МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Т. В. Маловічко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 104 Фізика та астрономія

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

Рецензент Кнопова В. П., *доктор фіз.-мат. наук,* КНУ ім.Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Клесов О. І., доктор фіз.-мат. наук, проф.,* КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 06.03.2025 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 3 від 04.02.2025 р.)

Навчальний посібник є конспектом лекцій курсу «Математичний аналіз. Частина 1. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної». Систематизовані теоретичні відомості супроводжуються великою кількістю прикладів. Основна змістовна частина доповнюється запитаннями для самоконтролю.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю 104 Фізика та астрономія.

Реєстр. № НП 24/25-284. Обсяг 6,8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Вступ

Конспект складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в КПІ ім. Ігоря Сікорського. Його зміст відповідає навчальній програмі кредитного модуля «Математичний аналіз. Частина 1. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» курсу «Математичний аналіз» освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр освітньої програми «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів» спеціальності 104 Фізика та астрономія фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Конспект містить розгорнутий теоретичний матеріал з теорії функцій комплексної змінної та операційного числення. Наведені теореми супроводжуються детальними доведеннями. Теоретичний матеріал доповнюється великою кількістю прикладів розв’язування задач. Кожна лекція доповнюється запитаннями для самоконтролю.

Лекція 1. Множини. Дійсні числа

Логічні символи. Множини. Дії над множинами. Дійсні числа та нескінченні десяткові дроби.

Логічні символи

Для того, щоб зробити математичні записи більш лаконічними, для найбільш важливих та найчастіше вживаних в математичних текстах слів та словосполучень було розроблено спеціальні позначення, які називаються логічними символами.

Будемо використовувати такі позначення:

1) «$\Rightarrow$» – «випливає»;
2) «$\Leftrightarrow$» – «тоді й тільки тоді», «рівносильно»;
3) «$\wedge$» – «і» (символ кон'юнкції);
4) «$\vee$» – «або» (символ диз'юнкції);
5) «$\exists$» – «існує» (квантор існування);
6) «$\forall$» – «для всіх», «для кожного», «для довільного» (квантор загальності);
7) «$\exists!$» – «існує єдиний»;
8) «$\nexists$» – «не існує»;
9) «$:=$», «$\stackrel{\text{def}}{=}$» – «за означенням».

Множини

Поняття множини є одним з найголовніших первісних понять, тобто таких, які неможна виразити через простіші поняття.

Г. Кантор, який створив теорію множин, використовував таке «означення»: «Множина або сукупність – це зібрання певних та різних об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, мислимий як ціле».

Об'єкти, що складають множину, називаються *елементами* цієї множини. Будемо вважати множину визначеною, якщо про кожний об'єкт можна сказати, що він або належить, або не належить цій множині.

Той факт, що елемент a належить множині A, будемо позначати «$a \in A$» або «$A \ni a$». Той факт, що елемент a не належить множині A, позначається як «$a \notin A$» або «$a \,\overline{\in}\, A$».

Множину можна задати кількома способами.

1. Опис множини за допомогою переліку її елементів.

   Приклад.

   $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – множина натуральних чисел,

   $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – множина цілих чисел;

   $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ – множина парних натуральних чисел;

   $B = \{1, 3, 325\}$.

2. Опис множини вказівкою на властивості її елементів.

   Приклад.

   $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ x > 0\}$ – множина натуральних чисел,

$C=\{x\in\mathbb{Z}:\ |x|<3\}=\{-2,-1,0,1,2\}.$

Означення.

Множина, яка не містить жодного елементу, називається *порожньою* множиною й позначається $\varnothing$.

Дії над множинами

Означення.

Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожний елемент множини A є також елементом множини B, тобто

$$\forall x\in A \quad x\in B.$$

Позначення: $A\subset B,\ B\supset A.$

Приклад.

$\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\subset\mathbb{N}.$

За означенням порожня множина є підмножиною будь-якої множини A:

$$\varnothing\subset A.$$

Означення.

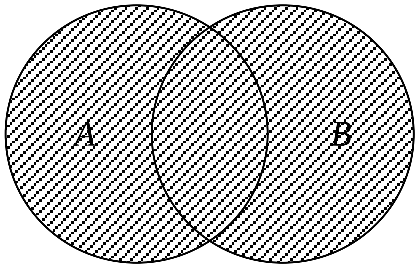
Множини A і B називаються *рівними*, якщо $A\subset B$ та $B\subset A$.

Позначення: $A=B$.

Означення.

Об'єднанням (*сумою*) множин A і B називається множина C, елементами якої є ті й тільки ті елементи, які належать хоча б одній з множин A чи B .

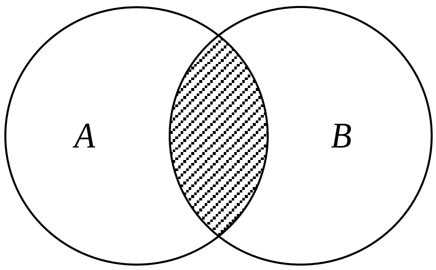
Позначення: $C=A\cup B$.



Означення.

Перетином множин A і B називається множина C, елементами якої є ті й тільки ті елементи, які належать кожній з множин A та B .

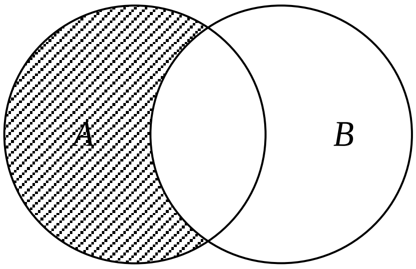
Позначення: $C=A\cap B$.



Означення.

Різницею множин A і B називається множина C, елементами якої є ті й тільки ті елементи, які належать множині A, але не належать множині B .

Позначення: $C=A\setminus B$.

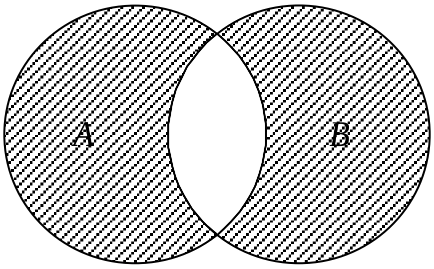


Означення.

Симетричною різницею множин A і B називається множина

$$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Позначення: $C = A \vartriangle B$.



Зауваження.

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

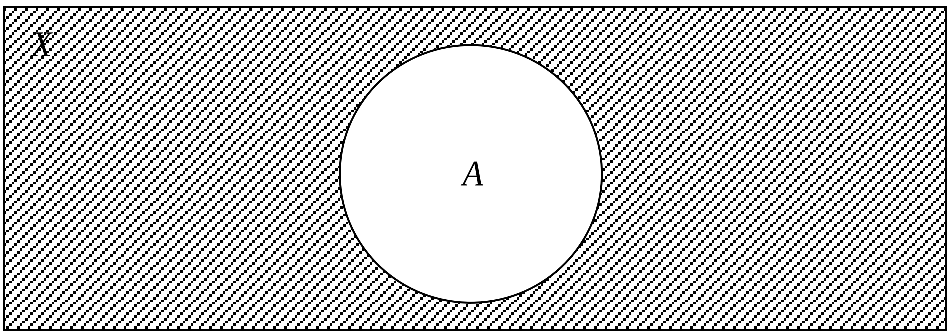
Якщо в рамках деякої задачі розглядаються тільки підмножини деякої фіксованої множини, то сама ця множина називається *універсальною множиною*. Універсальну множину часто позначають U чи X.

