t) = \left(\frac{1}{T} \right) \cdot 1(t) \quad (2.29)$$

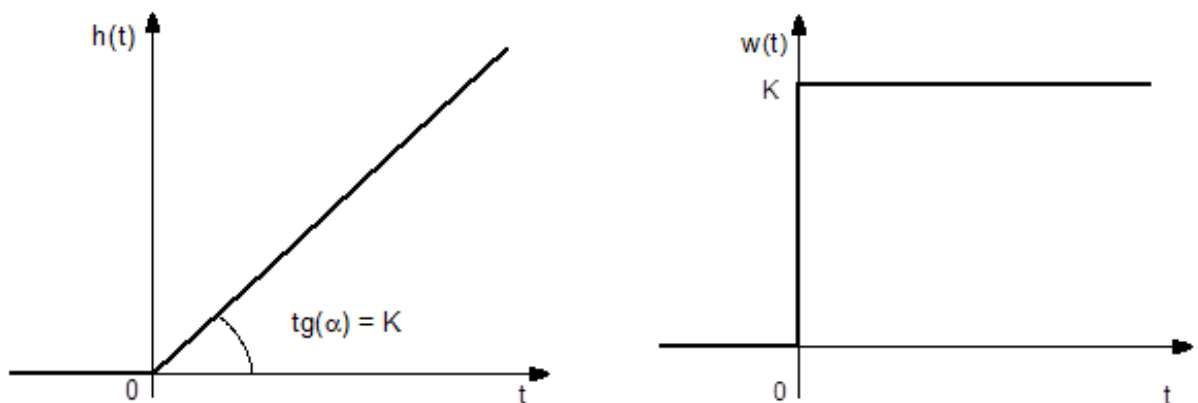


Рисунок 2.6 – Перехідна і вагова функції інтегрувальної ланки

Знайдемо АФЧХ, АЧХ, ФЧХ і ЛАХ інтегрувальної ланки:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = K \cdot \omega \cdot \frac{j}{\omega^2} = 0 - \frac{K}{\omega} \cdot j = 0 - \frac{1}{T \cdot \omega} \cdot j \quad (2.30)$$

$$A(\omega) = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{K}{\omega}\right)^2} = \frac{K}{\omega} = \frac{1}{T \cdot \omega} \quad (2.31)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{\left(\frac{K}{\omega}\right)}{0}\right) = -\arctg(\infty) = \frac{-\pi}{2} = -90^\circ \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg\left(\frac{K}{\omega}\right) = \\ &= 20 \cdot \lg(K) - 20 \cdot \lg(\omega) = -20\lg(T \cdot \omega) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким чином, інтегрувальна ланка послаблює високі частоти і необмежено (теоретично) посилює низькі частоти. Фазовий зсув постійний і дорівнює -90° .

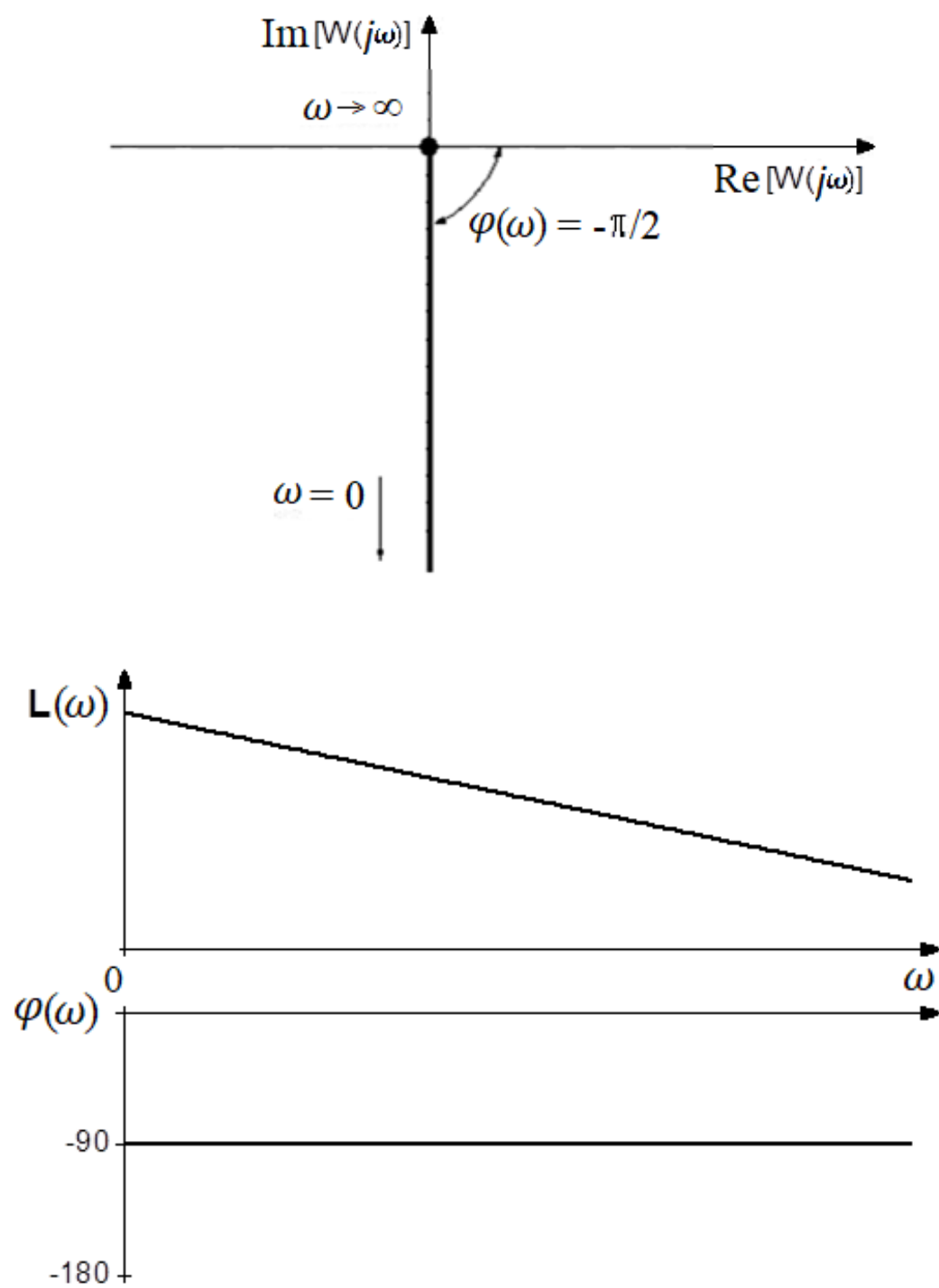


Рисунок 2.7 – АФЧХ і ЛАХ інтегрувальної ланки

Диференціювальна ланка

Передавальна функція диференціювальної ланки має вигляд [3, 4]:

$$W(s) = T \cdot p, \quad (2.34)$$

де T – стала часу (час диференціювання).

Диференціювальна ланка описується рівнянням:

$$y = T \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.35)$$

Ідеальна диференціювальна ланка фізично нереалізована. Взагалі будь-яка передавальна функція з порядком чисельника більшим чим порядок знаменника є фізично нездійсненною.

Перехідна функція:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1}[T] = T \cdot \delta(t) \quad (2.36)$$

Таким чином, реакція диференціювальної ланки на ступінчасту функцію - це короткий імпульс.

Вагова функція:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}[T \cdot p] = T \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (2.37)$$

Перехідну і вагову функцію диференціювальної ланки важко зобразити графічно, і тим більше складно уявити, яким буде відгук (реакція) цієї ланки на вхідний вплив. Тому розглянемо реакцію диференціювальної ланки на лінійний (наростаючий) вхідний сигнал:

$$x(t) = t$$

$$X(s) = \frac{1}{p^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[W(p) \cdot X(p)] = L^{-1} \left[\frac{T \cdot p}{p^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{T}{p} \right] = T \cdot 1(t) \quad (2.38)$$

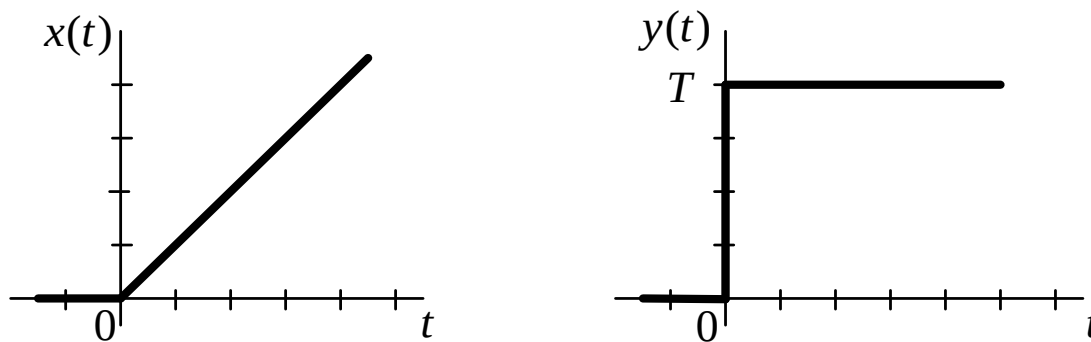


Рисунок 2.8 – Реакція диференціувальної ланки на лінійний вхідний сигнал

Іншими словами, якщо на вхід диференціувальної ланки подати лінійно наростаючий сигнал, то в момент подачі сигналу на виході ми матимемо стрибок вихідного сигналу з 0 до T .

Частотні характеристики:

$$W(j\omega) = T \cdot j\omega = 0 + T \cdot \omega \cdot j \quad (2.39)$$

$$A(\omega) = T \cdot \omega \quad (2.40)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{T \cdot \omega}{0}\right) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (2.41)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg(T \cdot \omega) \quad (2.42)$$

Як бачимо, частотні характеристики диференціувальної ланки протилежні частотним характеристикам інтегрувальної ланки.

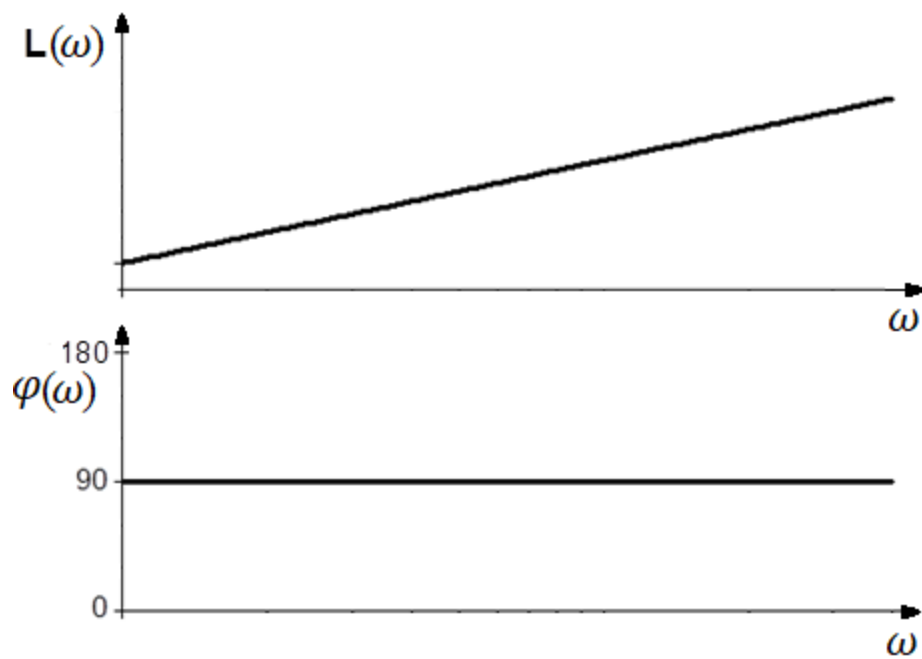
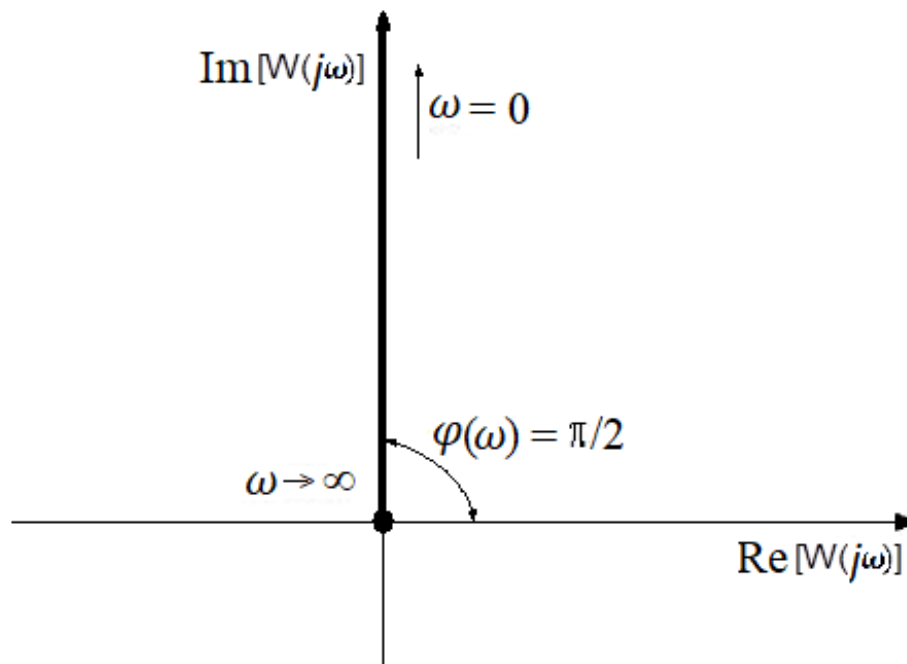


Рисунок 2.9 – АФЧХ, ЛАХ и ЛФХ диференціовальної ланки

Реальна диференціувальна ланка

Передавальна функція реальної диференціувальної ланки (РДЛ) має вигляд [3, 4]:

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp+1}, \quad (2.43)$$

де T – стала часу (час диференціювання).

Реальна диференціувальна ланка описується рівнянням:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.44)$$

Перехідна функція:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.45)$$

Вагова функція:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = \frac{k}{T} \left(\delta(t) - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (2.46)$$

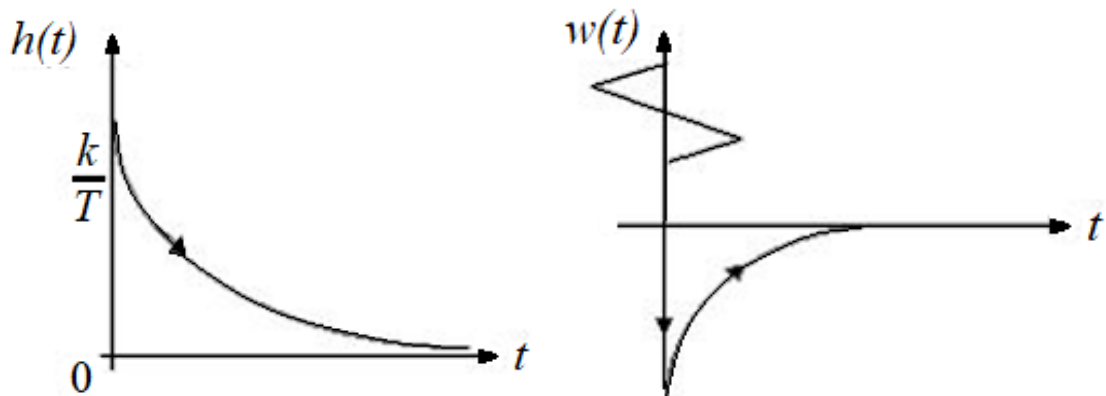


Рисунок 2.10 – Перехідна и вагова функції РДЛ

Частотні характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{j \cdot k \cdot \omega}{j \cdot T \cdot \omega + 1} \quad (2.47)$$

$$A(\omega) = \frac{k \cdot \omega}{j \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} \quad (2.48)$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg(T \cdot \omega) \quad (2.49)$$

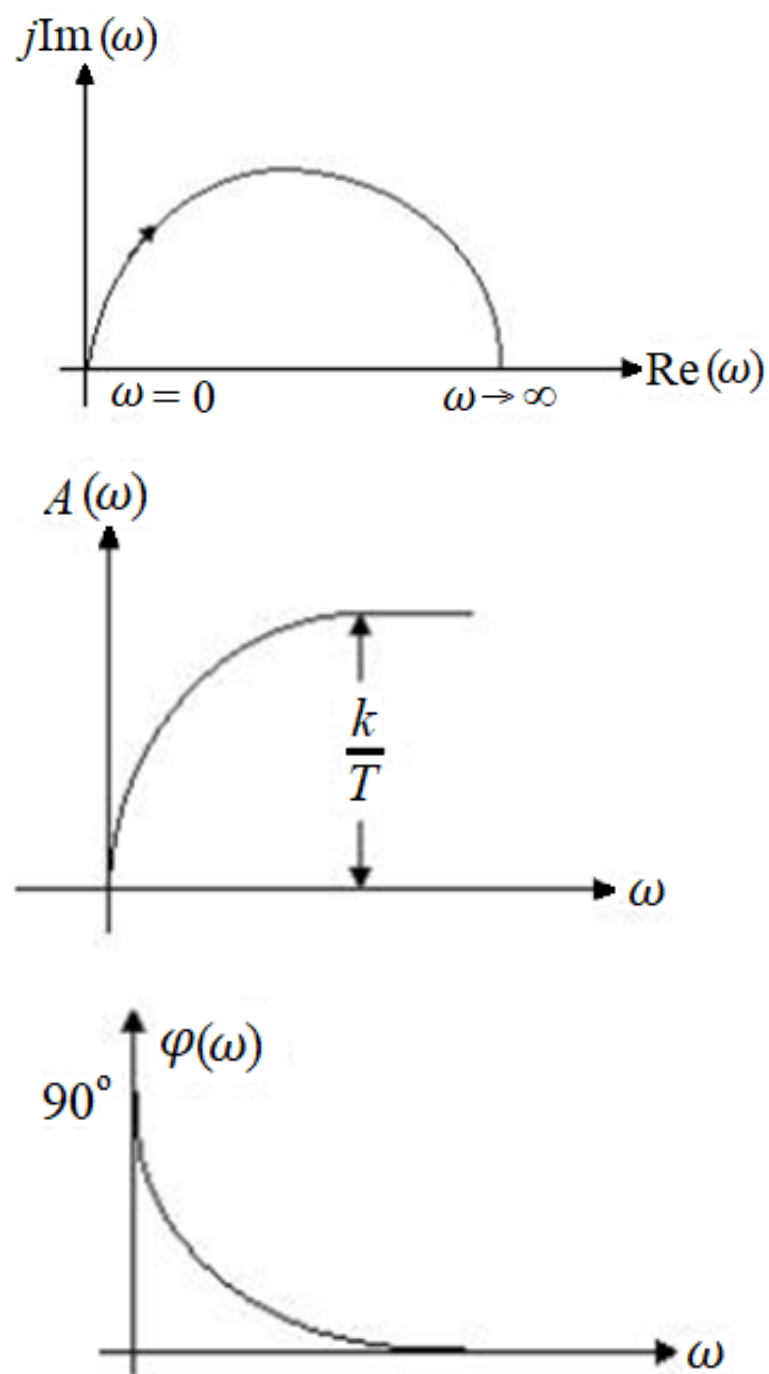


Рисунок 2.11 – АФЧХ, АФХ, ФЧХ реальної диференціувальної ланки

Аперіодична ланка II-ого порядку

Передавальна функція аперіодичної ланки II-ого порядку має вигляд [3, 4]:

$$W(p) = \frac{K}{[(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)]} \quad (2.50)$$

де K – коефіцієнт підсилення; T_1 і T_2 – постійні часу, що характеризують інерційність системи, тобто тривалість перехідного процесу в ній. ($T_1 > 0$ і $T_2 > 0$).

Аперіодична ланка II-ого порядку описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) \quad (2.51)$$

Перехідна характеристика аперіодичної ланки II-ого порядку має вигляд:

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[W(p) \cdot 1(t)] = L^{-1} \left[\frac{K}{[p \cdot (T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)]} \right] = \\ &= K \cdot \left[1 - \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \left(\frac{T_2}{(T_2 - T_1)} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

В окремому випадку, коли $T_1 = T_2 = T$ аналітичний вираз для перехідної характеристики має дещо інший вигляд:

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[W(p) \cdot 1(t)] = L^{-1} \left[\frac{K}{p \cdot (T \cdot p + 1)^2} \right] = \\ &= K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} - \left(\frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

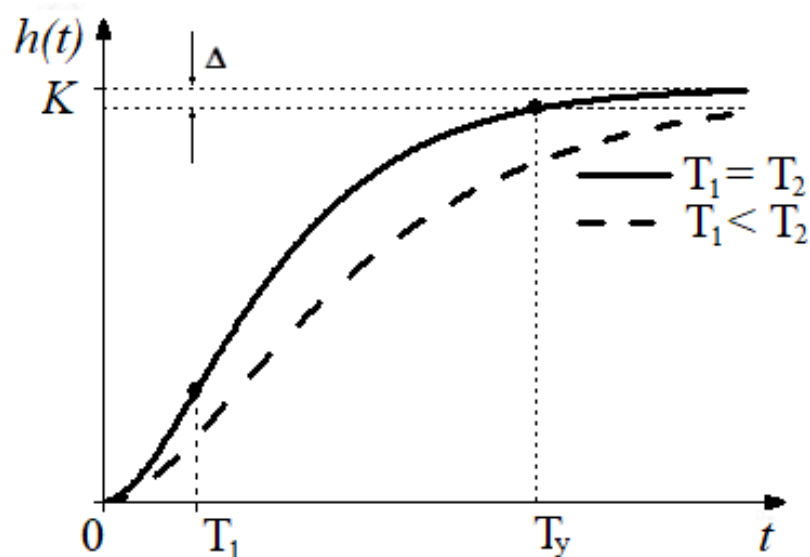


Рисунок 2.12 – Перехідна характеристика аперіодичної ланки II-го порядку.

Перехідний процес аперіодичної ланки II-ого порядку має експонентний вид з перегином в початковій області. Це означає, що ланка має високу інерційність і не відразу починає реагувати на вхідний вплив.

Час регулювання T_y (час перехідного процесу) для аперіодичної ланки II-ого порядку в 3 - 5 разів перевищує значення більшої з постійних часу:
 $T_y \approx (3 \div 5) \cdot T_2$.

Вагова функція аперіодичної ланки II-ого порядку має вигляд:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= L^{-1}[W(p)] = L^{-1} \left[\frac{K}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)} \right] = \\
 &= K \cdot \left[\left(\frac{1}{(T_1 - T_2)} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(\frac{1}{(T_2 - T_1)} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right]
 \end{aligned} \quad (2.54)$$

В окремому випадку, коли $T_1 = T_2 = T$ аналітичний вираз для вагової функції має дещо інший вигляд:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1} \left[\frac{K}{(T \cdot p + 1)^2} \right] = \left(K \cdot \frac{t}{T^2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.55)$$

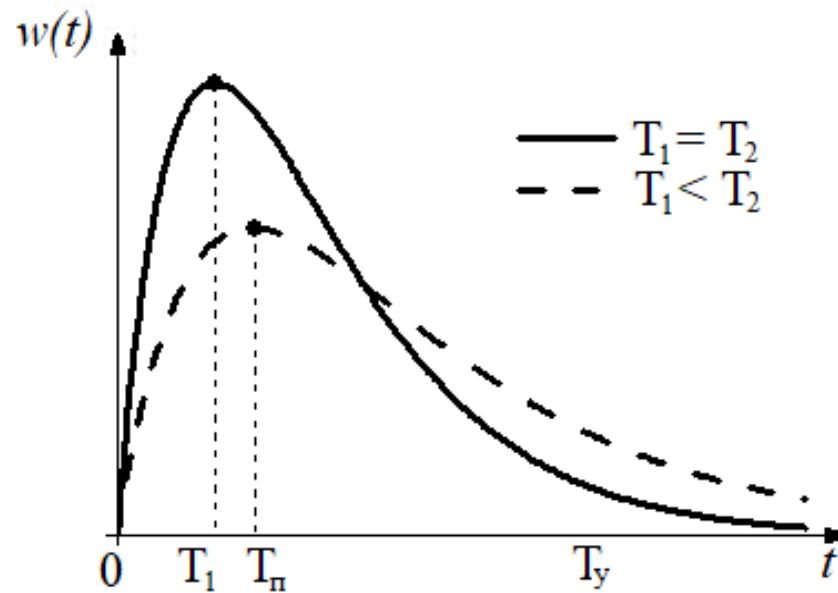


Рисунок 2.13 – Вагова характеристика аперіодичної ланки II-го порядку

Частотні характеристики (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ і ЛАХ) аперіодичної ланки II-ого порядку мають досить складний аналітичний вигляд.

$$W(j\omega) = \frac{K \cdot (1 - T_1 \cdot T_2 \cdot \omega^2)}{(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_2^2 \cdot \omega^2)} - j \frac{K \cdot \omega \cdot (T_1 + T_2)}{(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_2^2 \cdot \omega^2)} \quad (2.56)$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_2^2 \cdot \omega^2)}} \quad (2.57)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{\omega \cdot (T_1 + T_2)}{1 - T_1 \cdot T_2 \cdot \omega^2} \right) \quad (2.58)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(K) - 10 \cdot \lg(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \lg(1 + T_2^2 \cdot \omega^2) \quad (2.59)$$

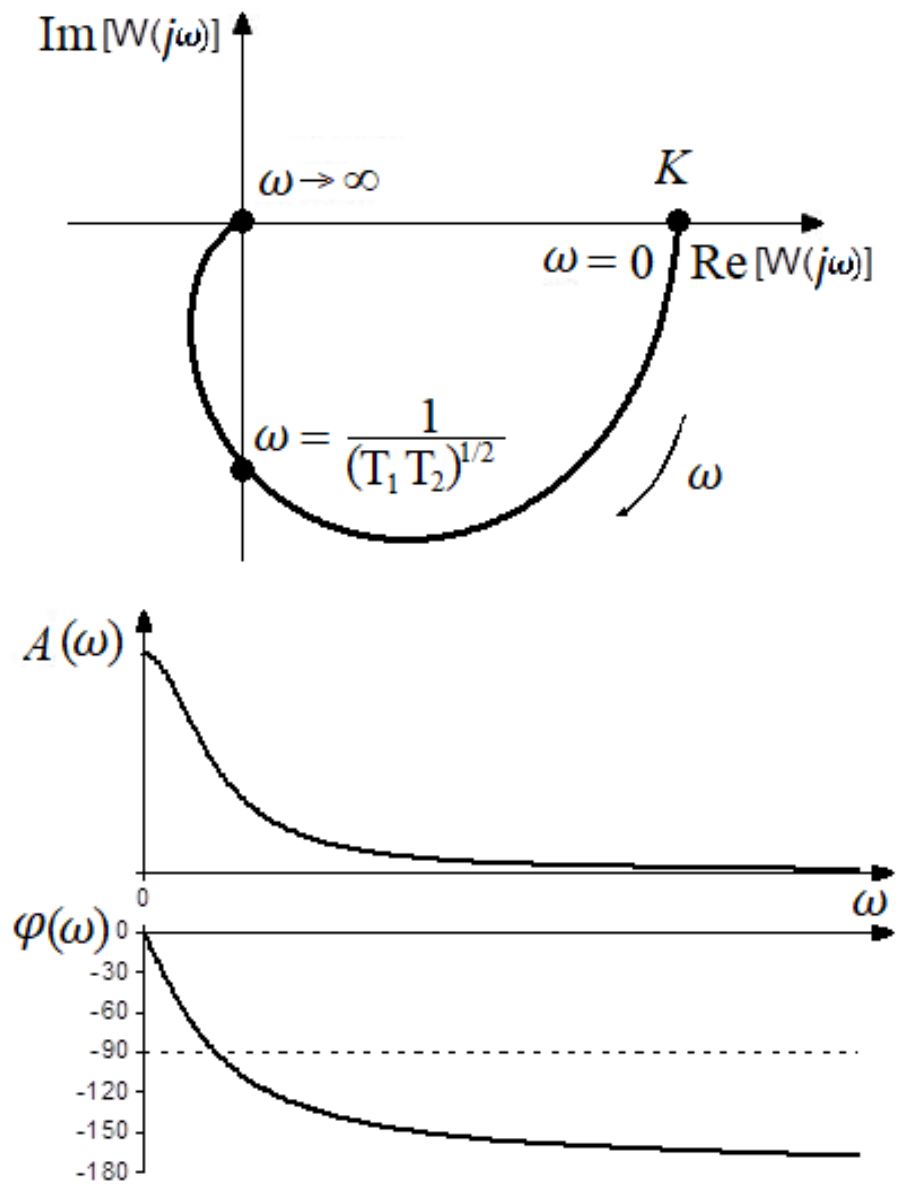


Рисунок 2.14 – АФЧХ, АЧХ, ФЧХ аперіодичної ланки II-го порядку

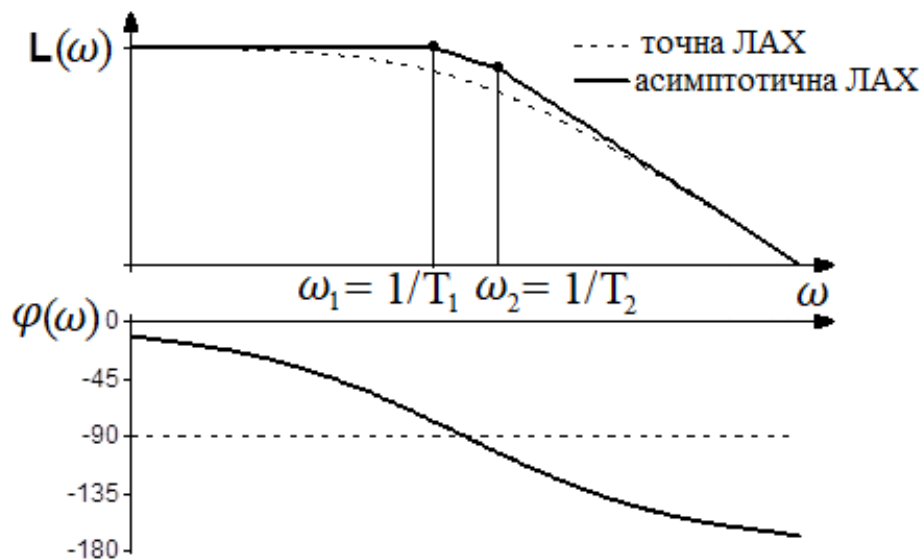


Рисунок 2.15 – ЛАХ і ЛФХ аперіодичної ланки II-го порядку

Коливальна ланка

Передавальна функція коливальної ланки має вигляд [3, 4]:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1} \quad (2.60)$$

де K - коефіцієнт передачі; T - постійна часу, що характеризує інерційність системи, тобто тривалість перехідного процесу в ній. ($T > 0$); ξ - коефіцієнт (декремент) загасання, який характеризує розсіювання енергії в ланці ($0 < \xi < 1$). При $\xi \geq 1$ коливальна ланка перетворюється на аперіодичну ланку II-го порядку.

Коливальна ланка описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$T^2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) \quad (2.61)$$

Перехідна характеристика коливальної ланки має вигляд:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[\frac{K}{p \cdot (T^2 p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1)} \right] =$$

$$= K \cdot \left[1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t\right) \right) \right] \quad (2.62)$$

Перехідна функція має досить складний вид, але найбільш характерно те, що присутнє експоненціальне загасання перехідного процесу з коефіцієнтом $-\frac{\xi}{T}$, а також коливальність з частотою

$$\omega_k = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \quad (2.63)$$

Тут важливо зазначити, що частота залежить від коефіцієнта загасання. При $\xi \rightarrow 0$ $\omega_k \rightarrow 1/T$; при $\xi \rightarrow 1$ $\omega_k \rightarrow 0$.

Вагова функція коливальної ланки має вигляд:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}\left[\frac{K}{T^2 p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1}\right] = \frac{K \cdot e^{-\frac{\xi t}{T}}}{T \sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t\right) \quad (2.64)$$

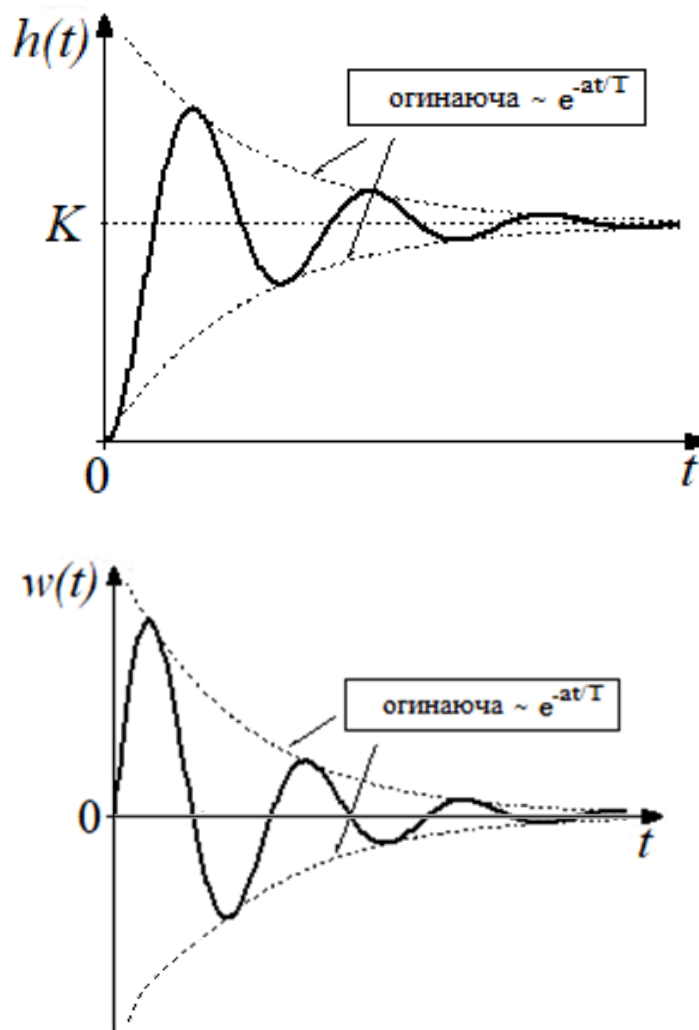


Рисунок 2.16 – Перехідна і вагова характеристики коливальної ланки

Частотні характеристики коливальної ланки мають такий вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2 \cdot (-j\omega)^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot j\omega + 1} =$$

$$= \frac{K - K \cdot T^2 \cdot \omega^2}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2} - j \cdot \frac{2 \cdot K \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2} = U(\omega) + j \cdot V(\omega) \quad (2.65)$$

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}} \quad (2.66)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = -\arctg \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2} \right) \quad (2.67)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] =$$

$$= 20 \cdot \lg K - 10 \cdot \lg[(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2] \quad (2.68)$$

Перехід до асимптотичної ЛАХ: заміняємо поточну ЛАХ – ламаною асимптотичною. Виділимо області низьких і високих частот та окремо розглянемо поведінку ЛАХ в цих областях.

Область низьких частот: $T\omega \ll 1$; тобто $\omega \ll \frac{1}{T}$; можна знехтувати виразом $T^2\omega^2$. Отримаємо: $L(\omega) = 20 \cdot \lg K$. Це горизонтальна пряма.

Область високих частот: $T\omega \gg 1$; тобто $\omega \gg \frac{1}{T}$; можна знехтувати 1 в порівнянні з виразом $T^2\omega^2$. Отримаємо: $L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 40 \cdot \lg(T \cdot \omega)$. Це рівняння прямої з нахилом -40 дБ/декаду.

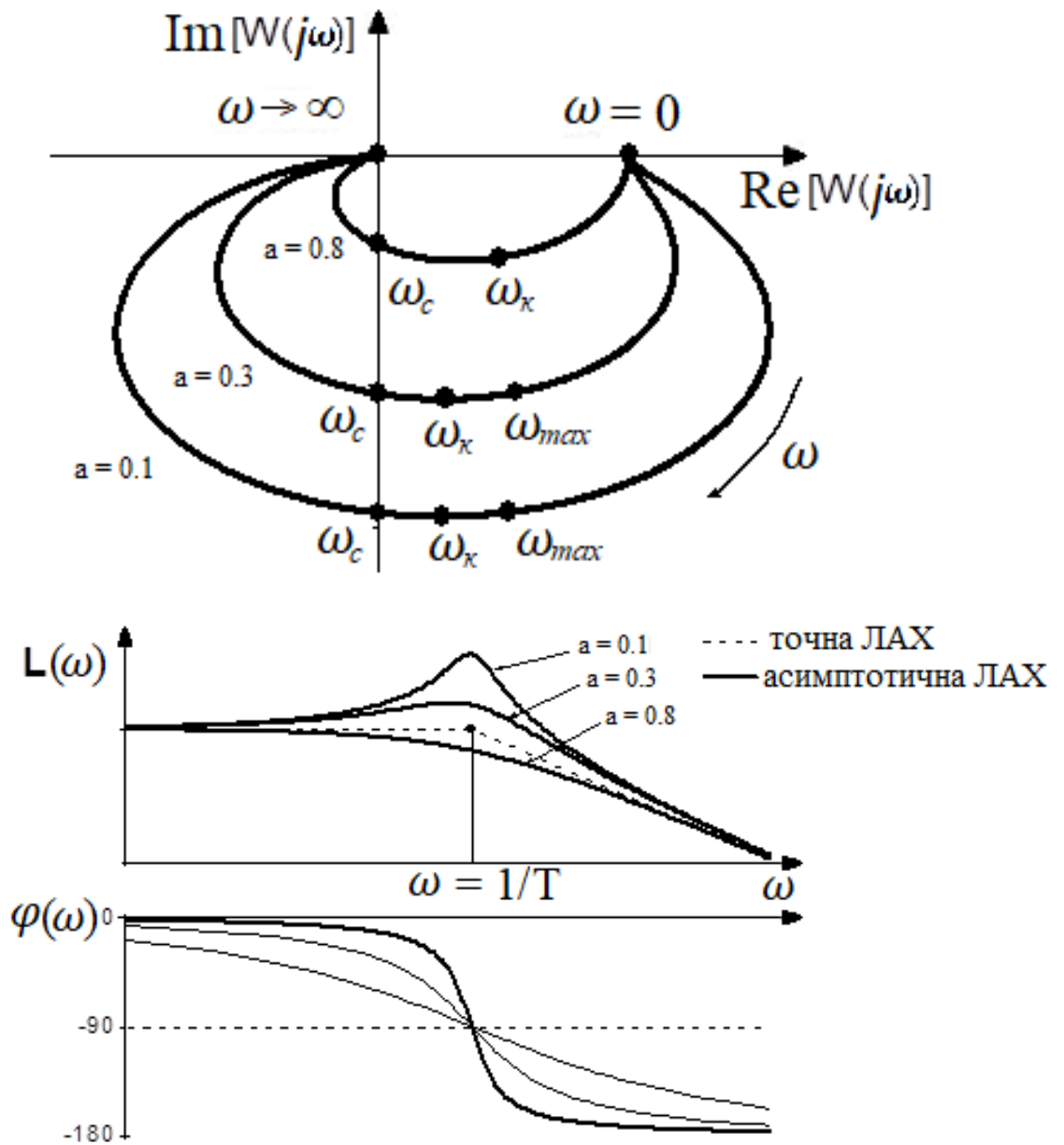


Рисунок 2.17 – АФЧХ, ЛАХ и АФХ коливальної ланки

Ланка з чистим запізненням

Ланка з чистим запізненням - це така ланка, у якої вихідний сигнал повністю повторює вхідний сигнал з деякою затримкою в часі.

Передавальна функція ланки з чистим запізненням має вигляд [3, 4]:

$$W(p) = e^{-\tau p}, \quad (2.69)$$

де τ - час чистого запізнювання.

Ланка з чистим запізненням описується рівнянням:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad (2.70)$$

Перехідна функція ланки з чистим запізненням:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[\frac{e^{-\tau p}}{p} \right] = 1(t - \tau) \quad (2.71)$$

Вагова функція ланки з чистим запізненням:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}[e^{-\tau p}] = \delta(t - \tau) \quad (2.72)$$

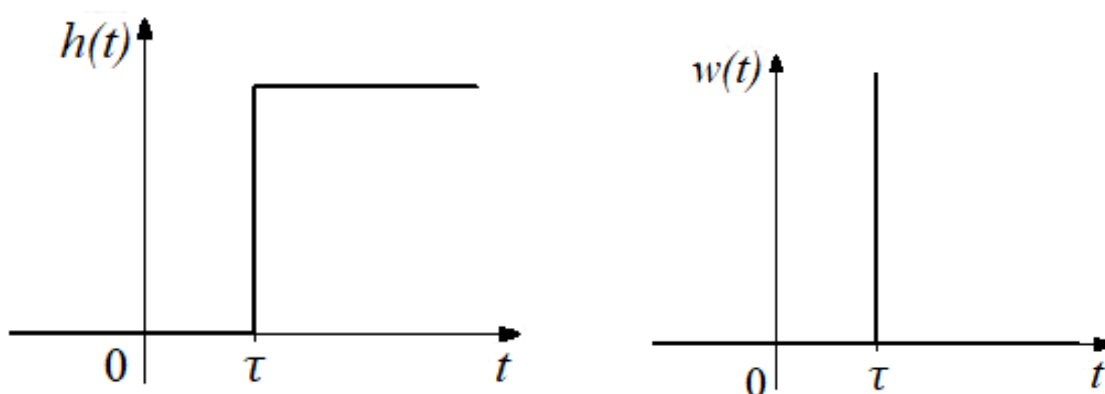


Рисунок 2.18 – Перехідна та вагова функції ланки з чистим запізненням

АФЧХ, АЧХ, ФЧХ і ЛАХ ланки з чистим запізненням мають вигляд:

$$W(j\omega) = e^{-\tau \cdot \omega \cdot j} = \cos(\tau \cdot \omega) - j \cdot \sin(\tau \cdot \omega) \quad (2.73)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\cos^2(\tau \cdot \omega) + (-\sin(\tau \cdot \omega))^2} = 1 \quad (2.74)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{\sin(\tau \cdot \omega)}{\cos(\tau \cdot \omega)}\right) = -\arctg(\tg(\tau \cdot \omega)) = -\tau \cdot \omega \quad (2.75)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 0 \quad (2.76)$$

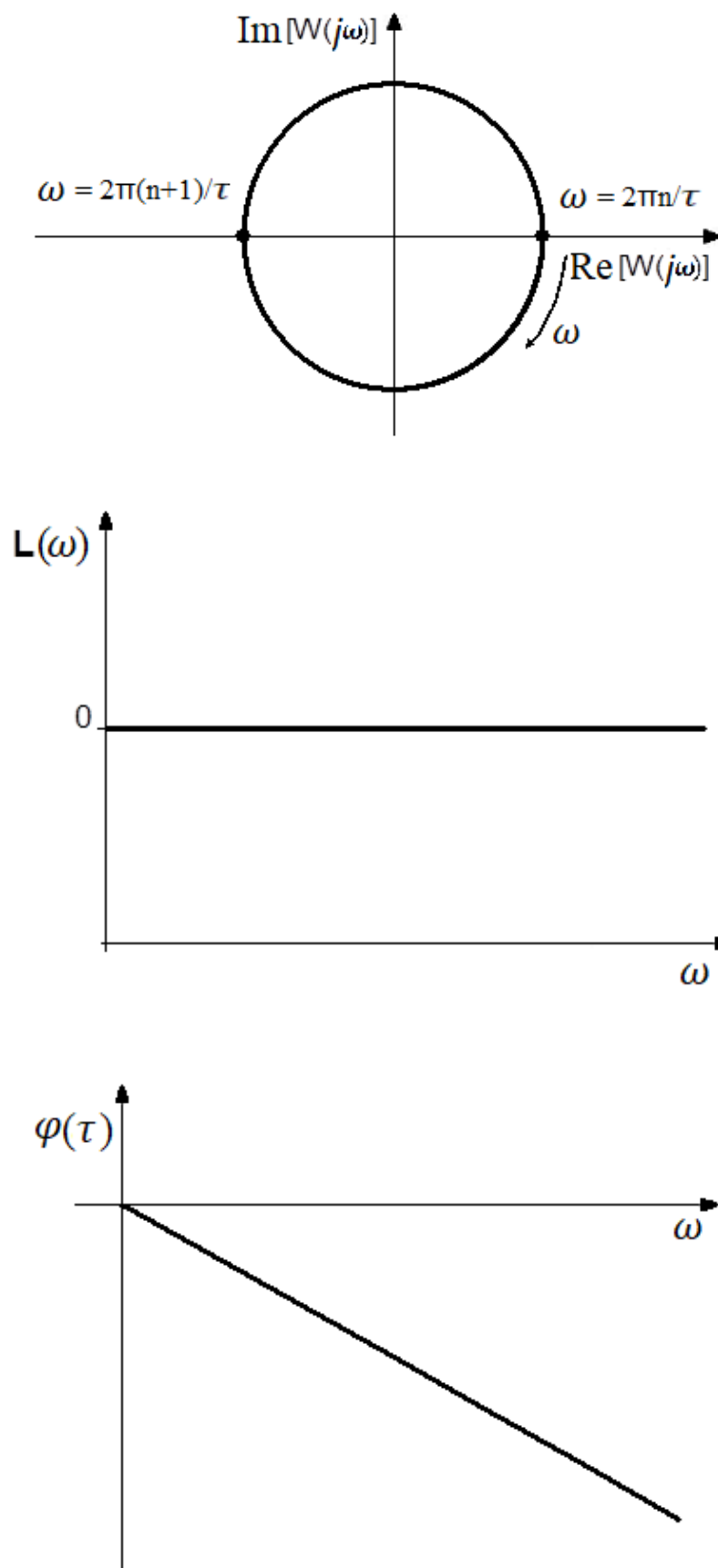


Рисунок 2.19 – АФЧХ, ЛАХ, ФЧХ ланки з чистим запізненням

2.4. Варіанти завдань

Початкові умови – нульові.