Означення.

Нехай X – універсальна множина.

Доповненням до множини A називається множина

$$\overline{A} := X \setminus A.$$



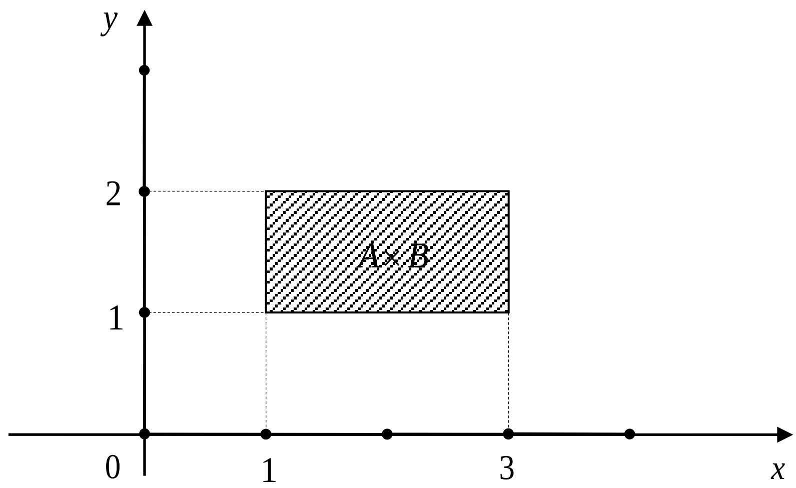
Означення.

Декартовим добутком множин A та B називається множина впорядкованих пар, де перший елемент є елементом множини A, а другий – елементом множини B, тобто

$$A \times B := \{(x, y): \quad x \in A, y \in B\}.$$

Приклад.

$$A = [1; 3], \quad B = [1; 2].$$



Теорема *(правила дуальності).*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Доведення:

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \iff$$

$$\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

$$x \in \overline{A \cap B} \iff x \notin A \cap B \iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \iff (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) \iff$$

$$\iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}. \quad \square$$

Дійсні числа

У шкільному курсі відомі множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, яка виникла в процесі лічби, множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, яка виникла на практиці в процесі операцій над натуральними числами, множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$, яка виникла в процесі вимірювань.

Уже в Стародавній Греції було відомо про існування неспіврозмірних відрізків. Наприклад, довжину діагоналі квадрата неможна виразити раціональним числом, якщо за одиницю довжини прийняти довжину сторони квадрата. Бажання записати точне співвідношення між неспіврозмірними відрізками призвело до введення ірраціональних чисел. Об'єднання множин раціональних та ірраціональних чисел є множиною дійсних чисел.

Приклад.

Число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

Дійсно, припустимо, що $\sqrt{2}$ є раціональним числом. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$p = \sqrt{2}q,$$

$$p^2 = 2q^2.$$

Оскільки p^2 є парним числом, то й p теж парне. Дійсно, квадрат непарного числа теж був би числом непарним:

$$(2l-1)^2 = 4l^2 - 4l + 1 = 2\underbrace{\left(2l^2 - 2l\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1.$$

Тому

$$p = 2m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$(2m)^2 = 2q^2,$$

$$4m^2 = 2q^2,$$

$$2m^2 = q^2.$$

Оскільки q^2 є парним числом, то й q теж парне, тобто

$$q = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Але тоді дріб

$$\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$$

не є нескоротним. Ми прийшли до протиріччя, отже, наше припущення невірне, тобто $\sqrt{2}$ не є раціональним числом.

Теорію дійсних чисел було побудовано лише у XIX столітті. Існують різні способи обґрунтування дійсних чисел:

- теорія фундаментальних послідовностей Кантора;
- теорія перетинів в області раціональних чисел Дедекінда;
- аксіоматична теорія;
- теорія нескінченних десяткових дробів, яку ми й розглянемо.

Дійсні числа можна отримати при розгляді задачі про вимірювання відрізку.

Нехай задана одиниця довжини, наприклад, метр. Ми хочемо виміряти відрізок I. Нехай один метр повністю вкладається у відрізок I 13 раз і лишається ще залишок I_1 довжиною менше метра. Якщо нас влаштовує така точність, то ми скажемо, що довжина відрізку I приблизно дорівнює 13 метрів. Якщо ж ні, то можемо розглянути $\frac{1}{10}$ одиниці вимірювання, тобто перевірити, скільки разів один дециметр повністю вкладається в I_1. Якщо він, наприклад, повністю вкладається в I_1 9 раз і нас влаштовує така точність, то ми скажемо, що довжина відрізку I приблизно дорівнює 13,9 м, а якщо ні, то розглядаємо $\frac{1}{100}$ метра, тобто сантиметр. І так далі. На певному етапі реальний процес вимірювання доведеться закінчити хоча б через дискретність речовини. Проте продовжуючи такий процес нескінченно, ми отримали б певний нескінченний десятковий дріб 13,9… Кожний скінченний десятковий дріб ми можемо теж вважати нескінченним, дописавши безліч нулів після останньої цифри. Наприклад,

$$13{,}957 = 13{,}95700000\ldots = 13{,}957(0).$$

Ми не будемо розглядати дроби з 9 в періоді, оскільки вони є просто іншим записом дробу з 0 у періоді. Наприклад,

$$1{,}51(9) = 1{,}51 + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots =$$

$$= 1{,}51 + \frac{\frac{9}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = 1{,}51 + \frac{9}{1000} \cdot \frac{10}{9} = 1{,}51 + \frac{1}{100} =$$

$$= 1{,}51 + 0{,}01 = 1{,}52 = 1{,}52(0).$$

Таким чином, установлюється взаємно однозначна відповідність між точками півпрямої та невід'ємними нескінченними десятковими дробами без 9 в періоді.

Означення.

Невід'ємним дійсним числом називається нескінченна послідовність цифр з однією комою між ними, тобто нескінченний десятковий дріб виду

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

де $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \forall n \geq 1 \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

Невід'ємне дійсне число називається *додатним*, якщо

$$\exists n \geq 0 \quad \alpha_n > 0.$$

Від'ємне дійсне число визначається як додатне дійсне число із знаком "$-$" (правила дій над дійсними числами різних знаків такі ж, як і над раціональними числами різних знаків).

Множина дійсних чисел позначається $\mathbb{R}$.

Означення.

Елементи множини $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ називаються *ірраціональними числами*.

Означення.

Невід'ємні дійсні числа $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ та $\beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ називаються *рівними*, якщо

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Означення.