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0 ; X(t) = 1(t)$$

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань для другої роботи

№ вар	№ схеми	Ланка 1	Ланка 2	Ланка 3	Ланка 4	Ланка, що досліджується
1.	4	АЛ	АЛ	ПЛ	АЛ	2
2.	3	ПЛ	АЛ	АЛ	РДЛ	4
3.	2	АЛ	ПЛ	ІЛ	АЛ	3
4.	1	АЛ	ПЛ	ПЛ	АЛ	1
5.	5	ІЛ	АЛ	ПЛ	ІЛ	2
6.	6	РДЛ	ПЛ	АЛ	АЛ	3
7.	2	ПЛ	АЛ	АЛ	АЛ	1
8.	5	ІЛ	АЛ	ПЛ	ПЛ	2
9.	4	АЛ	АЛ	АЛ	ПЛ	2
10.	1	ПЛ	ІЛ	АЛ	АЛ	2
11.	3	РДЛ	АЛ	ПЛ	ПЛ	3
12.	6	ПЛ	ІЛ	АЛ	ПЛ	3
13.	7	ПЛ	АЛ	РДЛ	АЛ	1
14.	8	РДЛ	АЛ	ПЛ	ІЛ	3
15.	9	ПЛ	ІЛ	РДЛ	ПЛ	2
16.	1	РДЛ	АЛ	ІЛ	ПЛ	2
17.	3	ІЛ	ПЛ	ІЛ	АЛ	1
18.	5	ІЛ	ПЛ	ІЛ	РДЛ	4
19.	7	АЛ	ІЛ	ПЛ	РДЛ	3
20.	9	АЛ	РДЛ	ІЛ	ПЛ	1
21.	8	ІЛ	АЛ	РДЛ	ПЛ	2
22.	6	ІЛ	АЛ	ІЛ	ПЛ	2
23.	7	ІЛ	ІЛ	ПЛ	АЛ	2
24.	4	ІЛ	АЛ	РДЛ	ІЛ	1
25.	9	АЛ	ПЛ	АЛ	ІЛ	3
26.	8	ПЛ	АЛ	ІЛ	АЛ	4
27.	9	ПЛ	АЛ	АЛ	РДЛ	4
28.	3	РДЛ	РДЛ	ІЛ	АЛ	4
29.	4	ІЛ	ІЛ	АЛ	РДЛ	4
30.	6	ПЛ	ПЛ	ІЛ	ДРЛ	3

Види елементарних ланок

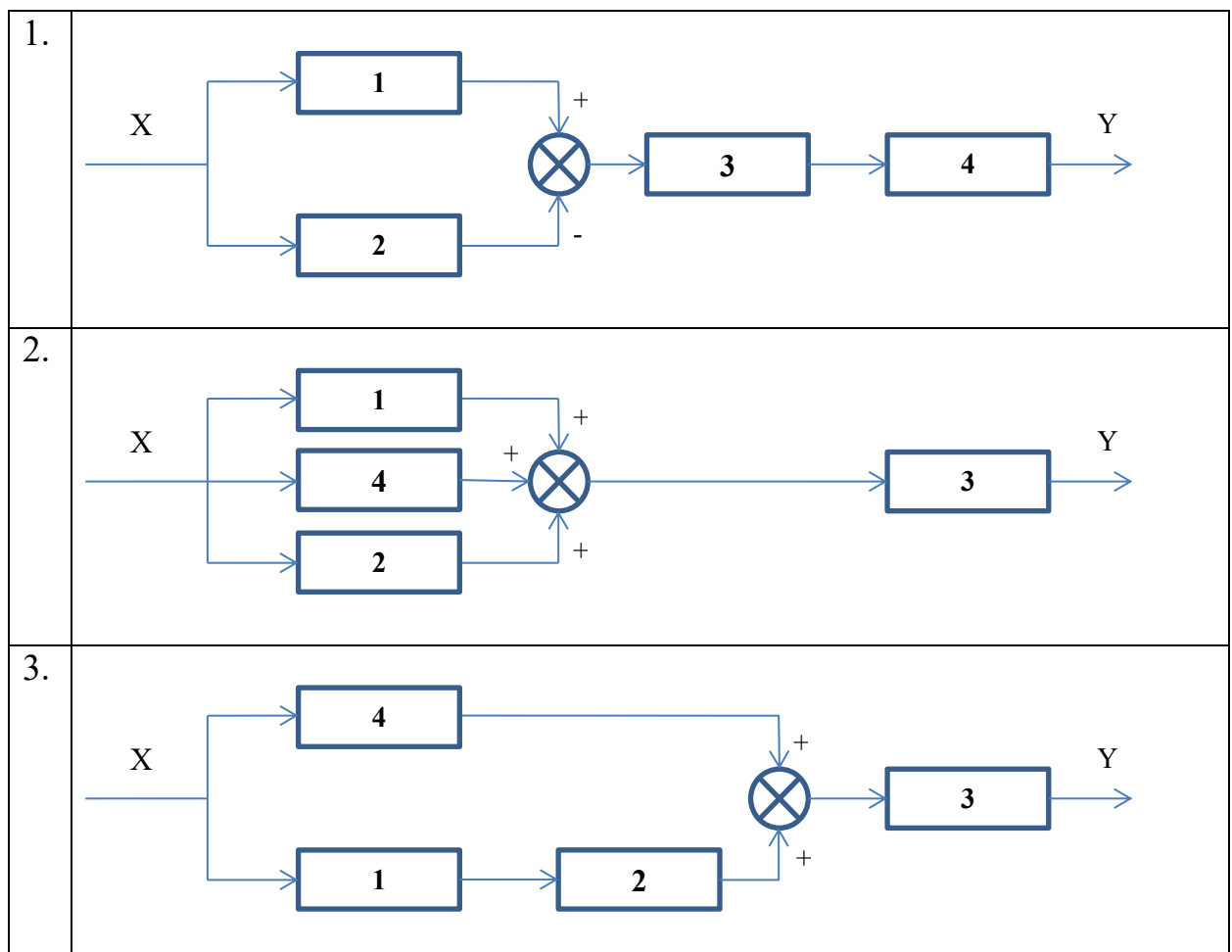
№	Назва	Скорочення	Передаточна функція
1.	Аперіодична ланка	АЛ	$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$
2.	Пропорційна ланка	ПЛ	$W(p) = k_2$
3.	Інтегровальна ланка	ІЛ	$W(p) = \frac{1}{T_3 p}$
4.	Реальна диференціювальна ланка	РДЛ	$W(p) = \frac{k_4 T_4 p}{T_4 p + 1}$

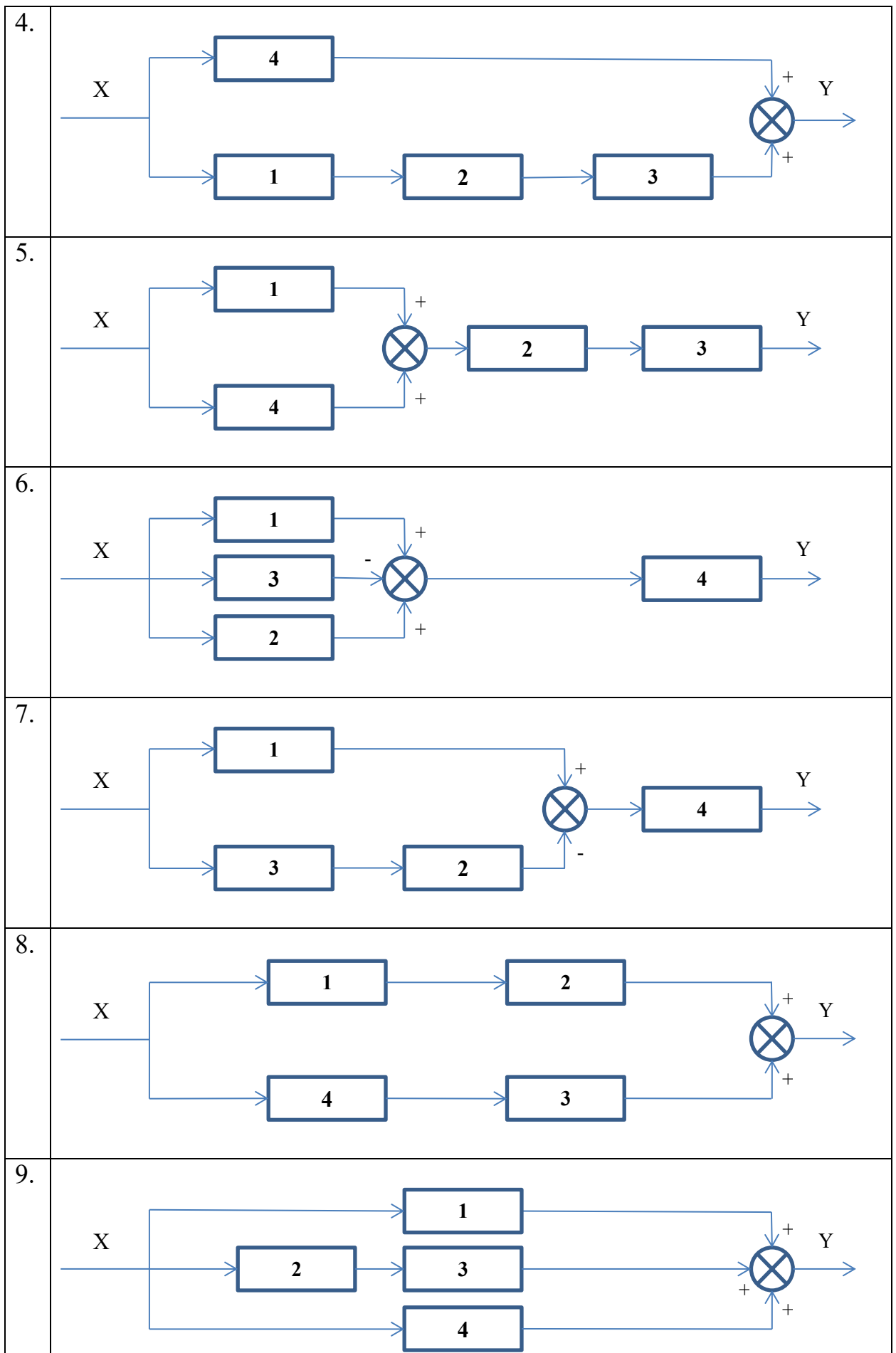
$$K_1 = \frac{n+10}{10}; T_1 = 4n; K_2 = \frac{n}{10}; T_3 = 20n;$$

$$K_4 = \frac{12-n}{20}; T_4 = 20+n;$$

n – коефіцієнт, що може співпадати з номер варіанта чи надаватися окремо.

Варіанти схем





2.5. Приклад виконання роботи

Дослідження перехідної характеристики

Знайдемо передавальні функції для кожної ланки:

Аперіодична ланка $W_1(p) = W_4(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$

Пропорційна ланка $W_2(p) = k_2$

Інтегрувальна ланка $W_3(p) = \frac{1}{T_3 p}$

Розрахуємо необхідні параметри відповідно до номеру варіанта (n=3):

$$k_1 = \frac{n + 10}{10} = \frac{3 + 10}{10} = 1.3$$

$$T_1 = 8n = 8 \cdot 3 = 24$$

$$k_2 = \frac{n}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$T_3 = 20n = 20 \cdot 3 = 60$$

Маємо: $W_1(p) = W_4(p) = \frac{1.3}{24p + 1}$

$$W_2(p) = 0.3$$

$$W_3(p) = \frac{1}{60p}$$

Напишемо функцію передачі всієї системи:

$$\begin{aligned} W(p) &= (W_1(p) + W_2(p) + W_4(p)) \cdot W_3(p) = \\ &= \left(\frac{1.3}{24p + 1} + 0.3 + \frac{1.3}{24p + 1} \right) \cdot \frac{1}{60p} = \frac{7.2p + 2.9}{1440p^2 + 60p} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Знайдемо перехідну функцію:

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[\frac{7.2p + 2.9}{p^2(1440p + 60)} \right] \\ h(t) &= \frac{7.2p + 2.9}{p^2(1440p + 60)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1440p + 60} = \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} 1440Ap^2 + 60Ap + 1440Bp + 60B + Cp^2 = 7.2p + 2.9 \\ \left\{ \begin{array}{l} 1440A + C = 0 \\ 60A + 1440B = 7.2 \\ 60B = 2.9 \\ \left\{ \begin{array}{l} A = -1.04 \\ B = \frac{29}{600} \\ C = 1497.6 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right| \\
 & = \frac{-1.04}{p} + \frac{29}{600p^2} + \frac{1497.6}{1440p + 60} = \frac{-1.04}{p} + \frac{29}{600p^2} + \frac{1497.6}{1440} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{24}} \right) = \\
 & = \frac{-1.04}{p} + \frac{29}{600p^2} + 1.04 \left(\frac{1}{p + \frac{1}{24}} \right) \\
 & h(t) = -1.04 + \frac{29}{600}t + 1.04e^{-\frac{1}{24}t} \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

Побудуємо перехідну характеристику $h(t)$ в MS Excel, графік якої представлений на рис.2.20.

В таблиці 2.2 наведені значення функції $h(t)$, отриманої з рівняння (2.79) в різні моменти часу.

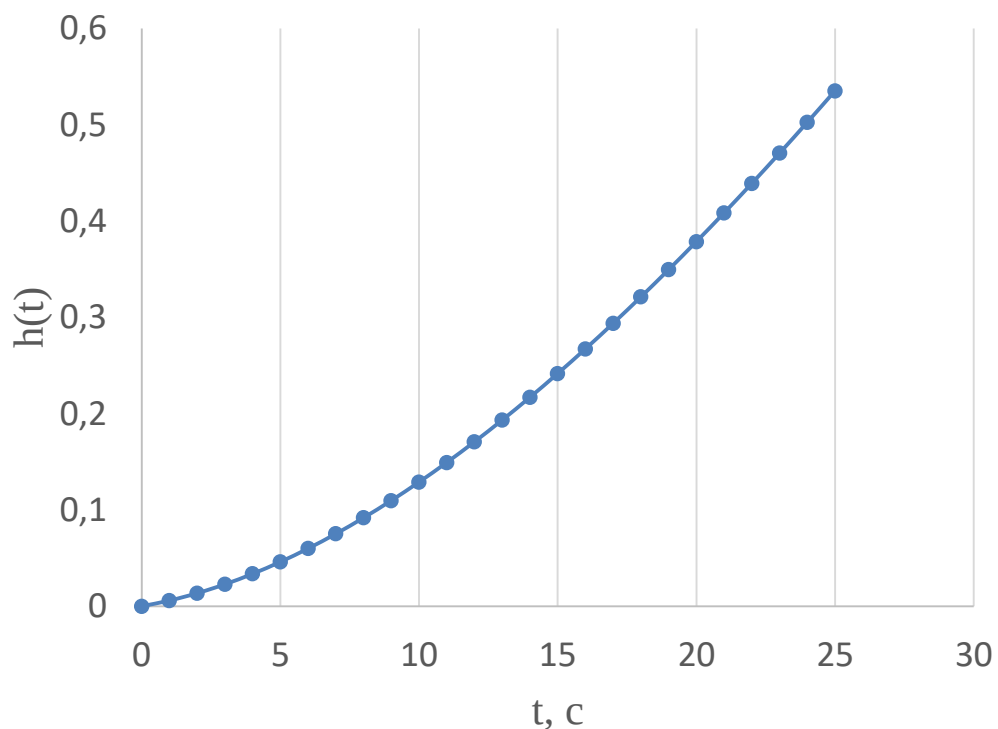


Рисунок 2.20 – Графік перехідної характеристики $h(t)$

Таблиця 2.2 – Значення функції $h(t)$, отриманої з рівняння (2.79)

t	y(t)
0	0
1	0,005890369
2	0,013512858
3	0,022796779
4	0,033674327
5	0,046080467
6	0,059952814
7	0,075231534
8	0,09185923
9	0,10978085
10	0,128943589
11	0,149296795
12	0,170791886
13	0,19338226
14	0,217023218
15	0,241671886
16	0,267287137
17	0,293829526
18	0,321261215
19	0,349545911
20	0,378648804
21	0,4085365
22	0,439176974
23	0,470539502
24	0,502594619
25	0,535314058
26	0,568670709
27	0,602638566
28	0,637192686
29	0,672309144
30	0,707964989

Побудуємо модель заданої структури, що складається з елементарних ланок, в середовищі Matlab за допомогою засобів Simulink та визначимо графік її перехідної характеристики $h(t)$.

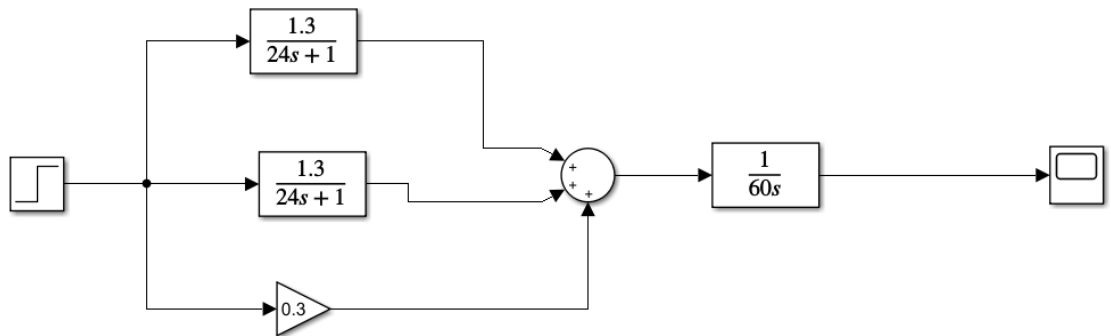


Рисунок 2.21 – Схема структури, створена за допомогою засобів Simulink

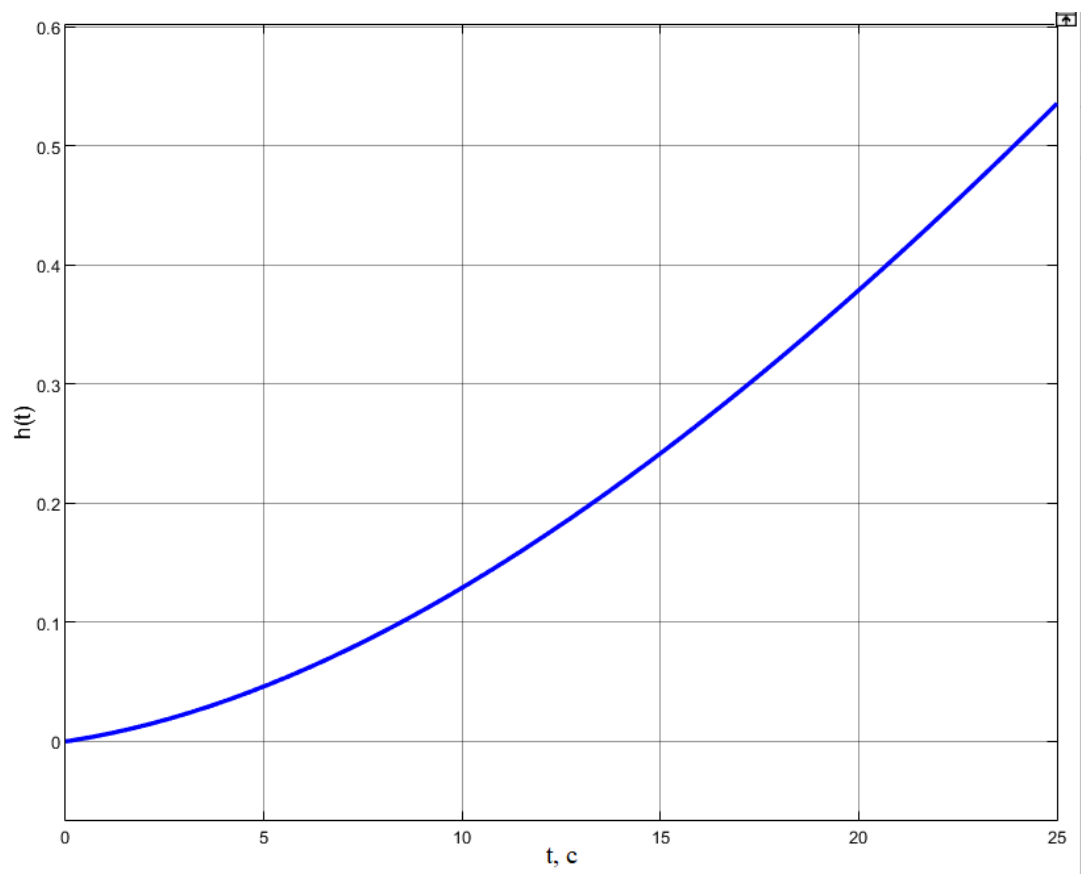


Рисунок 2.22 – Графік перехідної характеристики $h(t)$ у Matlab

Побудова частотних характеристик

Знайдемо частотні характеристики заданої структури:

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= \frac{7.2i\omega+2.9}{i\omega(1440i\omega+60)} = \frac{7.2i\omega+2.9}{-1440\omega^2+60i\omega} = \frac{7.2i\omega+2.9}{60(-24\omega^2+i\omega)} = \\ &= \frac{(7.2i\omega+2.9)(-24\omega^2-i\omega)}{60(-24\omega^2+i\omega)(-24\omega^2-i\omega)} = \frac{-172.8i\omega^3+7.2\omega^2-69.6\omega^2-2.9i\omega}{60(576\omega^4+\omega^2)} = \\ &= \frac{-172.8i\omega^3-62.4\omega^2-2.9i\omega}{60(576\omega^4+\omega^2)} = \frac{-62.4\omega^2}{60(576\omega^4+\omega^2)} + i \left(\frac{-172.8\omega^3-2.9\omega}{60(576\omega^4+\omega^2)} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$Re(\omega) = \frac{-62.4\omega^2}{60(576\omega^4+\omega^2)} \quad (2.81)$$

$$Im(\omega) = \frac{-172.8\omega^3-2.9\omega}{60(576\omega^4+\omega^2)} \quad (2.82)$$

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \quad (2.83)$$

де A - амплітуда

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right) \quad (2.84)$$

де $\varphi(\omega)$ - кут повороту

Побудуємо частотні характеристики в MS Excel.

В таблиці 2.3 наведені залежності дійсної, уявної, амплітудної величини, кута повороту від значення параметра ω для функції передачі системи.

На рис.2.23 – 2.26 наведені АФЧХ, АЧХ, ФЧХ відповідно для заданого процесу.

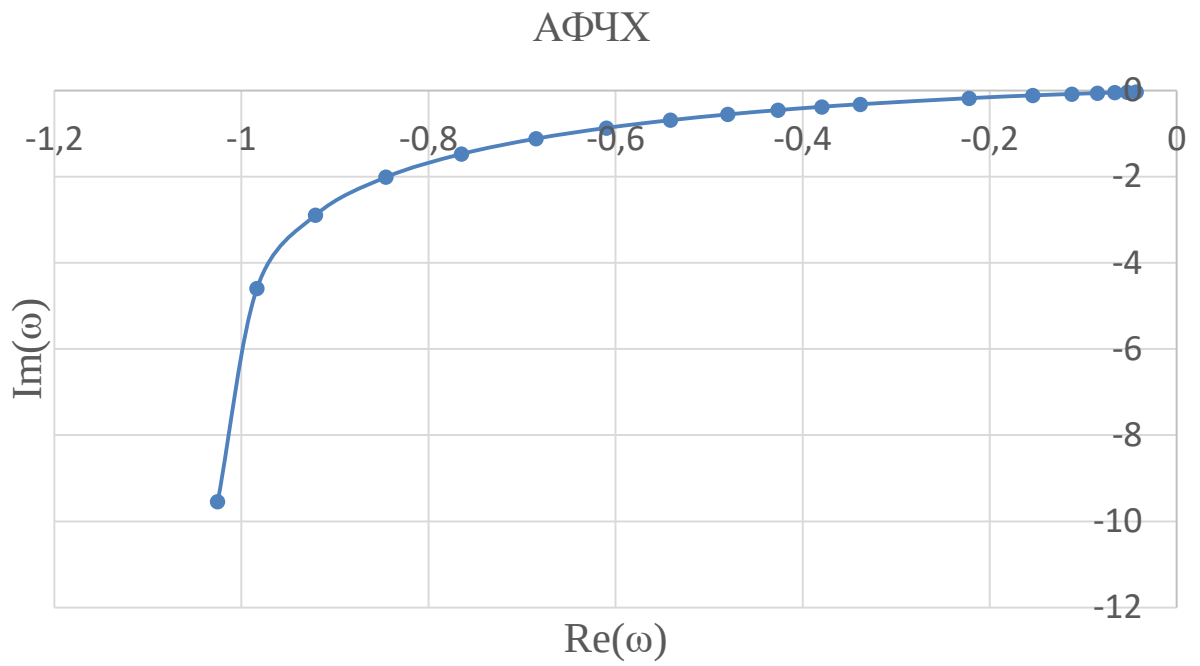


Рисунок 2.23 – Годограф амплітудно-фазово частотної характеристики

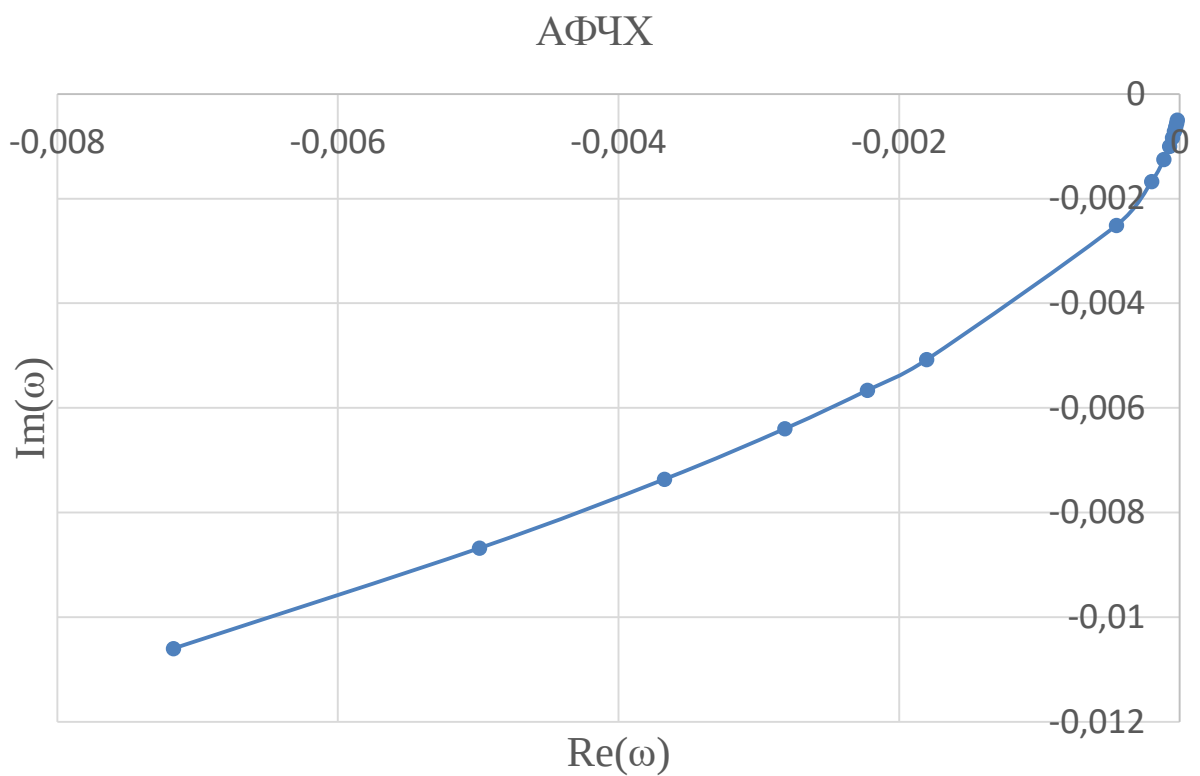


Рис.2.24 – Годограф амплітудно-фазово частотної характеристики
($\omega = (0.5 \div 10)$)

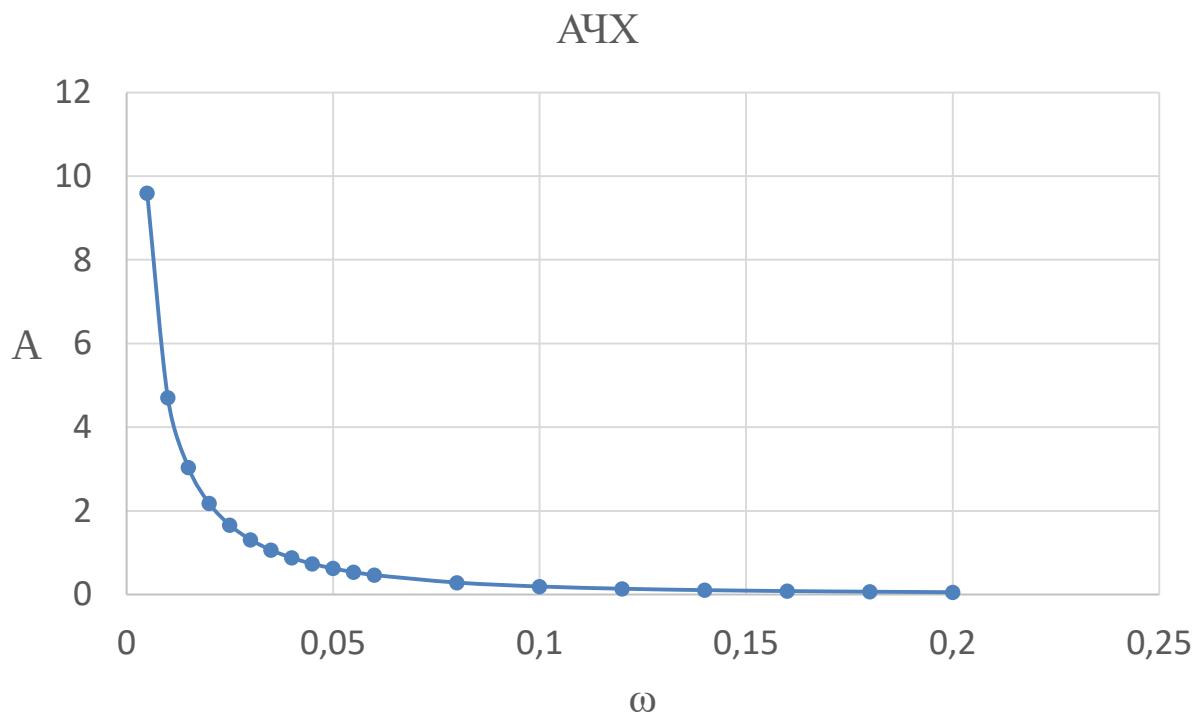


Рисунок 2.25 – Амплітудно-частотна характеристика

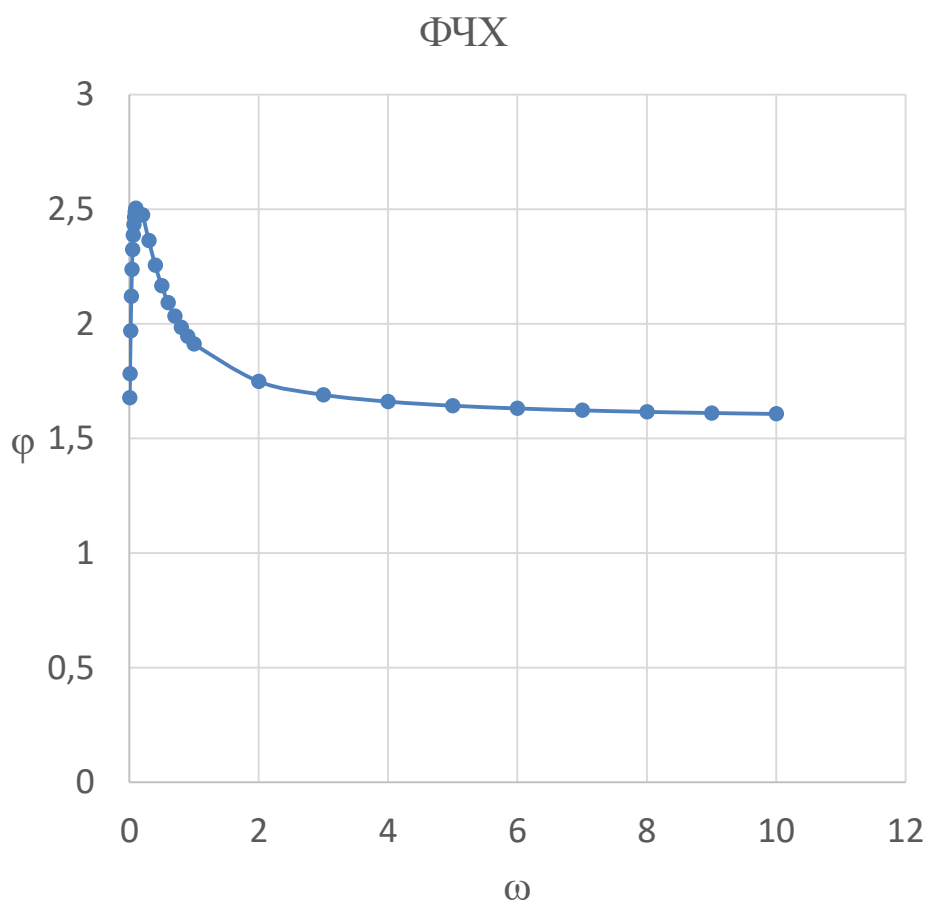


Рисунок 2.26 – Фазочастотна характеристика

Таблиця 2.3 – Залежності дійсної, уявної, амплітудної величини, кута повороту від частоти ω .

ω	Re	Im	A	φ
0,005	-1,025236593	-9,543638275	9,598548932	1,677812097
0,01	-0,983358548	-4,597327282	4,701320258	1,781518821
0,015	-0,920679887	-2,890777463	3,033849995	1,879127731
0,02	-0,845253576	-2,01094495	2,181364986	1,96870188
0,025	-0,764705882	-1,474509804	1,661010009	2,049226386
0,03	-0,684931507	-1,117960426	1,311093697	2,1204739
0,035	-0,609756098	-0,868757259	1,061386675	2,182777333
0,04	-0,541215654	-0,688766306	0,875964273	2,23680338
0,045	-0,480059084	-0,555610263	0,734274805	2,283374349
0,05	-0,426229508	-0,455191257	0,62359496	2,323348279
0,055	-0,379229872	-0,378204448	0,535587435	2,357548301
0,06	-0,338365435	-0,31830933	0,464555698	2,386726914
0,08	-0,221918744	-0,178082679	0,284537114	2,465348675
0,1	-0,153846154	-0,114102564	0,191541208	2,503446246
0,12	-0,111895335	-0,080519213	0,137854669	2,517837028
0,14	-0,084624398	-0,060900118	0,104259835	2,517798817
0,16	-0,066050198	-0,048450572	0,081915119	2,508708355
0,18	-0,052892831	-0,040021489	0,066327755	2,493847572
0,2	-0,043261231	-0,034012757	0,055030916	2,475312079
0,22	-0,036013076	-0,029547931	0,046583493	2,45448934
0,24	-0,030429287	-0,026116196	0,04009984	2,432323574
0,26	-0,026040623	-0,023403946	0,035012266	2,409469953
0,28	-0,02253111	-0,021209987	0,030943731	2,386388569
0,3	-0,019682059	-0,019400286	0,027636109	2,363404093
0,32	-0,017338419	-0,017882607	0,024907999	2,340745079
0,34	-0,015387893	-0,016591654	0,022628969	2,318570684

Продовження таблиці 2.3

0,36	-0,013747594	-0,015480046	0,020703337	2,296989342
0,38	-0,0123553	-0,014512643	0,01905965	2,276072102
0,4	-0,01116359	-0,013662874	0,017643692	2,255862344
0,42	-0,01013582	-0,0129103	0,016413735	2,236382946
0,44	-0,009243327	-0,012238951	0,015337243	2,217641639
0,46	-0,008463431	-0,01163618	0,01438855	2,199635039
0,48	-0,007778004	-0,011091841	0,013547187	2,182351694
0,5	-0,007172414	-0,010597701	0,012796671	2,165774403
0,6	-0,004991361	-0,008679956	0,010012758	2,09266408
0,7	-0,003671798	-0,007361417	0,008226333	2,033475121
0,8	-0,002813548	-0,006396539	0,006987973	1,985181539
0,9	-0,002224313	-0,005658533	0,006080014	1,945331759
1	-0,001802426	-0,005075101	0,005385665	1,912052465
1,2	-0,001252348	-0,004210151	0,004392465	1,859920488
1,4	-0,000920387	-0,003598821	0,00371465	1,821176282
1,6	-0,000704817	-0,003143355	0,003221404	1,791372526
1,8	-0,000556972	-0,002790671	0,002845709	1,767791364
2	-0,000451193	-0,0025094	0,00254964	1,748696679
3	-0,000200579	-0,001669452	0,001681459	1,690369505
4	-0,000112835	-0,001251175	0,001256253	1,660736211
5	-7,22172E-05	-0,001000602	0,001003205	1,64284517
6	-5,01519E-05	-0,000833682	0,000835189	1,630881058
7	-3,68468E-05	-0,000714505	0,000715454	1,622320323
8	-2,8211E-05	-0,000625147	0,000625783	1,615892787
9	-2,22903E-05	-0,000555659	0,000556106	1,610889975
10	-1,80552E-05	-0,000500075	0,000500401	1,606885702

Побудуємо частотні характеристики в Matlab.

Вихідний код

```
w = 0.005:0.001:5;
p = 1i*w;
W1 = 1.3./(24.*p+1);
W2 = 0.3;
W3 = 1./(60.*p);
W4 = 1.3./(24.*p+1);
W = (W1+W4+W2).*W3;
Re = real(W);
Im = imag(W);
A = sqrt(Re.^2 + Im.^2);
if Re>0
    phi=atan(abs(Im./Re));
else
    phi = pi - atan(abs(Im./Re));
end
plot (Re, Im);
title('AΦX');
xlabel('Re(ω)');
ylabel('Im(ω) ');
grid on;
set(gcf, 'Name', 'AΦX', 'NumberTitle', 'off')
figure('Name', 'AϕX', 'NumberTitle', 'off');
plot (w,A);
title('AϕX');
xlabel('ω');
ylabel('A');
grid on;
figure('Name', 'ΦϕX', 'NumberTitle', 'off');
plot (w,phi);
title('ΦϕX');
xlabel('ω');
ylabel('φ');
grid on;
```

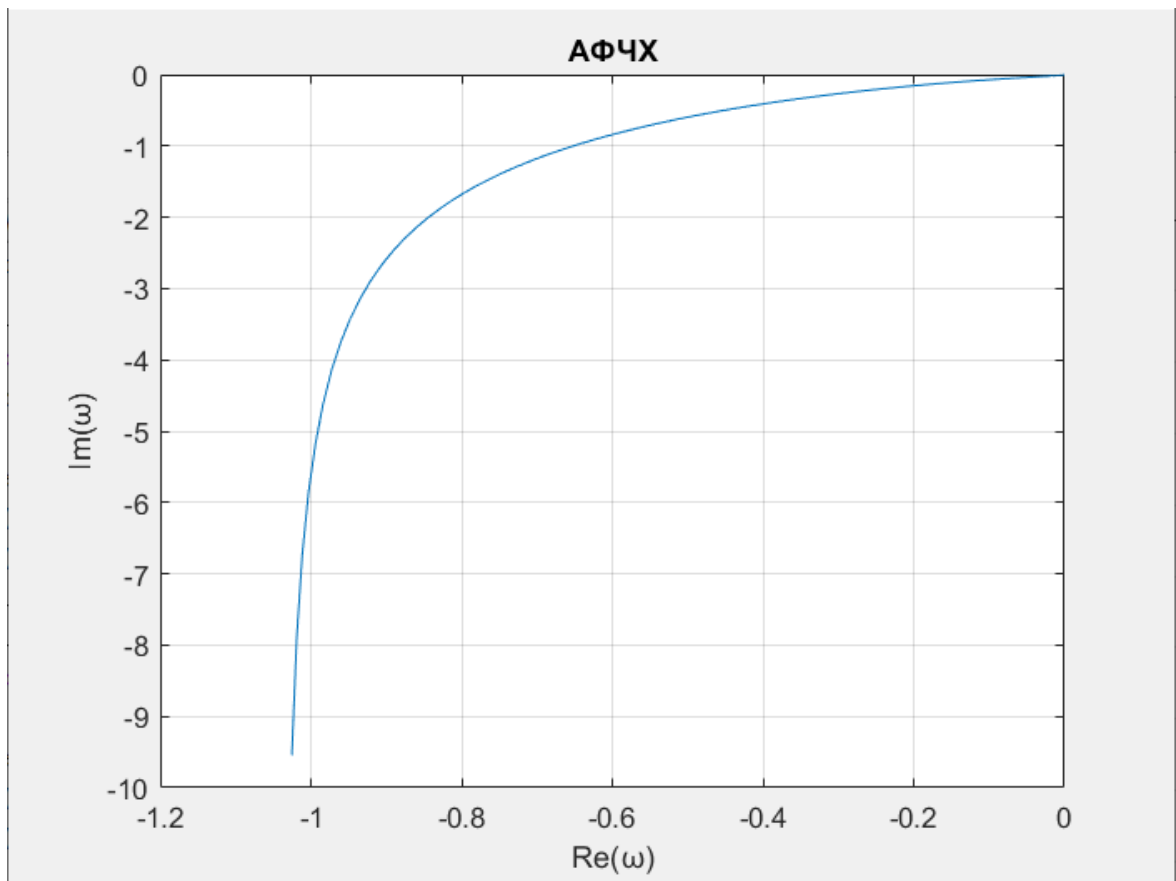


Рисунок 2.27 – Годограф АФЧХ побудований в Matlab

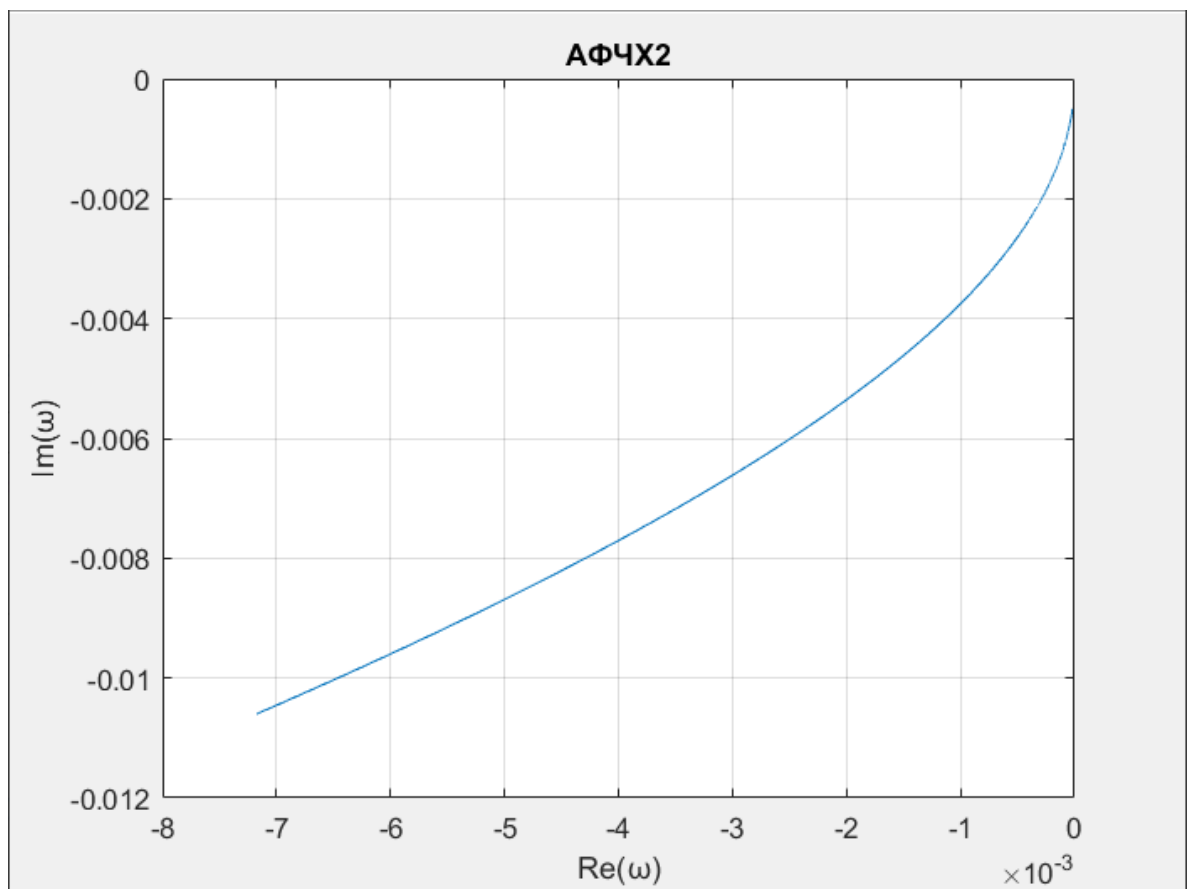


Рисунок 2.28 – Годограф АФЧХ побудований в Matlab ($\omega = (0.5 \div 10)$)

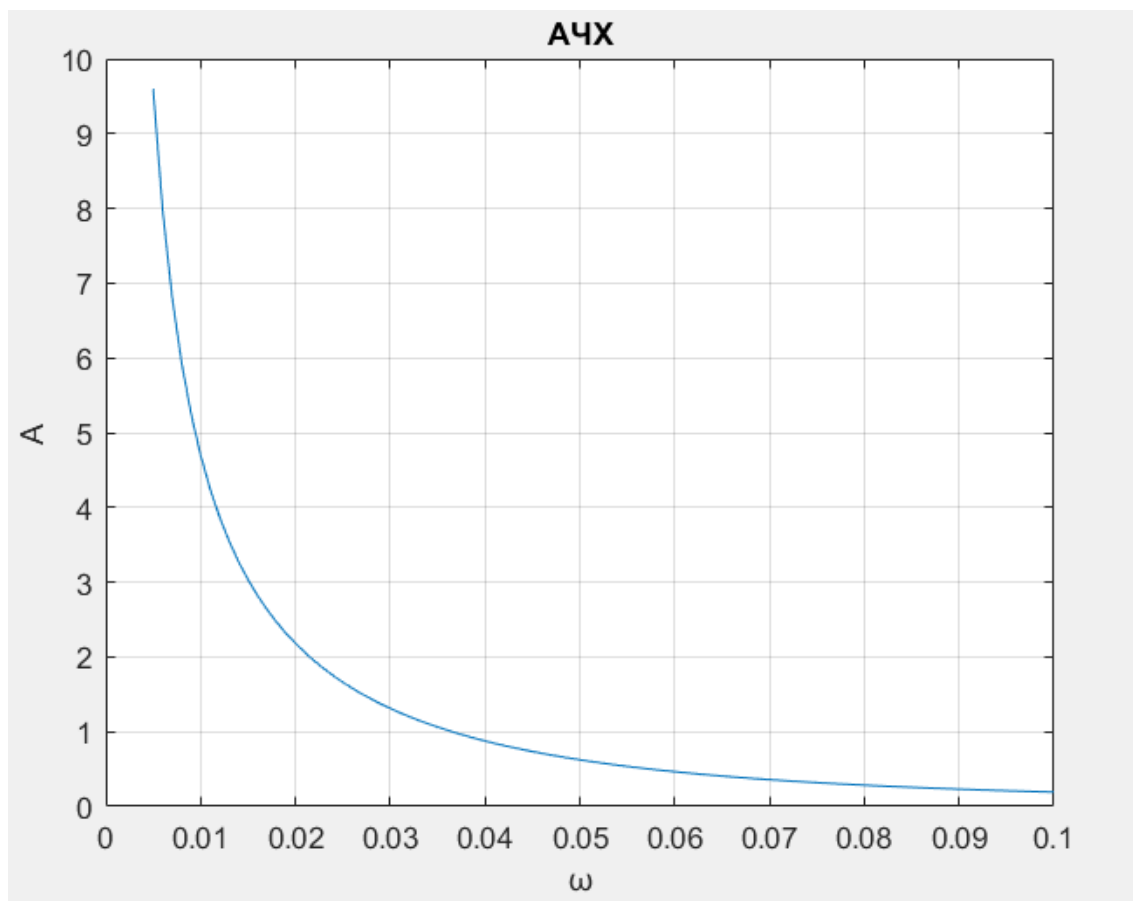


Рисунок 2.29 – Амплітудно-частотна характеристика в Matlab

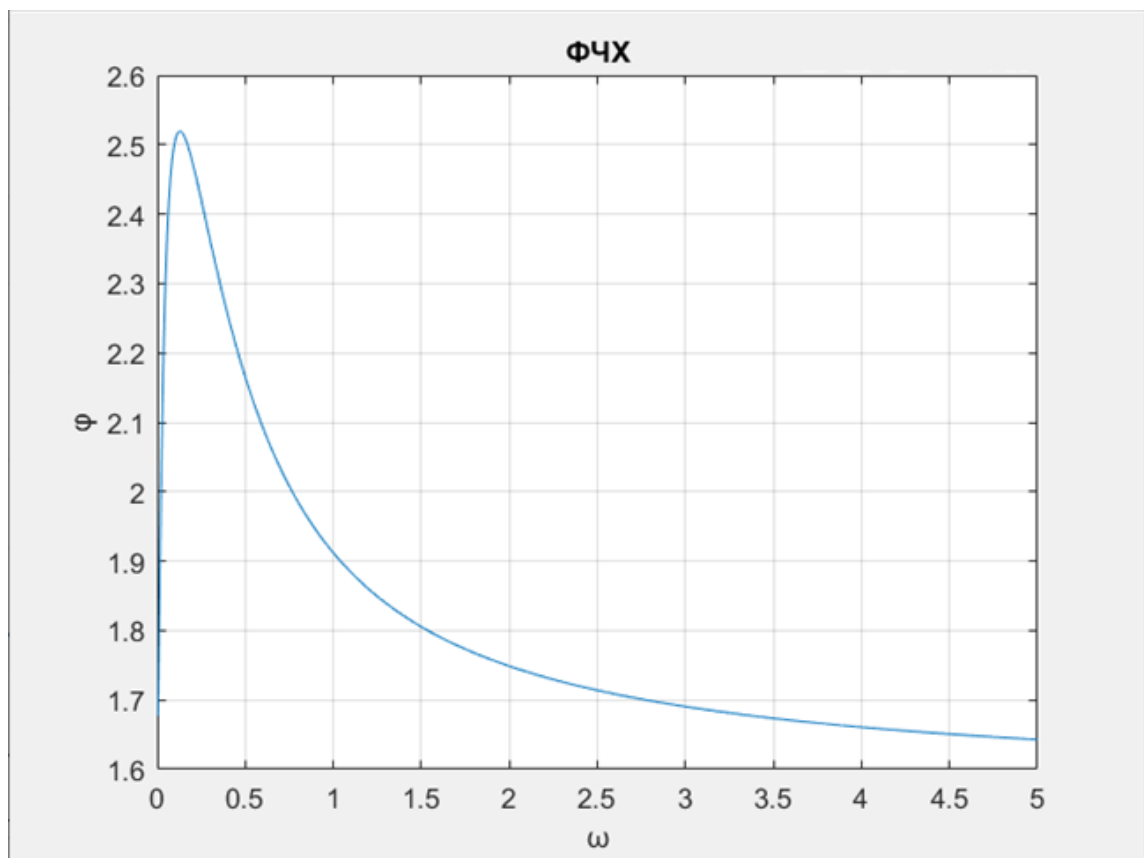


Рисунок 2.30 – Фазочастотна характеристика в Matlab

Вплив числових параметрів зазначеної типової ланки на вид перехідного процесу

Дослідимо ланку №3 даної структури, для цього змінимо параметр T передавальної функції.