Кажуть, що число $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ *менше* числа $b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ $(a < b)$, або число b *більше* числа a $(b > a)$, якщо

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_k = \beta_k, \quad 0 \leq k < n,$$

$$\alpha_n < \beta_n,$$

тобто до певної позиції n всі цифри в запису чисел a та b співпадають, а n-на цифра в записі a менша за відповідну цифру в записі b.

Контрольні запитання

1. Які логічні символи використовуються для запису математичних тверджень?
2. Якими способами описуються множини?
3. Що таке порожня множина?
4. Які вводяться дії над множинами?
5. Які числа називаються раціональними?
6. Чи є число $\sqrt{2}$ раціональним? Чому?
7. Як порівняти невід'ємні дійсні числа?

Лекція 2. Точні межі. Математична індукція. Біноміальні коефіцієнти та біном Ньютона. Функція та послідовність

Точні межі та обмежені множини. Теорема про існування точної верхньої межі. Метод математичної індукції. Біноміальні коефіцієнти та біном Ньютона. Трикутник Паскаля. Поняття функції та послідовності.

Точні межі

Означення.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо знайдеться такий елемент a множини A, що жоден інший елемент цієї множини його не перевищує, тобто

$$\exists a \in A \quad \forall x \in A \quad x \le a,$$

то a називається *найбільшим (максимальним) елементом* множини A.

Позначення: $a = \max A = \max\left\{x : x \in A\right\} = \max\limits_{x \in A} x = \max\limits_{A} x.$

Означення.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо

$$\exists a \in A \quad \forall x \in A \quad a \le x,$$

то a називається *найменшим (мінімальним) елементом* множини A.

Позначення: $a = \min A = \min\left\{x : x \in A\right\} = \min\limits_{x \in A} x = \min\limits_{A} x.$

Приклад.

1) $A = \mathbb{N}. \quad \nexists \max A, \quad \min A = 1.$
2) $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}. \quad \max A = 1, \quad \nexists \min A.$

Означення.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \le c,$$

то множина A називається *обмеженою зверху*, а число c називається *верхньою межею* множини A.

Означення.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad c \le x,$$

то множина A називається *обмеженою знизу*, а число c називається *нижньою межею* множини A.

Означення.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо множина A обмежена знизу та обмежена зверху, то вона називається *обмеженою*.

Приклад.

1) $A = \mathbb{N}$. Нижні межі: $1, 0, -1, -2\sqrt{2}, \ldots$ Множина обмежена знизу, але необмежена зверху. Множина натуральних чисел не є обмеженою множиною.

2) $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$. Нижні межі: $0,-1,-2\sqrt{2},\ldots$ Верхні межі: $1, 2, \frac{7}{2}, \sqrt{27},\ldots$ Множина A обмежена.

Означення.

Найменша з верхніх меж множини A називається *точною верхньою межею* множини A і позначається

$$\sup A=\sup\{x : x\in A\}=\sup_{x\in A} x=\sup_{A} x \quad \text{(лат. } supremum \text{ – найвищий).}$$

Найбільша з нижніх меж множини A називається *точною нижньою межею* множини A і позначається

$$\inf A=\inf\{x : x\in A\}=\inf_{x\in A} x=\inf_{A} x \quad \text{(лат. } infimum \text{ – найнижчий).}$$

Будемо писати $\sup A=+\infty$ у випадку, коли множина A не є обмеженою зверху, та $\inf A=-\infty$, якщо множина A не є обмеженою знизу.

Приклад.

1) $A=\mathbb{N}.\quad \sup A=+\infty,\quad \inf A=1=\min A.$

2) $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}.\quad \sup A=1=\max A,\quad \inf A=0.$

Зауваження.

Якщо існує $\max A$, то

$$\max A=\sup A.$$

Якщо існує $\min A$, то

$$\min A=\inf A.$$

Теорема *(про існування точної верхньої межі).*

Непорожня обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню межу.

Доведення:

Обмежимось для простоти лише випадком, коли $A\subset[0;+\infty),\ A\neq\varnothing.$

Розглянемо цілі частини елементів множини A. Оскільки множина A обмежена зверху певним числом, то цих цілих частин скінченна кількість, а отже, серед них є найбільша, які ми позначимо $\bar{\alpha}_0$. Розглянемо множину B_0, що складається з тих елементів множини A, які мають цілу частину $\bar{\alpha}_0$:

$$B_0=\{a\in A:\quad a=\bar{\alpha}_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}\neq\varnothing.$$

Розглянемо тепер перші цифри після коми в записі елементів множини B_0. Оскільки серед них є не більше 10 різних, серед них є найбільша. Позначимо її через $\bar{\alpha}_1$, а множину тих елементів множини B_0, що містять в першому розряді після коми цифру $\bar{\alpha}_1$, позначимо через B_1:

$$B_1=\{a\in B_0\subset A:\quad a=\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}\neq\varnothing.$$

Розглянемо другі цифри після коми в записі елементів множини B_1. Серед них є найбільша. Позначимо її через $\bar{\alpha}_2$, а множину тих елементів множини B_2, що містять в другому розряді після коми цифру $\bar{\alpha}_2$, позначимо через B_2:

$$B_2 = \{a \in B_1 \subset B_0 \subset A: \quad a = \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3 \ldots\} \neq \varnothing.$$

Продовжуючи цю процедуру, одержимо послідовність множин $\{B_n\}$, де

$$B_n = \{a \in B_{n-1} \subset \ldots \subset A: \quad a = \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \ldots \bar{\alpha}_{n-1} \bar{\alpha}_n \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots\} \neq \varnothing.$$

Розглянемо тепер нескінченний десятковий дріб

$$\bar{a} = \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \ldots \bar{\alpha}_n \ldots$$

та доведемо що він є точною верхньою межею множини A.

Припустимо, що число $\bar{a}$ взагалі не є верхньою межею множини A, тобто

$$\exists b \in A \quad b > \bar{a}.$$

Позначимо

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_n \ldots$$

Тоді за означенням порівняння дійсних чисел

$$\exists k \geq 0 \quad \beta_0 = \bar{\alpha}_0, \quad \beta_1 = \bar{\alpha}_1, \quad \beta_2 = \bar{\alpha}_2, \quad \ldots \quad \beta_{k-1} = \bar{\alpha}_{k-1}, \quad \beta_k > \bar{\alpha}_k.$$

Але $\bar{\alpha}_k$ – найбільша цифра на k-ому місці після коми тих елементів множини A, запис яких починається з $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \ldots \bar{\alpha}_{k-1}$. Протиріччя. Отже, припущення невірне, а $\bar{a}$ є верхньою межею множини A.