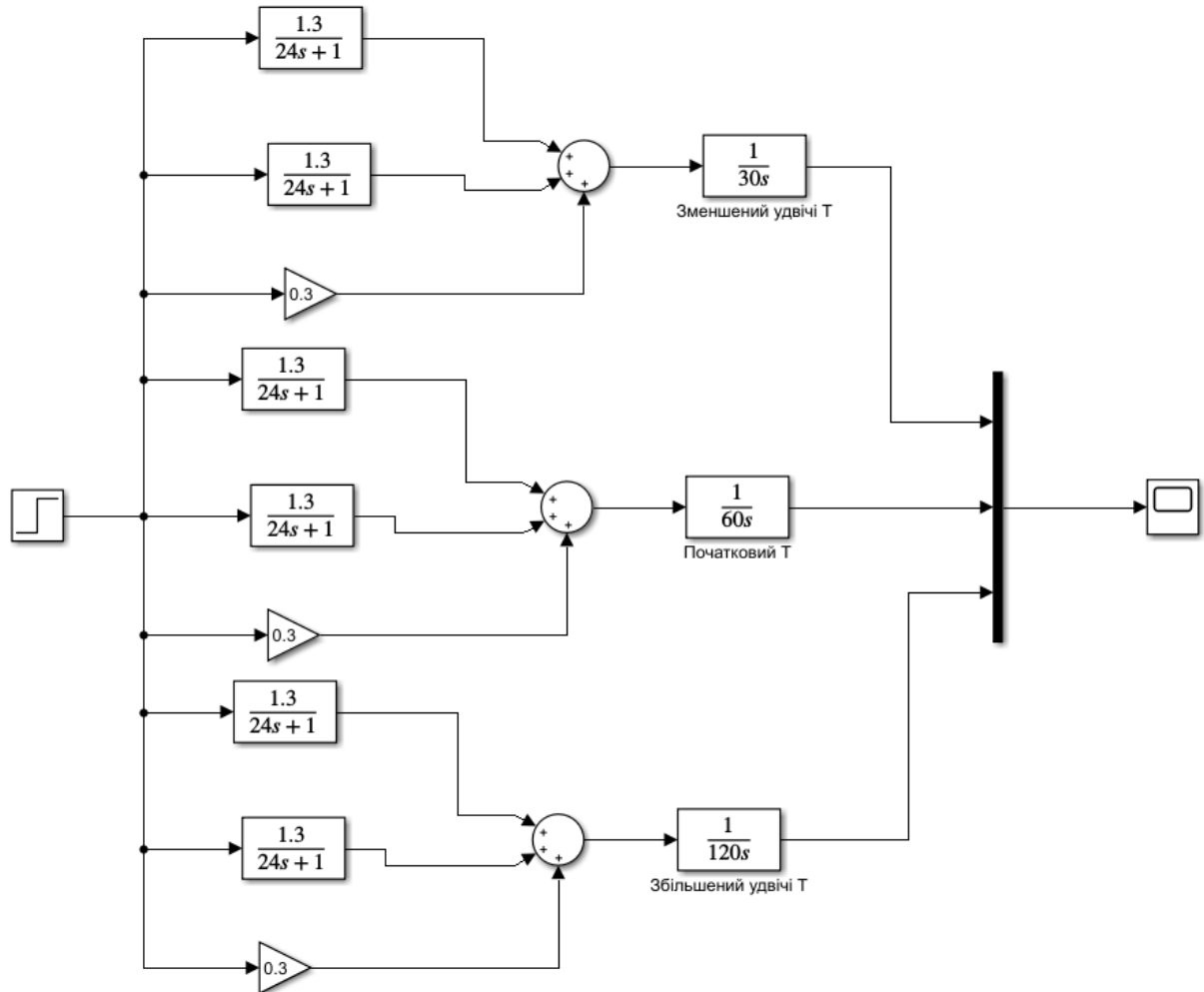


Рисунок 2.31 – Схема для дослідження впливу параметрів на перехідну характеристику

На рис.2.32 показано вплив зміни параметра T на перехідну характеристику побудованої системи.

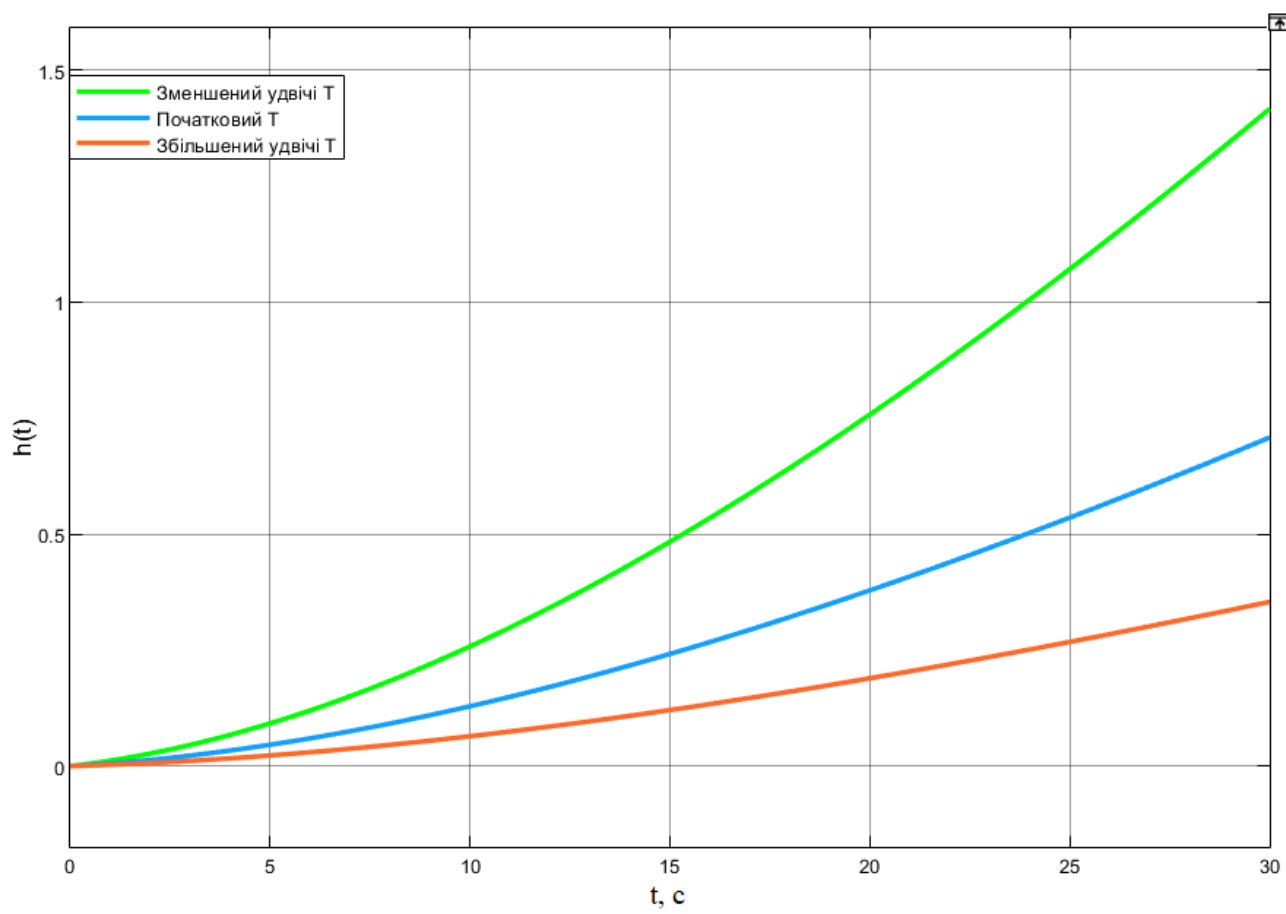


Рисунок 2.32 – Вплив зміни параметра T на перехідну характеристику

2.6. Контрольні запитання

1. Підсилювальна ланка. Характеристики та властивості.
2. Ланка транспортної затримки. Характеристики та властивості.
3. Інтегруюча ланка. Характеристики та властивості.
4. Диференціювальна ланка. Характеристики та властивості.
5. Аперіодична ланка I – го порядку. Характеристики та властивості.
6. Реально-диференціювальна ланка. Характеристики та властивості.
7. Інтегро-диференціювальна ланка. Характеристики та властивості.
8. Аперіодична ланка II – го порядку. Характеристики та властивості.
9. Коливальна ланка. Характеристики та властивості.
10. Консервативна ланка. Характеристики та властивості.

3. Лабораторна робота №3

Зворотній зв'язок. Перетворення структурних схем

3.1. Мета роботи

Закріпити знання стосовно з'єднання ланок: послідовного, паралельного та зустрічно-паралельного. Навчитися перетворювати структурні схеми шляхом переносів вузлів та суматорів відносно ланок. Дослідити властивості структури охопленої зворотнім зв'язком.

3.2. Завдання

- У відповідності до варіанту обрати структуру з'єднання ланок та їх коефіцієнти.
- Визначити передавальну функцію отриманої структури.
- Побудувати перехідну характеристику заданої структури у середовищі Matlab Simulink та за можливістю визначити аналітичний розв'язок перехідної характеристики.
- Отримати частотні характеристики заданої структури і охарактеризувати її, навести таблиці та графіки.
- Змінюючи числові параметри зворотного зв'язку досягти стійкого перехідного процесу.
- Зробити висновки про вплив коефіцієнтів прямого та зворотного зв'язку на властивості отриманої структури та вигляд перехідного процесу.

3.3. Теоретичні відомості

Структурні схеми систем автоматичного управління

Систему автоматичного управління можна розглядати як комбінацію динамічних ланок (типових і нетипових). Кожна ланка має певний математичний опис, виражений найчастіше у вигляді передавальних функцій $W(s)$. Знаючи математичний опис ланок і зв'язки між ними, завжди можна отримати математичний опис всієї системи в цілому. Для представлення системи управління за допомогою динамічних ланок використовують структурні схеми.

Структурною схемою називається зображення системи управління у вигляді сукупності типових і нетипових динамічних ланок із зазначеними зв'язками між ними.

Основними елементами структурних схем є:

1. *Динамічна ланка* [2, 3]. Ланка в структурній схемі виступає як елементарна структурна одиниця, перетворювач інформації (сигналу). У полі ланки вказується її математичний опис (передавальна функція $W(s)$).

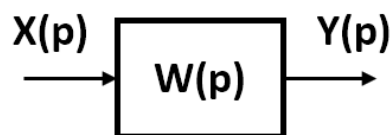


Рисунок 3.1 – Динамічна ланка

Як правило, ланка має один вхід і один вихід, проте допускається також використання в структурних схемах ланок з кількома входами і одним виходом. Тоді біля кожного входу вказується своя передавальна функція. Вихідний сигнал в цьому випадку буде визначатися виразом:

$$Y(p) = W_1(p)X_1(p) + W_2(p)X_2(p) + \dots + W_n(p)X_n(p) \quad (3.1)$$

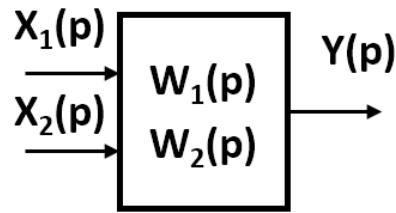


Рисунок 3.2 – Ланка з кількома входами й одним виходом

2. *Лінія передачі сигналу (лінія зв'язку)* [2, 3]. Встановлює зв'язок між ланками. Стрілка вказує напрямок передачі сигналу.

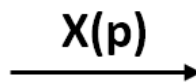


Рисунок 3.3 – Лінія передачі сигналу

3. *Розгалуження (вузол)* [2, 3]. Використовується, коли один і той же сигнал надходить на різні ланки системи управління.

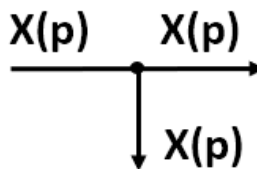


Рисунок 3.4 – Розгалуження (вузол)

4. *Суматор* [2, 3]. Використовується, коли сигнали перетворюються в новий сигнал, який дорівнює сумі вхідних. Оскільки сигнали в одній системі управління можуть мати різну фізичну природу, то слід особливо відзначити: сигнали, що додаються, повинні мати однакову розмірність (не можна, наприклад, додавати електричну напругу до струму).

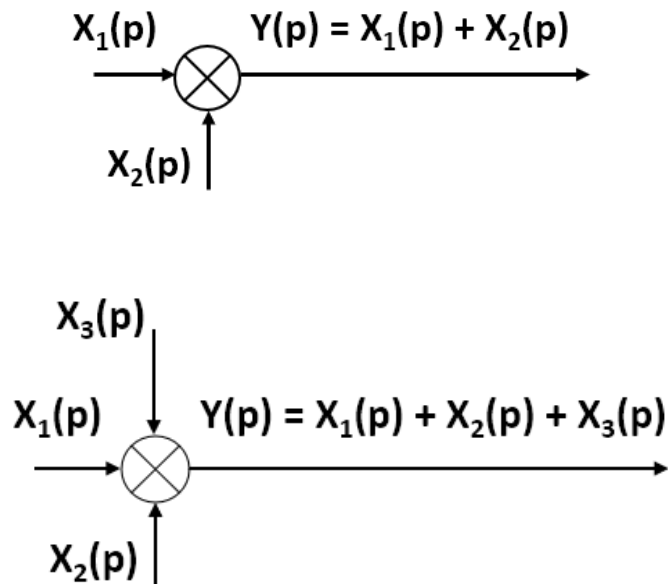


Рисунок 3.5 – Суматори

5. *Елемент порівняння* [2, 3]. Формує сигнал, рівний різниці вхідних сигналів. Елемент порівняння можна розглядати як суматор з інвертованим входом. Зустрічається два варіанти позначення від'ємного сигналу, що надходить на вхід елемента порівняння: 1) сектор, що відповідає входу від'ємного сигналу, виділяється кольором; 2) вхід від'ємного сигналу позначається знаком мінус.

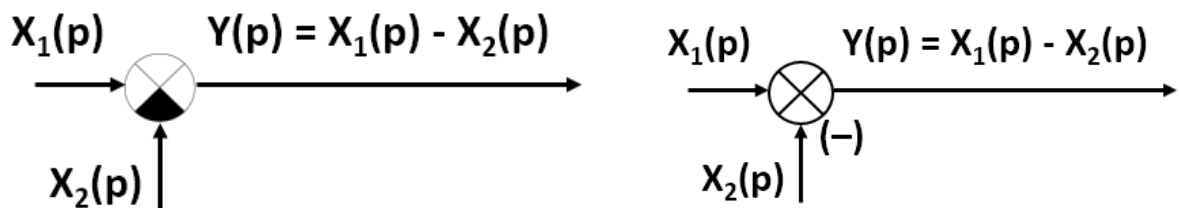


Рисунок 3.6 – Елемент порівняння з 1) кольоровим позначення; 2) знаком мінус

Перетворення структурних схем

При розрахунках систем автоматичного управління може виникати необхідність у перетворенні структурної схеми для приведення її до простішого виду або до виду, більш зручного для вирішення деякої конкретної задачі. Початкова і перетворена структурні схеми повинні бути еквівалентними, тобто однаково відображати динамічні властивості системи управління. Будь-яка структурна схема включає в себе послідовно і паралельно з'єднані ланки, а також елементи, з'єднані зворотнім зв'язком. Ланки, з'єднані подібним чином, можна замінити на одну ланку, яка має еквівалентну передавальну функцію.

Послідовне з'єднання ланок

Послідовним називається таке з'єднання ланок, при якому вихідна величина однієї ланки подається на вхід наступної ланки [2, 3].

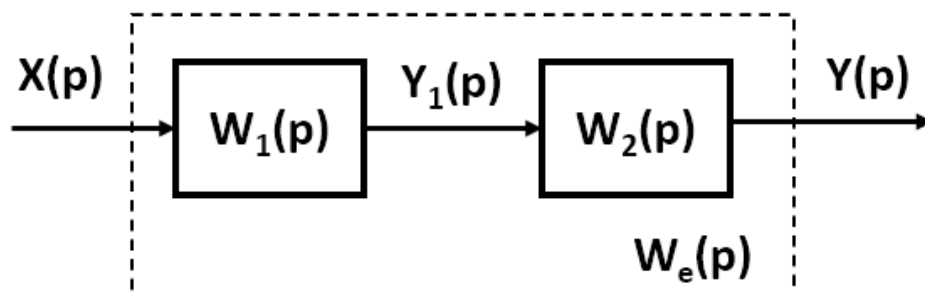


Рисунок 3.7 – Послідовне з'єднання ланок

Для цього з'єднання справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= W_1(p) \cdot X(p) \\ Y(p) &= W_2(p) \cdot Y_1(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X(p) = W_e(p) \cdot X(p) \quad (3.2) \\ W_e(p) &= W_1(p) \cdot W_2(p) \end{aligned}$$

Для випадку послідовного з'єднання n ланок маємо:

$$W_e(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p) \quad (3.3)$$

Іншими словами, еквівалентна передавальна функція послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку функцій передачі окремих ланок. Таким чином, паралельні ланки у структурній схемі можна замінити однією ланкою з передавальною функцією (3.3).

Паралельне з'єднання ланок

Паралельним називається таке з'єднання ланок, при якому на вхід всіх ланок подається один і той же сигнал, а вихідні сигнали від всіх ланок сумуються [2, 3].

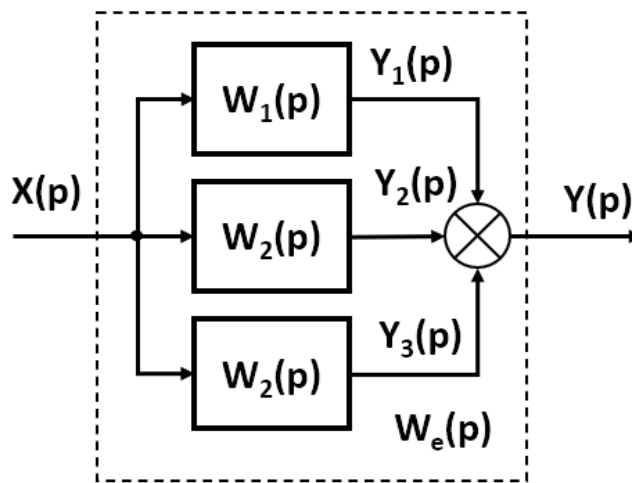


Рисунок 3.8 – Паралельне з'єднання ланок

Для цього з'єднання справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 Y(p) &= Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) = W_1(p) \cdot X(p) + W_2 \cdot X(p) + W_3(p) \cdot X(p) = \\
 &= [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)] \cdot X(p) = W_e(p) \cdot X(p) \\
 W_e(p) &= W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для випадку паралельного з'єднання n ланок маємо:

$$W_e(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p) \tag{3.5}$$

Іншими словами, еквівалентна передавальна функція паралельно з'єднаних ланок дорівнює сумі функцій передачі окремих ланок. Таким чином, з'єднання паралельних ланок у структурній схемі можна замінити однією ланкою з передавальною функцією (3.3.5).

З'єднання ланок зі зворотним зв'язком

З'єднання зі зворотним зв'язком має пряму лінію передачі сигналу і лінію зворотного зв'язку. Зворотний зв'язок може бути додатний і від'ємний. При від'ємному зворотному зв'язку на вхід прямої лінії подається різниця між вхідним сигналом $x(t)$ і вихідним сигналом лінії зворотного зв'язку. При додатному зворотному зв'язку ці величини складаються [2, 3].

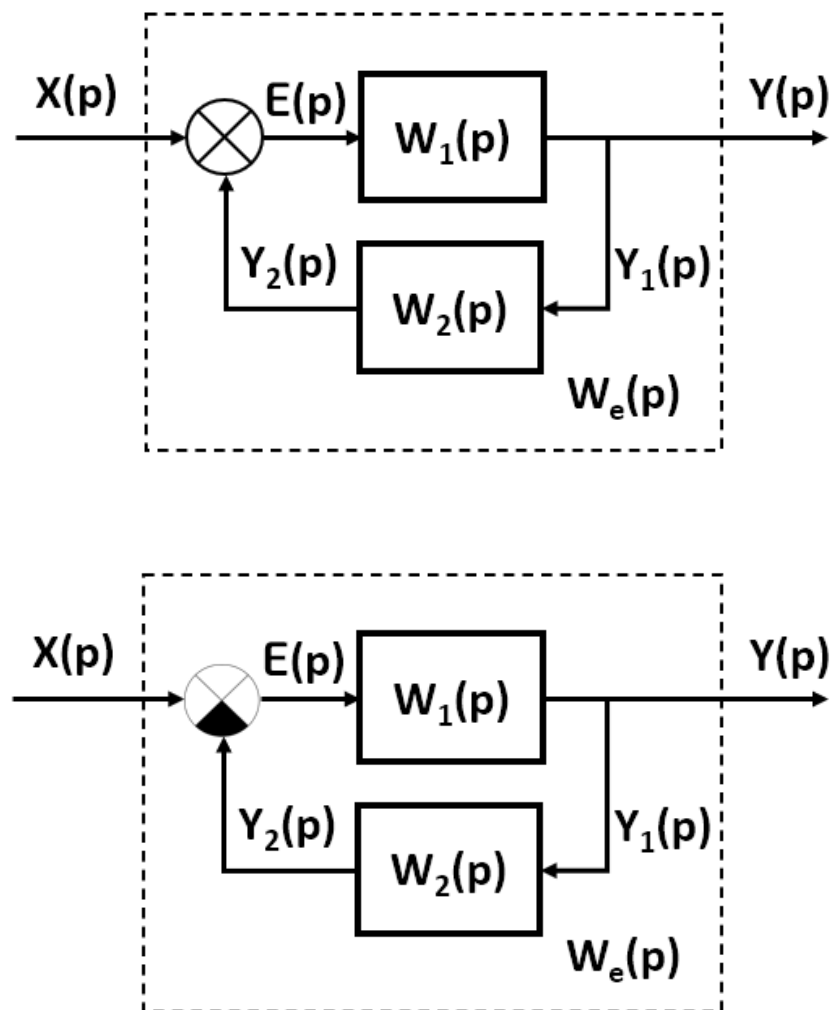


Рисунок 3.9 – З'єднання ланок зі зворотним зв'язком

Для з'єднання з від'ємним зворотним зв'язком справедливі наступні співвідношення:

$$Y(p) = W_1(p) \cdot E(p) = W_1(p) \cdot [X(p) - Y_2(p)]$$

$$Y_2(p) = W_2(p) \cdot Y(p)$$

$$Y(p) = W_1(p) \cdot X(p) - W_1(p) \cdot Y_2(p) = W_1(p) \cdot X(p) - W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot Y(p)$$

$$Y(p) + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot Y(p) = Y(p) \cdot [1 + W_1(p) \cdot W_2(p)] = W_1(p) \cdot X(p)$$

$$Y(p) = \frac{W_1(p)}{[1 + W_1(p) \cdot W_2(p)] \cdot X(p)} \quad (3.6)$$

У підсумку отримуємо такий вираз для еквівалентної (результуючої) передавальної функції:

$$W_e(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (3.7)$$

Для випадку з'єднання з додатним зворотним зв'язком отримали аналогічний вираз для еквівалентної передавальної функції, тільки при цьому знак плюс в знаменнику змінюється на знак мінус:

$$W_e(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (3.8)$$

Окремим випадком з'єднання зі зворотним зв'язком є ситуація, коли вихідний сигнал від прямої лінії передається без зміни на елемент порівняння або суматор. Такі зворотні зв'язки називаються одиничними, тому що у них передатвальна функція у зворотній лінії дорівнює одиниці ($W_2(p) = 1$). Тоді еквівалентні функції передачі для від'ємного і додатного зворотних зв'язків спрощуються і приймають такий вигляд:

$$W_e(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)} \quad (3.9)$$

$$W_e(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)} \quad (3.10)$$

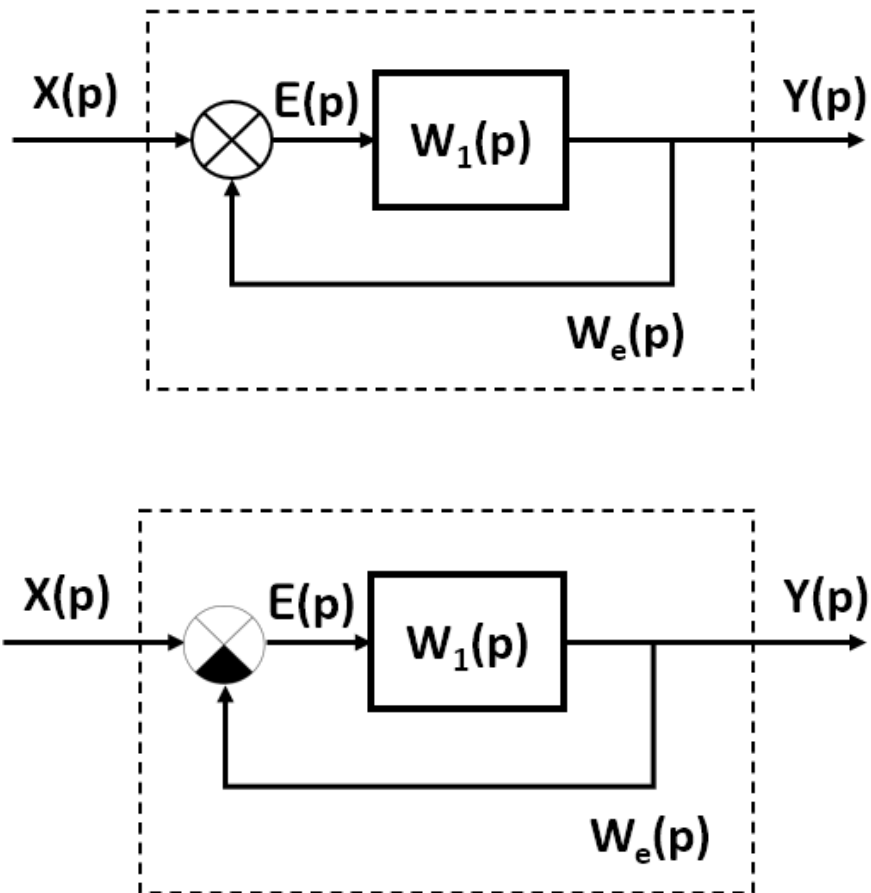


Рисунок 3.10 – З'єднання ланок з одиничним зворотним зв'язком

Правила перетворення структурних схем

У тих випадках, коли структурна схема виявляється занадто складною, наприклад, містить перехресні зв'язки, її спрощують, користуючись правилами перетворення структурних схем. Сенс цих правил полягає в перенесенні елементів структурної схеми з одного положення в інше, так щоб при цьому зберігалася еквівалентність структурних схем.

1. Перенесення вузла через ланку

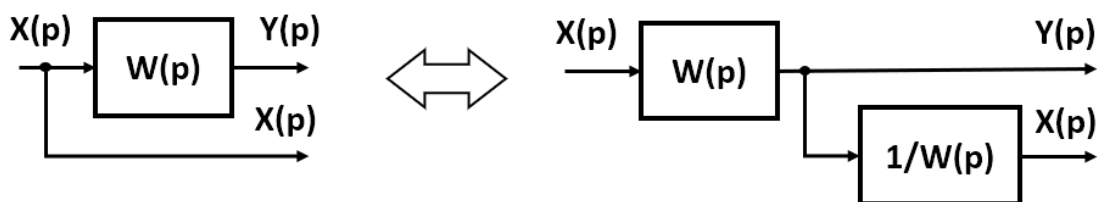


Рисунок 3.11 – Перетворення схеми при перенесенні вузла через ланку

Щоб перенести вузол через ланку з передавальною функцією $W(p)$, необхідно включити в лінію, що не проходить через ланку (вихід 2), додатковий елемент - ланку з функцією передачі $\frac{1}{W(p)}$. Переконаємося, що ці схеми еквівалентні. Дійсно, сигнал $y(t)$ після такого перенесення не зміниться, а сигнал на виході 2 буде дорівнювати: $X(p) \cdot W(p) \cdot \frac{1}{W(p)} = X(p)$, тобто він збігається з вихідним сигналом $X(p)$ [2, 3].

2. Перенесення ланки через вузол

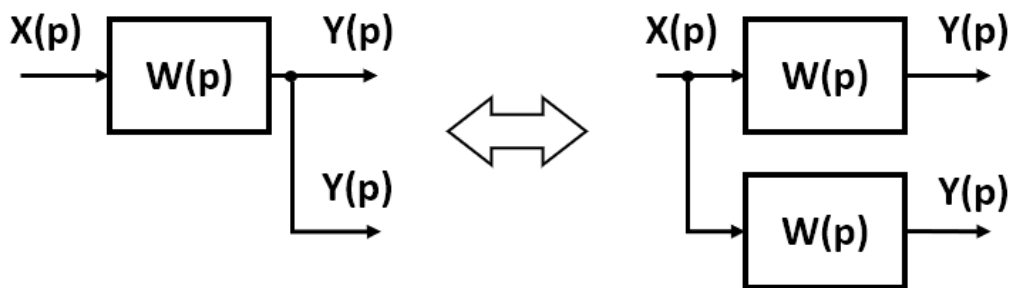


Рисунок 3.12 – Перетворення схеми при перенесенні ланки через вузол

Щоб перенести ланку з передавальною функцією $W(p)$ через вузол, необхідно включити в обидві лінії ланки з функцією передачі $W(p)$. Легко переконатися, що еквівалентність структурних схем при цьому зберігається [2, 3].

3. Перенесення суматора через ланку

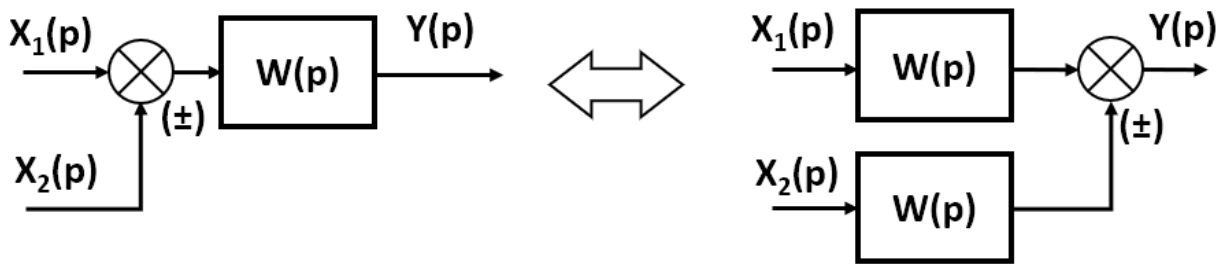


Рисунок 3.13 – Перетворення схеми при перенесенні суматора через ланку

Відразу відзначимо, що дане правило перетворення структурних схем застосовується як до суматора, так і до елементів порівняння, тому що елемент порівняння можна розглядати як суматор з інвертованим входом.

Щоб перенести суматор через ланку з передавальною функцією $W(p)$, необхідно до обох входів на суматор додати додатковий елемент - ланку з функцією передачі $W(p)$. Переконаємося, що ці схеми еквівалентні. Вихідний сигнал на початковій схемі дорівнює: $Y(p) = W(p) \cdot [X_1(p) \pm X_2(p)]$; вихідний сигнал на перетвореній схемі дорівнює: $Y(p) = W(p) \cdot X_1(p) \pm W(p) \cdot X_2(p)$, тобто вихідні сигнали збігаються [2, 3].

4. Перенесення ланки через суматор

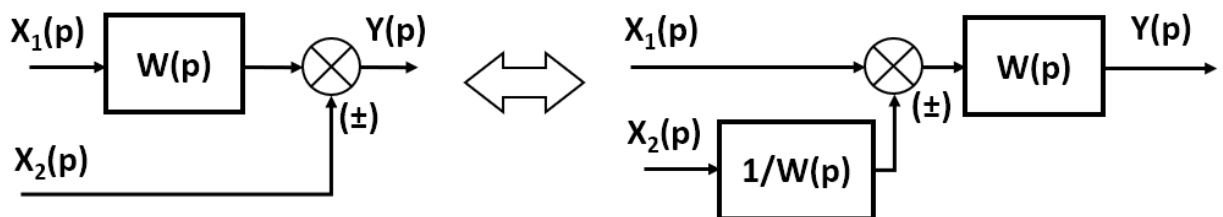


Рисунок 3.14 – Перетворення схеми при перенесенні ланки через суматор

Це правило перетворення структурних схем також застосовується як до суматора, так і до елементів порівняння. Щоб перенести ланку з передавальною функцією $W(p)$ через суматор, необхідно в лінію без ланки (вхід 2) включити додатковий елемент - ланку з функцією передачі $\frac{1}{W(p)}$.

Переконаємося, що ці схеми еквівалентні. Вихідний сигнал на початковій схемі дорівнює: $Y(p) = W(p) \cdot X_1(p) \pm X_2(p)$; вихідний сигнал на перетвореній схемі дорівнює: $Y(p) = W(p) \cdot \left[X_1(p) \pm \frac{1}{W(p)} \cdot X_2(p) \right] = W(p) \cdot X_1(p) \pm X_2(p)$, тобто вихідні сигнали збігаються [2, 3].

5. Перенесення вузла через суматор.

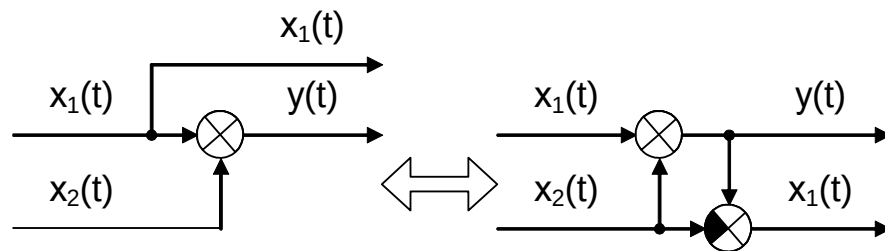


Рисунок 3.15 – Перетворення схеми при перенесенні вузла через суматор

Щоб перенести вузол через суматор, необхідно в схему включити додатковий елемент - елемент порівняння. Ці схеми еквівалентні, тому що вихідні сигнали збігаються: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ і $x_1(t) = y(t) - x_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_2(t)$.

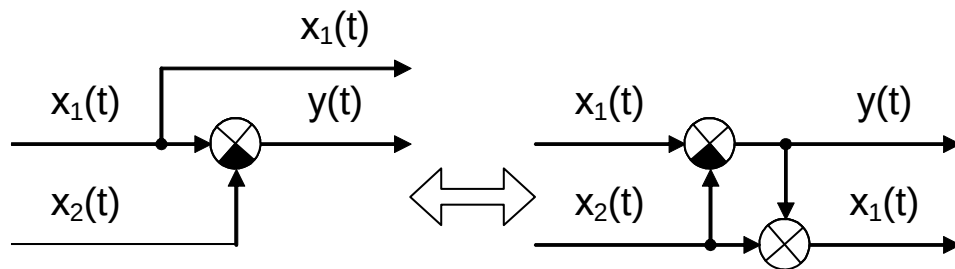


Рисунок 3.16 – Включення в схему елемента порівняння при переносі вузла через суматор

При застосуванні цього правила перетворення структурних схем для перенесення вузла через елемент порівняння в схему необхідно включити додатково не елемент порівняння, а суматор. Еквівалентність цих схем також легко перевірити: $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ і $x_1(t) = y(t) + x_2(t) = x_1(t) - (-x_2(t) + x_2(t))$ [2, 3].

6. Перенесення суматора через вузол.

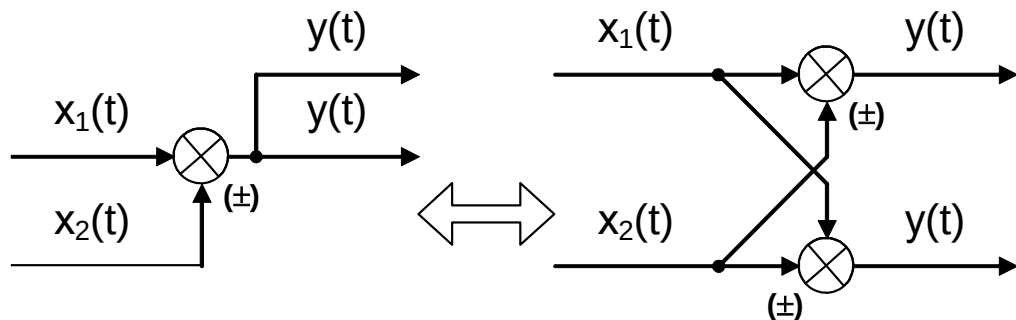


Рисунок 3.17 – Перетворення схеми при перенесенні суматора через вузол

Це правило перетворення структурних схем застосовується як до суматора, так і до елементів порівняння. Щоб перенести суматор через вузол, необхідно в схему включити додатковий суматор. Ці схеми еквівалентні, тому що вихідні сигнали збігаються: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ [2, 3].

7. Перенесення суматора через суматор.

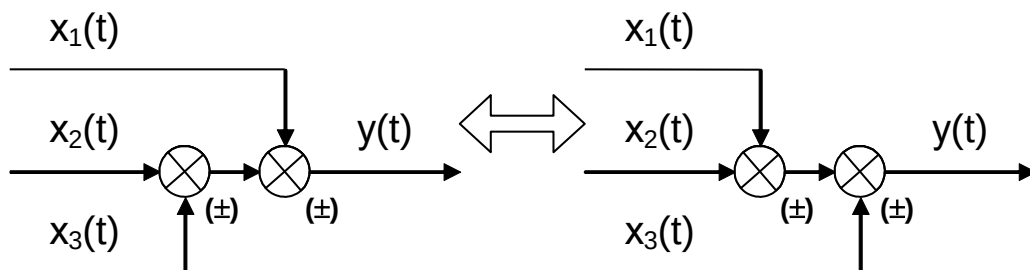


Рисунок 3.18 – Перетворення схеми при перенесенні суматора через суматор

Це правило перетворення структурних схем фактично реалізує правило комутативності складання в математиці - від перестановки доданків сума не змінюється. Воно, зрозуміло, застосовується як до суматора, так і до елементів порівняння [2, 3].

8. Перенесення ланки через ланку.

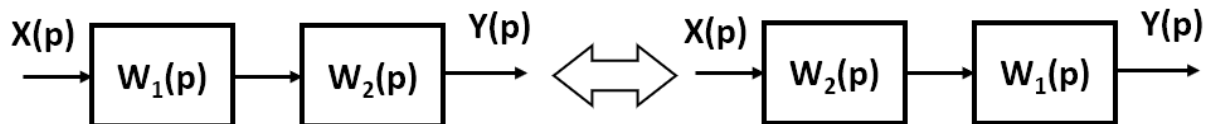


Рисунок 3.19 – Перетворення схеми при перенесенні ланки через ланку

Це правило перетворення структурних схем фактично реалізує правило комутативності множення в математиці - від перестановки множників добуток не змінюється [2, 3].

9. Перенесення вузла через вузол.

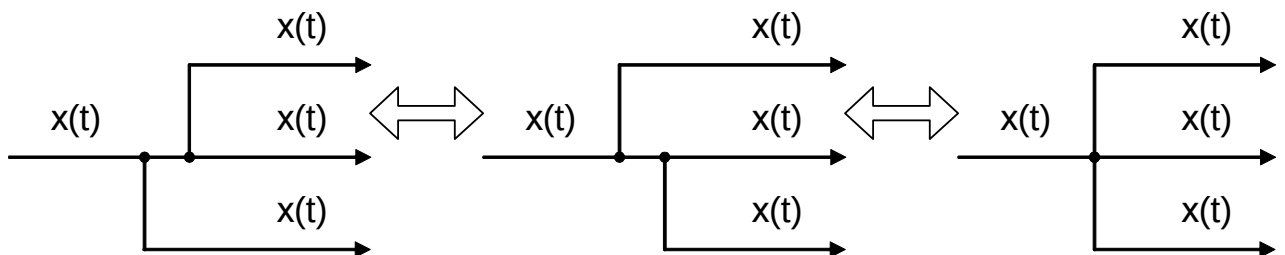


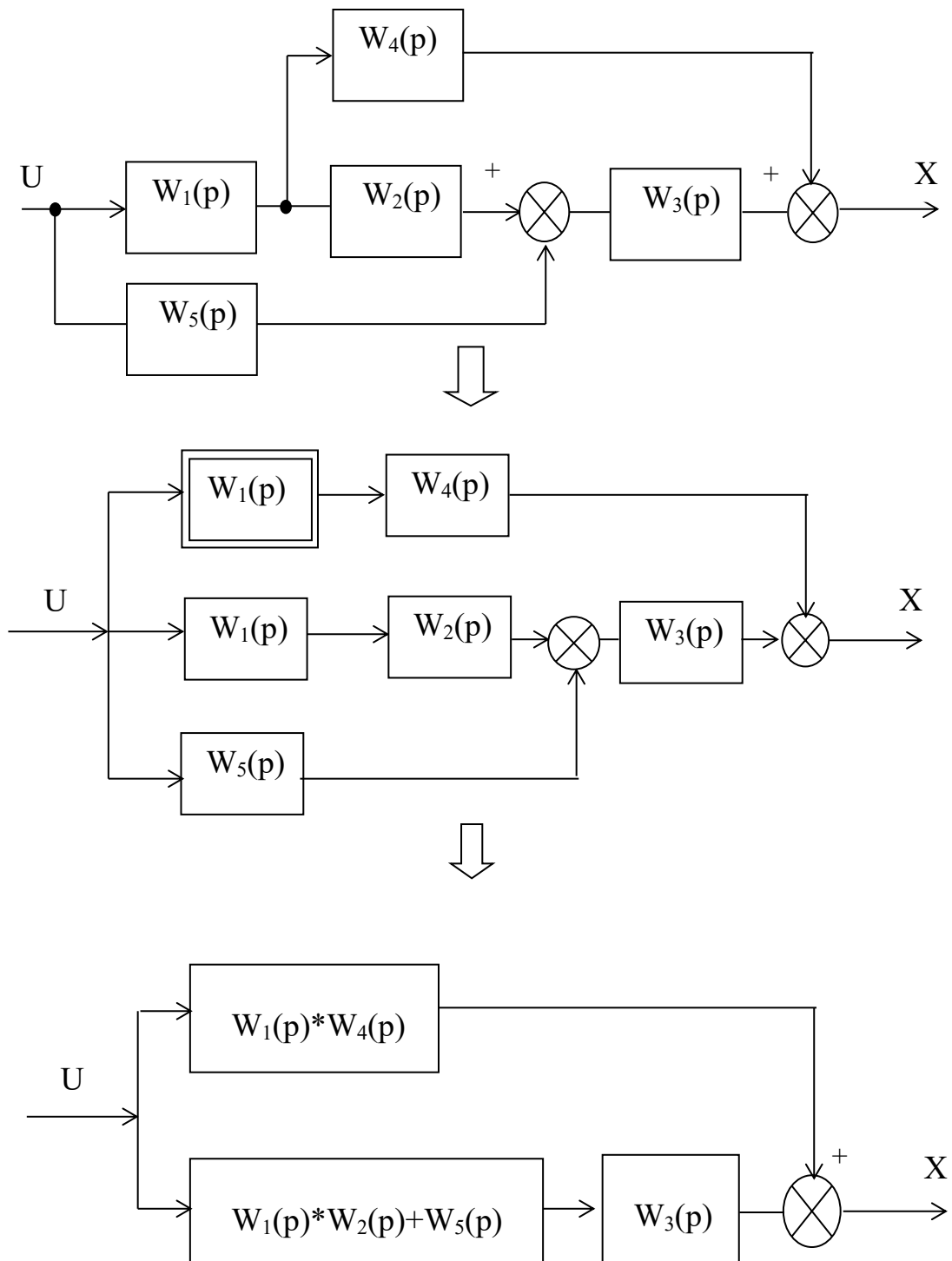
Рисунок 3.20 – Перетворення схеми при перенесенні вузла через вузол

У більш складних структурних схемах часто доводиться проводити їх спрощення за рахунок усунення :

- прямих перехресних зв'язків;
- зворотних перехресних зв'язків;

- прямих та зворотних перехресних зв'язків.

Відповідні перетворення наведені на рис.3.3.21 – 3.3.23, в результаті отримують структурну схему та відповідні еквівалентні передавальні функції. При перетвореннях структурних схем використовувались правила перенесення точок і суматорів, а також отримання еквівалентних функцій передачі для типових схем з'єднань елементів [2, 3].



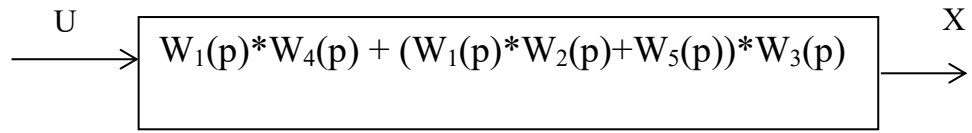
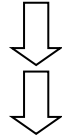
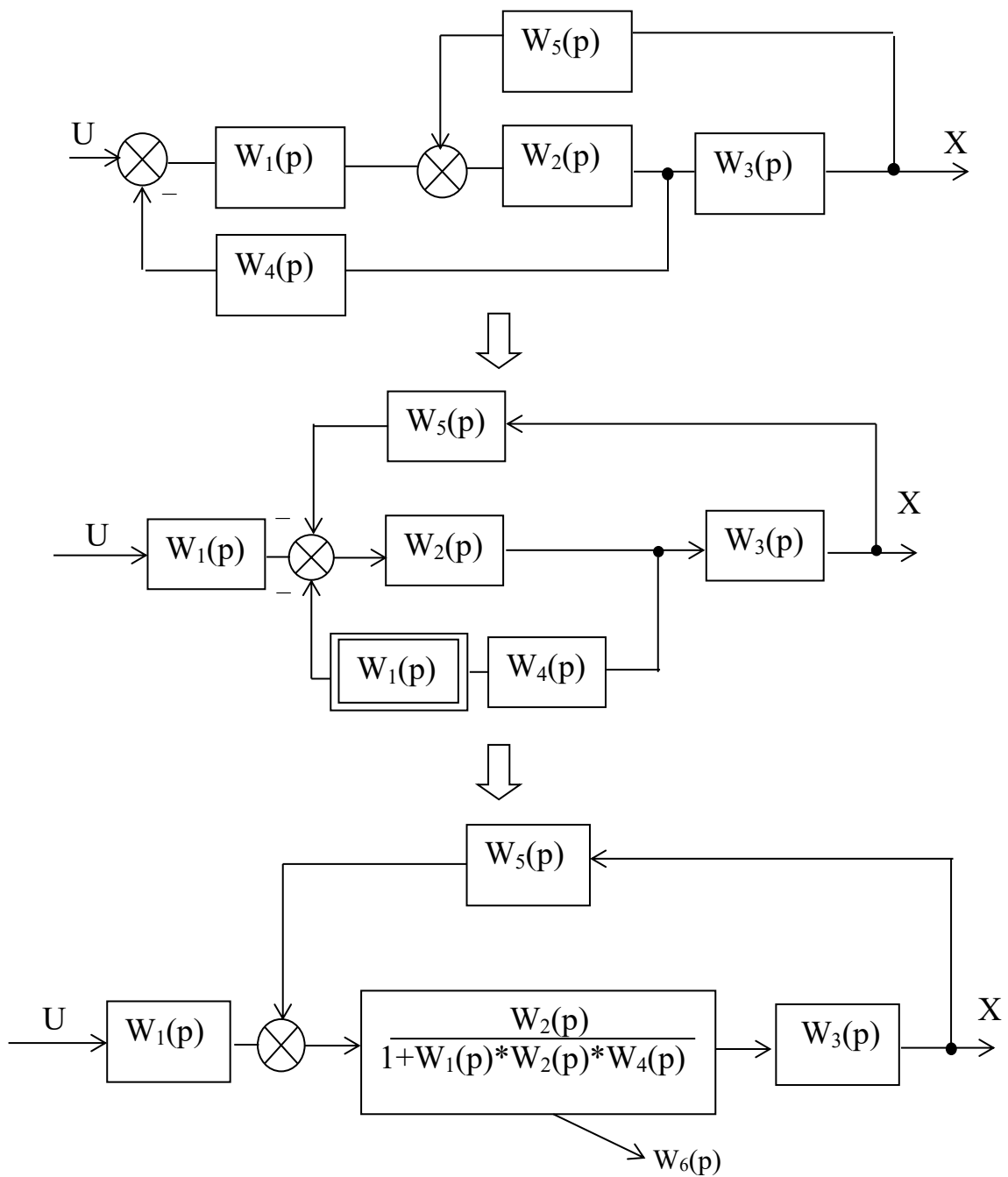


Рисунок 3.3.21 - Усунення прямих перехресних зв'язків



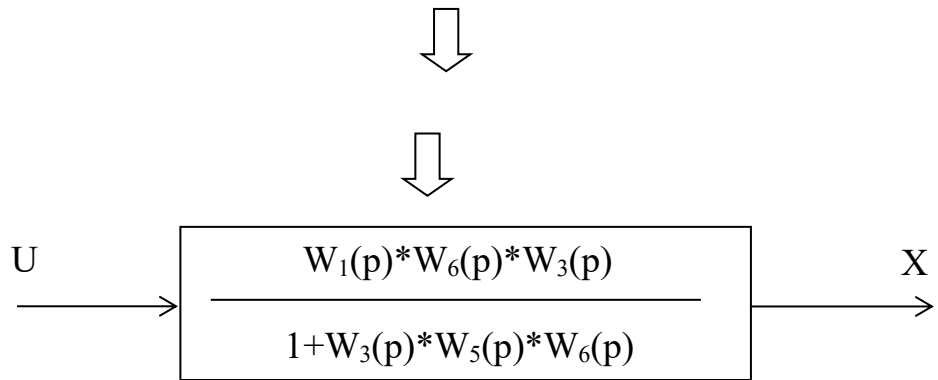


Рисунок 3.3.22 – Усунення зворотних перехресних зв'язків

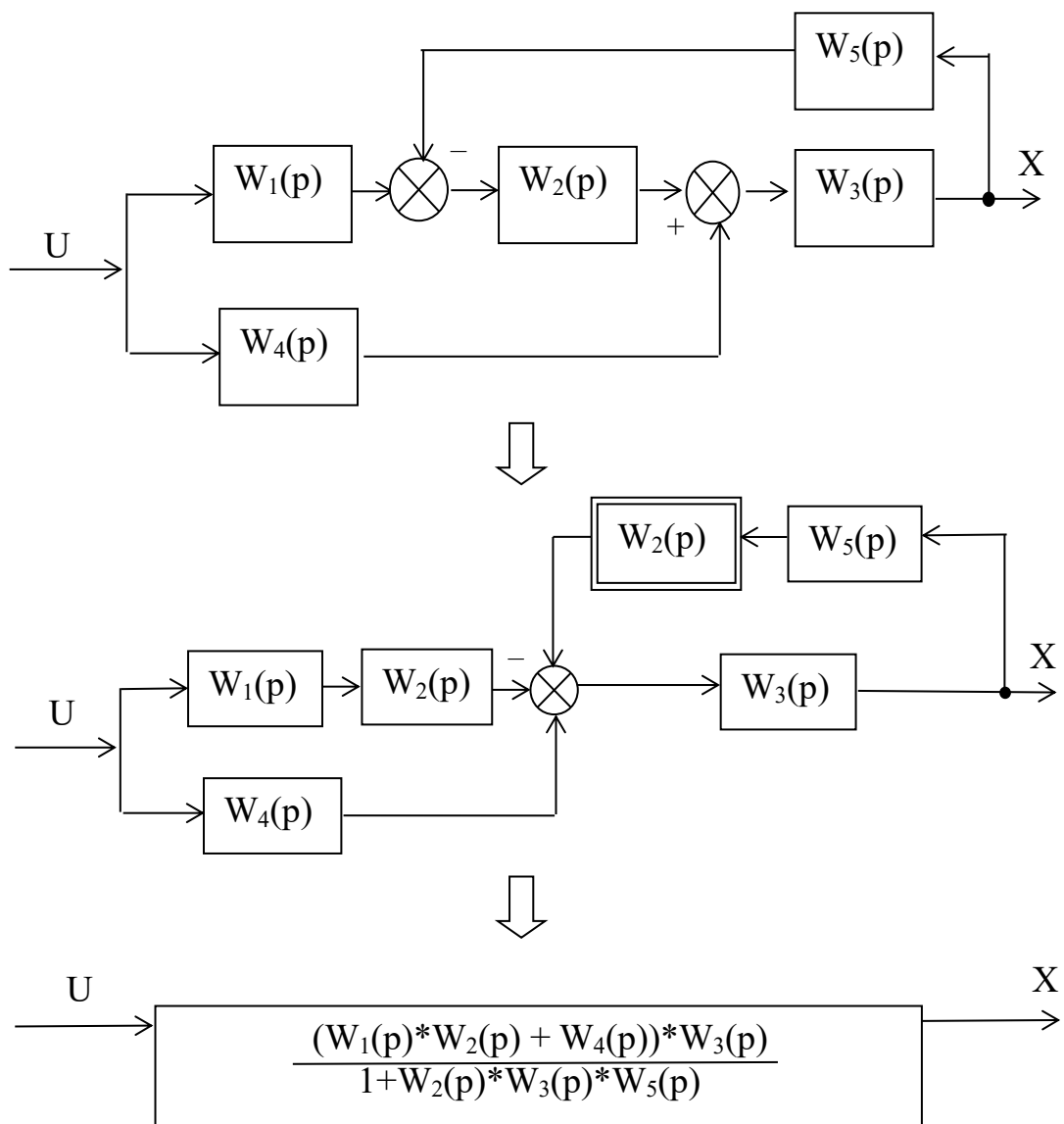


Рисунок 3.23 – Усунення перехресних прямих і зворотних зв'язків.

3.4. Варіанти завдань

Передавальна функція прямого зв'язку

$$W_{ПЗ}(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$

Передавальна функція від'ємного зворотнього зв'язку

$$W_{ЗЗ}(p) = k + \frac{1}{Tp}$$

Таблиця 3.1 – Варіанти (параметри) для третьої роботи

№ вар	a ₁	a ₂	a ₃	b ₀	b ₁	b ₂	k	T
1.	9	10	8	5	0	0	1	20
2.	3	6	8	2	1	1	1	20
3.	3	6	10	1	0	3	1	20
4.	4	4	4	0.5	2	0	1	20
5.	9	17	25	3	0	0	1	50
6.	5	8	2	4	1	2	1	50
7.	3	11	6	4	3	1	1	50
8.	0.7	1.9	2	1	2	0	1	50
9.	2	4	9	0.1	0	2	1	100
10.	2	5	3	2	1	0	1	100
11.	15	28	35	5	0	0	1	100
12.	5	7	7	5	2	4	1	100
13.	7	7	5	4	0	0	1	100
14.	17	57	45	5	0	0	1	100
15.	0,7	0,8	0,5	0,7	0,9	1	1	20
16.	1	4	0,3	1,1	0	0	1	20
17.	3	9	5	2	0	0	1	20
18.	6	11	7	7	3	0	1	20
19.	8	10	9	5	2	0	1	50
20.	0,6	0,3	0.4	0.5	0.1	0.2	1	50
21.	6	8	3	3	0	1	1	100
22.	0,4	0,5	0,3	0,2	1	0	1	100
23.	0,5	0.7	0.1	1	0	0,1	1	20
24.	9	13	7	6	1	2	1	20
25.	0,5	0,9	0,3	0,3	0,1	0	1	50
26.	5	8	9	5	0	5	1	100
27.	7	8	8	4	0	1	1	100
28.	0,8	0.9	0,7	0,4	0.4	0.1	1	100
29.	3	5	4	3	1	0	1	50
30.	0,8	1,1	0,9	0.2	0.1	1	1	50

3.5. Приклад виконання роботи

Отримання функції передачі заданої структури

Значення параметрів:

№ вар	a1	a2	a3	b0	b1	b2	k	T
13.	7	7	5	4	0	0	1	100

Функція передачі прямого зв'язку:

$$W_{пз}(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} = \frac{4}{5p^3 + 7p^2 + 7p + 1} \quad (3.11)$$

Функція передачі зворотнього зв'язку:

$$W_{зз}(p) = k + \frac{1}{Tp} = \frac{kTp + 1}{Tp} = \frac{100p + 1}{100p} \quad (3.12)$$

Функція передачі заданої структури:

$$W_c(p) = \frac{W_{пз}(p)}{1 + W_{пз}(p) \cdot W_{зз}(p)} = \frac{400p}{500p^4 + 700p^3 + 700p^2 + 500p + 4} \quad (3.13)$$

Дослідження АФЧХ

$$\begin{aligned} W_c(i\omega) &= \frac{400i\omega}{500\omega^4 - 700\omega^2 + 4 + i(500\omega - 700\omega^3)} = \\ &= \frac{400i\omega \cdot (500\omega^4 - 700\omega^2 + 4 - i(500\omega - 700\omega^3))}{(500\omega^4 - 700\omega^2 + 4 + i(500\omega - 700\omega^3)) \cdot (500\omega^4 - 700\omega^2 + 4 - i(500\omega - 700\omega^3))} = \\ &= \frac{200000i\omega^5 - 280000i\omega^3 + 1600i\omega + 200000\omega^2 - 280000\omega^4}{250000\omega^8 - 210000\omega^6 - 206000\omega^4 + 244400\omega^2 + 16} = \\ &= \frac{200000\omega^2 - 280000\omega^4}{250000\omega^8 - 210000\omega^6 - 206000\omega^4 + 244400\omega^2 + 16} + \\ &+ i \frac{200000\omega^5 - 280000\omega^3 + 1600\omega}{250000\omega^8 - 210000\omega^6 - 206000\omega^4 + 244400\omega^2 + 16} \end{aligned}$$

$$Re(\omega) = \frac{200000\omega^2 - 280000\omega^4}{250000\omega^8 - 210000\omega^6 - 206000\omega^4 + 244400\omega^2 + 16}$$

$$Im(\omega) = \frac{200000\omega^5 - 280000\omega^3 + 1600\omega}{250000\omega^8 - 210000\omega^6 - 206000\omega^4 + 244400\omega^2 + 16}$$

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \quad (3.14)$$

де A – амплітуда

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right) \quad (3.15)$$

де $\varphi(\omega)$ - кут повороту

Побудуємо частотні характеристики.

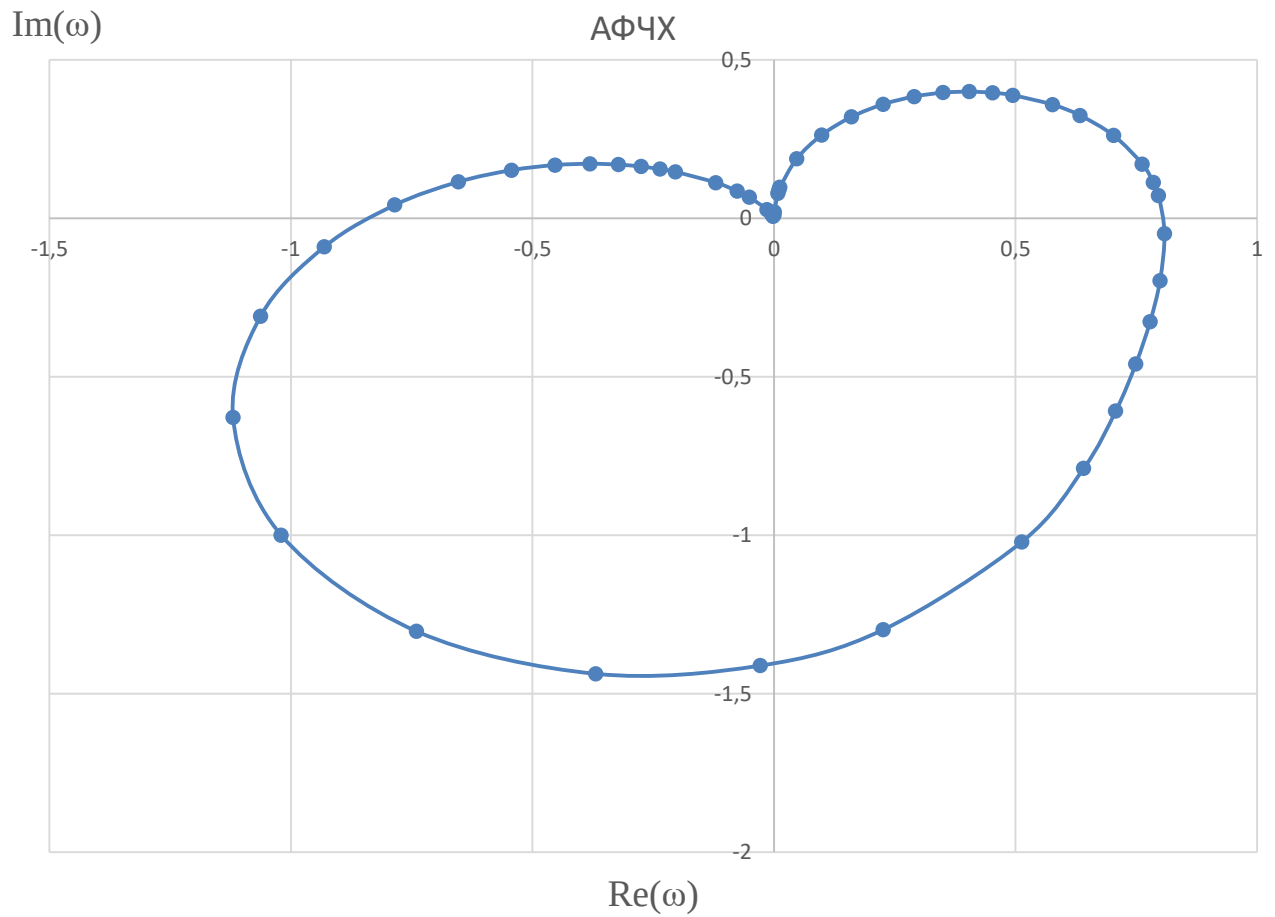


Рисунок 3.24 – Годограф амплітудно-фазової частотної характеристики

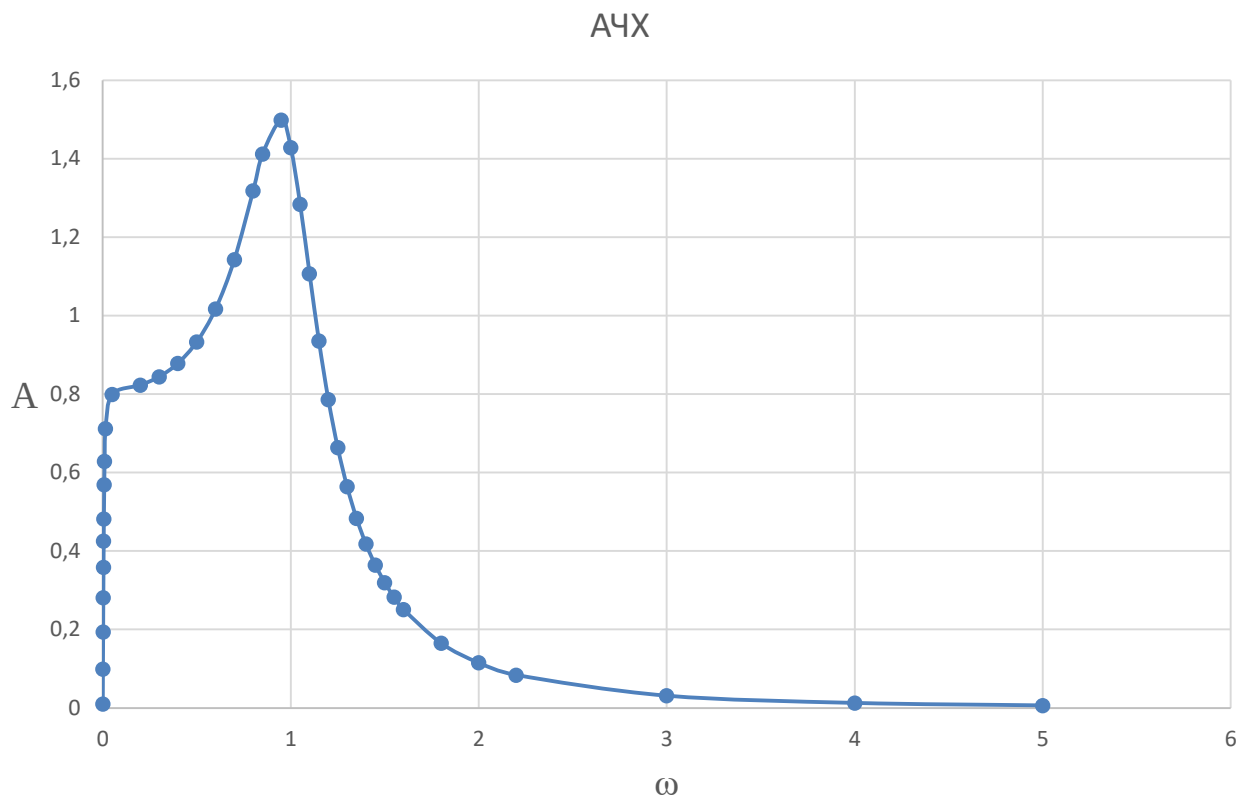


Рисунок 3.25 – Амплітудно-частотна характеристика

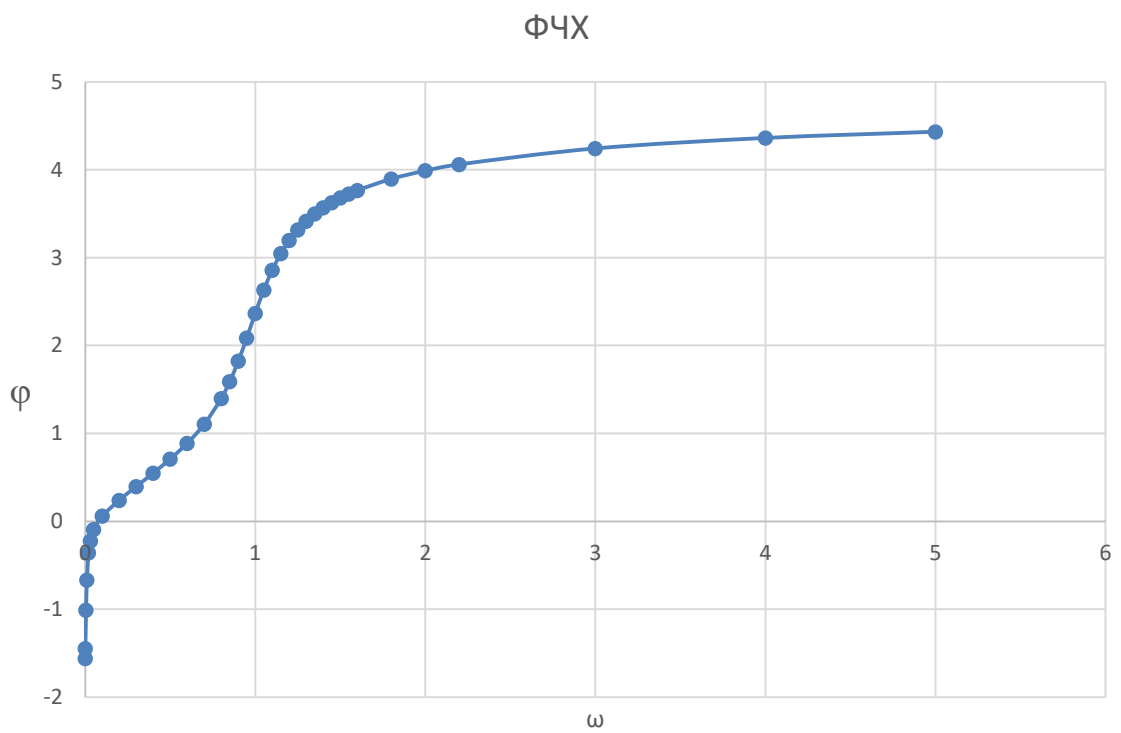


Рисунок 3.26 – Фазо-частотна характеристика

Побудуємо частотні характеристики в Matlab.

Вихідний код

```
w = 0.0001:0.001:5;
p = 1i*w;
Wsc = 4./(5.*p.^3+7.*p.^2+7.*p+1);
Wrc = (1+100.*p)./(100.*p);
W = Wsc./(1+(Wsc.*Wrc));

Re = real(W);
Im = imag(W);

A = sqrt(Re.^2 + Im.^2);

phi=zeros(1,5000);
for i = 1:length(phi)
if Re(1,i)>0 && Im(1,i)<0
    phi(1,i)=atan(abs(Im(1,i)./Re(1,i)));
elseif Re(1,i)<0 && Im(1,i)<0
    phi(1,i) = pi - atan(abs(Im(1,i)./Re(1,i)));
elseif Re(1,i)<0 && Im(1,i)>0
    phi(1,i) = pi + atan(abs(Im(1,i)./Re(1,i)));
else
    phi(1,i) = - atan(abs(Im(1,i)./Re(1,i)));
end
end

plot (Re, Im);
title('АФЧХ');
xlabel('Re( $\omega$ ) ');
ylabel('Im( $\omega$ ) ');
grid on;
set(gcf, 'Name', 'АФЧХ', 'NumberTitle', 'off')

figure('Name', 'АЧХ', 'NumberTitle', 'off');
plot (w,A);
title('АЧХ');
xlabel('ω');
ylabel('A');
grid on;

figure('Name', 'ФЧХ', 'NumberTitle', 'off');
plot (w,phi);
title('ФЧХ');
xlabel('ω');
ylabel('φ');
grid on;
```

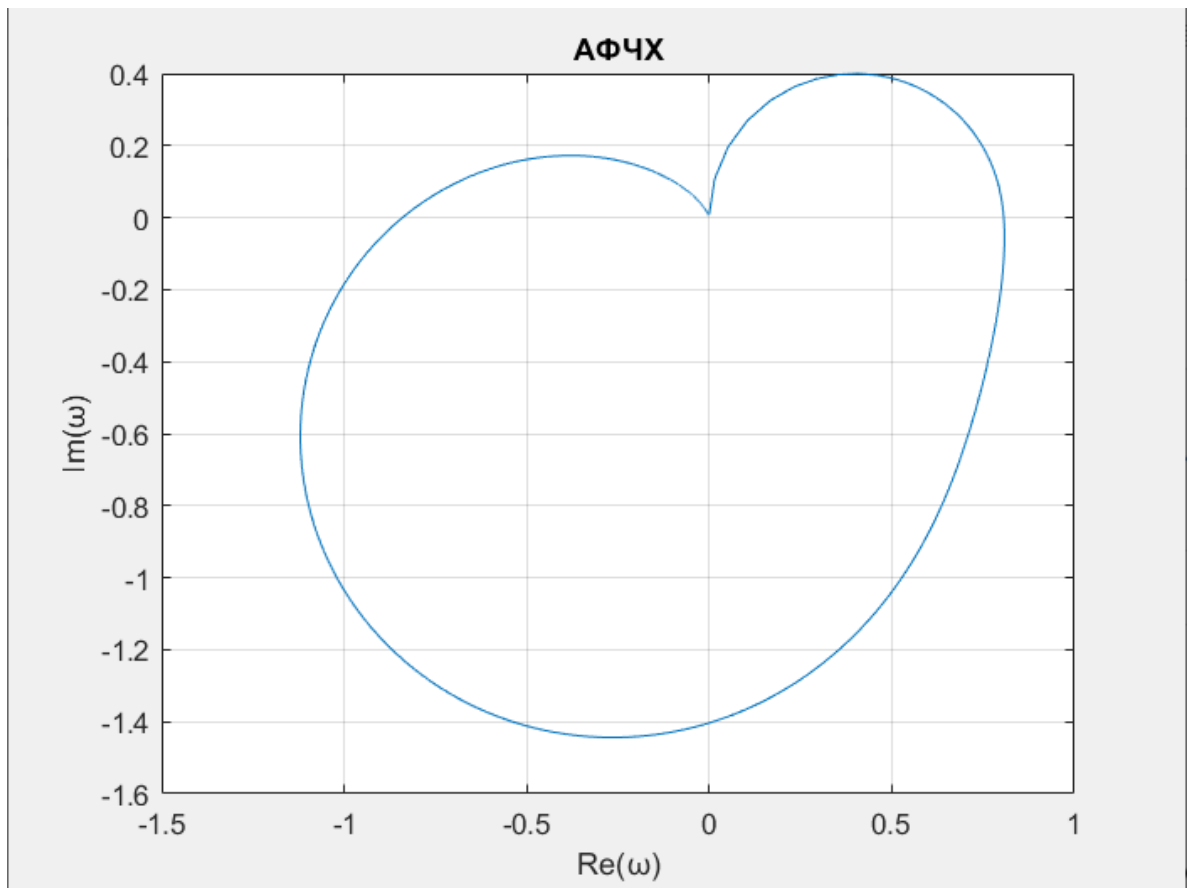


Рисунок 3.27 – Годограф АФЧХ побудований в Matlab

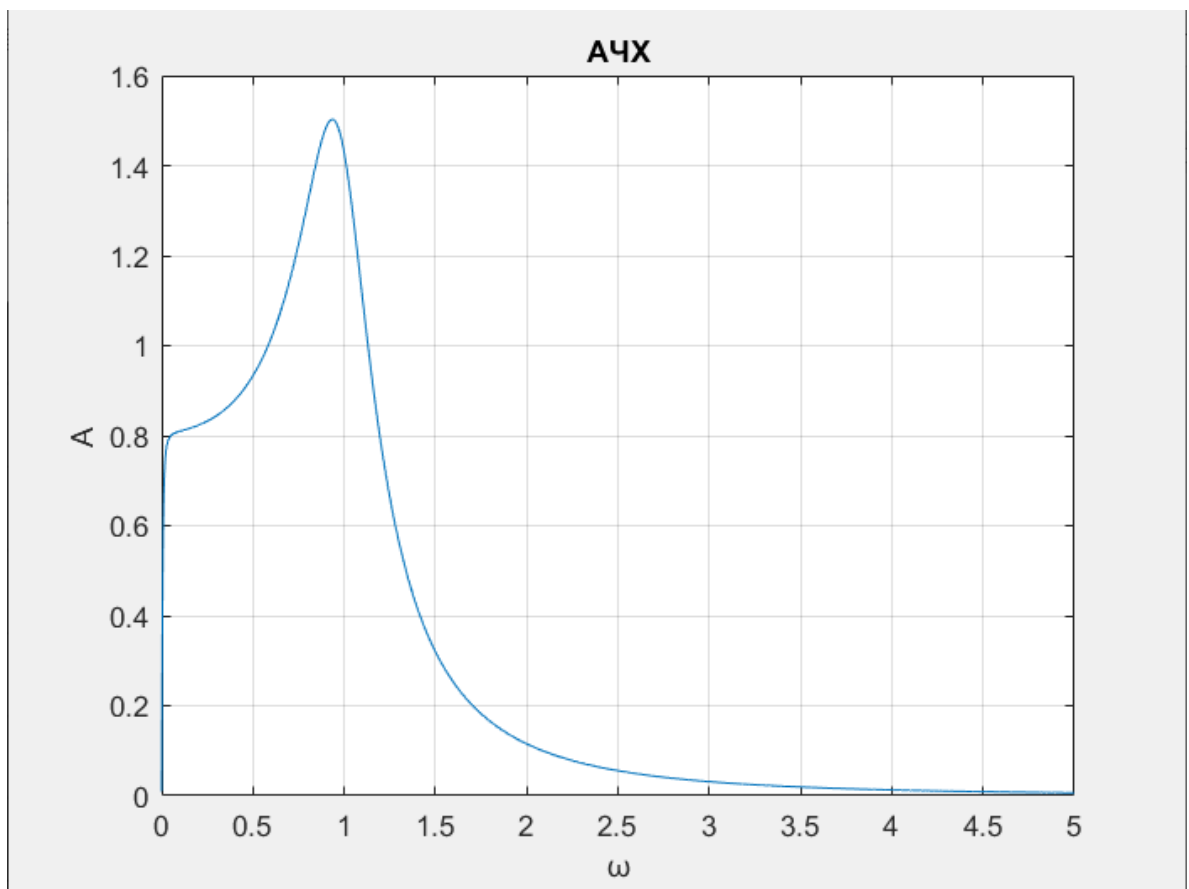


Рисунок 3.28 – АЧХ побудована в Matlab

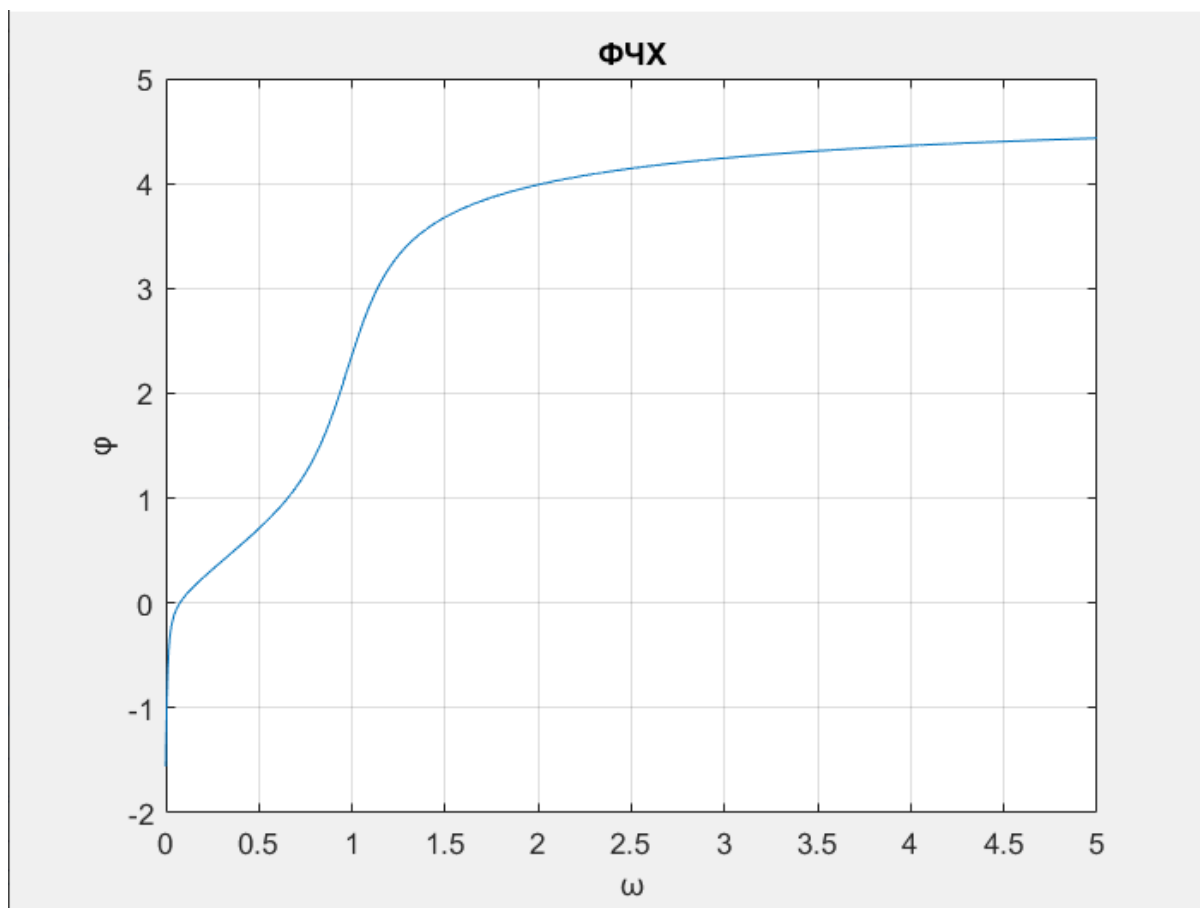


Рисунок 3.29 – ФЧХ побудована в Matlab

Побудова моделі

Змодельємо структуру в середовищі Matlab за допомогою засобів Simulink та отримаємо графік перехідного процесу.

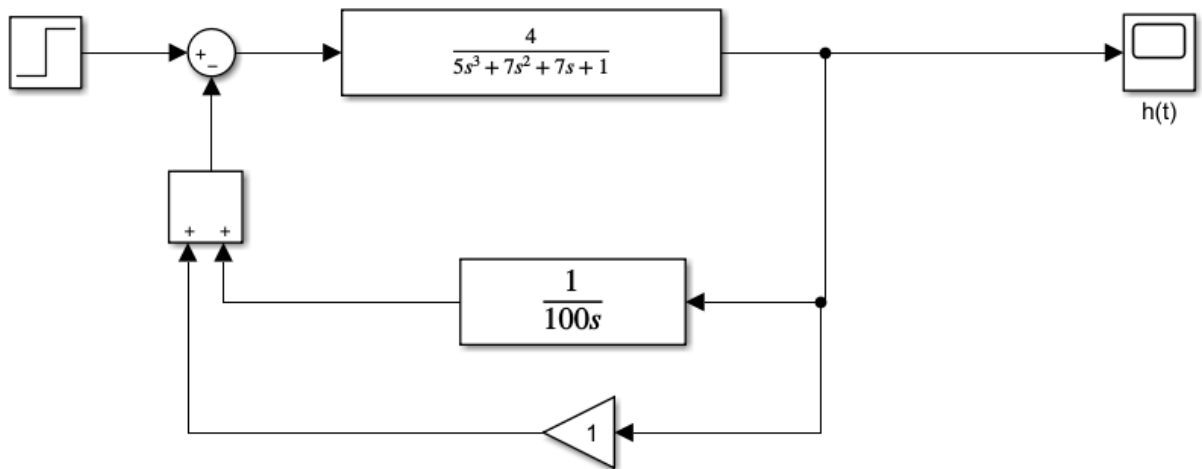


Рисунок 3.30 – Схема структури, створена за допомогою засобів Simulink

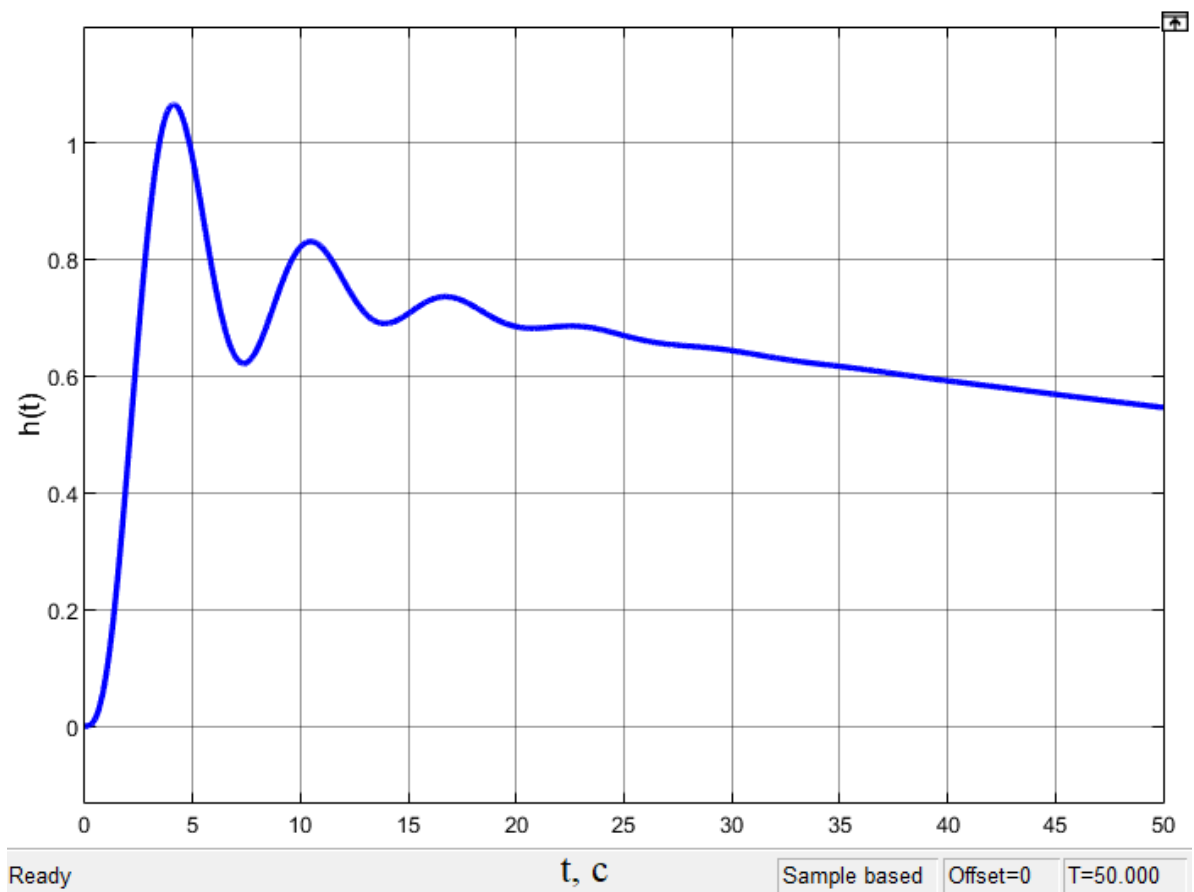


Рисунок 3.31 – Графік перехідної характеристики $h(t)$

Оптимізуємо графік перехідного процесу, підібравши відповідні коефіцієнти k і T .

При $k = 0.5$ і $T = 8$ графік перехідного процесу набуває такого вигляду

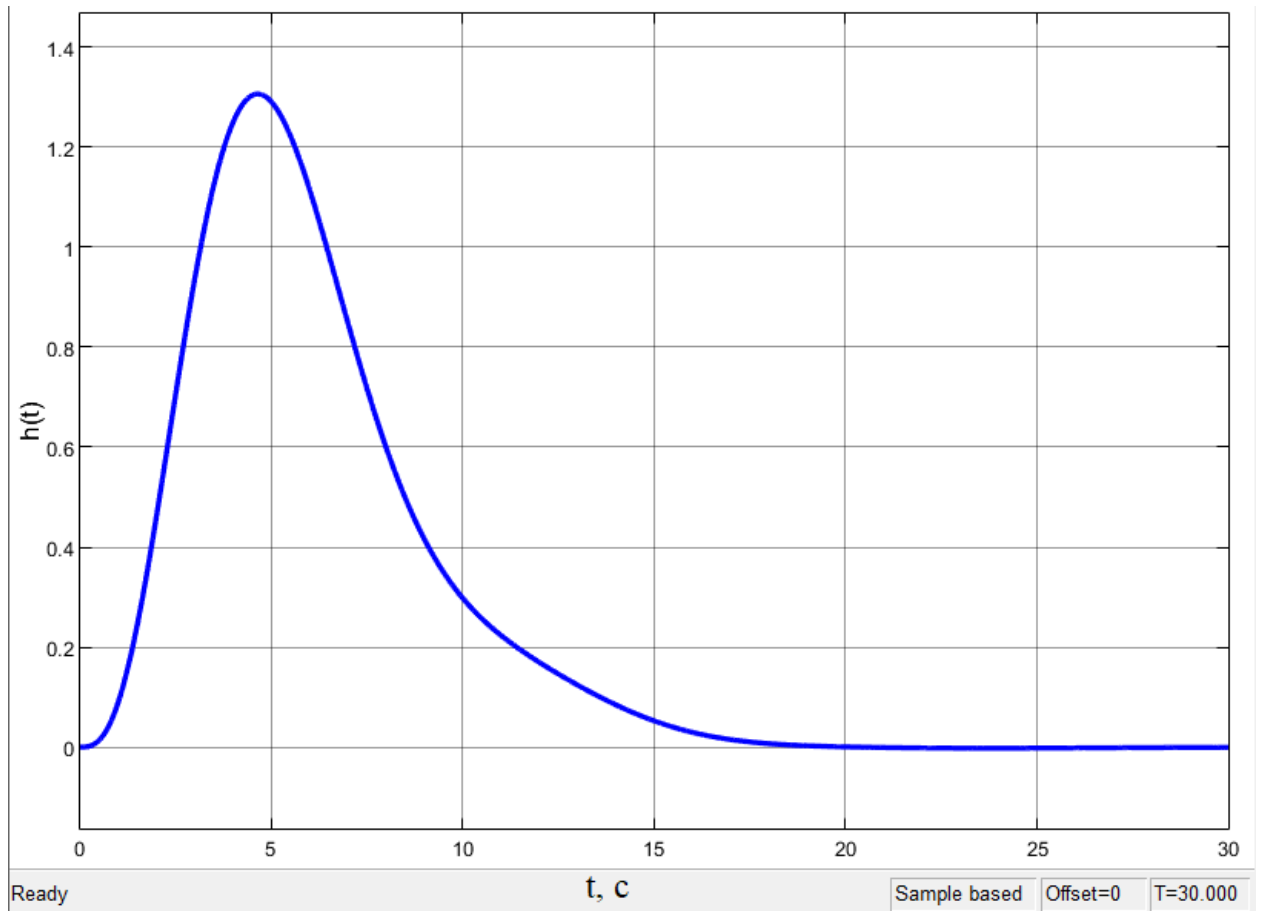


Рисунок 3.32 – Графік перехідної характеристики $h(t)$ після підбору коефіцієнтів

Вплив числових параметрів зворотного зв'язку на вид перехідного процесу в системі

Дослідимо вплив параметра T зворотного зв'язку на вид перехідного процесу в системі, для цього збільшимо і зменшимо параметр T удвічі.