Припустимо, що число $\bar{a}$ не є точною верхньою межею множини A, тобто існує ще менша за $\bar{a}$ верхня межа c множини A. Це означає що,

$$\forall x \in A \quad x \leq c,$$

та

$$c < \bar{a}.$$

Позначимо

$$c = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots \gamma_n \ldots$$

Тоді з нерівності

$$c < \bar{a}$$

випливає, що

$$\exists m \geq 0 \quad \gamma_0 = \bar{\alpha}_0, \quad \gamma_1 = \bar{\alpha}_1, \quad \gamma_2 = \bar{\alpha}_2, \quad \ldots \quad \gamma_{m-1} = \bar{\alpha}_{m-1}, \quad \gamma_m < \bar{\alpha}_m.$$

Але тоді c менше за будь-який елемент y непорожньої множини B_m, оскільки запис усіх елементів цієї множини починається з $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \ldots \bar{\alpha}_{m-1} \bar{\alpha}_m$. Оскільки $B_m \subset A,$ то $y \in A,$ причому $y > c.$ Протиріччя. Отже,

$$\bar{a} = \sup A. \qquad \square$$

Зауваження.

Аналогічна теорема має місце й для точної нижньої межі.

Означення *(арифметичні дії над дійсними числами).*

Нехай a та b – додатні дійсні числа, причому

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots,$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_n \ldots$$

Позначимо

$$a_n' = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n, \quad a_n'' = a_n' + 10^{-n},$$

$$b_n' = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_n, \quad b_n'' = b_n' + 10^{-n}.$$

Тоді

$$a+b := \sup_{n\ge 0}\left(a'_n + b'_n\right),$$
$$a\cdot b := \sup_{n\ge 0}\left(a'_n \cdot b'_n\right),$$
$$\frac{a}{b} := \sup_{n\ge 0}\frac{a'_n}{b''_n}.$$

Математична індукція

Принцип математичної індукції.

Нехай M – така множина, що

1) $1\in M$,
2) $\forall n\in\mathbb{N} \quad (n\in M)\Rightarrow(n+1\in M)$.

Тоді $\mathbb{N}\subset M$.

Принцип математичної індукції є аксіомою натуральних чисел та є основою методу математичної індукції.

Позначимо через $P(n)$ деяке твердження для натурального числа n.

Метод математичної індукції:

1) Перевіряємо, що твердження $P(n_0)$ вірне для деякого початкового номера n_0 *(база індукції)*.
2) Припускаємо, що твердження $P(n)$ вірне для <u>деякого</u> номера n або для всіх натуральних чисел $k\in[n_0, n]$ *(припущення індукції)*.
3) Аналізуючи припущення індукції доводимо твердження $P(n+1)$ *(індукційний крок)*. Робимо висновок, що твердження P вірне для всіх натуральних чисел, починаючи з номера n_0.

Застосуємо цей метод для доведення нерівності Бернуллі.

Теорема *(нерівність Бернуллі).*

При $\alpha > -1$ та для довільного $n\in\mathbb{N}$

$$(1+\alpha)^n \ge 1+n\alpha.$$

Доведення:

1) Перевіримо нерівність Бернуллі при $n=1$. За умови $n=1$ вона набуває вигляду
$$(1+\alpha)^1 \ge 1+1\cdot\alpha,$$
$$1+\alpha \ge 1+\alpha,$$
а отже, є вірною.
2) Припустимо, що нерівність Бернуллі виконується для деякого фіксованого номера n.
3) Доведемо нерівність Бернуллі для $n+1$, тобто

$$\left(1+\alpha\right)^{n+1} \geq 1+\left(n+1\right)\alpha.$$

Дійсно,

$$\left(1+\alpha\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\alpha\right)}_{>0}\left(1+\alpha\right)^{n} \overset{\text{припущення індукції}}{\geq} \left(1+\alpha\right)\left(1+n\alpha\right) =$$

$$= 1+\alpha+n\alpha+n\alpha^{2} = 1+\left(n+1\right)\alpha+\underbrace{n\alpha^{2}}_{\geq 0} \geq 1+\left(n+1\right)\alpha.$$

Отже, за принципом математичної індукції нерівність Бернуллі виконується для всіх натуральних n. □

Біноміальні коефіцієнти та біном Ньютона

Означення.

Факторіалом натурального числа n називається

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

За означенням

$$0! = 1.$$

Означення.

k-елементні підмножини множини з n елементів називаються *комбінаціями, або сполученнями*, з n елементів по k.

Кількість комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k.

Теорема.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.$$

Доведення:

Щоб побудувати k-елементну підмножину, можна до підмножини з $k-1$ елементів приєднати один з $n-k+1$ елементів, що до неї не входять. Кількість підмножин з $k-1$ елементів дорівнює C_n^{k-1}. Доповнивши кожну з них одним з $n-k+1$ елементів, одержимо $\left(n-k+1\right)C_n^{k-1}$ підмножин. Проте не всі з цих множин будуть різними, оскільки кожну підмножину з k елементів можна було побудувати за такою процедурою k способами: приєднанням одного з його k елементів. Тому

$$kC_n^k = \left(n-k+1\right)C_n^{k-1}.$$

Звідси

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}C_n^{k-2} = \ldots =$$

$$= \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}C_n^{1}.$$

Але $C_n^1 = n$ (кількість 1-елементних підмножин множини з n елементів). Отже,

$$C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)n}{k(k-1)\dots 2} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)n}{k!1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad \square$$

Властивості коефіцієнтів C_n^k:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доведення:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k. \qquad \square$$

2) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Доведення:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = n!\frac{k+(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= n!\frac{n+1}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = C_{n+1}^k. \qquad \square$$

Теорема *(біном Ньютона).*

$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (*)$$

тобто

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n.$$

Доведення:

Доведемо цю теорему методом математичної індукції.

Перевіримо $(*)$ при $n=1$.

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1.$$

Отже, при $n=1$ співвідношення $(*)$ справджується.

Припустимо, що $(*)$ справедливе для деякого фіксованого n.

Доведемо тоді $(*)$ для $n+1$, тобто

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k.$$

$$\left(a+b\right)^{n+1}=\left(a+b\right)\left(a+b\right)^{n}=\left(a+b\right)\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^{k+1}=$$

$$=C_n^0a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k a^{n-k}b^{k+1}+C_n^nb^{n+1}=\left|i=k+1\right|=$$

$$=C_n^0a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k+1}b^k+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1} a^{n-i+1}b^{i}+C_n^nb^{n+1}=\left|\begin{array}{c} i\to k \\ C_n^0=C_n^n=1\end{array}\right|=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1} a^{n-k+1}b^k+b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)a^{n-k+1}b^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k a^{n-k+1}b^k+C_{n+1}^0a^{n+1}+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n-k+1}b^k.$$

Отже, за принципом математичної індукції рівність $(*)$ виконується для всіх натуральних n. □

Вправа.

Довести формулу $(*)$, розглядаючи кількість підмножин.

Зауваження.

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{k}b^{n-k}.$$

Означення.

Коефіцієнти C_n^k називаються *біноміальними коефіцієнтами*.

Властивість

$$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$$

дозволяє записати біноміальні коефіцієнти у вигляді так званого трикутника Паскаля. В n-ому рядку стоять коефіцієнти розкладу $\left(a+b\right)^n$, причому кожний коефіцієнт, окрім двох крайніх, які рівні 1, дорівнює сумі коефіцієнтів над ним.

$$\begin{array}{c}
(1)\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

Функція та послідовність

Означення.