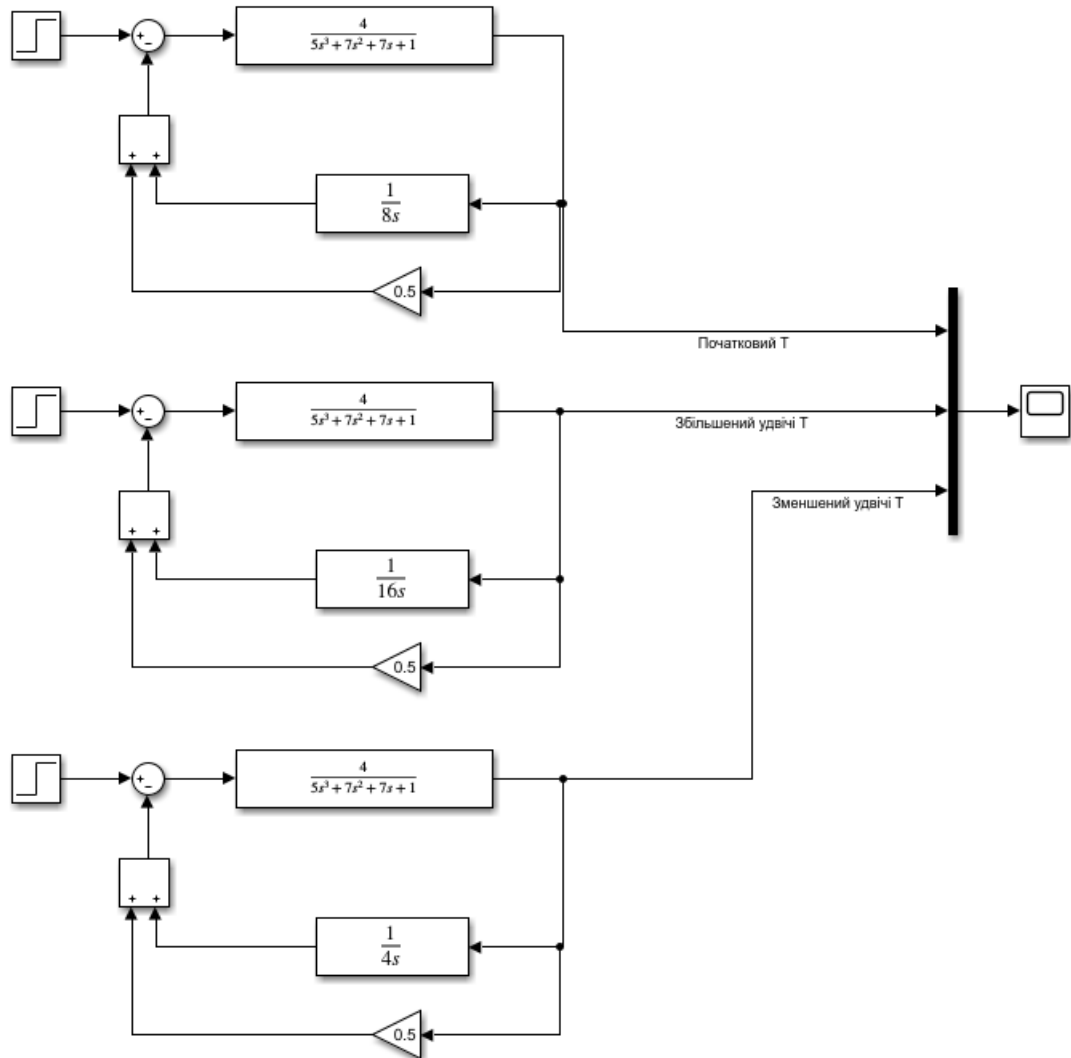


Рисунок 3.33 – Схема для дослідження впливу параметра T на перехідну характеристику

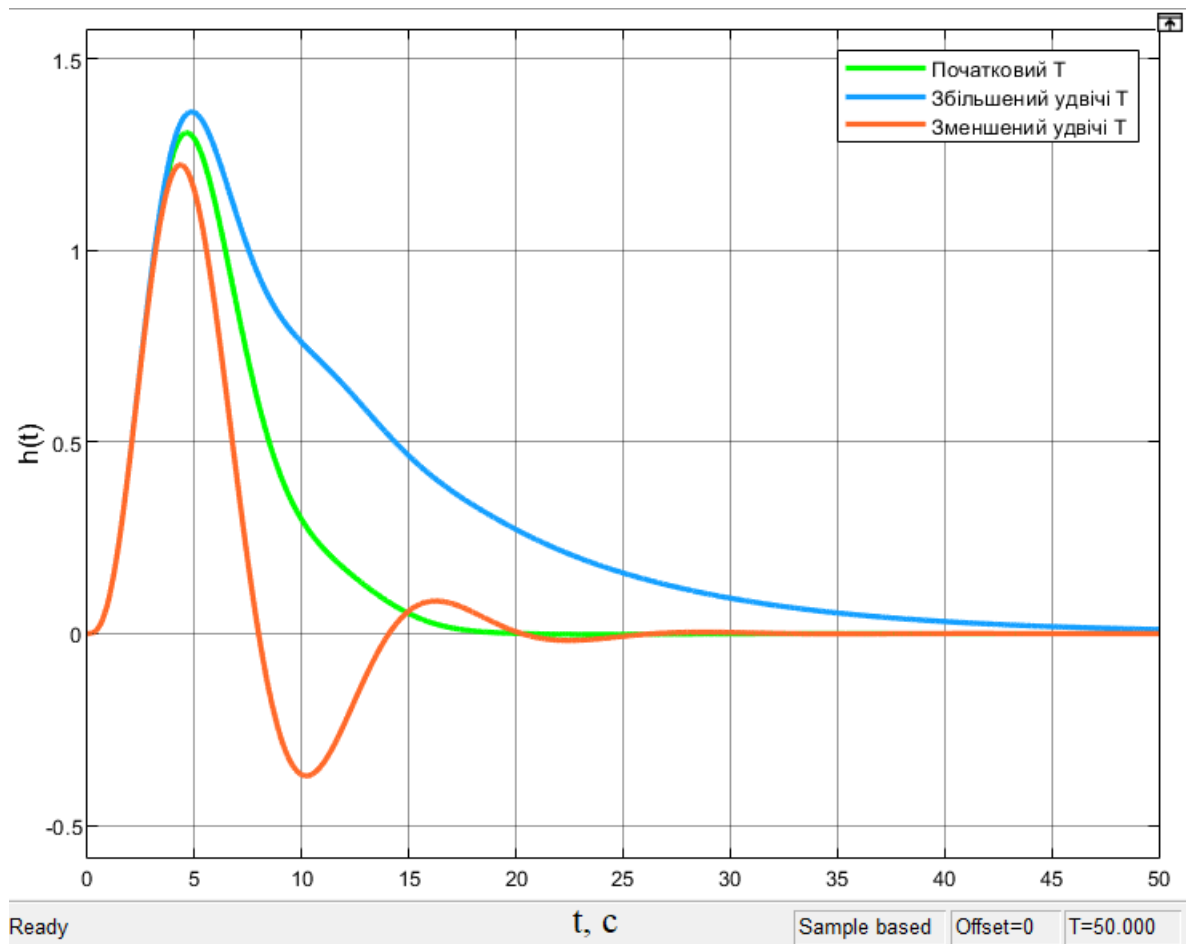


Рисунок 3.34 – Вплив зміни параметра T на перехідну характеристику

Дослідимо вплив параметра k зворотного зв'язку на вид перехідного процесу в системі, для цього збільшимо і зменшимо параметр k удвічі.

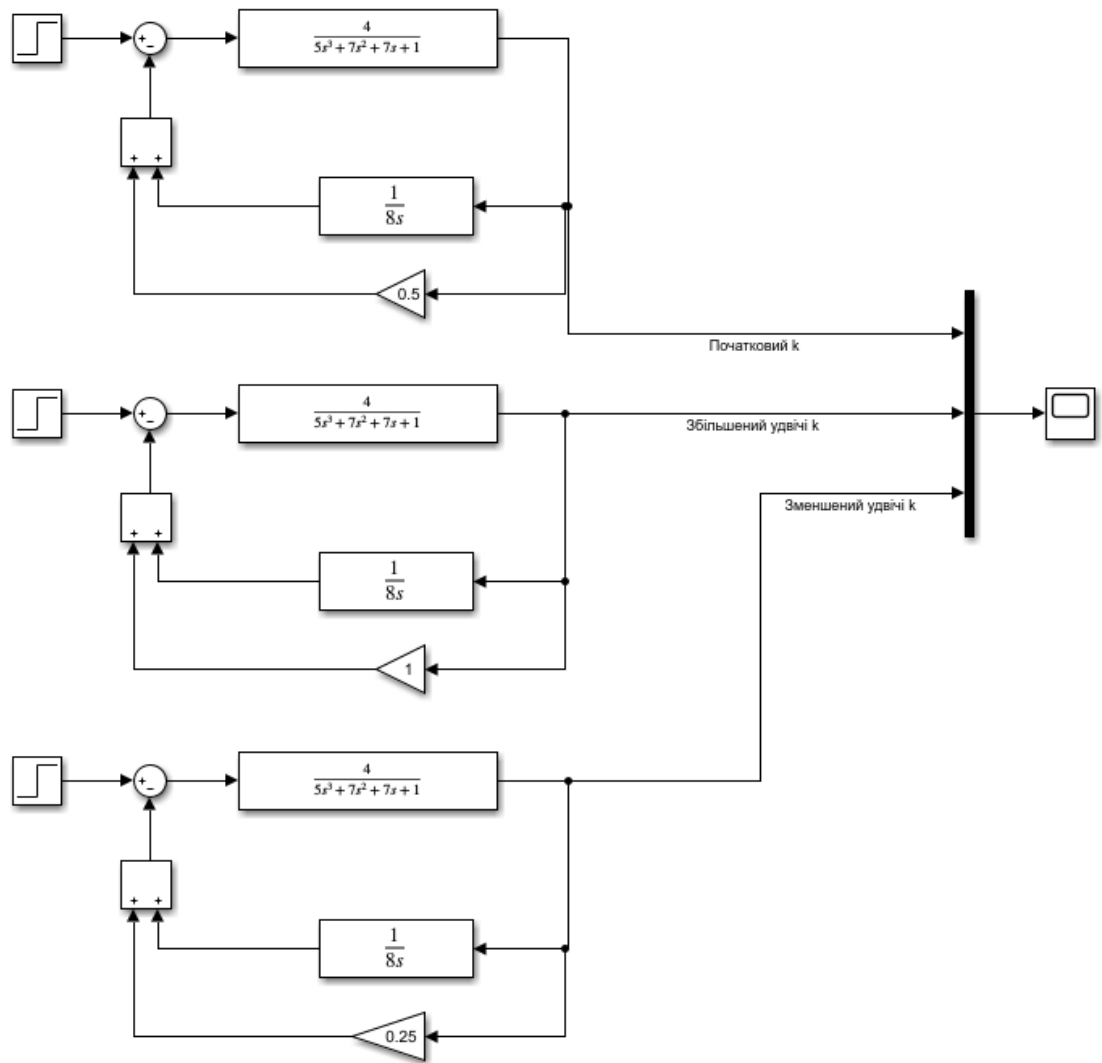


Рисунок 3.35 – Схема для дослідження впливу параметра k на перехідну характеристику

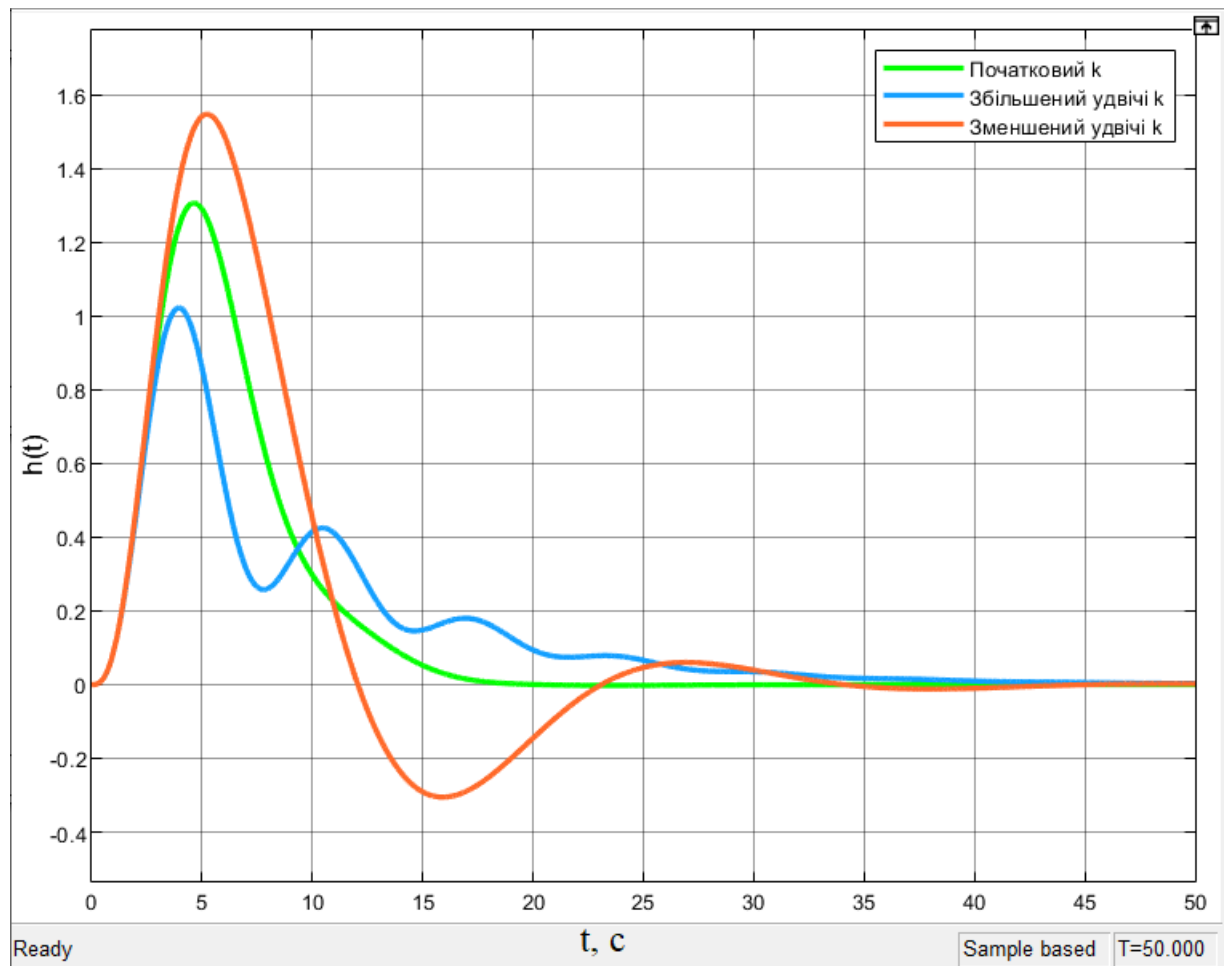


Рисунок 3.36 – Вплив зміни параметра k на перехідну характеристику

3.6. Контрольні запитання

1. Послідовне з'єднання ланок.
2. Паралельне з'єднання ланок.
3. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (зворотній зв'язок).
4. Перенесення ланок через вузли.
5. Перенесення ланок через суматори.
6. Проходження сигналів.
7. Вплив параметрів в складних системах.

4. Лабораторна робота №4

Розімкнені системи. Стійкість

4.1. Мета роботи

Закріпити знання стосовно поняття стійкості та її видів. Навчитися користуватися найбільш поширеними критеріями стійкості такими як: критерій Рауса, критерій Гурвіца, критерій Михайлова. Дослідити вплив коефіцієнтів характеристичного рівняння та його коренів на властивості систем.

4.2. Завдання

- У відповідності до варіанту обрати коефіцієнти характеристичного рівняння системи.
- Визначити стійкість заданої характеристичним рівнянням системи за допомогою критеріїв Гурвіца, Рауса, Михайлова.
- Визначити полюси заданого характеристичного рівняння.
- Вивести систему на границю стійкості, змінивши дійсну частину в одній із пар комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння на 0.
- Отримати нове характеристичне рівняння зі зміненими полюсами, та застосувати до нього критерії стійкості.
- Зробити висновки про вплив коефіцієнтів характеристичного рівняння системи та його полюсів на властивості отриманої системи та вигляд перехідного процесу.

4.3. Теоретичні відомості

Аналіз стійкості лінійних систем

Загальні умови стійкості

В автоматичних системах повинні виконуватись умови стійкості. Стійкість автоматичних систем – це їх властивість повертатись в початковий стан після того, коли будь-яка дія вивела систему з цього стану. Ознакою стійкості є збіжні перехідні процеси, наприклад, для систем стабілізації [2, 3, 4]

$$\Delta X(t) = X_{\text{зд}}(t) - X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

де: $X_{\text{зд}}(t), X(t)$ - відповідно задане та поточне значення регульованої координати.

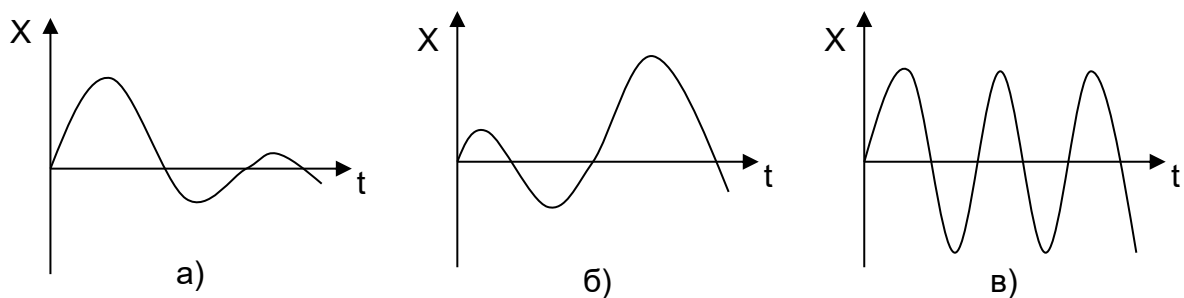


Рисунок 4.1 – Перехідні процеси системи: а) – стійкої; б) – нестійкої; в) - на межі стійкості

Лінійна АСР може знаходитись у трьох станах: бути стійкою, нестійкою та на межі стійкості (рис.4.1) [2, 3, 4]. Варто відзначити, що коли лінійна АСР знаходиться в одному з двох останніх станів, вона непрацездатна. Важливо також відзначити, що форма перехідного процесу, а також його показники (амплітуда, тривалість) при оцінці стійкості значення не мають, головне – перехідні процеси повинні бути збіжними. Виходячи з цього, можна зробити висновок, що стійкість АСР є умовою необхідною, але недостатньою. В задачах аналізу і синтезу АСР в першу чергу оцінюється стійкість системи. Умова (4.1) відповідає стійкості системи в усталеному стані. В реальних умовах на систему постійно діють збурення, тому умова

стійкості може відповідати вимозі: регульована координата повинна бути обмеженою при дії обмежених за величиною збурень. У задачах аналізу та синтезу проблема стійкості ставить не лише визначення цієї оцінки, а також факторів, від яких залежить стійкість.

Враховуючи, що стійкість лінійних АСР залежить від вільного руху системи, можна записати відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = 0 \quad (4.2)$$

Вимушена складова руху системи, яка відповідає певному виду зовнішньої дії, на стійкість не впливає. Тоді математичним визначенням стійкості є:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad (4.3)$$

Зрозуміло, що вихідна змінна системи буде наближатись до вимушеної складової, яка визначається правою частиною диференціального рівняння, а при виконанні умови (4.3) стійкість називається асимптотичною. Тоді для нестійкої системи [2, 3, 4]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty \quad (4.4)$$

На межі стійкості в системі виникає перехідний процес з постійною амплітудою (рис.4.1,в).

Вільна (перехідна) складова перехідного процесу, яка визначає стійкість системи, є розв'язком диференціального рівняння (4.2):

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i t}, \quad (4.5)$$

де: C_i - постійні інтегрування, які залежать від початкових умов; λ_i - корені характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (4.6)$$

Таким чином, $X_n(t)$ має суму складових, кількість яких визначається порядком системи n . У загальному випадку в рівнянні (4.6) оператор p

замінюється на комплексну змінну λ . Тоді корені рівняння (4.6) є комплексними та утворюють пари спряжених комплексних чисел

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i \quad (4.7)$$

Дійсна частина кореня α_i може бути додатною або від'ємною. Перехідна складова $X_n(t)$ прямує до нуля лише тоді, коли кожна складова $C_i \cdot e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$. Тоді можна визначити залежність стійкості системи від коренів характеристичного полінома [2, 3, 4]:

- корені дійсні: $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$. Якщо $\alpha < 0$, то в системі виникає неколивальний (аперіодичний) перехідний процес, який при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля, тобто система стійка. При $\alpha > 0$ перехідний процес розбіжний, тобто система нестійка (рис.4.2,а);
- корені комплексні попарно спряжені (рис.4.2,б) викликають коливальний перехідний процес, причому при $\alpha < 0$ - збіжний;
- корені уявні (рис.4.2,в) відповідають перехідному процесу у вигляді синусоїди (система на межі стійкості).

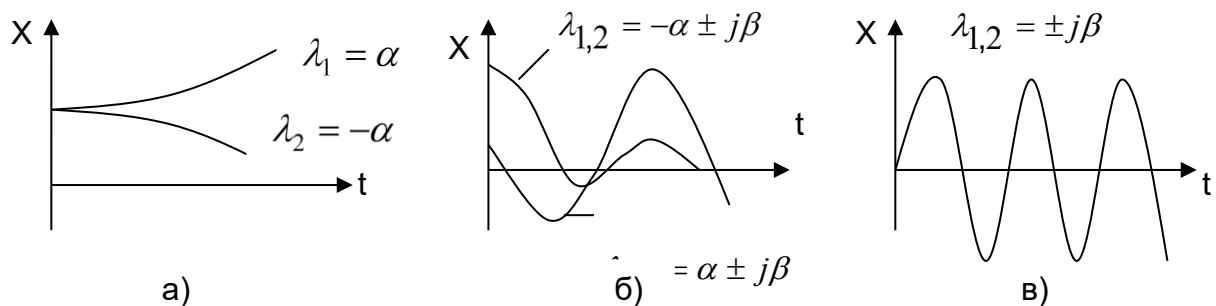


Рисунок 4.2 – Залежність $X_n(t)$ від коренів характеристичного полінома

Може бути також нульовий корінь, тоді значення X приймає постійну величину.

Наведений матеріал дозволяє зробити такі висновки:

- перехідний процес у системі – сума коливальних та аперіодичних складових, при цьому кожна коливальна складова відповідає парі комплексних спряжених коренів, а кожна аперіодична складова – дійсному кореню;
- загальною умовою загасання всіх складових і перехідного процесу в цілому є від’ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи, тобто полюсів (нулів знаменника) передавальної функції системи;
- якщо є хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то йому відповідає розбіжна складова перехідного процесу, тобто система нестійка;
- при наявності уявних коренів характеристичного рівняння в системі виникають назагасаючі коливання з частотою, яка дорівнює β_i - границя стійкості.

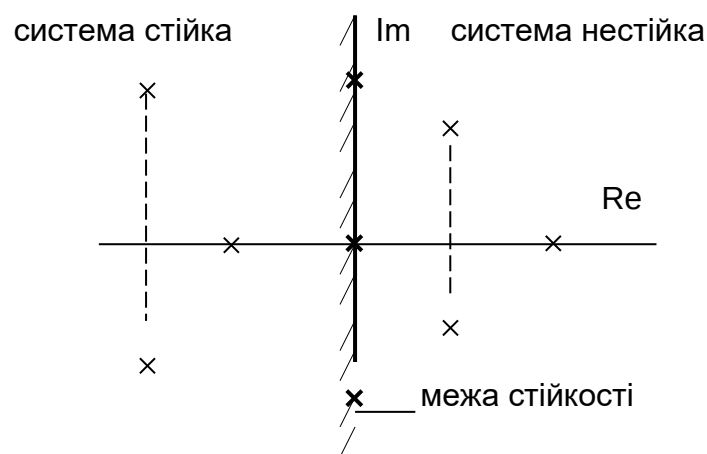


Рисунок 4.3 – Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

Розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині показано на рис.4.3. Для стійкості системи всі корені повинні лежати в лівій напівплощині, а уявна вісь є межею стійкості [2, 3, 4]. На межі стійкості може розташовуватись нульовий корінь або пара чисто уявних

коренів. Необхідною, але недостатньою, умовою стійкості є те, що всі коефіцієнти характеристичного полінома додатні.

Для отримання характеристичного полінома можна використовувати передавальні функції системи, наприклад, для замкненої системи відносно зміни завдання:

$$W_{zd}(p) = \frac{W_{poz}(p)}{1+W_{poz}(p)} \quad (4.8)$$

Подамо $W_{poz}(p)$ у вигляді:

$$W_{poz}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (4.9)$$

тоді

$$W_{zd}(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)}}{1+\frac{R(p)}{Q(p)}} = \frac{R(p)}{Q(p)+R(p)} = \frac{R(p)}{D(p)}, \quad (4.10)$$

де D – характеристичний поліном, який співпадає з лівою частиною рівняння системи (4.2).

Розв'язуючи проблему стійкості, знаходять відповіді на ряд частинних питань:

- визначають структуру системи, в якій забезпечується стійкість;
- оцінюють межі змінювання параметрів системи, за яких вона зберігає стійкість та їх критичні значення, які виводять систему на межу стійкості (будують область стійкості);
- формують ряд додаткових заходів щодо збереження чи забезпечення стійкості, наприклад, введення додаткових елементів чи зв'язків.

Таким чином, стійкість системи визначають на основі аналізу перехідного процесу або коефіцієнтів та коренів характеристичного поліному. В теорії автоматичного керування є ще один ефективний метод оцінки стійкості – використання критеріїв стійкості – узагальнених

показників, які не потребують розв'язувати рівняння системи. Використовуються алгебраїчні та частотні критерії [2, 3, 4].

Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні та достатні умови стійкості на основі визначників, складених з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Англійський математик Є.Раус (1877 р.) та швейцарський математик А.Гурвіц (1893 р.) у різній формі запропонували критерій, згідно якого умови стійкості зводяться до виконання нерівностей, які зв'язують коефіцієнти рівняння системи [3]. Для розв'язання прикладних задач ці критерії об'єднують в один – Рауса-Гурвіца. У загальному випадку ці критерії призначались для розв'язання чисто математичної задачі – дослідження стійкості розв'язків лінійного диференціального рівняння. Вище було показано, що за допомогою такого рівняння описується поведінка лінійної АСР.

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (4.11)$$

складається визначник [3]:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

Вираз (4.12) називається визначником Гурвіца і при його складанні виконуються правила [3]:

- визначник має n рядків та n стовпців, в першому рядку розташовуються “непарні” коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа n нулями;
- другий рядок включає всі “парні” коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа n ;
- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;
- у головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім a_n .

Критерій стійкості Рауса-Гурвіца формулюється так: автоматична система, яка описується характеристичним поліномом (4.11) стійка, якщо при $a_n > 0$ визначник Δ_n та всі його діагональні мінори додатні. (Мінор – визначник, складений з елементів, розташованих на перетині будь-яких k рядків та k стовпців визначника). У виразі (4.12) мінори виділені пунктиром.

Останній стовпець визначника Δ_n має лише один елемент $a_0 > 0$, тому використовується відома залежність [3]:

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}, \quad (4.13)$$

яка розпадається на дві за умови $\Delta_n = 0$: $a_0 = 0$, $\Delta_{n-1} = 0$. Коли $\Delta_n = 0$, система знаходиться на межі стійкості. При цьому при $a_0 = 0$ існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при $\Delta_{n-1} = 0$ існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості).

Розглянемо використання алгебраїчного критерія для системи різних порядків. Для системи першого порядку характеристичний поліном має вигляд:

$$D(\lambda) = a_1 \lambda + a_0, \quad (4.14)$$

а умова стійкості:

$$\Delta_1 = a_0, \quad a_1 > 0. \quad (4.15)$$

Для системи другого порядку:

$$D(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (4.16)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1a_0 > 0, \Delta_1 = a_1, a_2 > 0, a_0 > 0, \quad (4.17)$$

Таким чином, для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи третього порядку:

$$D(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (4.18)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

Умови стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3 > 0, \quad (4.20)$$

$$\Delta_3 = a_0\Delta_2 > 0$$

Остання нерівність за умови $a_0 > 0$ потребує $\Delta_2 > 0$. Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лише додатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядку:

$$D(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (4.21)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

Умова стійкості:

$$a_4 > 0; \Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_3 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & 0 \end{vmatrix} = a_1 \Delta_2 - a_3^2 a_0 > 0; \Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0 \quad (4.23)$$

Для систем високих порядків ($n \geq 3$) використання алгебраїчного критерію Рауса-Гурвіца стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості.

Критерій Рауса

Сутність критерію Рауса полягає в наступному. Нехай є характеристичне рівняння:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4.24)$$

Вважаємо, що коефіцієнт $a_0 > 0$. Якщо це не так, то множенням на -1 характеристичне рівняння приводиться до потрібної форми. Раус встановив таблицю коефіцієнтів, використовуючи наступні правила: перший рядок таблиці заповнюється коефіцієнтами характеристичного рівняння з парними індексами. У другому рядку виписуються коефіцієнти з непарними індексами. Коефіцієнти в третьому рядку виражаються через елементи двох перших рядків, а в четвертому рядку – через елементи другого і третього рядків за формулами [3]:

$$c_{k3} = a_{2k} - r_0 a_{2k+1},$$

$$c_{k4} = a_{2k+1} - r_1 c_{k+1,3}, \quad (4.25)$$

$$r_0 = a_0/a_1, r_1 = a_1/c_{13}.$$

Значення r	№ рядка	Номер стовпця			
		1	2	3	4
-	1	a_0	a_2	a_4	...
-	2	a_1	a_3	a_5	...
$r_0 = \frac{a_0}{a_1}$	3	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_0 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_0 a_7$	...

$r_1 = \frac{a_1}{c_{13}}$	4	$c_{14} = a_3 - r_1 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_1 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_1 c_{43}$	...
$r_2 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_2 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_2 c_{44}$	...
$r_3 = \frac{c_{14}}{c_{15}}$	6	$c_{16} = c_{24} - r_2 c_{25}$	$c_{26} = c_{34} - r_2 c_{35}$ =	$c_{36} = c_{44} - r_2 c_{45}$ =	...
...	...	...	...	...	...

Коефіцієнти у п'ятому, шостому та в усіх наступних рядках обчислюються за формулами з аналогічною структурою [3]:

$$\left. \begin{aligned} c_{k5} &= c_{k+1,3} - r_2 c_{k+1,4} = \begin{vmatrix} c_{k+1,3} & r_2 \\ c_{k+1,4} & 1 \end{vmatrix} \\ c_{k6} &= c_{k+1,4} - r_3 c_{k+1,5} = \begin{vmatrix} c_{k+1,4} & r_3 \\ c_{k+1,5} & 1 \end{vmatrix} \\ &\dots\dots\dots \\ c_{ki} &= c_{k+1,i-2} - r_{i-3} c_{k+1,i-1} = \begin{vmatrix} c_{k+1,i-2} & r_{i-3} \\ c_{k+1,i-1} & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

де $r_{i-3} = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$; $i=1,2,3,\dots$ - номер рядка.

Процес заповнення таблиці продовжується до тих пір, поки при заданому порядку характеристичного рівняння не вийде один рядок, що містить один коефіцієнт, що відповідає вільному члену характеристичного рівняння. Раус довів, що для виконання умови стійкості і, отже, для розташування всіх коренів характеристичного рівняння в лівій півплощині необхідно і достатньо, щоб всі коефіцієнти першого стовпця таблиці були додатними, тобто потрібно, щоб виконувалися нерівності $a_0 > 0, a_1 > 0, c_{13} > 0, \dots$

Якщо виконуються нерівності і всі корені мають від'ємні реальні частини, то всі коефіцієнти характеристичного рівняння будуть додатними. Однак зворотне твердження не завжди справедливе. Не можна сказати, що якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні, то всі корені цього рівняння будуть розташовуватися в лівій півплощині. Додатні коефіцієнти характеристичного рівняння є необхідною умовою стійкості, але не у всіх випадках достатньою [3].

Частотний критерій стійкості А.В.Михайлова

Частотний критерій стійкості А.В.Михайлова (1936 р.) заснований на аналізі характеристичного полінома системи, в який підставляється [3]

$$\lambda = j\omega:$$

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 \quad (4.27)$$

Вираз (4.26) можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частин [3]:

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega), \quad (4.28)$$

де $U_D(\omega)$ - дійсна частина, складена з членів з парними степенями ω ;

$V_D(\omega)$ - уявна частина, яка утримує члени з непарними степенями ω .

Кожному фіксованому значенню ω відповідає комплексне число, яке можна зобразити вектором на комплексній площині. При зміні ω від 0 до ∞ цей вектор описує криву, яка називається годографом Михайлова. За видом годографа можна оцінювати стійкість системи. При $\omega = 0$ функція $D(j\omega) = a_0$, що випливає з виразу (4.27), а при $\omega \rightarrow \infty$ функція $D(j\omega)$ необмежено зростає, але проходить різну кількість квадрантів в залежності від порядку системи [3].

Критерій стійкості Михайлова формулюється так: автоматична система керування, якій відповідає рівняння (4.27), стійка, якщо при зміні ω від 0 до ∞ годограф $D(j\omega)$ виходить з дійсної додатної піввісі, огинає проти годинникової стрілки початок координат та проходить n квадрантів (n – порядок системи). Якщо система знаходиться на межі стійкості, то годограф проходить через початок координат (це відповідає наявності пари спряжених коренів) [3].

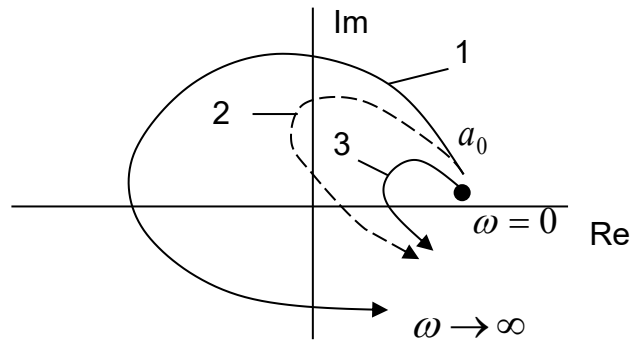


Рисунок 4.4 – Годограф Михайлова

На рис.4.4 годограф 1 відповідає стійкій системі ($n = 4$), 2 – на межі стійкості, 3 – нестійкій. При практичному використанні годографа Михайлова спочатку знаходять точки перетину його з координатними осями: при $U_D(\omega) = 0$ знаходять частоту, коли $D(j\omega)$ пересікається з уявною віссю і підставляють її значення у вираз для $V_D(\omega)$. Коли знайдено умови, за яких $D(j\omega)$ перетинає осі координат, тобто знайдено нулі $U_D(\omega)$ і $V_D(\omega)$, то повністю годограф будувати не потрібно: стійкість має місце, якщо нулі $U_D(\omega)$ та $V_D(\omega)$ чергуються з ростом ω , починаючи з $\omega = 0$, тобто $V_D(\omega) = 0$, а $U_D(\omega) > 0$.

Якщо систему можна розбити на ланки, то годограф $D(j\omega)$ можна отримати за правилами перемноження векторів.

4.4. Варіанти завдань

Характеристичне рівняння:

$$a_5 \frac{d^5 y}{dt^5} + a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x$$

Таблиця 4.1 – Варіанти завдань (параметри) для четвертої роботи

Варіант	a ₅	a ₄	a ₃	a ₂	a ₁	a ₀	b ₀
1.	10	63	169	201	60	15	1.
2.	5	10	4	8	4	9	2.
3.	2	36	100	125	67	5	3.
4.	1	5	10	14	5	7	4.
5.	1	12	60	120	9	12	5.
6.	1	9	43	120	195	150	6.
7.	50	80	50	14	2	0.1	7.
8.	3	2	10	10	5	1	8.
9.	7	25	33	22	7	1	9.
10.	1	4	8	8	4	1	10.
11.	1	2	8	1	2	1	11.
12.	2	10	17	14	6	1	12.
13.	3	7	18	16	4	7	13.
14.	6	70	10	13	7	9	14.
15.	4	50	23	80	30	5	15.
16.	1	3	33	35	14	10	16.
17.	1	2	7	6	6	3	17.
18.	3	21	33	3	3	1	18.
19.	18	63	20	19	5	5	19.
20.	8	10	1	11	8	8	20.
21.	5	44	55	9	9	4	21.
22.	5	9	13	11	3	1	22.
23.	3	17	18	9	8	7	23.
24.	7	6	4	7	1	3	24.
25.	1	12	23	4	4	1	25.
26.	5	35	41	8	8	1	26.
27.	1	2	7	6	6	8	27.
28.	10	10	57	66	35	20	28.
29.	1	5	23	44	33	4	29.
30.	4	100	121	30	3	3	30.

4.5. Приклад виконання роботи

Запишемо рівняння об'єкта із заданими коефіцієнтами:

$$3 \frac{d^5 y}{dt^5} + 7 \frac{d^4 y}{dt^4} + 18 \frac{d^3 y}{dt^3} + 16 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 7y = 13x \quad (4.29)$$

Замінімо $\frac{dy}{dt} \rightarrow p$. Рівняння набуває вигляду:

$$3p^5 + 7p^4 + 18p^3 + 16p^2 + 4p + 7 = 13x \quad (4.30)$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$3p^5 + 7p^4 + 18p^3 + 16p^2 + 4p + 7 = 0 \quad (4.31)$$

Визначення стійкості системи за допомогою критерію Гурвіца

З коефіцієнтів характеристичного рівняння складемо головний визначник Гурвіца розміром 5×5 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 16 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 18 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 16 & 7 \end{vmatrix} \quad (4.32)$$

За критерієм Гурвіца: для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі діагональні мінори визначника Гурвіца мали однакові знаки з першим коефіцієнтом характеристичного рівняння a_n ($a_n=7 > 0$, отже усі діагональні мінори мають бути додатними).

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 7 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 78 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 7 & 16 & 7 \\ 3 & 18 & 4 \\ 0 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 1199 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 7 & 16 & 7 & 0 \\ 3 & 18 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 7 \\ 0 & 3 & 18 & 4 \end{vmatrix} = -4885 < 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Робимо висновок, що система нестійка, оскільки не всі діагональні мінори є додатними.

Визначення стійкості системи за допомогою критерію Рауса

За критерієм Рауса: для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса мали однаковий знак ($a_n = 7 > 0$, отже коефіцієнти мають бути додатними).

Складемо таблицю Рауса: перші два рядки складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння, будь-які інші визначаються за формулою:

$$C_{i,k} = C_{i-2,k+1} - \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,1}} \cdot C_{i-1,k+1} \quad (4.34)$$

де i – номер рядка,

k – номер стовпця.

1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
3	$C_{3,1} = a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-3}$	$C_{3,2} = a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-5}$	$C_{3,3} = a_{n-6} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-7}$	$C_{3,4}$	...
4	$C_{4,1} = a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{C_{3,1}} \cdot C_{3,2}$	$C_{4,2} = a_{n-5} - \frac{a_{n-1}}{C_{3,1}} \cdot C_{3,3}$	$C_{4,3} = a_{n-7} - \frac{a_{n-1}}{C_{3,1}} \cdot C_{3,4}$	$C_{4,4}$	...
5	$C_{5,1} = C_{3,2} - \frac{C_{3,1}}{C_{4,1}} \cdot C_{4,2}$	$C_{5,2} = C_{3,3} - \frac{C_{3,1}}{C_{4,1}} \cdot C_{4,3}$	$C_{5,3} = C_{3,4} - \frac{C_{3,1}}{C_{4,1}} \cdot C_{4,4}$	$C_{5,4}$	...
...	...	...	...	...	...
n-1	$C_{n-1,1} = C_{n-3,2} - \frac{C_{n-3,1}}{C_{n-2,1}} \cdot C_{n-2,2}$	$C_{n-1,2} = C_{n-3,3} - \frac{C_{n-3,1}}{C_{n-2,1}} \cdot C_{n-2,3}$	$C_{n-1,3} = C_{n-3,4} - \frac{C_{n-3,1}}{C_{n-2,1}} \cdot C_{n-2,4}$	$C_{n-1,4}$	...
n	$C_{n,1} = C_{n-2,2} - \frac{C_{n-2,1}}{C_{n-1,1}} \cdot C_{n-1,2}$	$C_{n,2} = C_{n-2,3} - \frac{C_{n-2,1}}{C_{n-1,1}} \cdot C_{n-1,3}$	$C_{n,3} = C_{n-2,4} - \frac{C_{n-2,1}}{C_{n-1,1}} \cdot C_{n-1,4}$	$C_{n,4}$	...
n+1	$C_{n+1,1} = C_{n-1,2} - \frac{C_{n-1,1}}{C_{n,1}} \cdot C_{n,2}$	$C_{n+1,2} = C_{n-1,3} - \frac{C_{n-1,1}}{C_{n,1}} \cdot C_{n,3}$	$C_{n+1,3} = C_{n-1,4} - \frac{C_{n-1,1}}{C_{n,1}} \cdot C_{n,4}$	$C_{n+1,4}$	...

Маємо:

1.	3	18	4	0
2.	7	16	7	0
3.	$C_{3,1} = 18 - \frac{3}{7} \cdot 16 = 11.14$	$C_{3,2} = 4 - \frac{3}{7} \cdot 7 = 1$	$C_{3,3} = 0 - \frac{3}{7} \cdot 0 = 0$	0
4.	$C_{4,1} = 16 - \frac{7}{11.14} \cdot 1 = 15.37$	$C_{4,2} = 7 - \frac{7}{11.14} \cdot 0 = 7$	$C_{4,3} = 0 - \frac{7}{11.14} \cdot 0 = 0$	0
5.	$C_{5,1} = 1 - \frac{11.14}{15.37} \cdot 7 = -4.07$	$C_{5,2} = 0 - \frac{11.14}{15.37} \cdot 0 = 0$	$C_{5,3} = 0 - \frac{11.14}{15.37} \cdot 0 = 0$	0
6.	$C_{6,1} = 7 - \frac{15.37}{-4.07} \cdot 0 = 7$	$C_{5,2} = 0 - \frac{15.37}{-4.07} \cdot 0 = 0$	$C_{5,3} = 0 - \frac{15.37}{-4.07} \cdot 0 = 0$	0

Або

1.	3	18	4	0
2.	7	16	7	0
3.	11.14	1	0	0
4.	15.37	7	0	0
5.	-4.07	0	0	0
6.	7	0	0	0

У 5-ому рядку маємо коефіцієнт $-4.07 < 0$, отже система є нестійкою.

Визначення стійкості системи за допомогою критерію Михайлова

За критерієм Михайлова система стійка, якщо при $0 \leq \omega < \infty$ годограф Михайлова починається з додатної піввісі ($Re^D(0) > 0$) і проходить послідовно проти годинникової стрілки n (n – степінь характеристичного рівняння, за умовою маємо 5) квадрантів комплексної площини, при цьому

жодного разу не дорівнюючи нулю.

Вихідний код:

```
w = 0.001:0.001:2.5;  
p = 1i*w;  
W = 3*p.^5+7*p.^4+18*p.^3+16*p.^2+4*p+7;  
Re=real(W);  
Im=imag(W);  
plot (Re, Im);  
title('Годограф Михайлова');  
xlabel('Re');  
ylabel('Im');  
grid on;
```

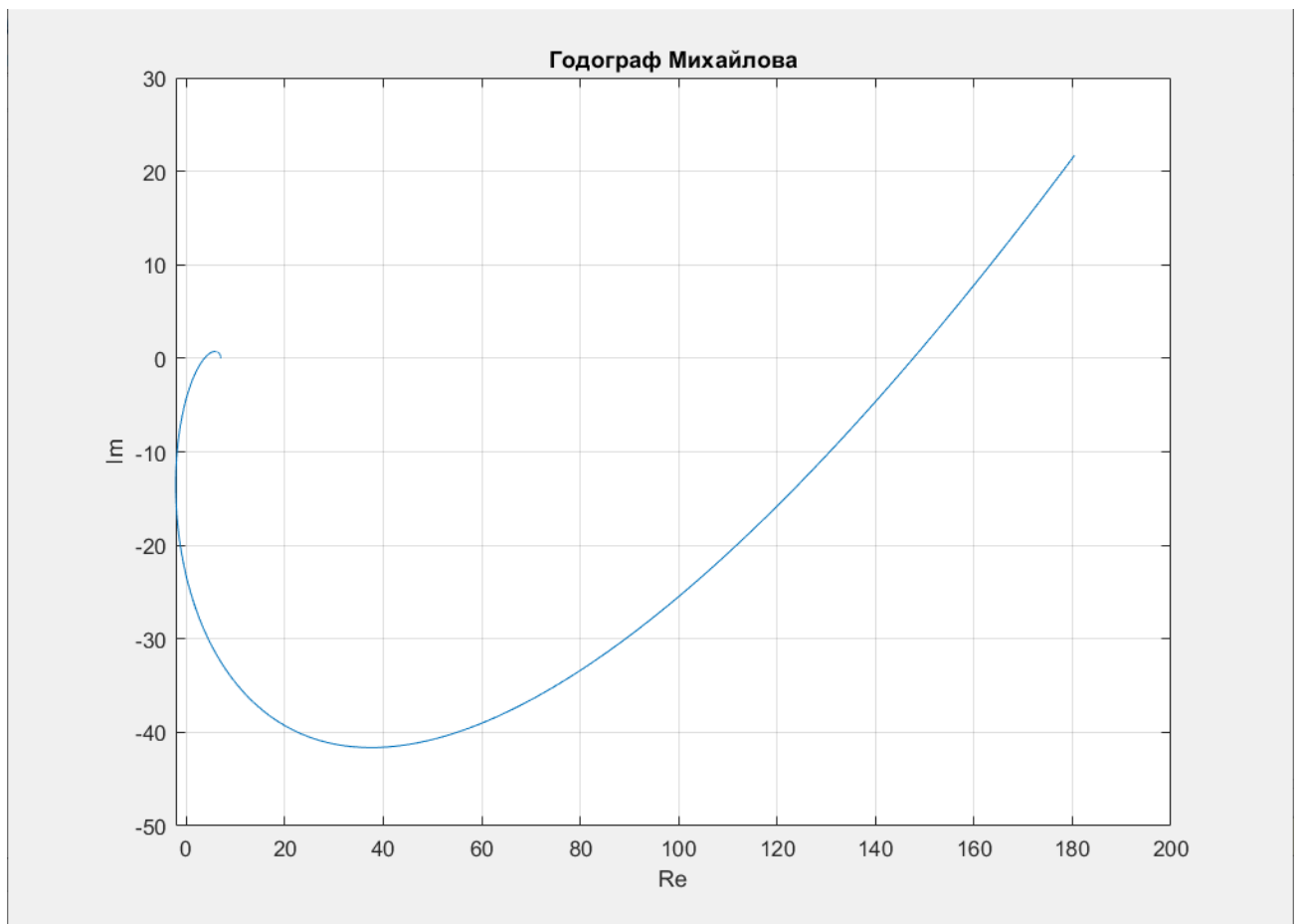


Рисунок 4.5 – Годограф Михайлова

Як можна побачити з рис.4.5 годограф не проходить послідовно через 5 квадрантів (він переходить з I відразу в III), отже система є нестійкою.

Визначення полюсів

Запишемо функцію передачі заданої системи:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{13}{3p^5 + 7p^4 + 18p^3 + 16p^2 + 4p + 7} \quad (4.35)$$

Використовуючи середовище Matlab, знайдемо полюси заданої системи:

Вихідний код:

```
k=[3 7 18 16 4 7];  
p=roots(k);
```

Отримаємо такі корені:

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.6542 + 2.0212i \\ p_2 &= -0.6542 - 2.0212i \\ p_3 &= -1.2426 \\ p_4 &= 0.1088 + 0.6358i \\ p_5 &= 0.1088 - 0.6358i \end{aligned} \quad (4.36)$$

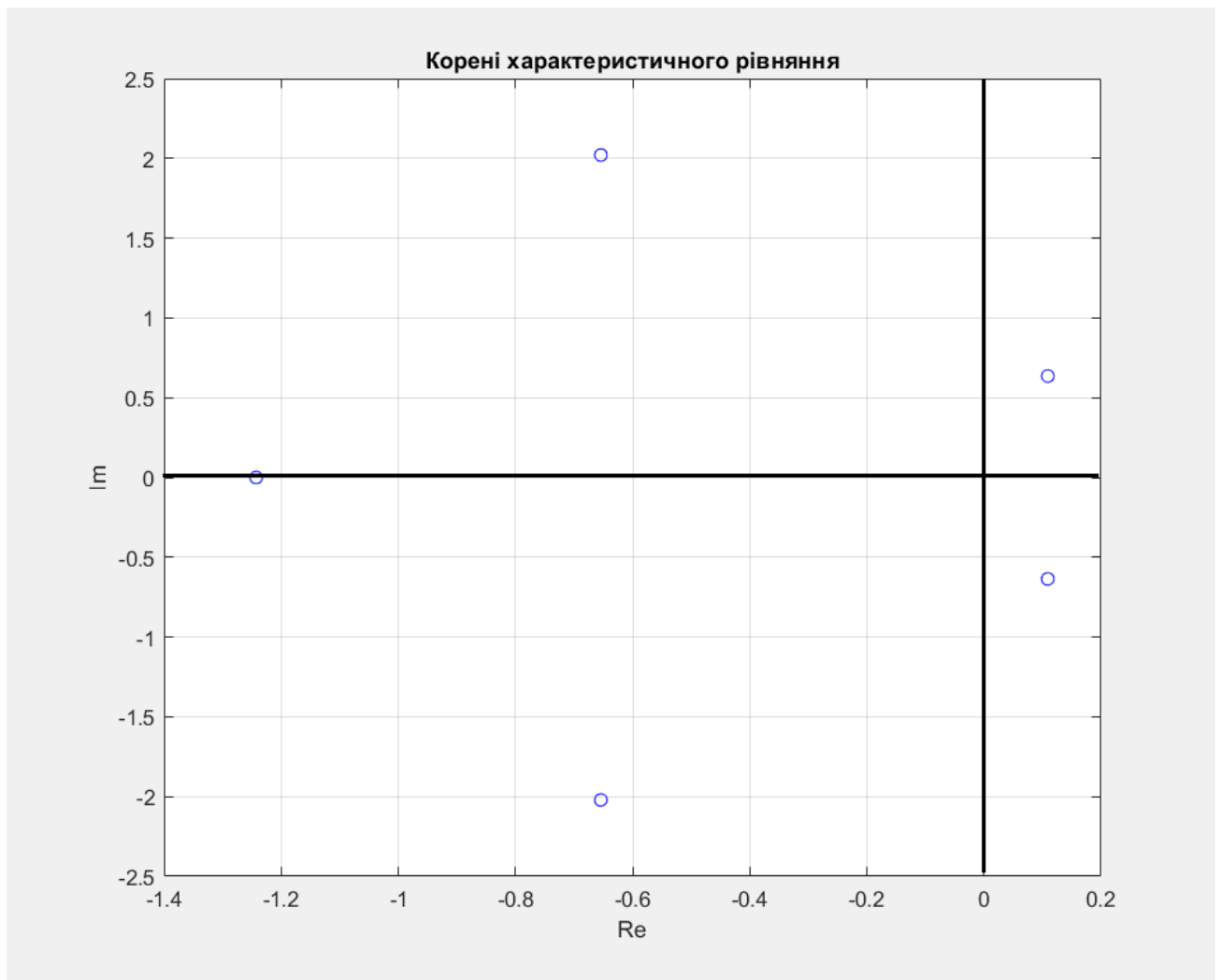


Рисунок 4.6 – Діаграма коренів характеристичного рівняння

Останні два корені мають дійсну складову $\text{Re} > 0$ (знаходяться в правій напівплощині), що порушує умову стійкості системи, отже дана система нестійка.

Використаємо Simulink для побудови перехідної характеристики.

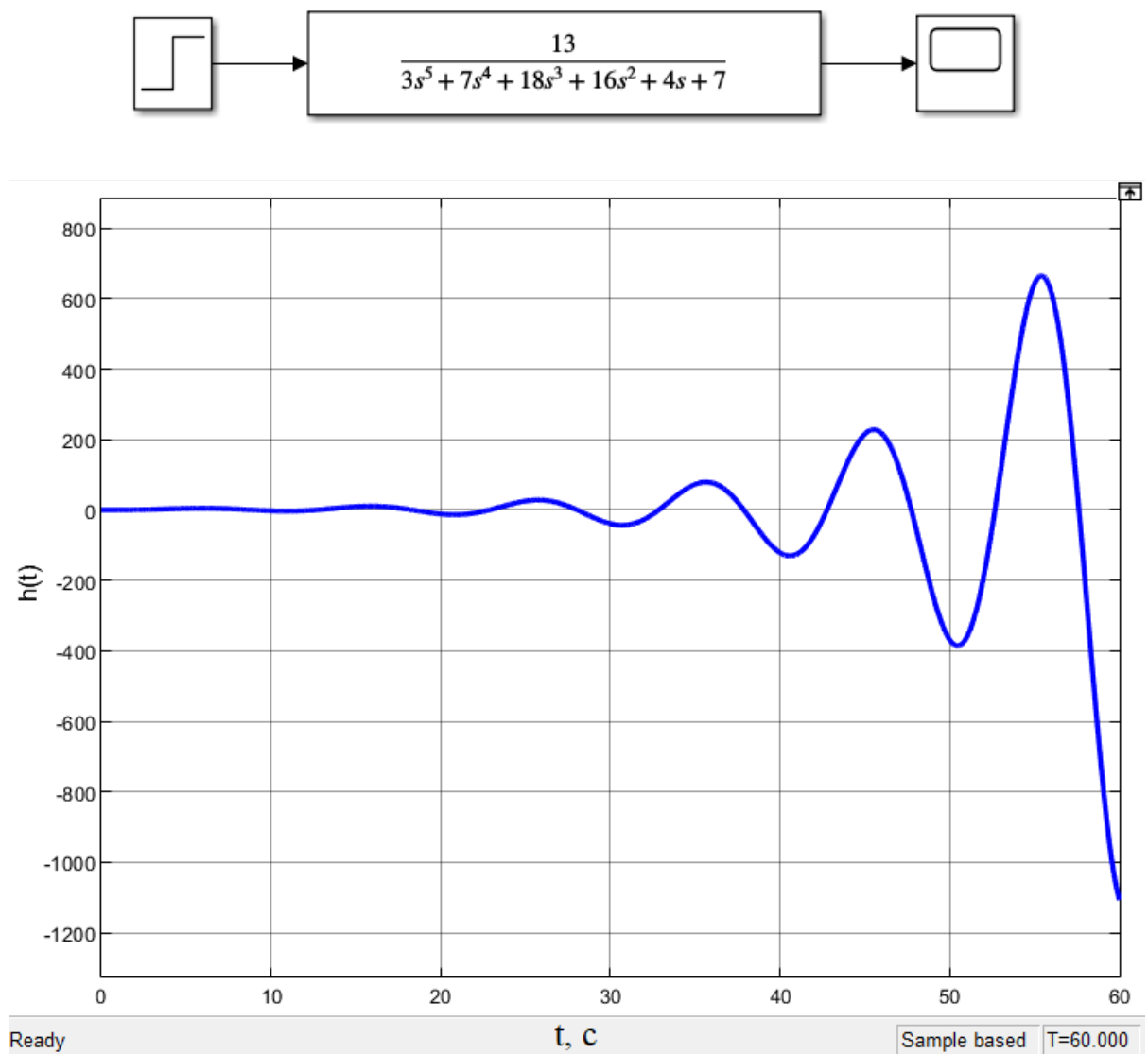


Рисунок 4.7 – Графік перехідної характеристики $h(t)$ нестійкої системи

Виведення об'єкту на границю стійкості

Змінимо значення дійсної частини на 0 у нестійкій парі комплексно-спряжених коренів:

$$\begin{aligned} p_4 &= 0 + 0.6358i \\ p_5 &= 0 - 0.6358i \end{aligned} \quad (4.37)$$

Розкладемо знаменник функції передачі на множники:

$$\begin{aligned} 3p^5 + 7p^4 + 18p^3 + 16p^2 + 4p + 7 &= \\ &= (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Підставивши значення полюсів отримаємо:

$$\begin{aligned}
& (p + 0.6542 + 2.0212i) \cdot (p + 0.6542 - 2.0212i) \cdot (p + 1.2426) \\
& \cdot (p - 0.6358i) \cdot (p + 0.6358i) = \\
& = (p + 0.6542 + 2.0212i) \cdot (p + 0.6542 - 2.0212i) \cdot (p + 1.2426) \cdot \\
& \cdot (p^2 + 0.404) = (p^2 + 1.3084 \cdot p + 4.513) \cdot (p + 1.2426) \cdot (p^2 + 0.404) = \\
& = (p^3 + 2.551 \cdot p^2 + 6.139 \cdot p + 5.608) \cdot (p^2 + 0.404) = \\
& = p^5 + 2.551 \cdot p^4 + 6.543 \cdot p^3 + 6.639 \cdot p^2 + 2.48 \cdot p + 2.266 \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Використовуючи середовище Matlab, знайдемо полюси заданої системи:

Вихідний код:

```
k2=[1 2.551 6.543 6.639 2.48 2.266];
p2=roots(k2);
```

Полюси в утвореній системі:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -0.6542 + 2.0212i \\
p_2 &= -0.6542 - 2.0212i \\
p_3 &= -1.2427 \\
p_4 &= 0. + 0.6356i \\
p_5 &= 0 - 0.6356i
\end{aligned} \quad (4.40)$$

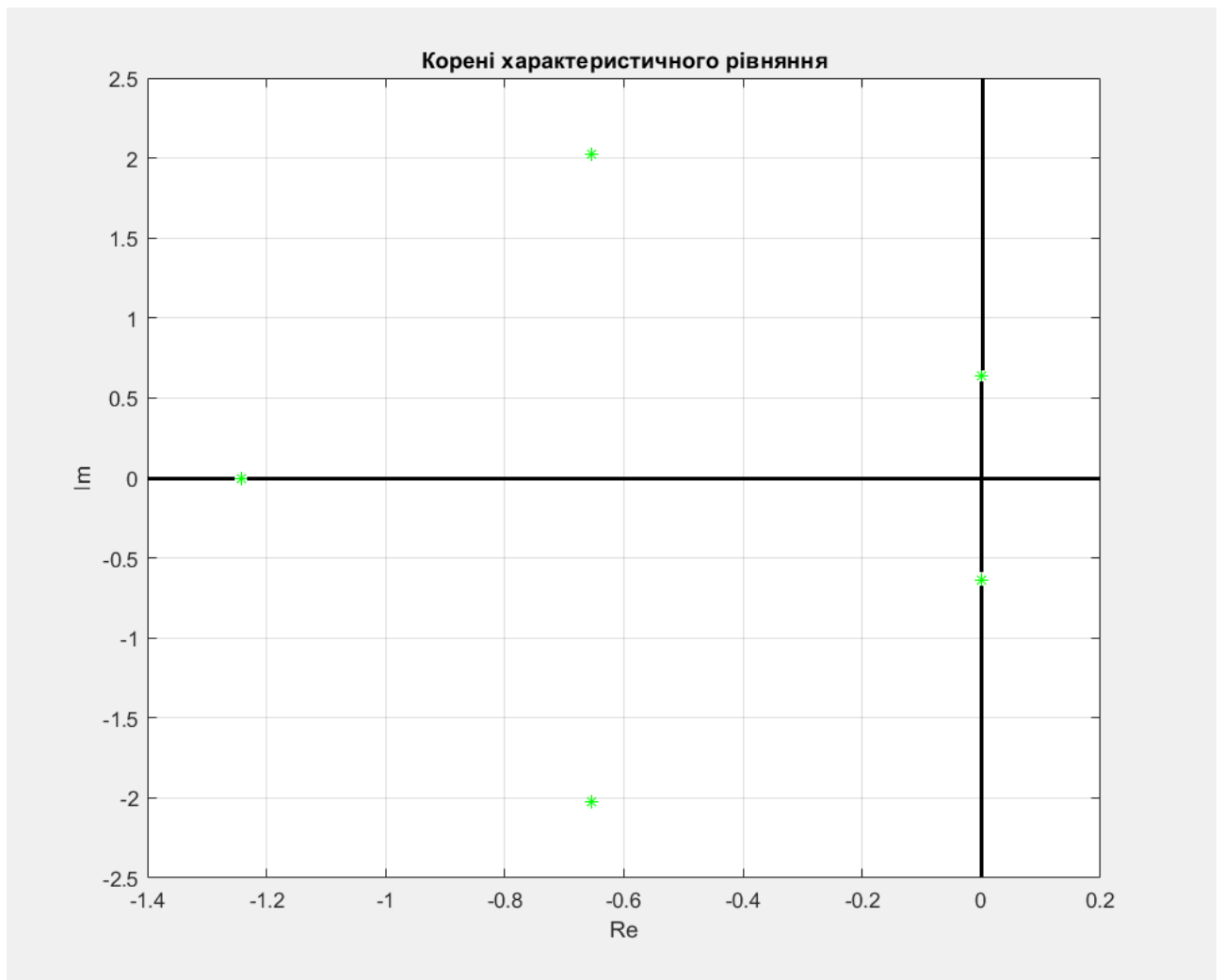


Рисунок 4.8 – Діаграма коренів характеристичного рівняння системи на межі стійкості

Функція передачі об'єкта, що знаходиться на межі стійкості:

$$W(p) = \frac{13}{p^5 + 2.551p^4 + 6.543p^3 + 6.639p^2 + 2.48p + 2.266} \quad (4.41)$$

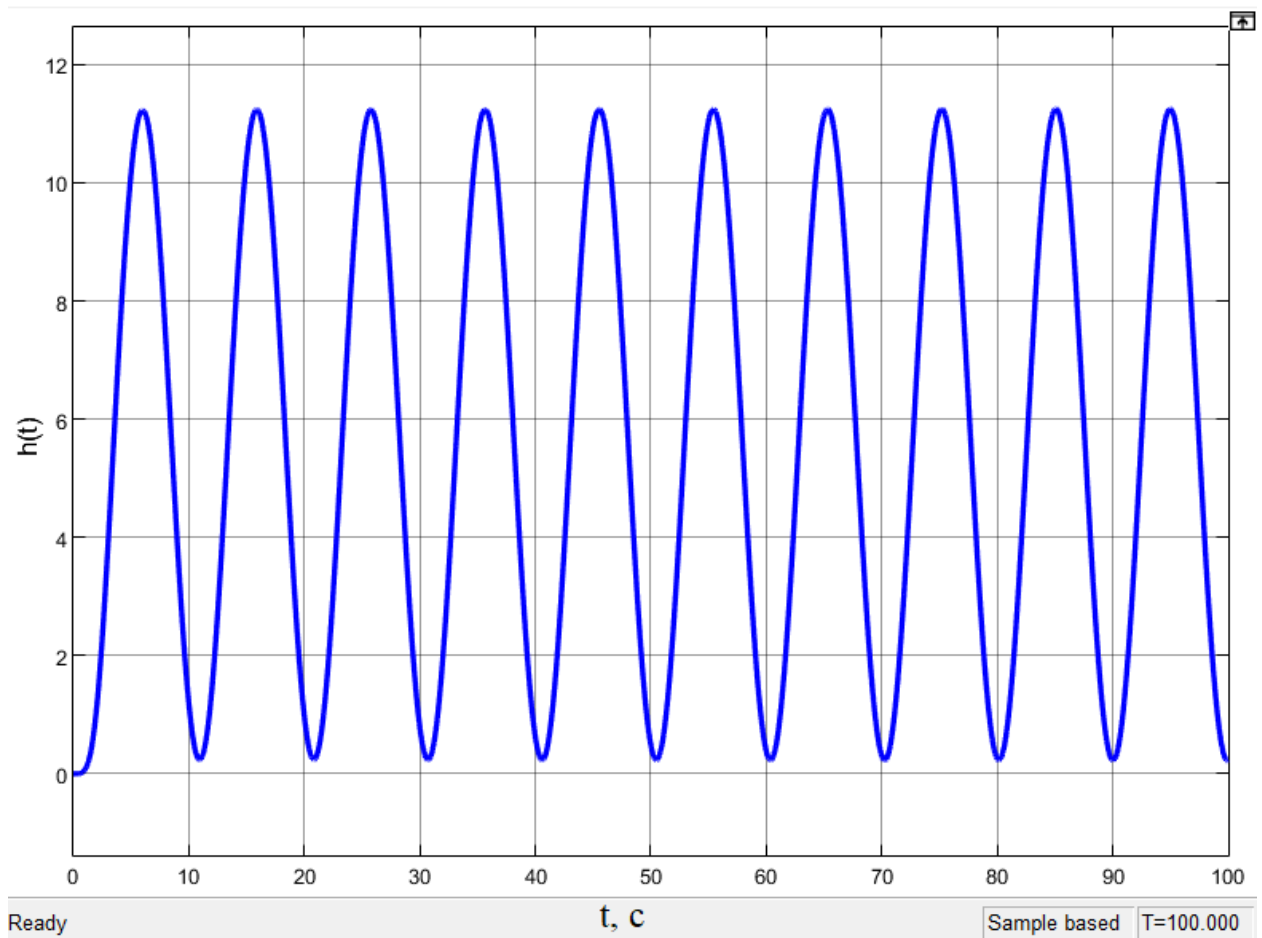


Рисунок 4.9 – Графік перехідної характеристики $h(t)$ системи на межі стійкості

Характеристичне рівняння тепер має вигляд:

$$p^5 + 2.551p^4 + 6.543p^3 + 6.639p^2 + 2.48p + 2.266 = 0 \quad (4.42)$$

Застосування критерію Гурвіца для зміненого об'єкта

З коефіцієнтів характеристичного рівняння складемо головний визначник Гурвіца розміром 5×5 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2.551 & 6.639 & 2.266 & 0 & 0 \\ 1 & 6.543 & 2.48 & 0 & 0 \\ 0 & 2.551 & 6.639 & 2.266 & 0 \\ 0 & 1 & 6.543 & 2.48 & 0 \\ 0 & 0 & 2.551 & 6.639 & 2.266 \end{vmatrix} \quad (4.43)$$

$$\Delta_1 = 2.551 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2.551 & 6.639 \\ 1 & 6.543 \end{vmatrix} = 10.05 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2.551 & 6.639 & 2.266 \\ 1 & 6.543 & 2.48 \\ 0 & 2.551 & 6.639 \end{vmatrix} = 56.37 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2.551 & 6.639 & 2.266 & 0 \\ 1 & 6.543 & 2.48 & 0 \\ 0 & 2.551 & 6.639 & 2.266 \\ 0 & 1 & 6.543 & 2.48 \end{vmatrix} = 0.016 < 0$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2.551 & 6.639 & 2.266 & 0 & 0 \\ 1 & 6.543 & 2.48 & 0 & 0 \\ 0 & 2.551 & 6.639 & 2.266 & 0 \\ 0 & 1 & 6.543 & 2.48 & 0 \\ 0 & 0 & 2.551 & 6.639 & 2.266 \end{vmatrix} = -0.58 < 0 \quad (4.44)$$

За критерієм Гурвіца, щоб система була близькою до межі стійкості, треба, щоб будь-який $\Delta_i \approx 0$, $i = \overline{1, n}$. Вище наведені приблизні розрахунки, тому приймемо значення $\Delta_i \in (-1; 1)$ такі, що $\Delta_i \approx 0$.

Застосування критерію Рауса для зміненого об'єкта

Побудуємо таблицю Рауса за відомим нам алгоритмом:

1.	1	6.543	2.48	0
2.	2.551	6.639	2.266	0
3.	$C_{3,1} = 6.543 - \frac{1}{2.551} \cdot 6.639$ $= 3.94$	$C_{3,2} = 2.48 - \frac{1}{2.551} \cdot 2.266$ $= 1.6$	$C_{3,3} = 0 - \frac{1}{2.551} \cdot 0 = 0$	0
4.	$C_{4,1} = 6.639 - \frac{2.551}{3.94} \cdot 1.6$ $= 5.6$	$C_{4,2} = 2.266 - \frac{2.551}{3.94} \cdot 0$ $= 2.266$	$C_{4,3} = 0 - \frac{2.551}{3.94} \cdot 0 = 0$	0
5.	$C_{5,1} = 1.6 - \frac{3.94}{5.6} \cdot 2.266$ $= 0.0057$	$C_{5,2} = 0 - \frac{3.94}{5.6} \cdot 0 = 0$	$C_{5,3} = 0 - \frac{3.94}{5.6} \cdot 0 = 0$	0
6.	$C_{6,1} = 2.266 - \frac{5.6}{0.0057} \cdot 0$ $= 2.266$	$C_{6,2} = 0 - \frac{15.37}{-4.07} \cdot 0 = 0$	$C_{6,3} = 0 - \frac{15.37}{-4.07} \cdot 0 = 0$	0

Або

1.	1	6.543	2.48	0
2.	2.551	6.639	2.266	0
3.	3.94	1.6	0	0
4.	5.6	2.266	0	0
5.	0.0057	0	0	0
6.	2.266	0	0	0

За критерієм Рауса один із коефіцієнтів має бути наближеним до нуля, щоб система перебувала на межі стійкості. У даному випадку ми маємо коефіцієнт $C_{5,1} = 0,0057$, який можна вважати таким, що $C_{5,1} \rightarrow 0$, отже

система знаходиться на границі стійкості.

Застосування критерію Михайлова для зміненого об'єкта

За критерієм Михайлова система перебуває на межі стійкості, якщо при $0 \leq \omega < \infty$ годограф Михайлова починається з додатної піввісі ($Re^D(0) > 0$) і проходить через нуль.

Вихідний код:

```
w2 = 0.001:0.001:1;  
p2=1i*w2;  
W2 = p2.^5+2.551*p2.^4+6.543*p2.^3+6.639*p2.^2+2.48*p2+2.266;  
Re=real(W2);  
Im=imag(W2);  
figure;  
plot (Re, Im);  
hold on;  
plot(0,0,'ko');  
title('Годограф Михайлова');  
xlabel('Re');  
ylabel('Im');  
grid on;
```

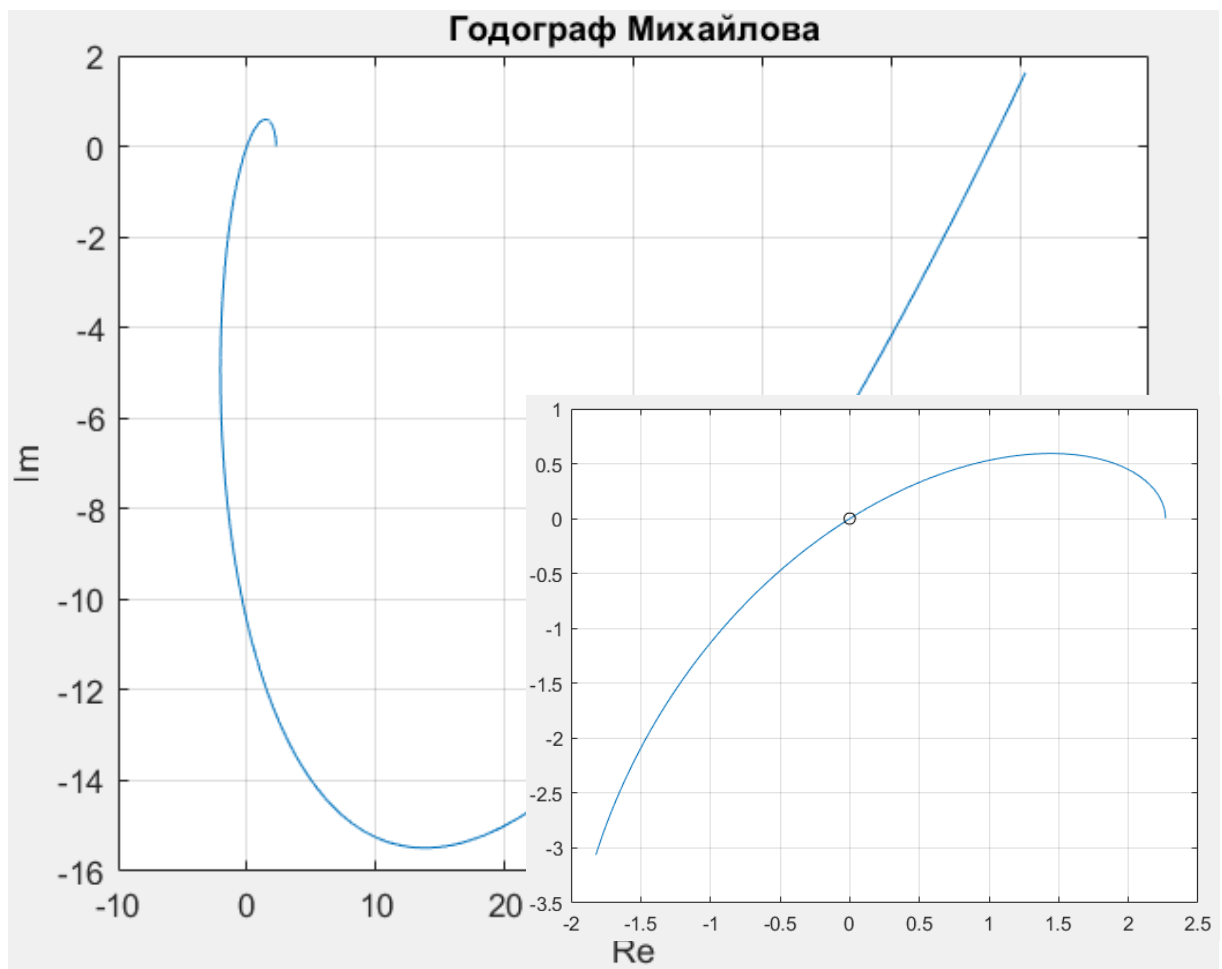


Рисунок 4.10 – Годограф Михайлова системи на межі стійкості

4.6. Контрольні запитання

1. Поняття стійкості системи.
2. Види стійкості.
3. Характеристичне рівняння та його корені.
4. Теореми Ляпунова щодо стійкості лінеаризованих систем.
5. Критерій Гурвіца.
6. Критерій Рауса.
7. Критерій Михайлова.

5. Лабораторна робота №5

Дослідження стійкості замкнутої системи

5.1. Мета роботи

Вивчити поняття стійкості замкнутих систем, навчитися аналізувати стійкість системи використовуючи критерій Найквіста, навчитися визначати область стійкості системи, використовуючи D-розбиття.

5.2. Завдання

- Синтезувати замкнену систему у відповідності до варіанту.
- Визначити за допомогою критерія Найквіста область стійкості по заданому параметру.
- Визначити за допомогою D-розбиття область стійкості по заданому параметру.
- Побудувати за допомогою Matlab Simulink перехідні процеси у системі за каналами «завдання-вихід» та «збурення-вихід» при параметрах зворотного зв'язку, що відповідають стійкій системі та системі, яка знаходиться на границі стійкості.

5.3. Теоретичні відомості

Критерій Найквіста

Цей критерій дозволяє судити про стійкість замкнутої системи по амплітудно-фазовій частотній характеристиці (АФХ) розімкнутої системи. Умова стійкості замкнутої системи зводиться до вимоги, щоб годограф АФЧХ розімкнутої системи не охоплював точку $(-1;j0)$. На рис.5.3.1 годографи 1 і 4 відповідають стійкій системі, годограф 3 - нестійкій, годограф 2 - на межі стійкості. Якщо, наприклад, зменшити коефіцієнт підсилення в нестійкій системі, то її годограф АФЧХ стиснеться до початку координат, в результаті чого система стане стійкою. Навпаки, при збільшенні коефіцієнта передачі годограф стійкої системи зрештою охопить точку $(-1;j0)$ і система втратить стійкість [3, 4].

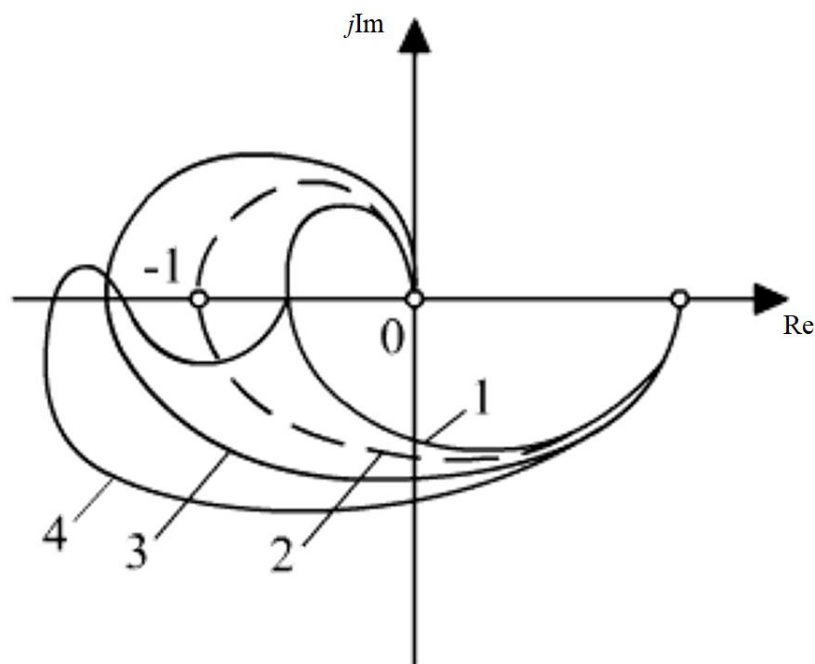


Рисунок 5.1 – Годограф Найквіста

Дане вище формулювання критерію Найквіста відноситься до систем, які є стійкими в розімкнутому стані. При наявності місцевих зворотних зв'язків повинна бути ще перевірена стійкість утворених цими зв'язками контурів. Для цього, у свою чергу, може бути застосований критерій Найквіста або будь-який інший [3, 4].

У випадку, коли системи є нестійкою в розімкненому стані, критерій Найквіста

формулюється так: замкнена система буде стійкою, якщо $W_{роз}(j\omega)$ охоплює $\frac{k}{2}$ разів точку з координатами $(-1; j0)$, k - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

Критерій Найквіста зручно використовувати для аналізу систем, які мають у своїй структурі ланки запізнювання. У цьому випадку АФХ розімкненої системи можна подати у вигляді [3, 4]:

$$W_{роз}(j\omega) = W_{осн}(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_{zn}} \quad (5.1)$$

де: $W_{осн}(j\omega)$ - АФХ основних елементів системи;

$e^{-j\omega\tau_{zn}}$ - АФХ ланки запізнювання.

Наявність ланки запізнювання погіршує, як правило, стійкість й існує критичне запізнювання, при якому система виходить на межу стійкості - $\omega_{zn}^{кр}$.

D-розбиття за одним параметром

При зміні параметрів системи змінюються коефіцієнти характеристичного рівняння, а отже, корені характеристичного рівняння переміщуються на комплексній площині, і при деяких числових значеннях потрапляють на межу стійкості (уявну вісь), або йдуть у праву півплощину [2].

Необхідно знати область можливих значень параметра системи, при яких система буде стійка.

Це завдання дозволяє вирішити критерій Гурвіца і критерій Михайлова, але тільки для коефіцієнта підсилення. Ці критерії не дозволяють знайти область постійних часу, при яких система буде стійка. Це завдання вирішує метод D-розбиття.

Як параметр для варіації може виступати будь-яка постійна часу або будь-який коефіцієнт. Для знаходження області можливих значень параметра в характеристичному рівнянні виділяють обраний параметр. У результаті виходить рівняння виду [2]

$$B \cdot M(p) + N(p) = 0, \quad (5.2)$$

де

B - обраний параметр (постійна часу або коефіцієнт посилення);

$M(p)$ - частина характеристичного рівняння, яка містить обраний параметр B ;

$N(p)$ - частина характеристичного рівняння, яка не містить параметра B .

$$B = -\frac{N(p)}{M(p)}, \quad (5.3)$$

або $p = j\omega$,

$$B = -\frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (5.4)$$

Змінюючи частоту від мінус нескінченності до плюс нескінченності, будують межі D-розбиття.

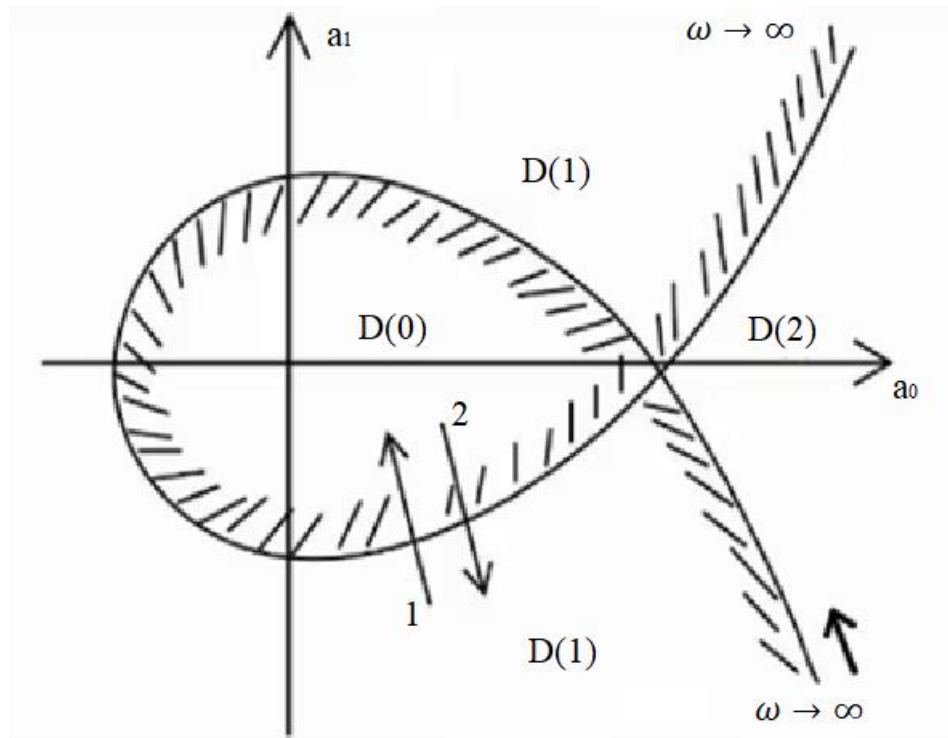


Рисунок 5.2 – D-розбиття

Межа D-розбиття штрихується одинарною штриховкою зліва при русі в напрямку зростання частоти [2].

Область, в бік якої направлено найбільше штрихів, є претендентом на стійкість за обраним параметром B (як правило, це замкнута область D).

Щоб перевірити це, беруть будь-яке значення параметра з області $D(0)$ і роблять перевірку стійкості. Якщо система стійка при даному значенні параметра, то вона буде стійка при будь-якому іншому значенні параметра з цієї області, і остаточно область $D(0)$ приймають як область стійкості параметра B [2].

5.4. Варіанти завдань

Функція передачі прямого зв'язку:

$$W_{пз}(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} e^{-p}$$

Функція передачі від'ємного зворотного зв'язку:

1-й випадок: $W_{33}(p) = k + \frac{1}{Tp}$

2-й випадок: $W_{33}(p) = k_1$

Таблиця 5.1 – Варіанти завдань (параметри) для п'ятої роботи :

№ вар	a ₁	a ₂	a ₃	b ₀	b ₁	b ₂	k=k ₁	T	Параметри для досліду
1.	10	10	10	5	0	0	1	20	k,k ₁
2.	7	6	8	2	1	0	1	20	k,k ₁
3.	6	6	10	4	0	0.5	1	20	k,k ₁
4.	10	4	4	0.5	2	0	1	50	k,k ₁
5.	8	10	30	3	0	0	1	50	k,k ₁
6.	6	8	2	0.4	1	2	1	50	k,k ₁
7.	5	4	4	4	0	0	1	50	k,k ₁
8.	2	1	4	10	2	0	1	50	k,k ₁
9.	2	1	9	0.1	0	2	1	100	k,k ₁
10.	3	3	3	20	1	0	1	100	k,k ₁
11.	8	5	50	2	0	0	1	100	k,k ₁
12.	7	7	70	15	2	4	1	100	k,k ₁
13.	6	5	24	5	0	2	1	100	k,k ₁
14.	4	4	40	1	5	0	1	20	k,k ₁
15.	23	3	34	4	2	3	1	20	k,k ₁
16.	15	30	14	4	0	0	1	20	k,k ₁
17.	16	3	20	4	0	1	1	50	k,k ₁
18.	8	5	15	5	1	1	1	50	k,k ₁
19.	14	9	29	2	0	0	1	50	k,k ₁
20.	10	9	80	1	1	1	1	50	k,k ₁
21.	9	4	21	2	1	3	1	50	k,k ₁
22.	7	4	27	2	0	0	1	100	k,k ₁
23.	13	25	50	1	1	3	1	100	k,k ₁
24.	10	3	15	4	0	0	1	100	k,k ₁
25.	6	8	8	3	0	0	1	20	k,k ₁
26.	7	2	5	4	0	0	1	100	k,k ₁
27.	5	3	9	5	0	0.5	1	50	k,k ₁
28.	13	5	60	1	1	3	1	100	k,k ₁
29.	17	7	45	5	0	0	1	100	k,k ₁
30.	7	4	8	7	0	0	1	100	k,k ₁

5.5. Приклад виконання роботи

Визначення області стійкості системи за допомогою критерія Найквіста

Функція передачі прямого зв'язку:

$$W_{\text{пз}}(p) = \frac{2p^2 + 5}{24p^3 + 5p^2 + 6p + 1} e^{-p} \quad (5.5)$$

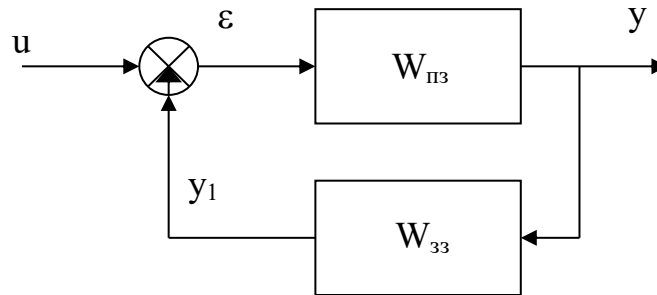


Рисунок 5.3 – Замкнена система

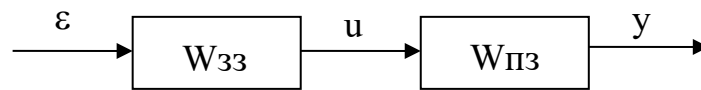


Рисунок 5.4 – Розімкнена система

1-й випадок:

Функція передачі зворотного зв'язку:

$$W_{\text{зз}}(p) = 1 + \frac{1}{100p} \quad (5.6)$$

Для визначення стійкості даної замкненої системи за критерієм Найквіста необхідно дослідити розімкнену систему (рис.5.4).

Функція передачі розімкненої системи:

$$\begin{aligned} W_{\text{РС}}(p) &= W_{\text{пз}}(p) W_{\text{зз}}(p) = \left(\frac{2p^2 + 5}{24p^3 + 5p^2 + 6p + 1} e^{-p} \right) \left(1 + \frac{1}{100p} \right) = \\ &= \frac{200p^3 + 2p^2 + 500p + 5}{2400p^4 + 500p^3 + 600p^2 + 100p} e^{-p} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Побудуємо в середовищі Matlab годограф Найквіста при заданому значенні k :

```
w=0:0.001:2;
p=1i.*w;
W1=(2.*p.^2+5).*exp(-p)./(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);
W2=1+1./(100.*p);
W=W1.*W2;
Re=real(W);
Im=imag(W);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
grid on;
```

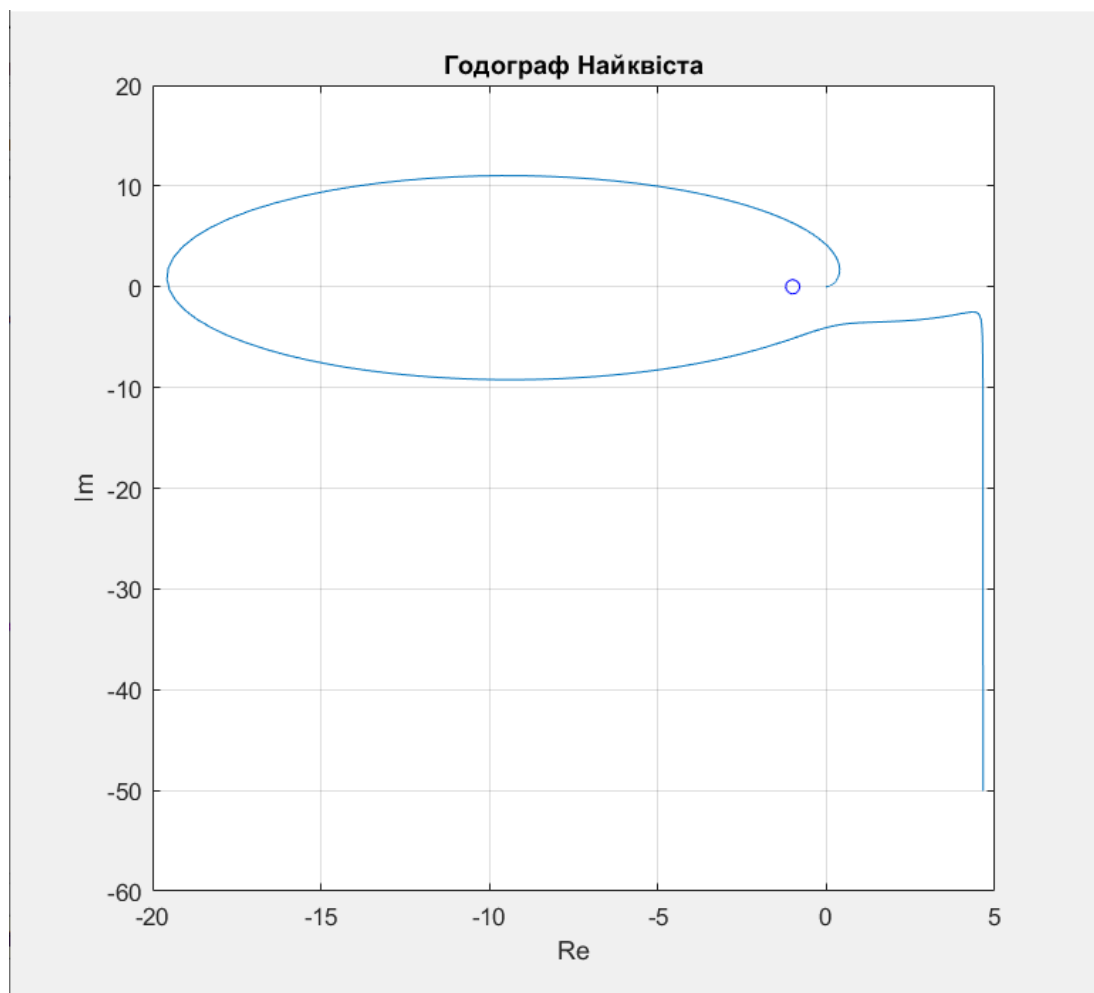


Рисунок 5.5 – Годограф Найквіста

Згідно критерію Найквіста система буде стійкою, якщо годограф не охоплюватиме точку $(-1; j0)$. У даному випадку ця умова не виконується, тому

система є нестійкою.