Відображенням (функцією) f множини X у множину Y називається закон (правило), за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$.

Позначення: $f : X \to Y, \qquad X \xrightarrow{f} Y, \qquad y = f(x), x \in X.$

Множина X називається *областю визначення* функції f і позначається $D(f)$ або D_f.

Множина

$$E(f) = E_f = R(f) = R_f := \{y : y = f(x), x \in X\}$$

називається *областю значень* функції f.

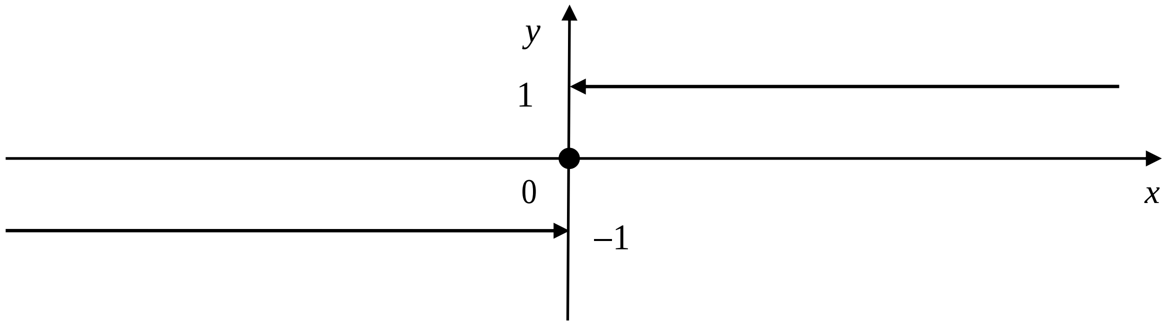
Зазначимо, що $E_f \subset Y$.

Якщо $y = f(x)$, то y називається *образом* точки x або *значенням функції* f в точці x.

Приклад.

$f = \operatorname{sgn} x$ (сигнум, від лат. *signum* — знак).

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



$$D_f = \mathbb{R}, \quad E_f = \{-1, 0, 1\}.$$

Означення.

Цілою частиною $[x]$ дійсного числа x називається найбільше ціле число, що не перевищує x.

Означення.

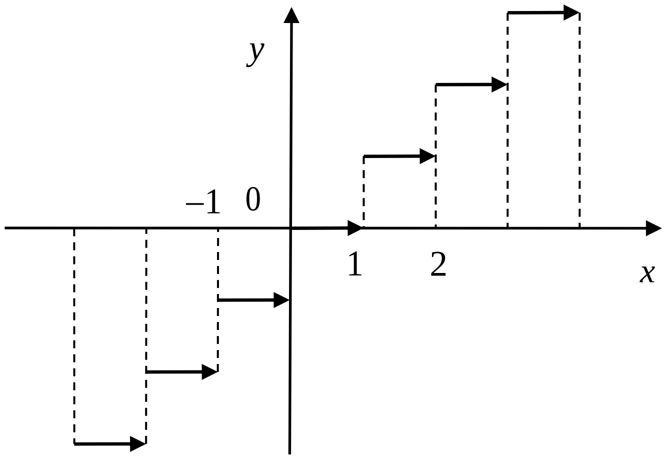
Дробовою частиною $\{x\}$ дійсного числа x називається

$$\{x\} := x - [x].$$

Приклад.

$$f = [x].$$

$$[x] = k, \quad k \le x < k+1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

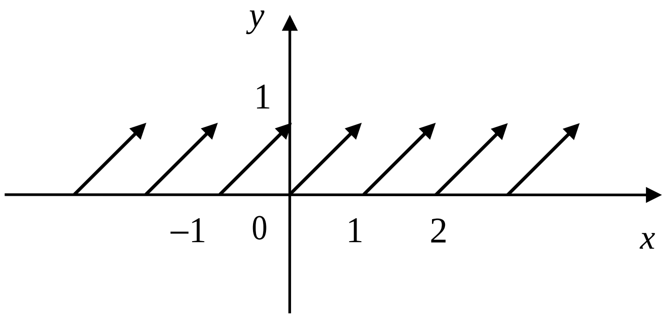


$$D_f = \mathbb{R}, \quad E_f = \mathbb{Z}.$$

Приклад.

$$f = \{x\}.$$

$$\{x\} = x - k, \quad k \le x < k+1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$$D_f = \mathbb{R}, \quad E_f = [0;1).$$

Означення.

Функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ називається *(числовою) послідовністю* $\left(D_f = \mathbb{N}\right)$.

Позначення: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}$.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ – члени послідовності $\left(a_n = f(n)\right)$.

a_n – загальний член.

Приклад.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

$$\left\{\frac{n}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \ldots\right\}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається найбільшим (найменшим) елементом множини?
2. Що називається точною верхньою (нижньою) межею?
3. Чим поняття точної верхньої межі відрізняється від поняття найбільшого елемента множини?
4. Доведіть теорему про існування точної верхньої межі.
5. У чому полягає метод математичної індукції?
6. Що називається комбінацією з n елементів по k?

7. Як обчислюються біноміальні коефіцієнти?
8. Які властивості мають біноміальні коефіцієнти?
9. Запишіть формулу бінома Ньютона.
10. Що називається відображенням?
11. Що називається послідовністю?

Лекція 3. Границя послідовності

Означення границі послідовності. Приклади. Теореми про границі послідовностей.

Означення.

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *границею послідовності* $\{a_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Позначення: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\to} a, \qquad a_n \to a,\ n \to \infty.$

При цьому кажуть, що послідовність $\{a_n\}$ *має границю* a, або *збігається* до a. Послідовність, яка не є збіжною, називається *розбіжною*.

Приклад.

Послідовність $\{a, a, \ldots, a, \ldots\}$, де $a \in \mathbb{R}$, збігається до числа a, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a = a.$$

Дійсно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

$$N = 1.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Дійсно для довільного $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Позначимо

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Тоді

$$\forall n \geq N \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Означення.

Якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > C,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Означення.

Якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < C,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Означення.

Якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n| > C,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Теорема.

Якщо послідовність збігається, то її границя єдина.

Доведення:

Нехай

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

Тоді за означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Позначимо $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тоді при будь-якому $n \geq N$

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Оскільки для довільного додатного числа ε виконується нерівність $|a-b| < \varepsilon,$ то $a = b.$

Дійсно, якщо $a \neq b,$ тобто $|a-b| > 0,$ то в можна вибрати

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0.$$

Тоді з нерівності $|a-b| < \varepsilon$ одержимо, що

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2},$$

а оскільки $|a-b| > 0,$ то

$$1 < \frac{1}{2},$$

що неможливо. Отже, припущення невірне, тобто $a = b.$ □

Означення.

Послідовність $\{a_n\}$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists C \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad |a_n| \leq C.$$

Теорема.