2-й випадок:

Функція передачі зворотного зв'язку:

$$W_{\text{зз}}(p) = k_1 = 1 \quad (5.8)$$

Для визначення стійкості даної замкненої системи за критерієм Найквіста необхідно дослідити розімкнену систему (рис. 5.6).

Функція передачі розімкненої системи:

$$W_{\text{РС}}(p) = W_{\text{пз}}(p) W_{\text{зз}}(p) = \frac{2p^2 + 5}{24p^3 + 5p^2 + 6p + 1} e^{-p} \quad (5.9)$$

Побудуємо в середовищі Matlab годограф Найквіста при заданому значенні k_I :

```
w=0:0.001:2;  
p=1i.*w;  
W=(2.*p.^2+5).*exp(-p)./(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);  
Re=real(W);  
Im=imag(W);  
plot(Re,Im);  
hold on;  
plot(-1,0,"bo");  
xlabel('Re');  
ylabel('Im');  
title("Годограф Найквіста");  
grid on;
```

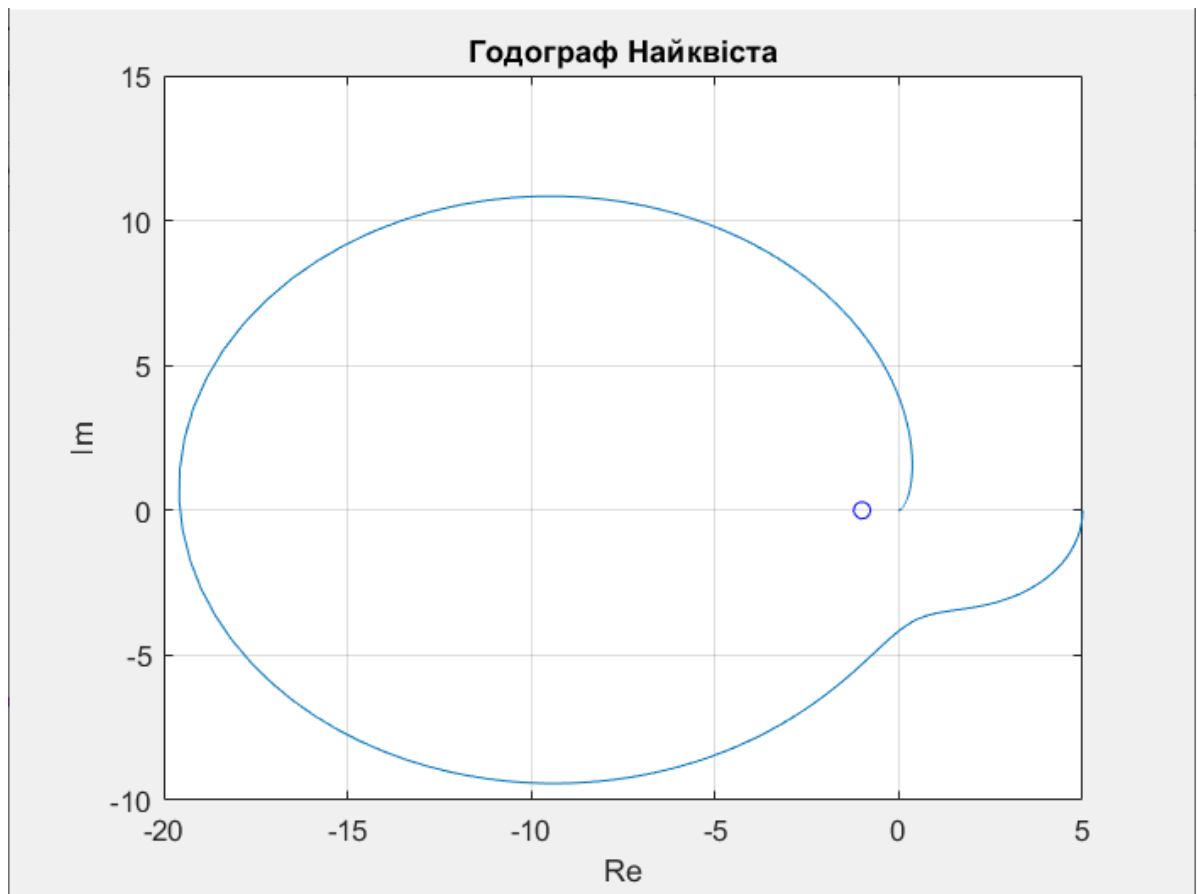


Рисунок 5.6 – Годограф Найквіста

Згідно критерію Найквіста система нестійка, оскільки годограф охоплює точку $(-1; j0)$.

D-розбиття і визначення області стійкості по заданому параметру

1-й випадок:

Функція передачі замкненої системи:

$$W_{3c}(p) = \frac{W_{\Pi 3}(p)}{1 + W_{\Pi 3}(p) \cdot W_{33}(p)} \quad (5.10)$$

$$W_{3c}(p) = \frac{\frac{b_2 p^2 + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} e^{-p}}{1 + \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} e^{-p} \cdot \left(\frac{k \cdot T p + 1}{T p} \right)} \quad (5.11)$$

Характеристичне рівняння заданої системи є знаменником функції передачі:

$$\begin{aligned}
 D(p) &= (a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1)Tp + (b_2p^2 + b_0)(k \cdot Tp + 1)e^{-p} = \\
 &= b_2p^2 \cdot k \cdot Tpe^{-p} + b_2p^2 \cdot e^{-p} + b_0k \cdot Tpe^{-p} + b_0e^{-p} + a_3Tp^4 + a_2Tp^3 + \\
 &\quad + a_1Tp^2 + Tp = 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Звідси виразимо k :

$$\begin{aligned}
 -k \cdot (b_2p^2 \cdot Tpe^{-p} + b_0Tpe^{-p}) &= b_2p^2 \cdot e^{-p} + b_0e^{-p} + a_3Tp^4 + a_2Tp^3 + \\
 &\quad + a_1Tp^2 + Tp \\
 k &= \frac{-(b_2p^2 \cdot e^{-p} + b_0e^{-p} + a_3Tp^4 + a_2Tp^3 + a_1Tp^2 + Tp)}{b_2p^3 \cdot Tpe^{-p} + b_0Tpe^{-p}};
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Побудуємо лінію D-розбиття за параметром k у середовищі Matlab:

```

w=-1:0.01:0.6;
a1=6;
a2=5;
a3=24;
b0=5;
b2=2;
T=100;
p=1i*w;
k=-(b2.*p.^2.*exp(-p)+ b0.*exp(-p)+
a3.*T.*p.^4+a2.*T.*p.^3+a1.*T.*p.^2+T.*p) ./ (b2.*T.*p.^3.*exp(-
p)+b0.*T.*p.*exp(-p));
Re=real(k);
Im=imag(k);
plot(Re,Im);
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("D-розбиття")
grid on;

```

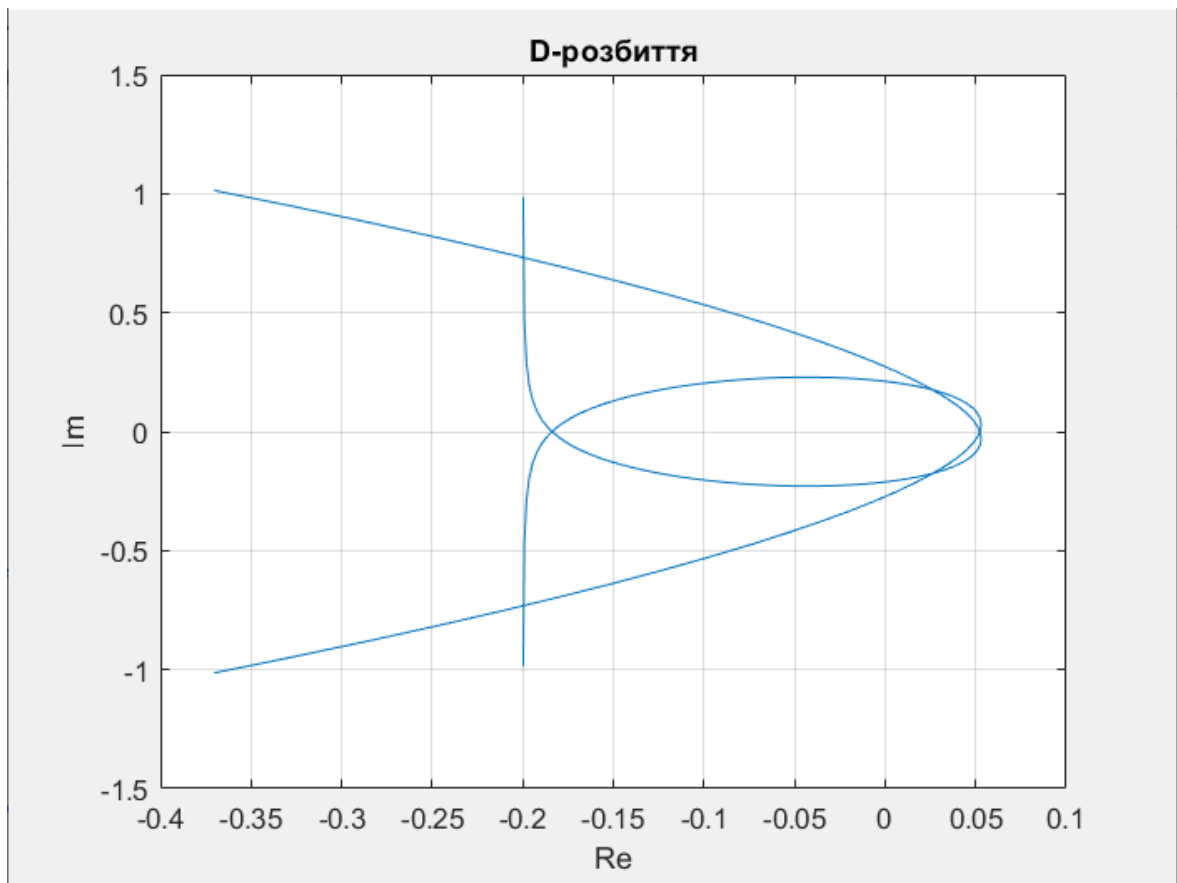


Рисунок 5.7 – D-розбиття за параметром k

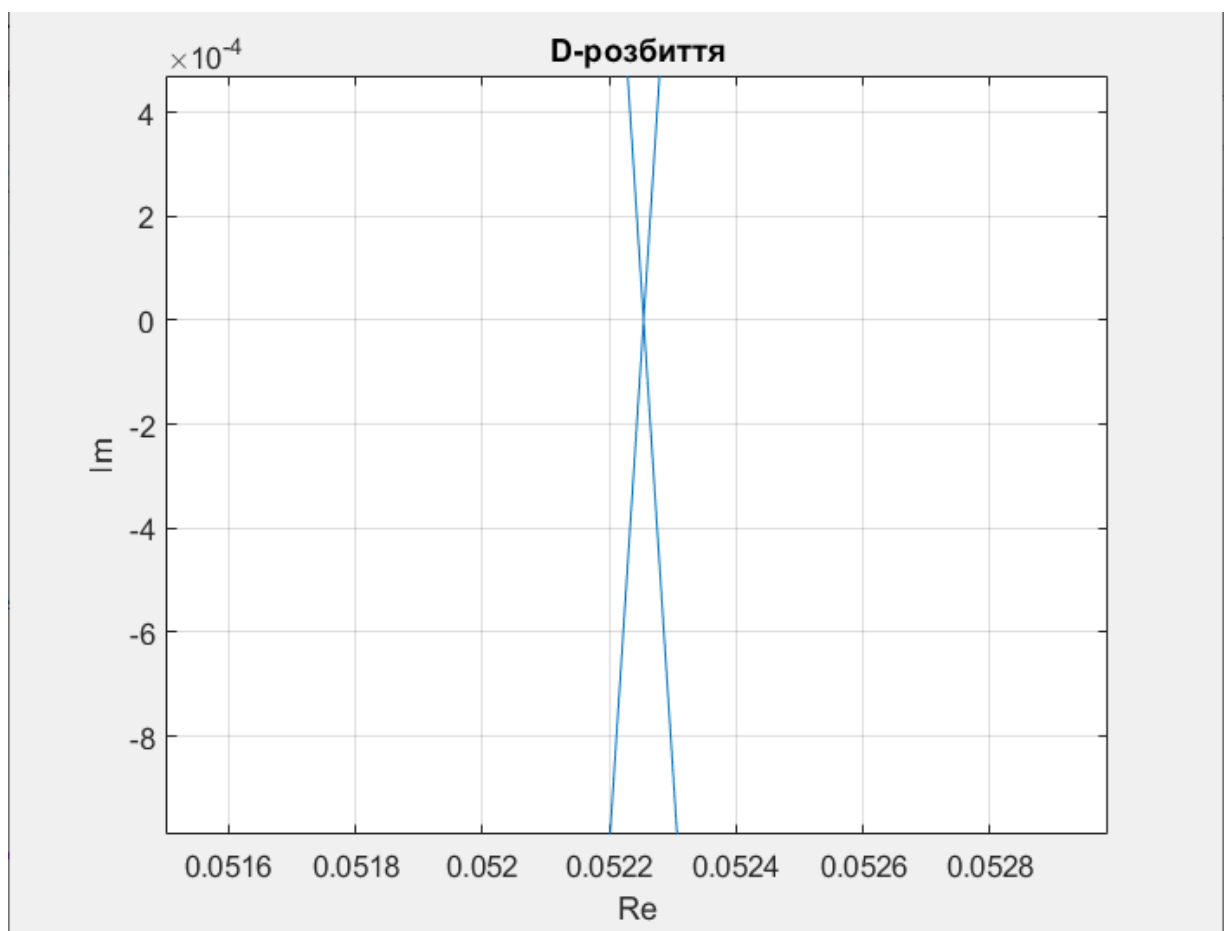
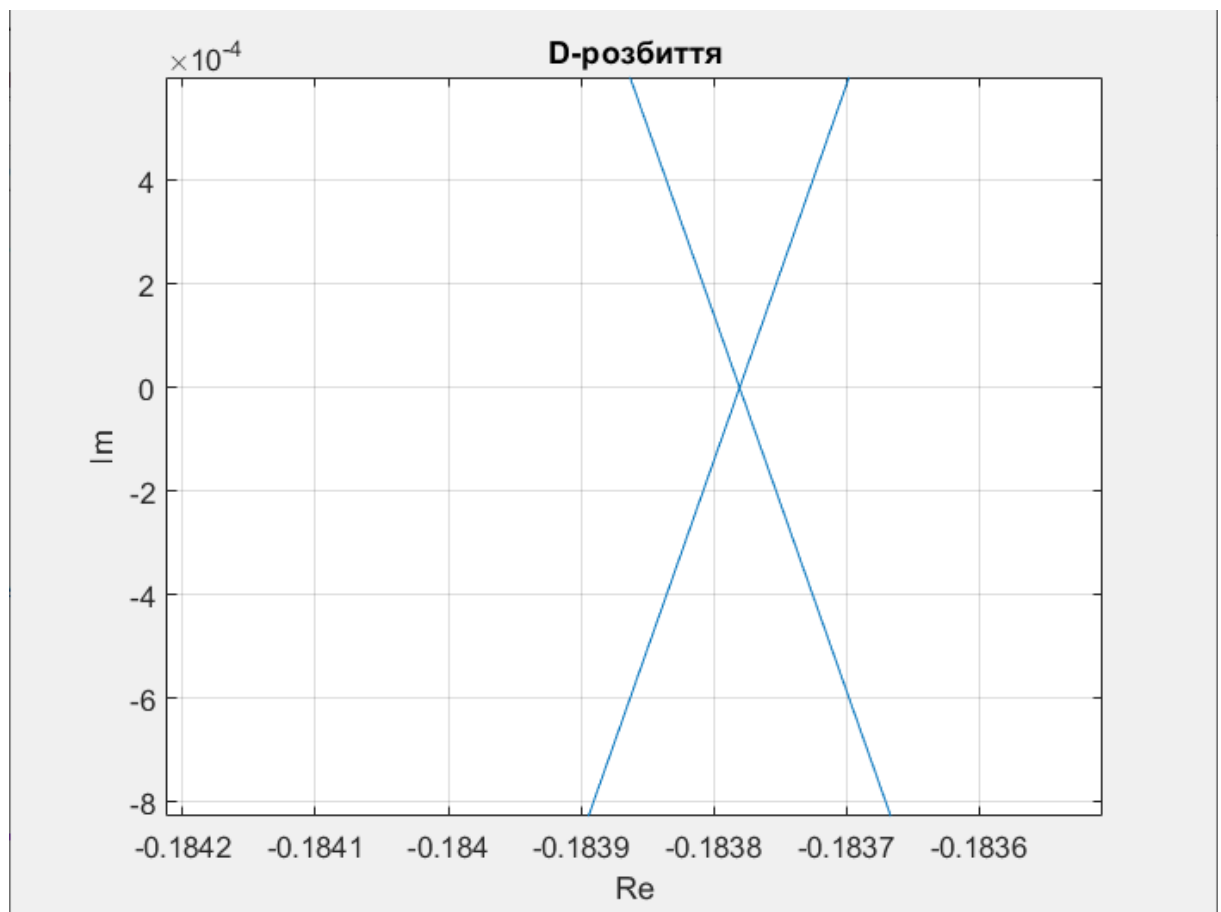


Рисунок 5.8 – Межі D-розбиття за параметром k

Маємо область стійкості приблизно: $-0.1838 < k < 0.05225$.

Звідси можна зробити висновок, що система знаходиться на межі стійкості при значенні $k = 0.05225$ або $k = -0.1838$.

Переконаємося в цьому, побудувавши годограф Найквіста.

```
k1=0.05225;
k2=-0.1838;
w=0:0.001:2;
p=1i.*w;
W1=(2.*p.^2+5).*exp(-p)/(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);
W2=k1+1./(100.*p);
W3=k2+1./(100.*p);
W=W1.*W2;
Re=real(W);
Im=imag(W);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста (k=0.05225)");
grid on;
figure;
Wn=W1.*W3;
Re=real(Wn);
Im=imag(Wn);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста (k=-0.1838)");
grid on;
```

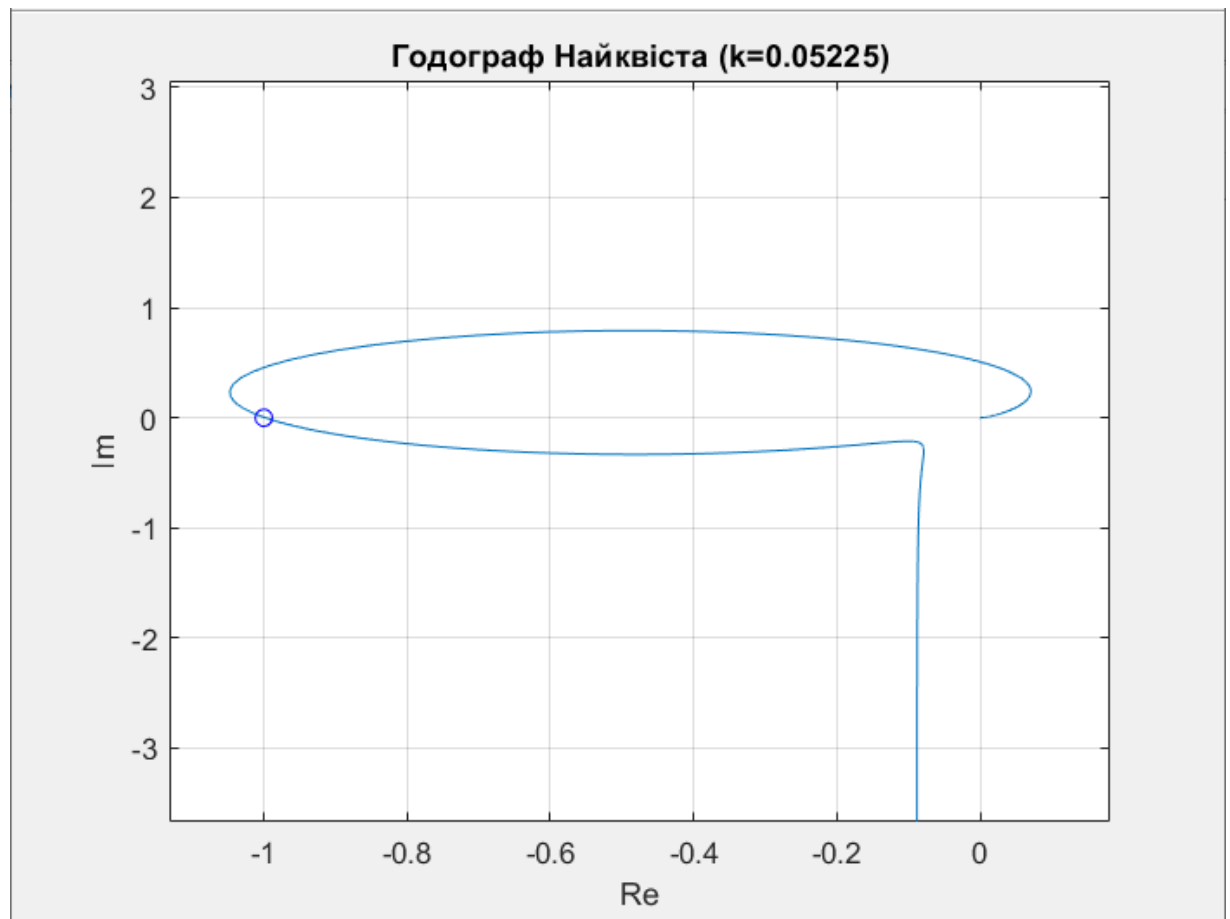


Рисунок 5.9 – Годограф Найквіста при значенні $k = 0.05225$

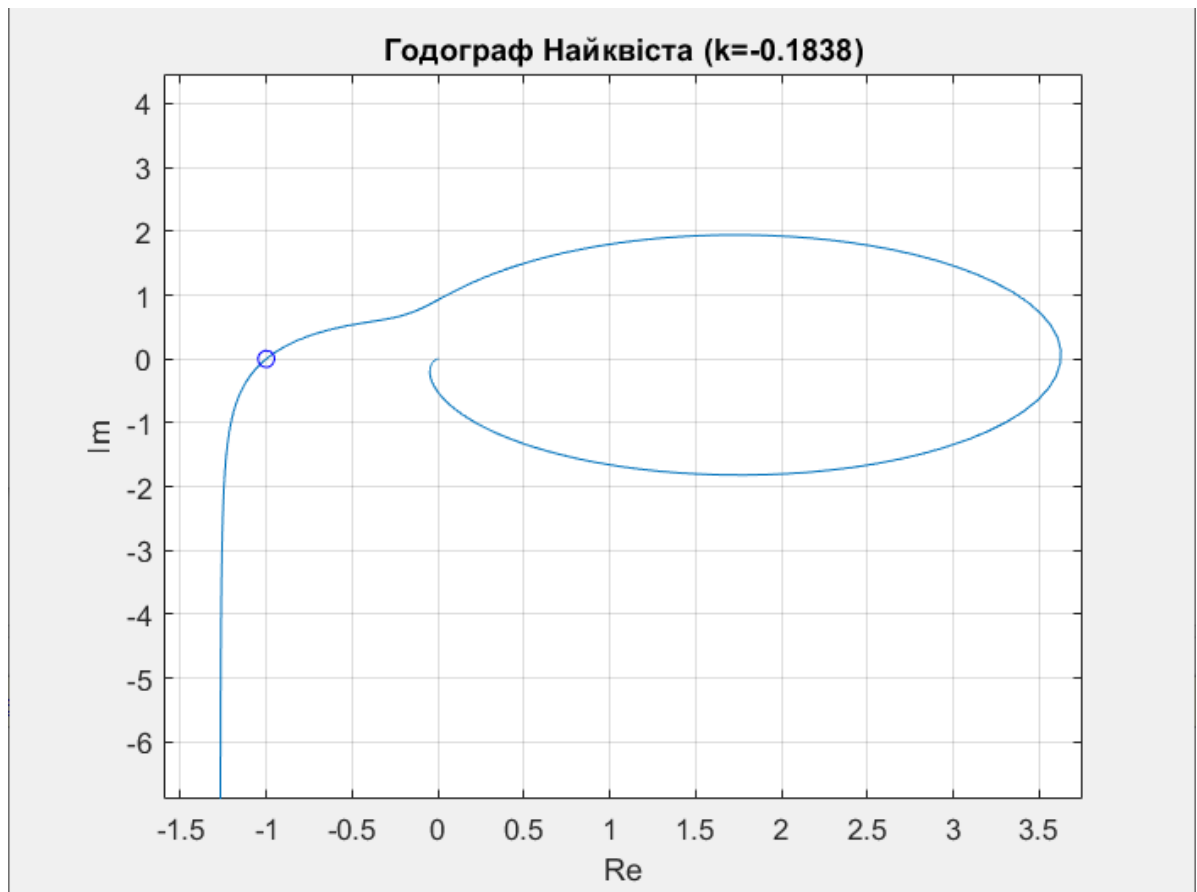


Рисунок 5.10 – Годограф Найквіста при значенні $k = -0.1838$

На рис.5.9 та рис.5.10 можна побачити, що годограф Найквіста проходить через точку $(-1; j0)$, отже система знаходиться на межі стійкості.

Для того, щоб система була стійкою оберемо k зі знайденого діапазону. Нехай $k = -0.1$. Побудуємо годограф Найквіста, щоб перевірити, чи є система стійкою.

```
k=-0.1;
w=0:0.001:2;
p=1i.*w;
W1=(2.*p.^2+5).*exp(-p)./(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);
W2=k+1./(100.*p);
W=W1.*W2;
Re=real(W);
Im=imag(W);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста стійкої системи");
grid on;
```

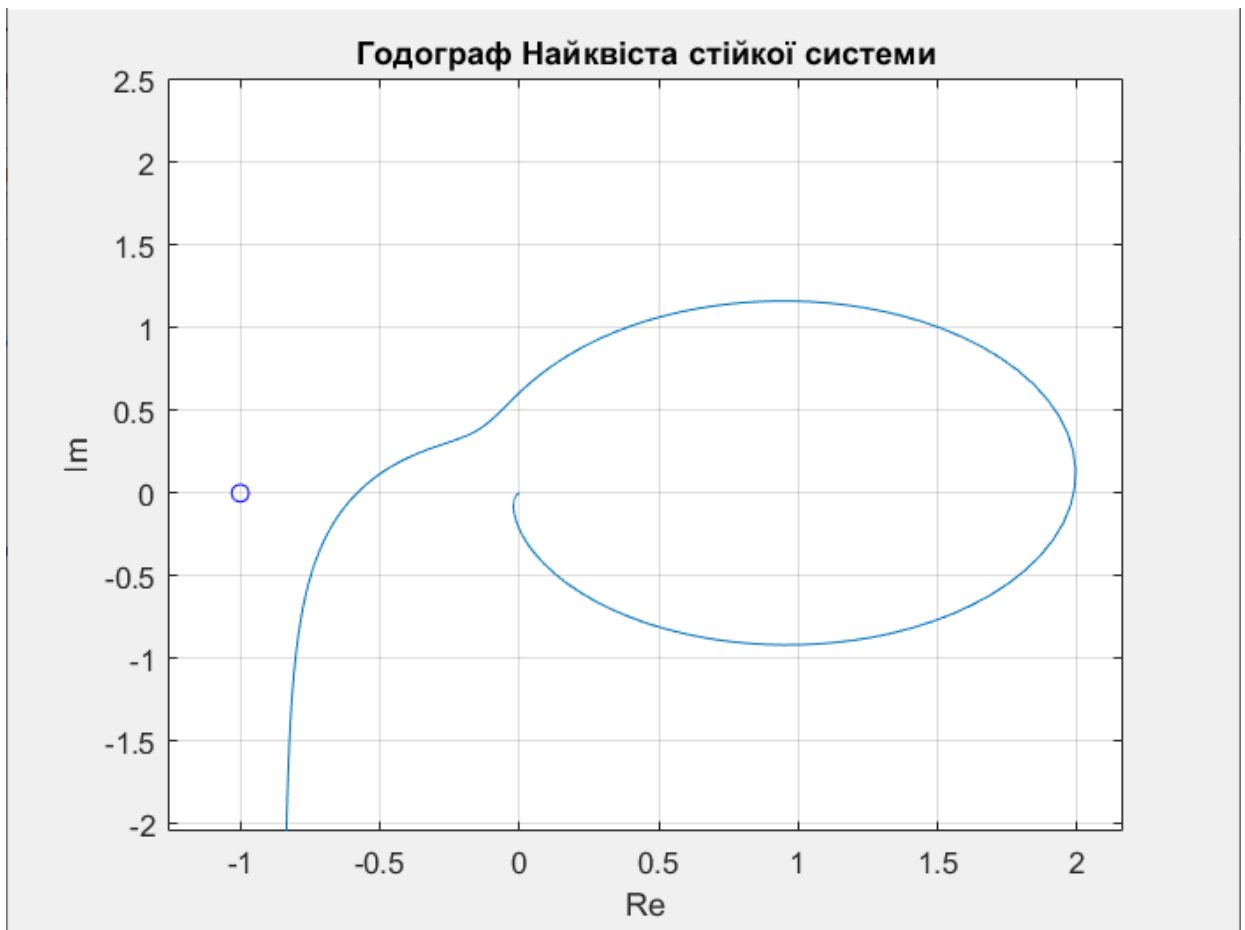


Рисунок 5.11 – Годограф Найквіста стійкої системи

На рис.5.11 бачимо, що годограф Найквіста не охоплює точку $(-1; j0)$. Це означає, що система є стійкою.

За допомогою Simulink побудуємо перехідні процеси у системі за каналами «завдання-вихід» та «збурення-вихід» з параметрами зворотного зв'язку, що відповідають стійкій системі.

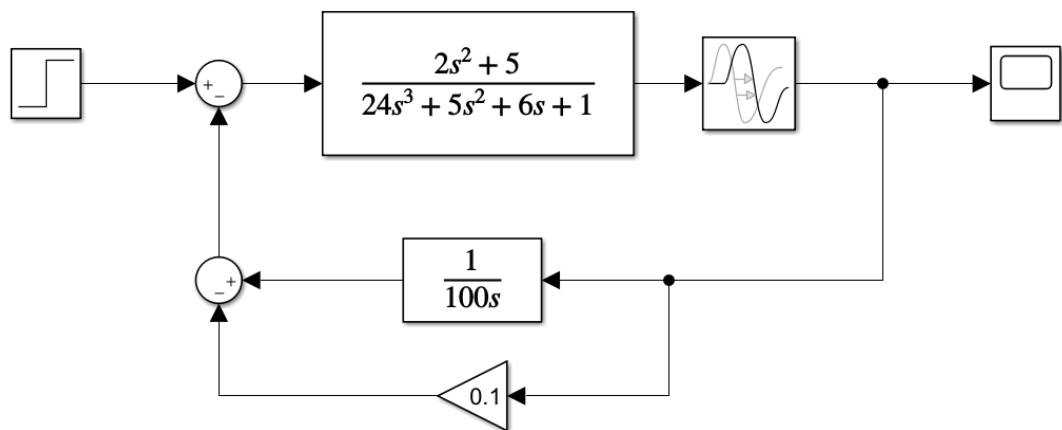


Рисунок 5.12 – Схема стійкої системи за каналом «збурення-вихід»

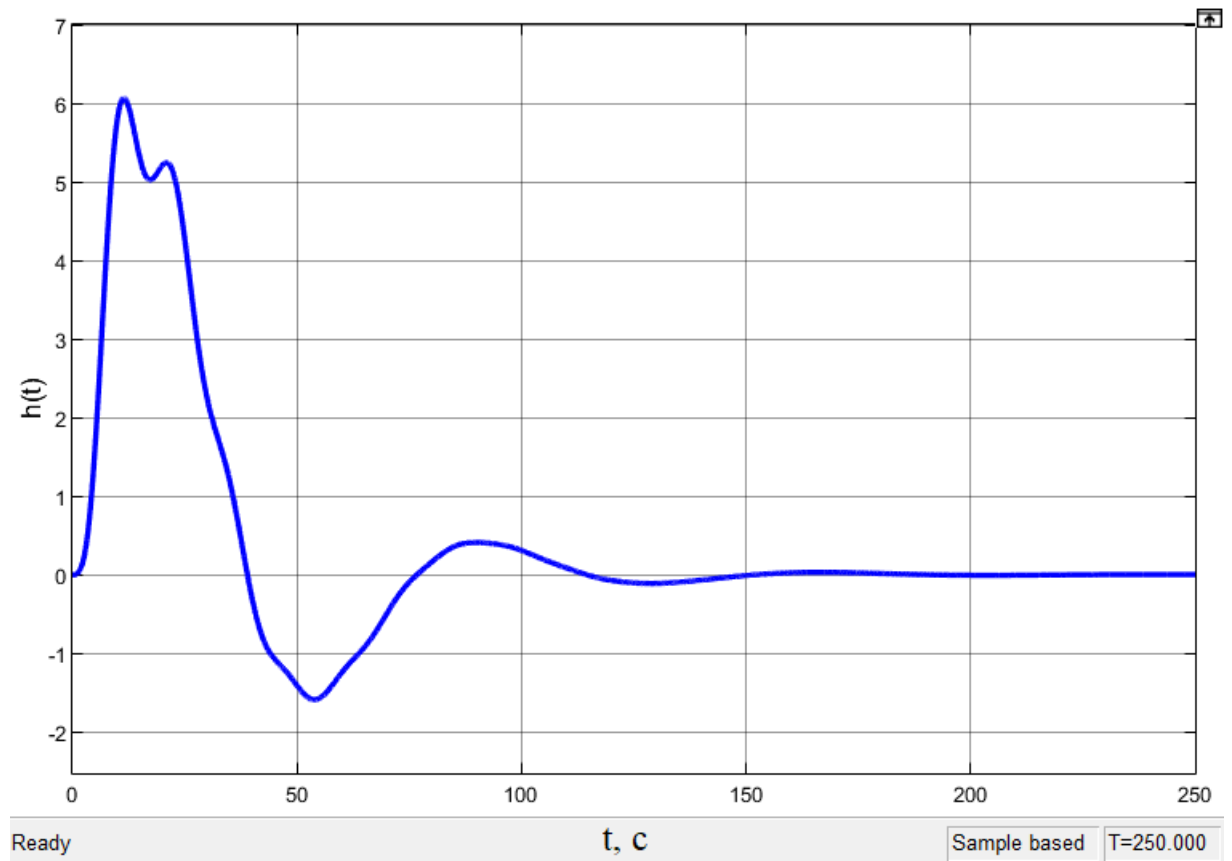


Рисунок 5.13 – Графік перехідної характеристики стійкої системи за каналом «збурення-вихід»

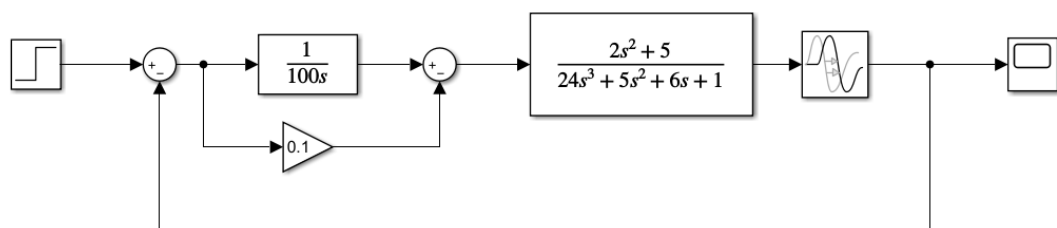


Рисунок 5.14 – Схема стійкої системи за каналом «завдання-вихід»

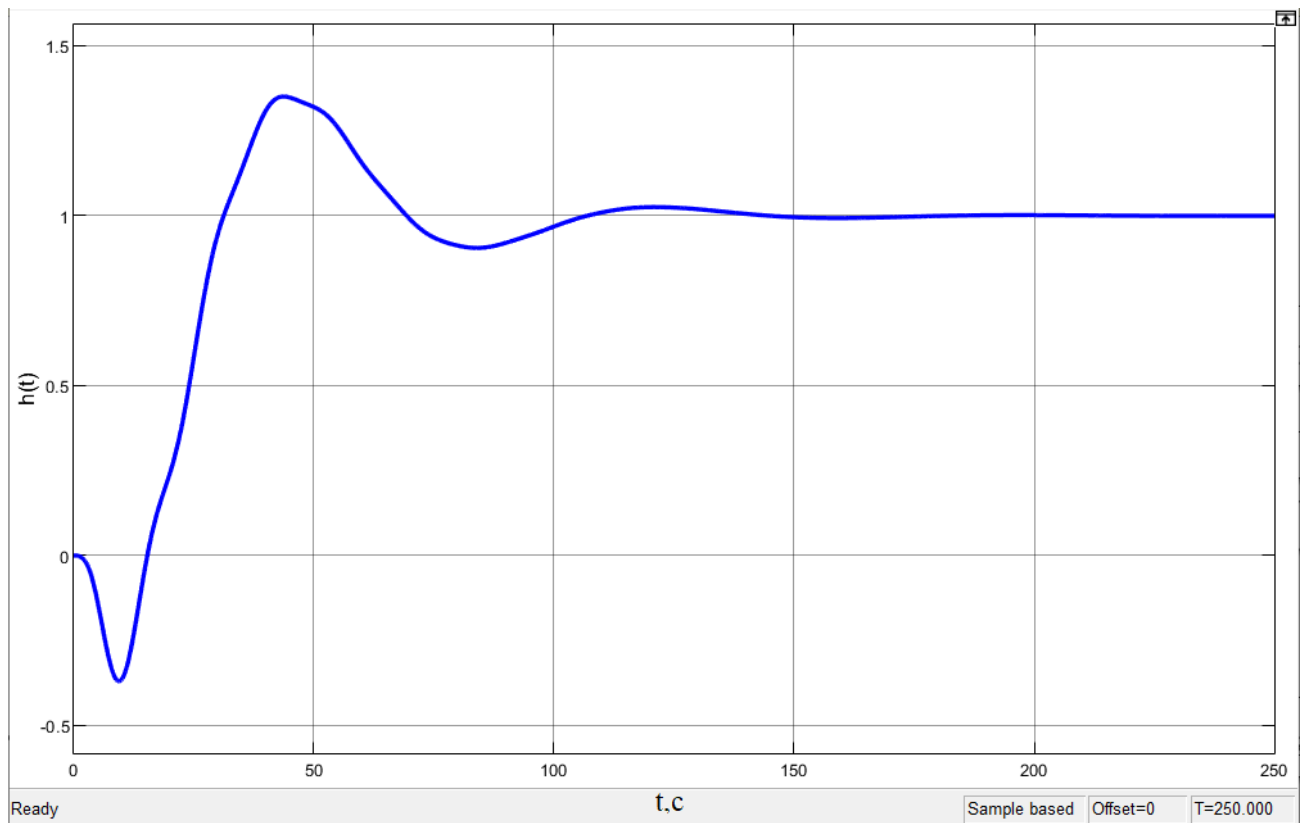


Рисунок 5.15 – Графік перехідної характеристики стійкої системи за каналом «завдання-вихід»

Тепер побудуємо перехідні процеси у системі за каналами «завдання-вихід» та «збурення-вихід» при параметрах зворотного зв'язку для системи на межі стійкості.

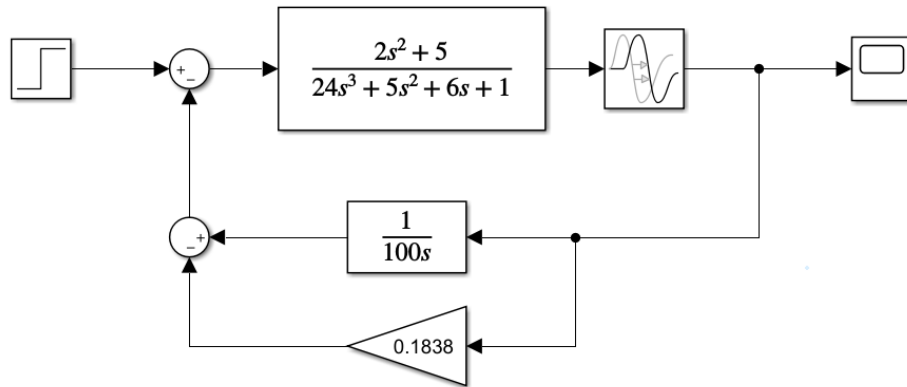


Рисунок 5.16 – Схема системи на межі стійкості за каналом «збурення-вихід»

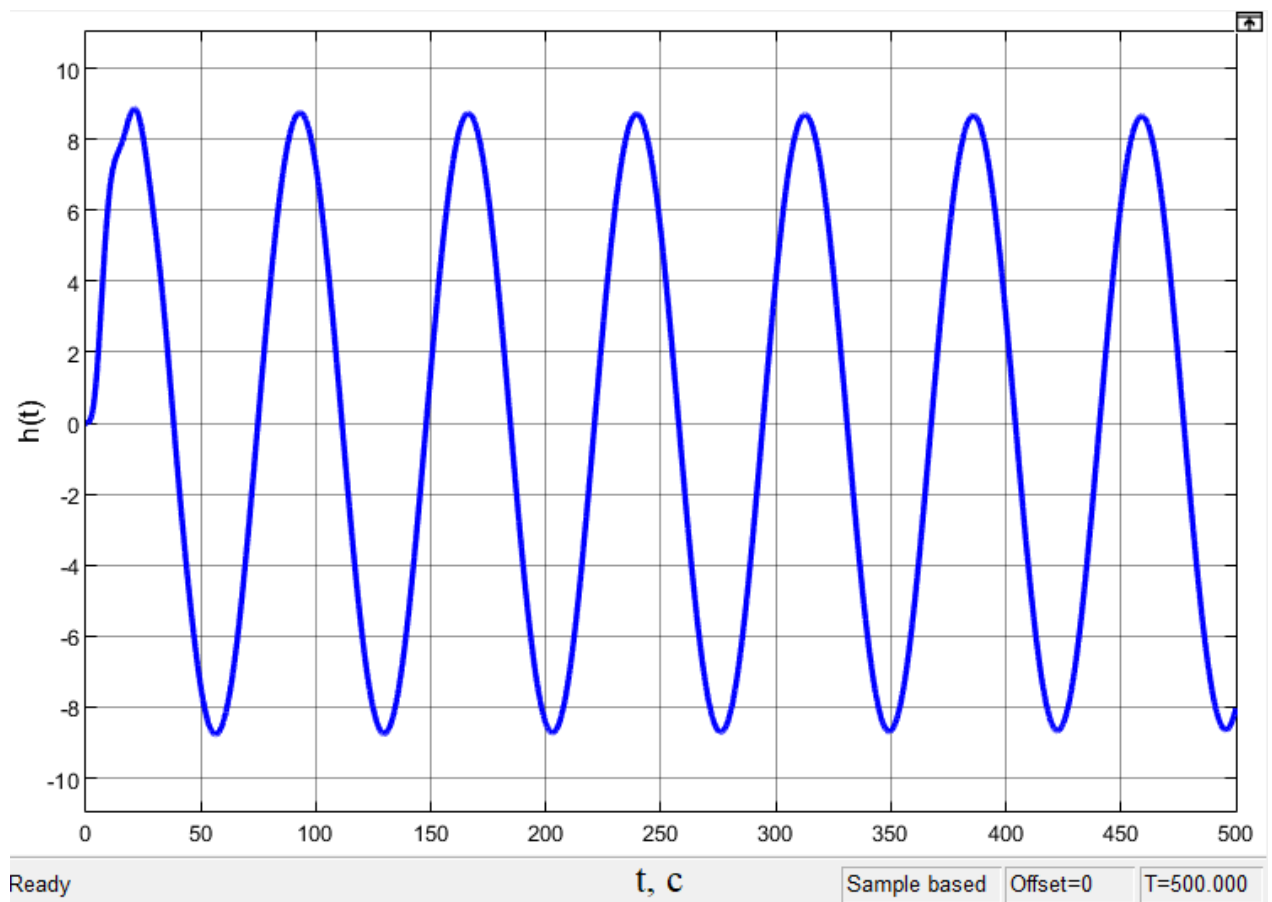


Рисунок 5.17 – Графік перехідної характеристики системи на межі стійкості за каналом «збурення-вихід»

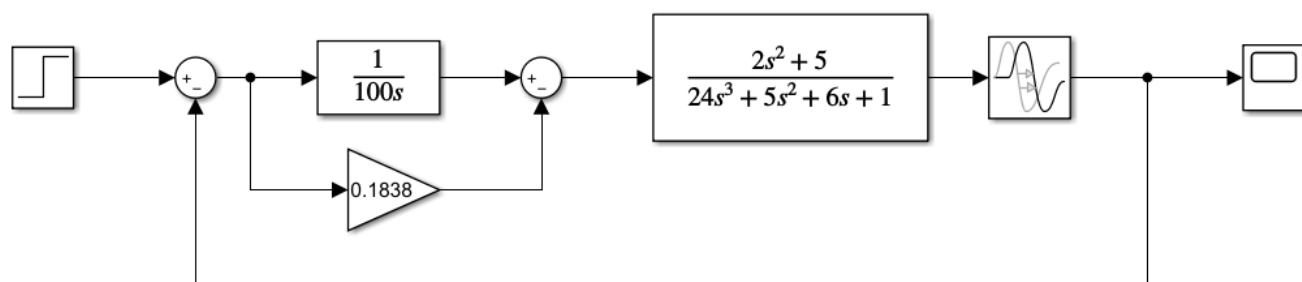


Рисунок 5.18 – Схема системи на межі стійкості за каналом «завдання-вихід»

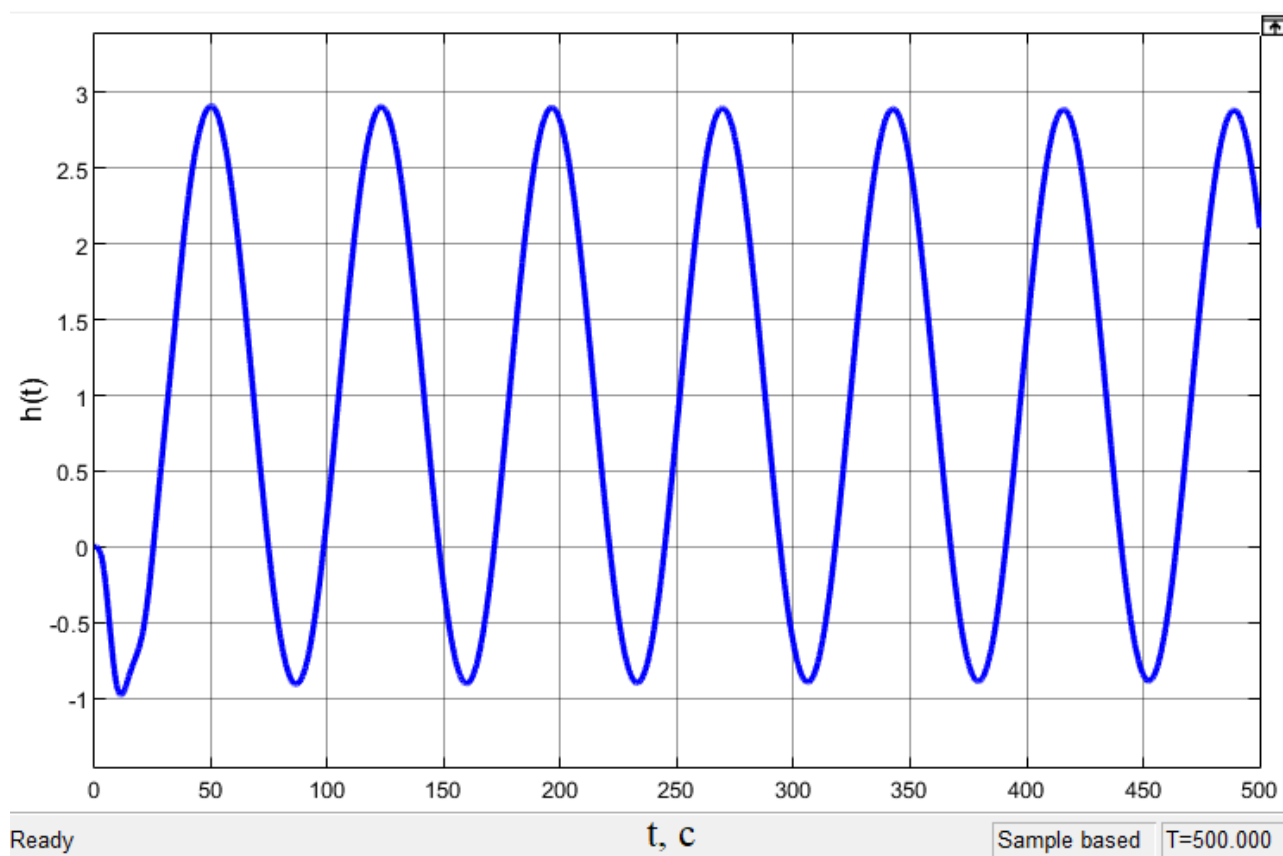


Рисунок 5.19 – Графік перехідної характеристики системи на межі стійкості за каналом «завдання-вихід»

2-й випадок:

Функція передачі замкненої системи:

$$W_{3c}(p) = \frac{W_{\Pi 3}(p)}{1 + W_{\Pi 3}(p) \cdot W_{33}(p)} \quad (5.14)$$

$$W_{3c}(p) = \frac{\frac{b_2 p^2 + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} e^{-p}}{1 + \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} e^{-p} \cdot k_1} \quad (5.15)$$

Характеристичне рівняння заданої системи є знаменником функції передачі:

$$\begin{aligned} D(p) &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1 + (b_2 p^2 + b_0) \cdot k_1 \cdot e^{-p} = \\ &= k_1 b_2 p^2 \cdot e^{-p} + k_1 b_0 e^{-p} + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Звідси виразимо k_l :

$$\begin{aligned} -k_1 \cdot (b_2 p^2 \cdot e^{-p} + b_0 e^{-p}) &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1 \\ k_1 &= \frac{-(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1)}{b_2 p^2 \cdot e^{-p} + b_0 e^{-p}}; \end{aligned} \quad (5.17)$$

Побудуємо лінію D-розбиття за параметром k_l у середовищі Matlab:

```
w=-1.5:0.01:1.5;
a1=6;
a2=5;
a3=24;
b0=5;
b2=2;
p=1i*w;
k1=-(a3.*p.^3+a2.*p.^2+a1.*p+1)./(b2.*p.^2.*exp(-p)+b0.*exp(-p));
Re=real(k1);
Im=imag(k1);
plot(Re,Im);
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("D-розбиття");
grid on;
```

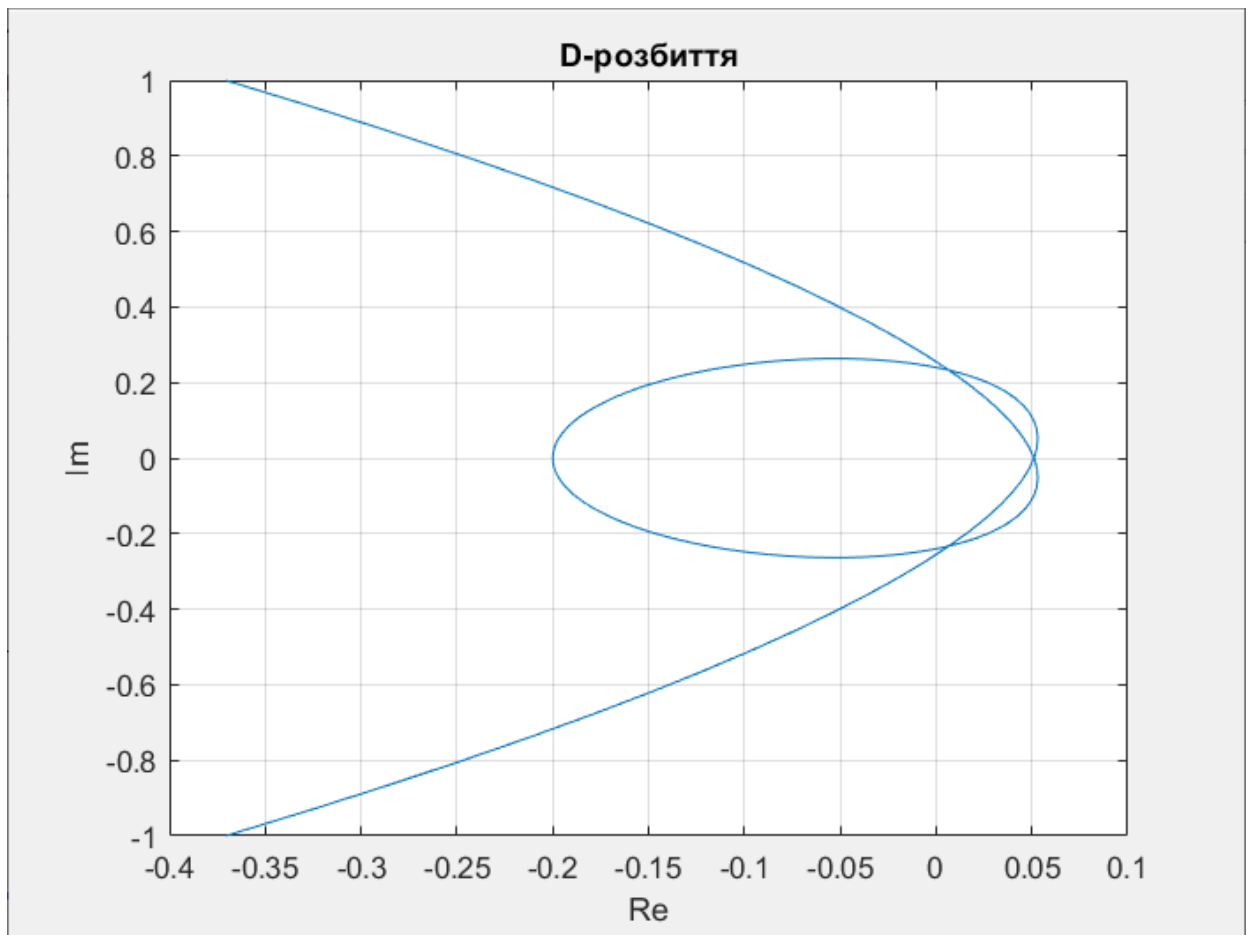


Рисунок 5.20 – D-розбиття за параметром k_I

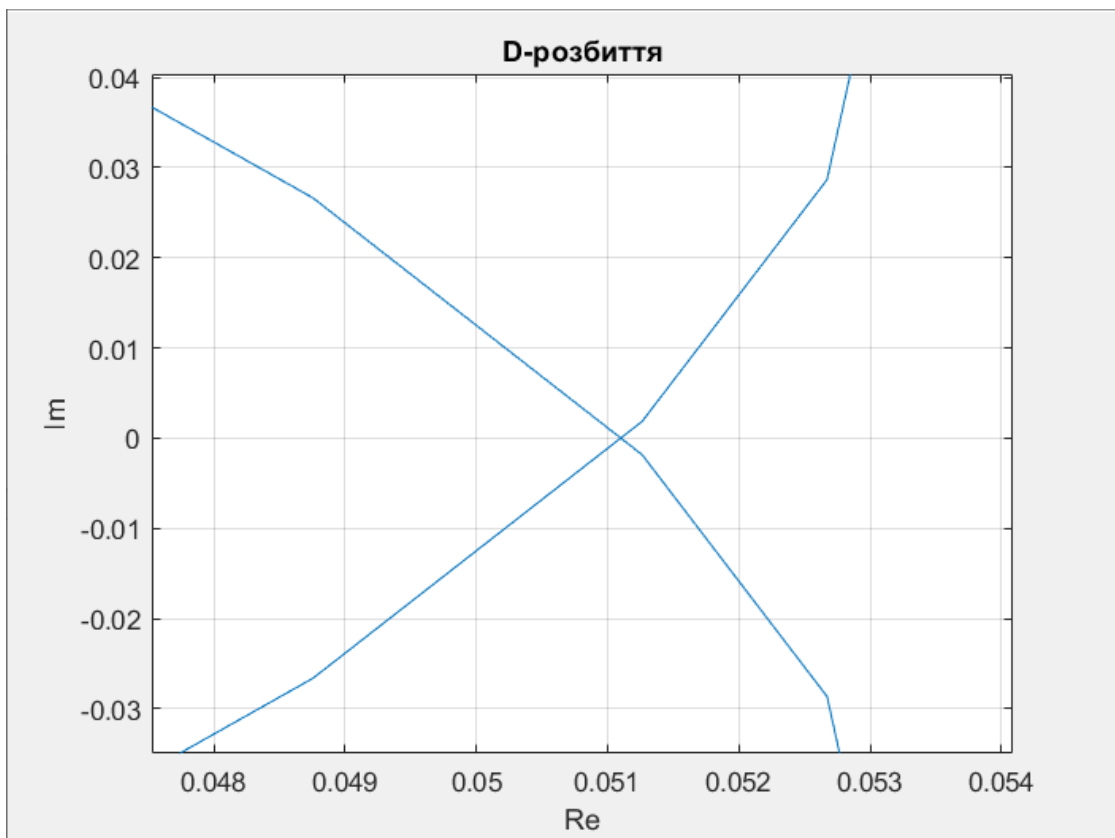
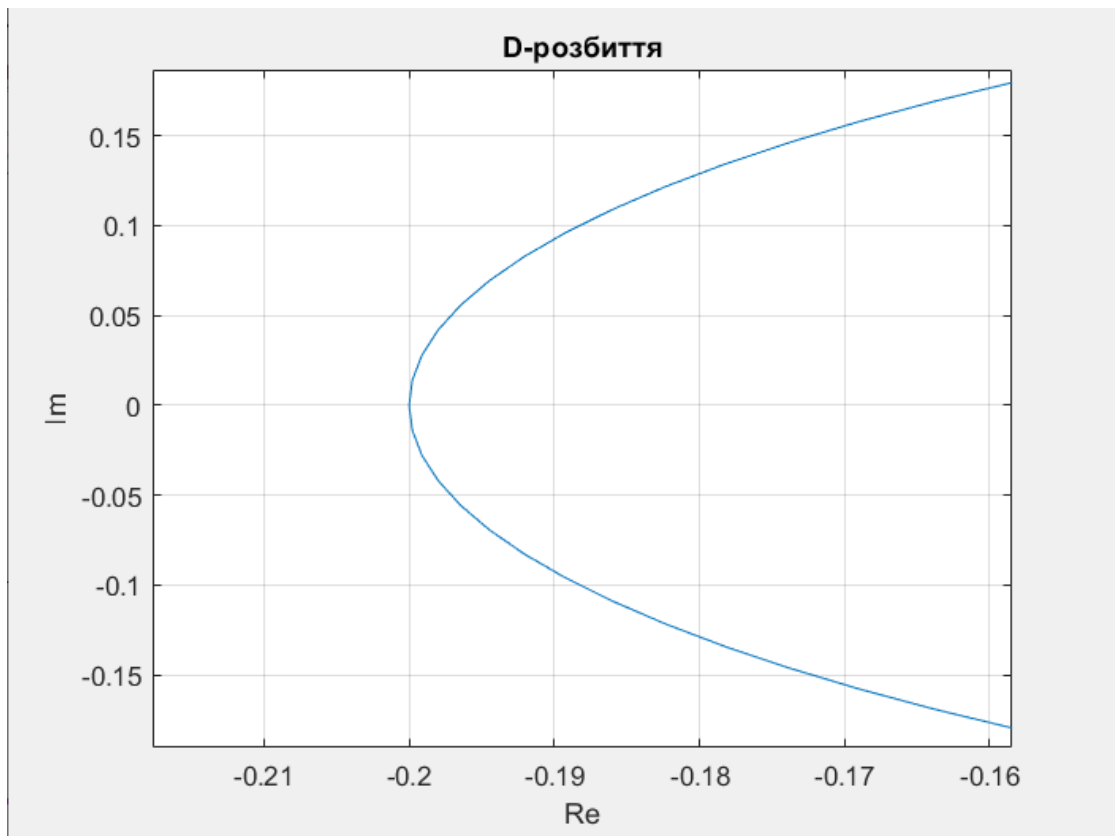


Рисунок 5.21 – Межі D-розбиття за параметром k_I

Маємо область стійкості приблизно: $-0.2 < k_I < 0.0511$.

Звідси можна зробити висновок, що система знаходиться на межі стійкості при значенні $kI = 0.0511$ або $kI = -0.2$.

Переконаємося в цьому, побудувавши годограф Найквіста.

```
k1=0.0511;
k2=-0.2;
w=0:0.001:2;
p=1i.*w;
W1=(2.*p.^2+5).*exp(-p)/(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);
W2=k1;
W3=k2;
W=W1.*W2;
Re=real(W);
Im=imag(W);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста (k=0.0511)");
grid on;
figure;
Wn=W1.*W3;
Re=real(Wn);
Im=imag(Wn);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста (k=-0.2)");
grid on;
```

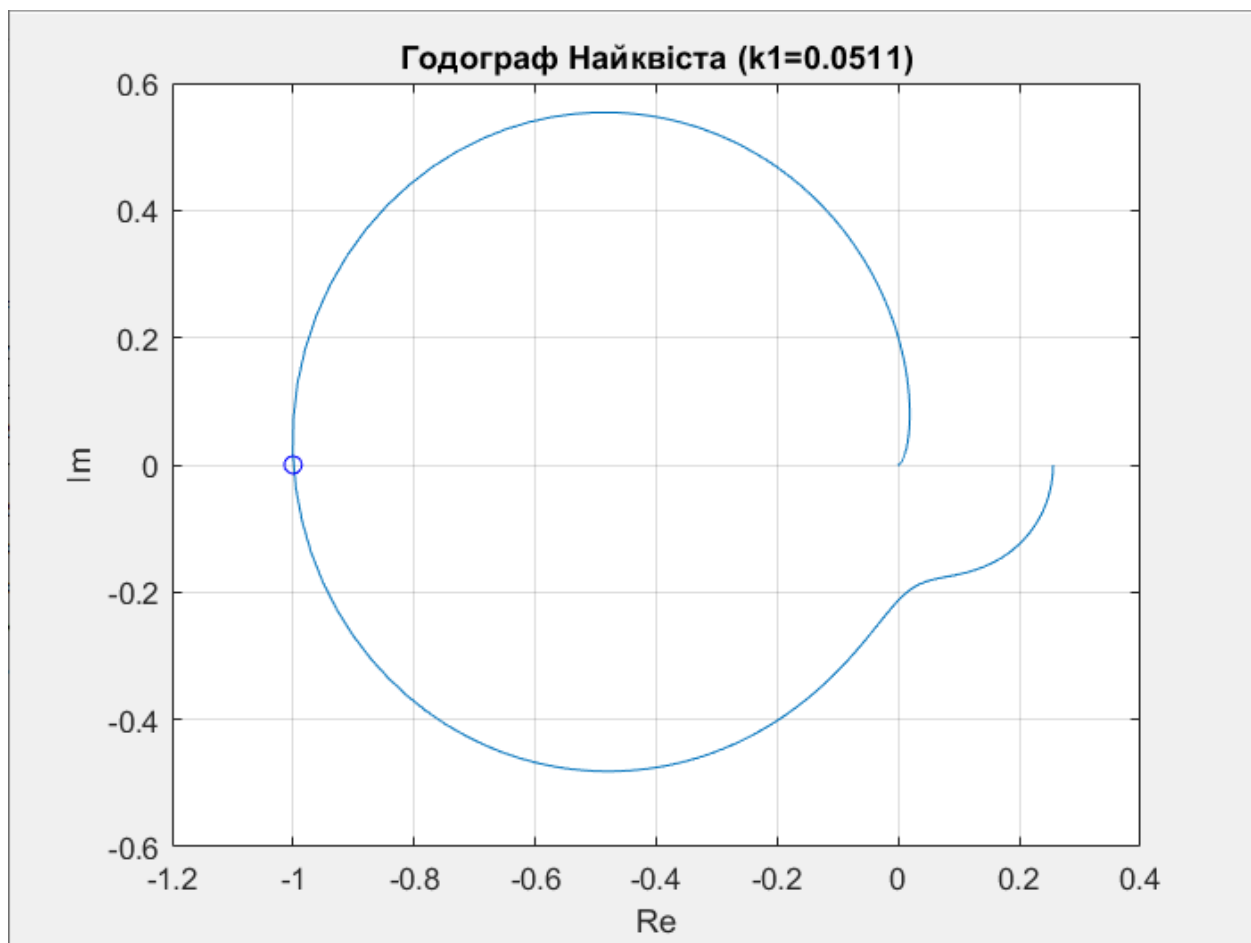


Рисунок 5.22 – Годограф Найквіста при значенні $k_1 = 0.0511$

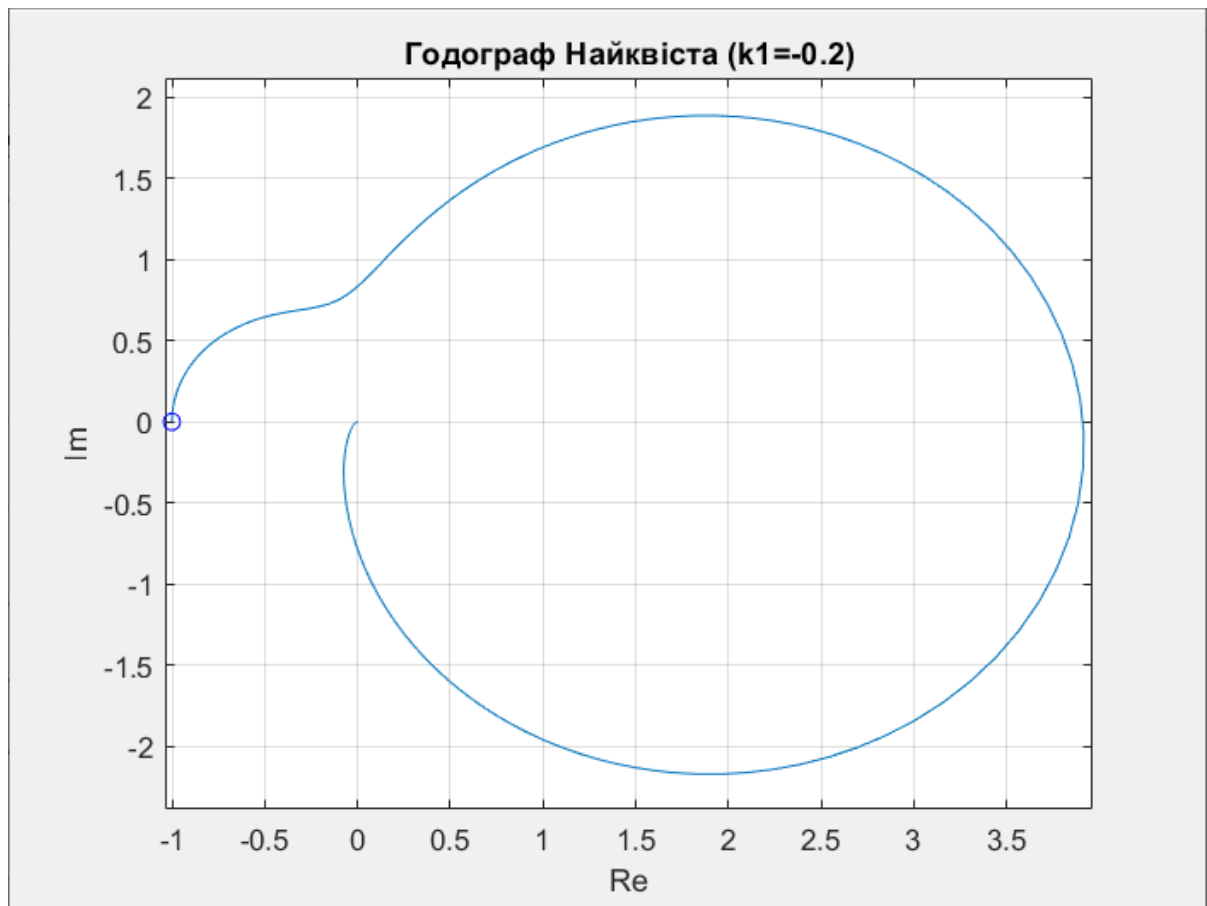


Рисунок 5.23 – Годограф Найквіста при значенні $k_I = -0.2$

На рис.5.23 можна побачити, що годограф Найквіста проходить через точку $(-1; j0)$, а на рис.5.5.21 годограф бере початок в точці $(-1; j0)$, отже система знаходиться на межі стійкості.

Для того, щоб система була стійкою оберемо k_I зі знайденого діапазону. Нехай $k_I = -0.1$. Побудуємо годограф Найквіста, щоб перевірити, чи є система стійкою.

```
k1=-0.1;
w=0:0.001:2;
p=1i.*w;
W1=(2.*p.^2+5).*exp(-p)./(24.*p.^3+5.*p.^2+6.*p+1);
W2=k1;
W=W1.*W2;
Re=real(W);
Im=imag(W);
plot(Re,Im);
hold on;
plot(-1,0,"bo");
xlabel('Re');
ylabel('Im');
title("Годограф Найквіста стійкої системи");
```

grid on;

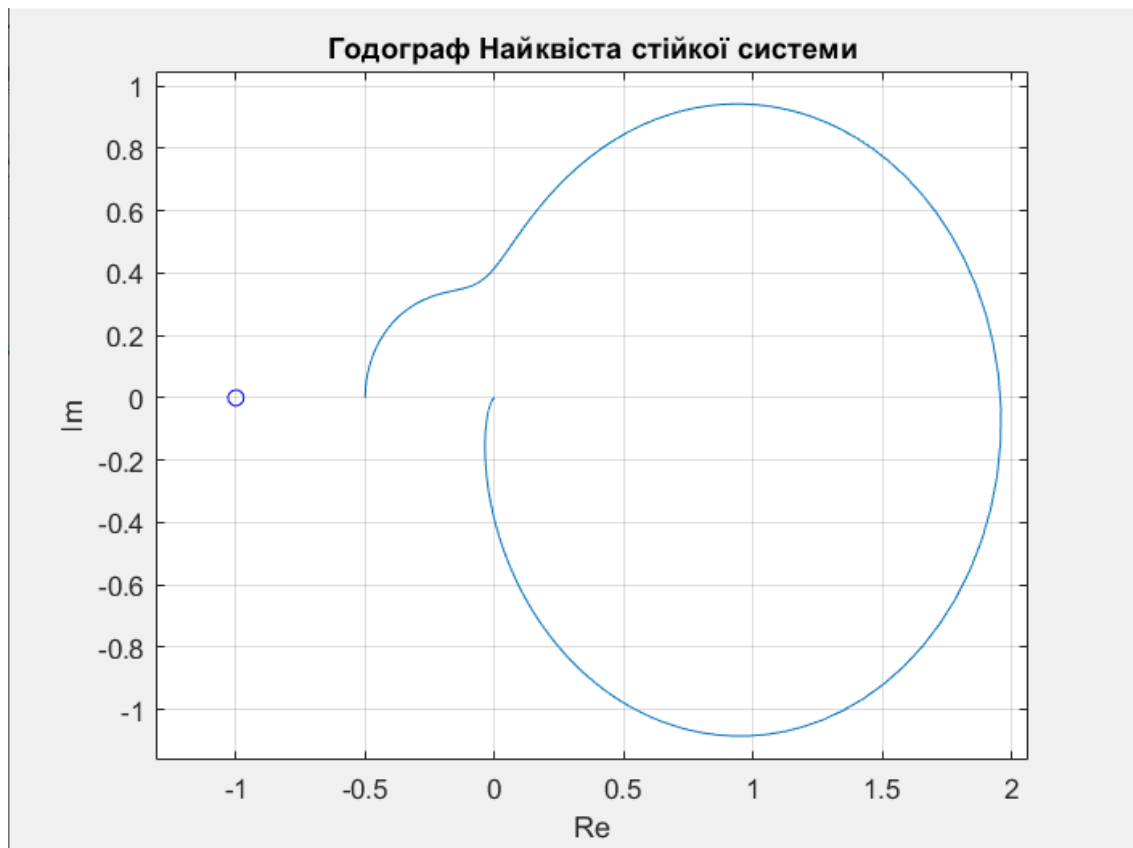


Рисунок 5.24 Годограф Найквіста стійкої системи (за параметру k_I)

На рис.5.24 бачимо, що годограф Найквіста не охоплює точку $(-1; j0)$. Це означає, що система є стійкою.

За допомогою Simulink побудуємо перехідні процеси у системі за каналами «завдання-вихід» та «збурення-вихід» з параметрами зворотного зв'язку, що відповідають стійкій системі.

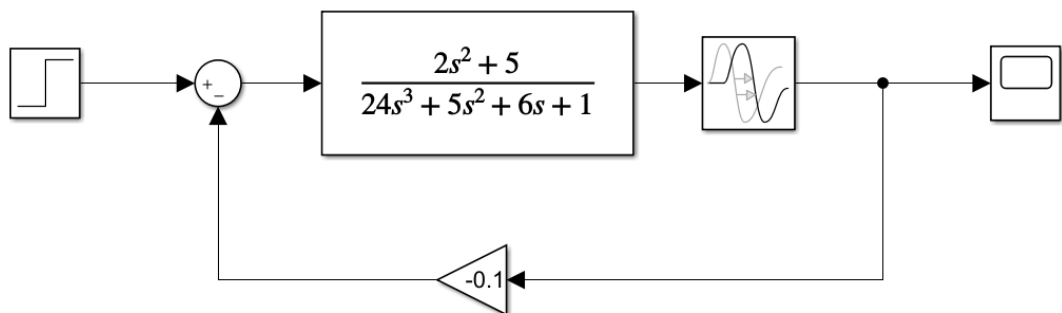


Рисунок 5.25 – Схема стійкої системи за каналом «збурення-вихід»

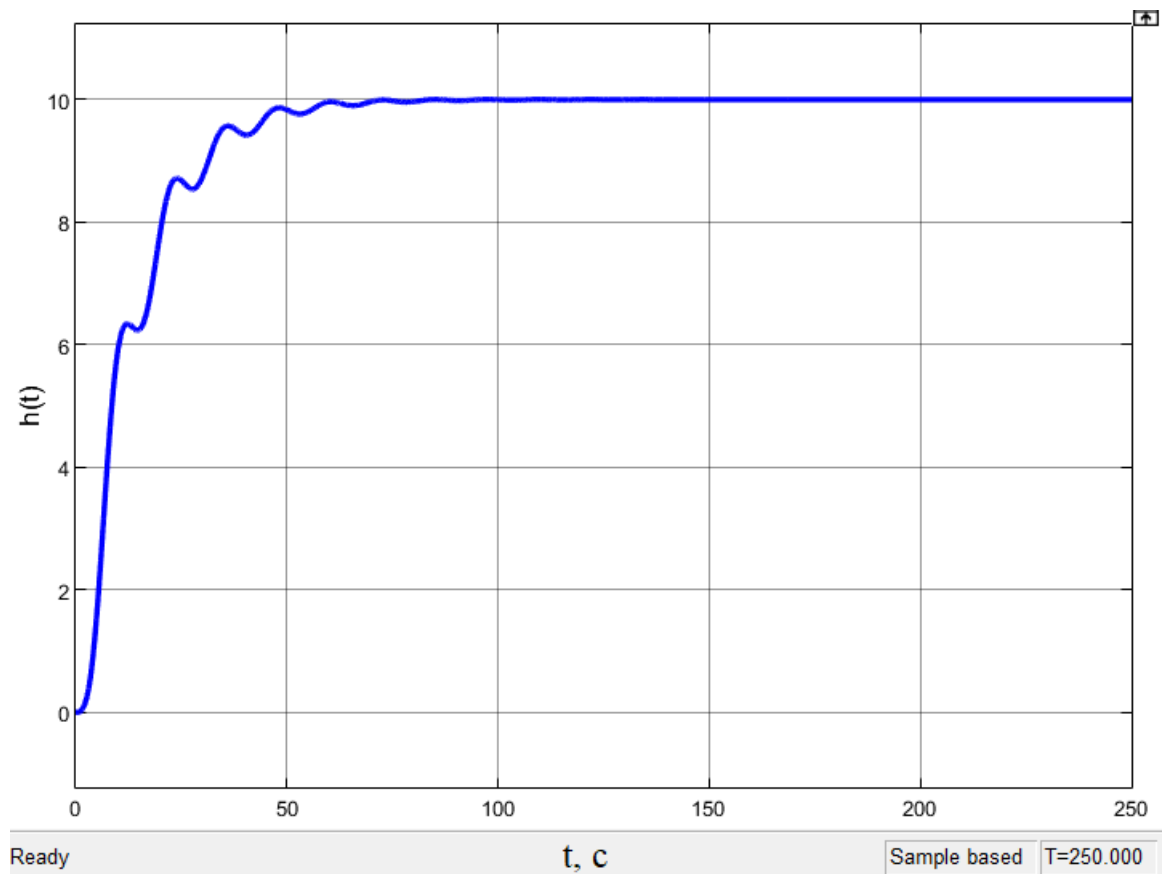


Рисунок 5.26 – Графік перехідної характеристики стійкої системи за каналом «збурення-вихід»

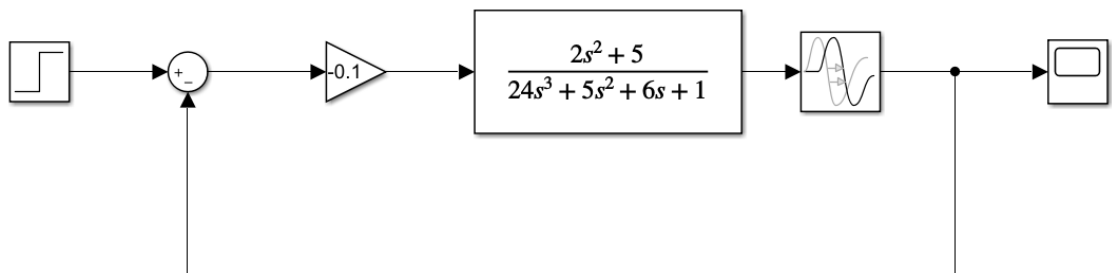


Рисунок 5.27 – Схема стійкої системи за каналом «завдання-вихід»

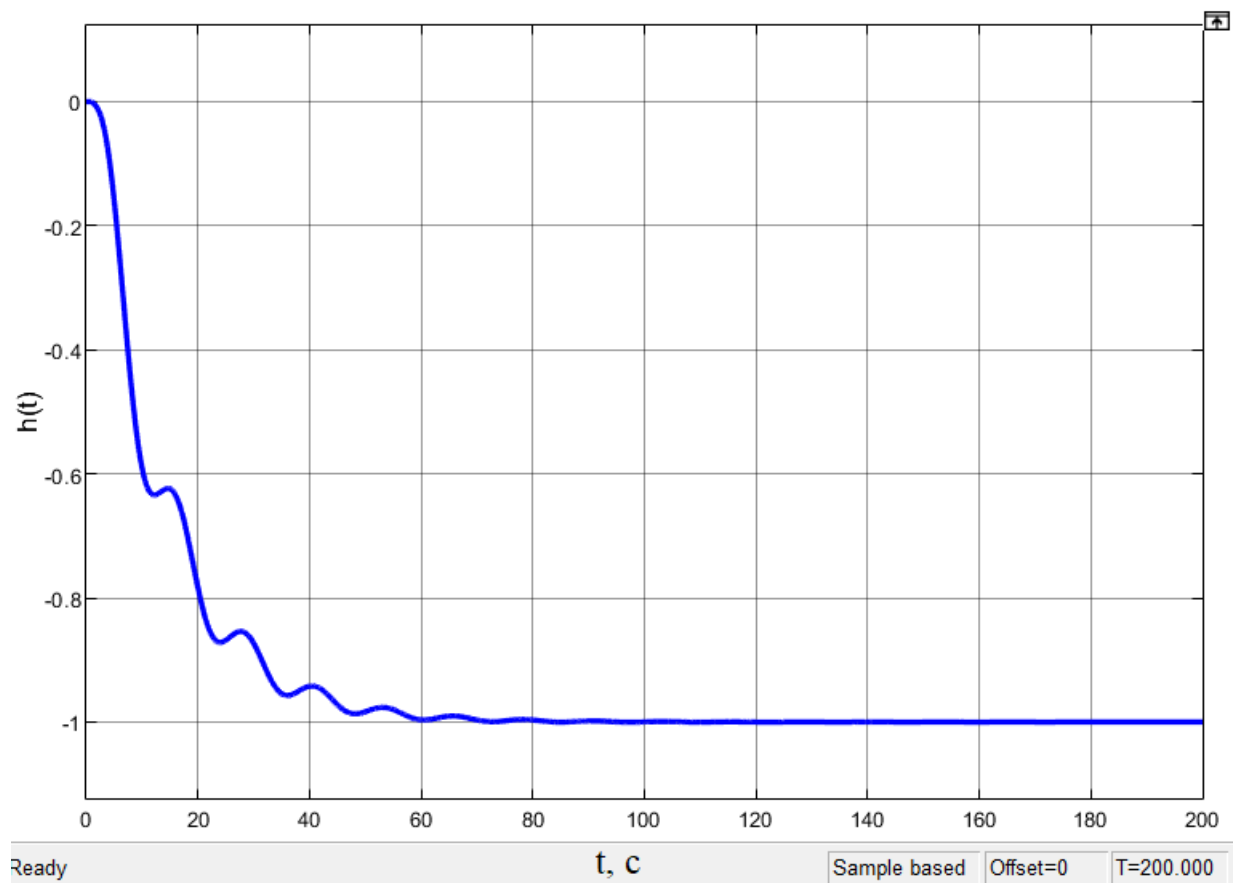


Рисунок 5.28 – Графік перехідної характеристики стійкої системи за каналом «завдання-вихід»

Тепер побудуємо перехідні процеси у системі за каналами «завдання-вихід» та «збурення-вихід» при параметрах зворотного зв'язку для системи на межі стійкості.

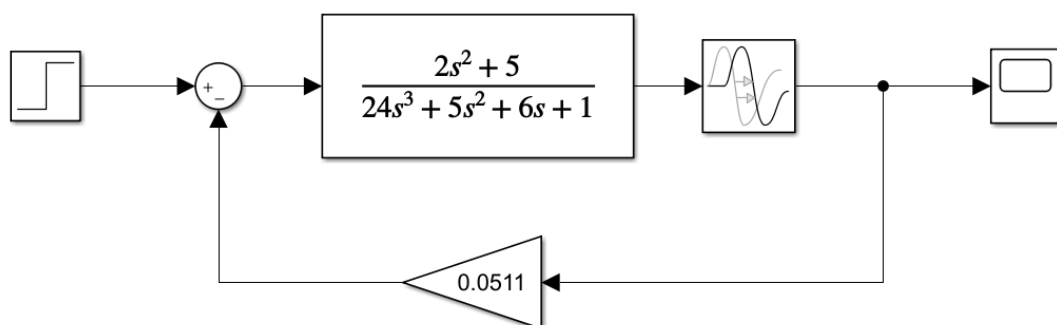


Рисунок 5.29 – Схема системи на межі стійкості за каналом «збурення-вихід»

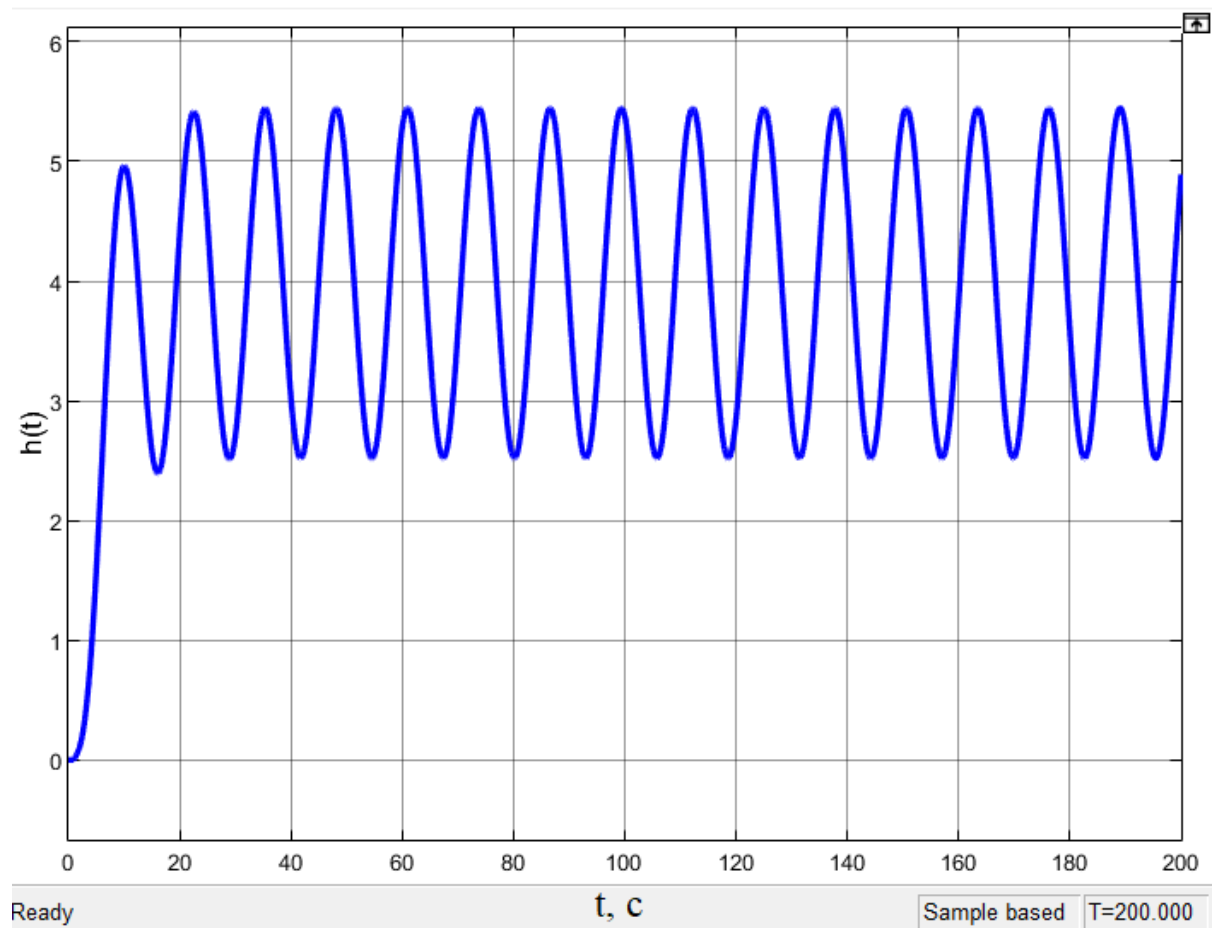


Рисунок 5.30 – Графік перехідної характеристики системи на межі стійкості за каналом «збурення-вихід»

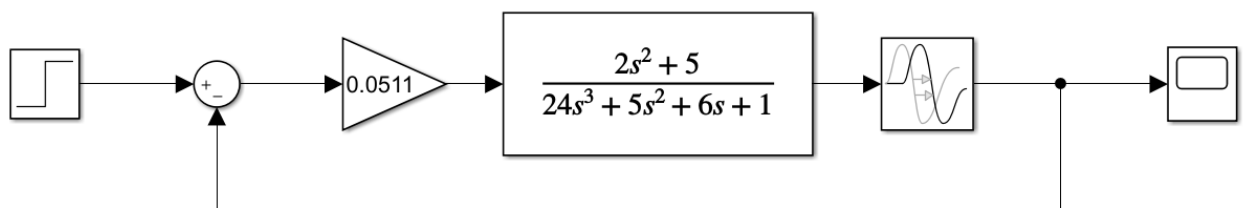


Рисунок 5.31 – Схема системи на межі стійкості за каналом «завдання-вихід»

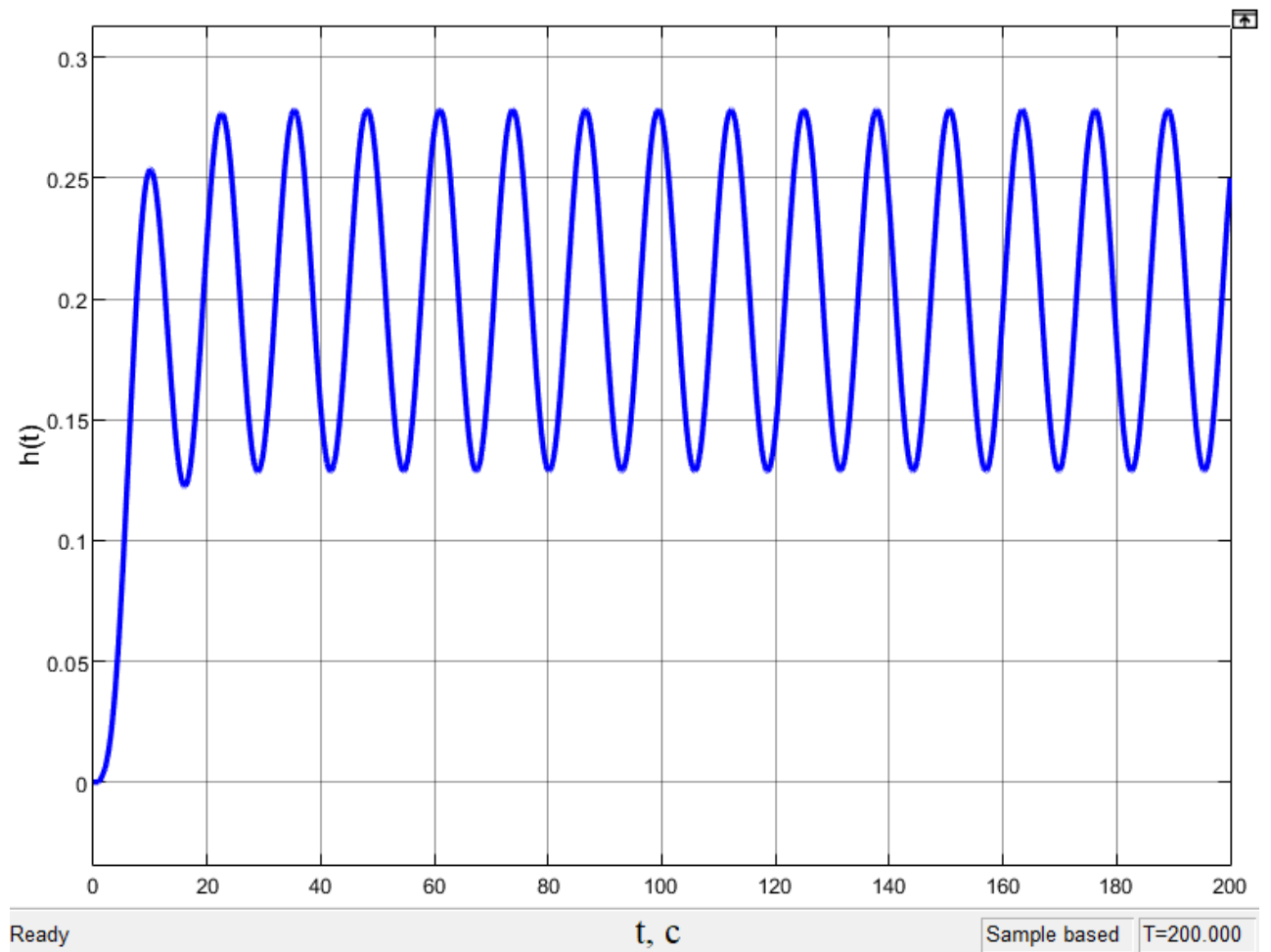


Рисунок 5.32 – Графік перехідної характеристики системи на межі стійкості за каналом «завдання-вихід»

5.6. Контрольні запитання

1. Стійкість замкнених систем автоматичного регулювання.
2. Характеристичне рівняння замкненої системи. Рівняння Найквіста.
3. Метод D – розбиття.
4. Критерій Найквіста за умови стійкої розімкненої системи.
5. Критерій Найквіста за умови нестійкої розімкненої системи.
6. Вплив параметра K_p зворотнього зв'язку на вигляд перехідних процесів в замкненій системі.
7. Вплив параметра T_i зворотнього зв'язку на вигляд перехідних процесів в замкненій системі.
8. Канали «збурення-вихід» та «завдання-вихід».

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Дудкін, М. Є. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,96 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с. – Назва з екрана. URI: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064>
2. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., – К.: Либідь, 2007. - 656 с.
3. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004 –124 с.
4. Теорія автоматичного управління: Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем» / уклад.: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков, В.П. Бунь. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського – Електронні текстові дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 144 с.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Modern control systems (14th edn) by Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, Pearson Education, 2022, 1022 pages, ISBN 978-0-13-730725-8.
2. Astrom K.J. Control System Design. Lecture notes for ME 155A [Текст] / Astrom K.J. - Department of Automatic Control Lund Institute of Technology, Sweden, 2002. – 168 p.