Збіжна послідовність є обмеженою.

Доведення:

Нехай
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}.$$
Виберемо $\varepsilon = 1.$ Тоді
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < 1,$$
а отже,
$$\forall n \geq N \quad |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1.$$
Позначимо
$$C = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}.$$
Тоді
$$\forall n \geq 1 \quad |a_n| \leq C. \qquad \square$$

Теорема.

Нехай послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ задовольняють умовам:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \quad a, b \in \mathbb{R};$
2) $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n.$

Тоді
$$a \leq b.$$

Доведення:

За означенням
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n} < a + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - b < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}}.$$
Позначимо $N = \max\{N_1; N_2; n_0\}.$ Тоді при будь-якому $n \geq N$
$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n \leq b_n < b + \frac{\varepsilon}{2},$$
звідки
$$a - b < \varepsilon.$$
Звідси випливає, що
$$a - b \leq 0,$$
тобто
$$a \leq b.$$
Дійсно, якщо $a > b,$ то можна вибрати
$$\varepsilon = \frac{a - b}{2} > 0.$$
Тоді з нерівності $a - b < \varepsilon$ одержимо, що

$$a-b<\frac{a-b}{2},$$

а оскільки $a-b>0$, то

$$1<\frac{1}{2},$$

що неможливо. Отже, припущення невірне, тобто $a\le b$. □

Теорема *(про проміжну послідовність)*.

Нехай послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ та $\{c_n\}$ задовольняють умовам:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a,\quad a\in\mathbb{R};$
2) $\forall n\ge n_0\quad a_n\le c_n\le b_n.$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a.$$

Доведення:

За означенням

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N_1\in\mathbb{N}\quad\forall n\ge N_1\quad |a_n-a|<\varepsilon,$$
$$\exists N_2\in\mathbb{N}\quad\forall n\ge N_2\quad |b_n-a|<\varepsilon.$$
$$|a_n-a|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\underline{a-\varepsilon<a_n}<a+\varepsilon,$$
$$|b_n-a|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad-\varepsilon<b_n-a<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad a-\varepsilon<\underline{b_n<a+\varepsilon}.$$

Позначимо $N=\max\{N_1;N_2;n_0\}$. Тоді при будь-якому $n\ge N$

$$a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon.$$

Звідси випливає, що

$$a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon.$$

Тобто

$$\forall n\ge N\quad |c_n-a|<\varepsilon,$$

що й означає, що

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a.\qquad\square$$

Теорема.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\quad\lim_{n\to\infty}b_n=b,\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Тоді

1) $\forall C\in\mathbb{R}\quad\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}a_n=Ca;$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a+b;$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab;$
4) якщо додатково $b\ne0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}.$$

Доведення:

1) При $C=0$

$$\lim_{n\to\infty}(0a_n)=\lim_{n\to\infty}0=0=0a.$$

За означенням при $C\neq 0$

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|C|}.$$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|C|}\quad\Leftrightarrow\quad |C||a_n-a|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad |Ca_n-Ca|<\varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N\quad |Ca_n-Ca|<\varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty}(Ca_n)=Ca.$$

2) За означенням

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_1\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_1\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists N_2\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_2\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Позначимо $N=\max\{N_1;N_2\}$. Тоді при будь-якому $n\geq N$

$$\begin{array}{c} a-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\frac{\varepsilon}{2} \\ + \\ b-\frac{\varepsilon}{2}<b_n<b+\frac{\varepsilon}{2} \\ \hline a+b-\varepsilon<a_n+b_n<a+b+\varepsilon \end{array}$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N\quad |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

3) Оскільки послідовність $\{b_n\}$ збіжна, вона є обмеженою, тобто

$$\exists C>0\quad \forall n\geq 1\quad |b_n|\leq C.$$

За означенням

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_1\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_1\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2C},$$

$$\exists N_2\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_2\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}.$$

Позначимо $N=\max\{N_1;N_2\}$. Тоді при будь-якому $n\geq N$

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \le |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| =$$

$$= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|}{|a|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |a_nb_n - ab| < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab.$$

4) Нехай для визначеності $b > 0$.

Вибравши в означенні границі замість числа ε число $\frac{b}{2}$, одержимо

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_1 \quad -\frac{b}{2} < b_n - b < \frac{b}{2},$$

звідки

$$\forall n \ge N_1 \quad b_n > \frac{b}{2}.$$

За означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_2 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon b}{4},$$

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_3 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)}.$$

Позначимо $N = \max\{N_1; N_2; N_3\}$. Тоді при будь-якому $n \ge N$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_nb - ab_n}{b_nb}\right| = \left|\frac{a_nb - ab + ab - ab_n}{b_nb}\right| \le$$

$$\le \frac{|a_n - a|b + |a||b - b_n|}{|b_n|b} = \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b_n|b}|b - b_n| <$$

$$< \frac{\varepsilon b}{4} \cdot \frac{2}{b} + \frac{|a|}{b} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|}{|a|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \qquad \square$$

Контрольні запитання

1. Що називається границею послідовності?

2. Наведіть приклади збіжних послідовностей.
3. Яка послідовність називається обмеженою?
4. Наведіть приклад обмеженої, але розбіжної послідовності.
5. Які властивості мають збіжні послідовності?

Лекція 4. Монотонні послідовності. Число *e*. Підпослідовності

Поняття монотонної послідовності. Теорема Вейєрштрасса. Нерівність Коші. Число e. Принцип вкладених відрізків. Поняття підпослідовності. Лема Больцано-Вейєрштрасса. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші.

Монотонні послідовності

Означення.

Послідовність $\{a_n\}$ називається

- *(строго) зростаючою*, якщо
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1};$$
- *неспадною*, якщо
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le a_{n+1};$$
- *(строго) спадною*, якщо
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1};$$
- *незростаючою*, якщо
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \ge a_{n+1}.$$

Якщо виконується будь-яка з цих чотирьох умов, то послідовність $\{a_n\}$ називається *монотонною*.

Теорема *(Вейєрштрасс).*

Монотонна обмежена послідовність збігається.

Доведення:

Нехай для визначеності послідовність $\{a_n\}$ неспадна. За умовою
$$\exists C \ge 0 \quad \forall n \ge 1 \quad |a_n| \le C.$$
Тому множина значень послідовності $\{a_n\}$ непорожня та обмежена. Отже, за теоремою про існування точної верхньої межі
$$\exists a \in \mathbb{R} \quad a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$
Доведемо, що
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

За означенням точної верхньої межі
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad a_N \ge a - \varepsilon.$$
Дійсно, і іншому випадку, тобто якщо
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a - \varepsilon_0,$$
число $a - \varepsilon_0$ було б верхньою межею множини значень послідовності $\{a_n\}$, що неможливо, оскільки a – найменша з верхніх меж цієї множини.

Оскільки послідовність $\{a_n\}$ неспадна, то
$$\forall n \ge N \quad a_N \le a_n \le a.$$

Отже,

$$\forall n \geq N \quad a-\varepsilon \leq a_n \leq a < a+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| \leq \varepsilon,$$

тобто

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n. \qquad \square$$

Число *e*

Розглянемо дві послідовності

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < b_n$;
2) $\{a_n\}$ строго зростає;
3) $\{b_n\}$ строго спадає.

Для доведення цієї теореми використаємо наступну нерівність.

Нерівність Коші.

Для довільного набору додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Доведення:

Доведемо другу нерівність.

Позначимо *середнє арифметичне* n доданків

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

середнє геометричне

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

а *середнє гармонічне*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

При $n=1$ нерівність очевидна.

Нехай $n>1$. Тоді $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} > 0$, тобто $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1$. За нерівністю Бернуллі

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n=\left(1+\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)\right)^n\geq 1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)=\frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}}=$$

$$=\frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}}=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})}{A_{n-1}}=$$

$$=\frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

Звідси випливає, що

$$A_n^n\geq a_nA_{n-1}^{n-1}\geq a_na_{n-1}A_{n-2}^{n-2}\geq\ldots\geq a_na_{n-1}\ldots a_2A_1=a_na_{n-1}\ldots a_2a_1=G_n^n,$$

а отже

$$A_n\geq G_n.$$

Якщо записати вже доведену нерівність для чисел $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$, одержимо

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}\leq\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

тобто

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}\leq\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

або

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.\qquad\square$$

Доведення теореми:

1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad b_n=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=a_n+\frac{a_n}{n}>a_n.$

2) Застосуємо нерівність Коші для таких $n+1$ чисел: $1,\underbrace{1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\ldots,1+\frac{1}{n}}_{n}$:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n+1}{n+1}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1+\frac{1}{n+1}\quad\Leftrightarrow\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a_n<a_{n+1}.$$

3) Застосуємо при $n \geq 2$ нерівність Коші для таких $n+1$ чисел: $\underbrace{1, 1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \ldots, 1-\frac{1}{n}}_{n}$:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n-1}{n+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} < \frac{n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n < b_{n-1}. \qquad \square$$

З доведеної теореми випливає, що для довільного натурального n

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \ldots < b_2 < b_1. \quad (*)$$

Оскільки послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ монотонні та обмежені, то за теоремою Вейєрштрасса вони збіжні. Позначимо

$$\lim_{n\to\infty} a_n := e \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Отже,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.}$$

З нерівностей $(*)$ також випливає, що

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.}$$

Оцінимо число e.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} := y_n.$$

При $m > n$

$$a_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k}\ge\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k},$$
$$e=\lim_{m\to\infty}a_m\ge\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=y_n.$$
Отже,
$$a_n\le y_n\le e.$$
За теоремою про проміжну послідовність
$$\lim_{n\to\infty}y_n=e$$
та
$$e\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$
Звідси можна одержати, що
$$e=2{,}718281828...$$

Підпослідовності

Теорема *(принцип вкладених відрізків).*

Нехай послідовність відрізків $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умовам:

1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad [a_{n+1};b_{n+1}]\subset[a_n;b_n]$;
2) $\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\in\mathbb{N}\quad b_{n_0}-a_{n_0}<\varepsilon.$

Тоді
$$\exists!x\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad x\in[a_n;b_n],$$
тобто
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n;b_n]=\{x\}.$$

Доведення:

За умовою для довільного натурального n
$$a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1.$$
Оскільки послідовність $\{a_n\}$ монотонна та обмежена, за теоремою Вейєрштрасса
$$\exists\lim_{n\to\infty}a_n:=x\in\mathbb{R}.$$
Оскільки
$$\forall N\in\mathbb{N}\quad\forall n\ge N\quad a_N\le a_n<b_n\le b_N,$$
то
$$a_N\le x\le b_N,$$
тобто
$$x\in[a_N;b_N],\quad N\in\mathbb{N}.$$

Припустимо, що
$$\exists y\in\mathbb{R}\setminus\{x\}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad y\in[a_n;b_n].$$
Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |y-x| \le b_n - a_n.$$

Але за умовою

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad b_{n_0} - a_{n_0} < \frac{|y-x|}{2}.$$

Отже,

$$|y-x| < \frac{|y-x|}{2},$$

$$1 < \frac{1}{2}.$$

Протиріччя. Отже, $y = x$. □

Зауваження.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x.$$

Означення.

Нехай $\{a_n\}$ – послідовність дійсних чисел, в $\{m_k\} = \{m(k)\}$ – строго зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $\{a_{m(k)}\}$ називається *підпослідовністю* послідовності $\{a_n\}$.

Лема Больцано-Вейєрштрасса.

Будь-яка обмежена послідовність містить збіжну підпослідовність.

Доведення:

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то існує такий відрізок $[a;b]$, що

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a;b].$$

Розділимо відрізок $[a;b]$ навпіл. Хоча б одна половина містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$, бо інакше обидві половини містили б лише скінченну кількість членів, а тоді й відрізок $[a;b]$ містив би скінченну кількість членів, що неможливо. Позначимо $[a_1;b_1]$ ту половину, що містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$. Далі знову розділимо $[a_1;b_1]$ навпіл і позначимо $[a_2;b_2]$ ту половину, що містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$. Продовжуючи цю процедуру нескінченно, отримаємо послідовність вкладених відрізків, кожний з яких містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$, причому

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тоді за принципом вкладених відрізків

$$\exists! x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n].$$

Тепер побудуємо підпослідовність. В якості $x_{n(1)}$ виберемо будь-який член послідовності $\{x_n\}$, який міститься в $[a_1;b_1]$. В якості $x_{n(2)}$ виберемо будь-який член послідовності $\{x_n\}$, який міститься в $[a_2;b_2]$, з номером більшим за $n(1)$. Це можна зробити, оскільки $[a_2;b_2]$ містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$. І так далі. Кожен раз через $x_{n(k)}$ будемо позначати член з відрізку $[a_k;b_k]$ з номером більшим за $n(k-1)$.

Доведемо, що $\{x_{n(k)}\}$ збігається до x. Оскільки

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k \le x_{n(k)} \le b_k$$

та

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x,$$

то за теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{n\to\infty} x_{n(k)} = x. \qquad \square$$

Означення.

Послідовність $\{a_n\}$ називається *фундаментальною*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \ge N \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Теорема *(критерій Коші).*

Для того, щоб послідовність дійсних чисел збігалася, необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальна.

Доведення:

Необхідність.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому

$$\forall m, n \ge N \quad |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достатність.

Доведемо спочатку, що фундаментальна послідовність $\{a_n\}$ обмежена. Виберемо $\varepsilon = 1$. Тоді за означенням

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \ge N \quad |a_m - a_n| < 1.$$

Позначимо

$$C := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

Тоді за побудовою

$$\forall n < N \quad |a_n| \le C,$$

а

$$\forall n \ge N \quad |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \le |a_n - a_N| + |a_N| < |a_N| + 1 \le C.$$

Отже,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le C,$$

тобто послідовність $\{a_n\}$ обмежена.

Тоді за лемою Больцано-Вейєрштрасса існує збіжна підпослідовність $\{a_{n(k)}\}$. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} a_{n(k)} = a.$$

Доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Послідовність $\{a_n\}$ фундаментальна. Отже, за означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За означенням границі послідовності

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad \left|a_{n(k)} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Виберемо тепер номер k_0 так, щоб $k_0 \geq K$ та $n(k_0) \geq N$. Тоді

$$\forall n \geq N \quad |a_n - a| = \left|a_n - a_{n(k_0)} + a_{n(k_0)} - a\right| \leq \left|a_n - a_{n(k_0)}\right| + \left|a_{n(k_0)} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Контрольні запитання

1. Які послідовності називаються монотонними?
2. Сформулюйте та доведіть теорему Вейєрштрасса про границю монотонної послідовності.
3. Запишіть нерівність Коші.
4. Що називається числом e?
5. Що називається підпослідовністю?
6. Сформулюйте принцип вкладених відрізків.
7. Сформулюйте лему Больцано-Вейєрштрасса.
8. Які послідовність називається фундаментальною?
9. Сформулюйте критерій Коші збіжності числової послідовності.

Лекція 5. Границя функції

Означення границі функції за Коші та за Гейне та їх еквівалентність. Властивості границь функцій.

Означення.

Нехай $A\subset\mathbb{R}$. Число $a\in\mathbb{R}$ називається *граничною точкою* множини A, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists x\in A\setminus\{a\}\quad |x-a|<\varepsilon.$$

Кажуть, що $+\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad \exists x\in A\quad x>C.$$

Кажуть, що $-\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad \exists x\in A\quad x<C.$$

Означення.

Нехай $\varepsilon>0$, $a\in\mathbb{R}$. Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ називається ε-околом, або просто околом точки a.

Позначення: $B(a,\varepsilon)$.

Множина

$$\overset{\circ}{B}(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$$

називається проколеним ε-околом точки a.

Вправа.

Довести, що в довільному околі граничної точки множини A лежить безліч елементів множини A.

Вправа.

Довести, що якщо дійсне число a є граничною точкою множини A, то існує така послідовність $\{a_n\}$, що

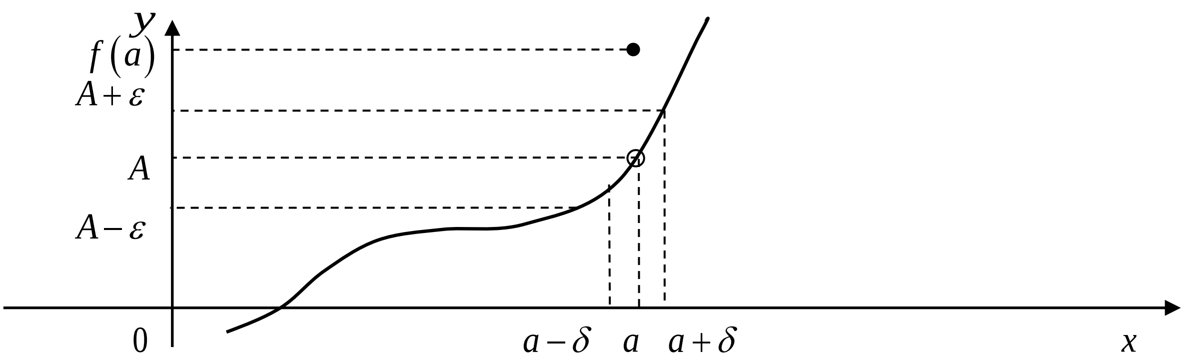
1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n\in A\setminus\{a\}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

Означення *(Коші).*

Нехай $a\in\mathbb{R}$ – гранична точка області визначення D_f функції f.

Число $A\in\mathbb{R}$ називається *границею функції* f в точці a, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\overset{\circ}{B}(a,\delta)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$



Означення *(Гейне).*

Нехай $a \in \mathbb{R}$ – гранична точка області визначення D_f функції f.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* f в точці a, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Позначення (спільне для двох означень): $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to a}{\to} A,$ $f(x) \to A, \quad x \to a.$

Теорема.

Означення границі функції в точці за Коші та за Гейне еквівалентні.

Доведення:

- *(Коші $\to$ Гейне).*

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ за Коші, а послідовність $\{x_n\}$ задовольняє умовам

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

За означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a, \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

А за означенням границі послідовності

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \delta.$$

Тому

$$\forall n \geq N \quad |f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

а отже,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

- *(Гейне $\to$ Коші).*

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ за Гейне. Припустимо, що A не є границею функції f в точці a за Коші, тобто

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x(\delta) \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a, \delta) \quad |f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Виберемо

$$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

За побудовою

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a.$$

Оскільки

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - a| < \frac{1}{n},$$

тобто

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n},$$

то за теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

Тому за означенням за Гейне

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A.$$

Протиріччя, оскільки

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left|f\left(x_n\right)-A\right|\ge\varepsilon_0.$$

Отже, наше припущення невірне, тобто $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=A$ за Коші. □

Означення.

Нехай $+\infty$ є граничною точкою області визначення D_f функції f.

Число $A\in\mathbb{R}$ називається *границею функції* f при $x\to+\infty$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists C\in\mathbb{R}\quad\forall x\in D_f\cap\left(C,+\infty\right)\quad\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Означення.

Нехай $-\infty$ є граничною точкою області визначення D_f функції f.

Число $A\in\mathbb{R}$ називається *границею функції* f при $x\to-\infty$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists C\in\mathbb{R}\quad\forall x\in D_f\cap\left(-\infty,C\right)\quad\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Означення.

Нехай $a\in\mathbb{R}$ – гранична точка області визначення D_f функції f.

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=+\infty,$$

якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in D_f\cap\overset{\circ}{B}\left(a,\delta\right)\quad f\left(x\right)>C.$$

Означення.

Нехай $a\in\mathbb{R}$ – гранична точка області визначення D_f функції f.

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty,$$

якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in D_f\cap\overset{\circ}{B}\left(a,\delta\right)\quad f\left(x\right)<C.$$

Означення.

Нехай $a\in\mathbb{R}$ – гранична точка області визначення D_f функції f.

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\infty,$$

якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in D_f\cap\overset{\circ}{B}\left(a,\delta\right)\quad\left|f\left(x\right)\right|>C.$$

Теорема.

Якщо існує границя функції в точці, то ця границя єдина.

Доведення:

Нехай

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = B.$$

Тоді для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a,$
2) $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = B.$$

За теоремою про єдиність границі послідовності

$$A = B. \qquad \square$$

Теорема.

Якщо для дійсного числа a

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},$$

а

$$B > A \quad (B < A),$$

то

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad f(x) < B \quad \big(f(x) > B\big).$$

Доведення:

За означенням за Коші для $\varepsilon = B - A > 0$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad \left|f(x) - A\right| < \varepsilon,$$

звідки

$$\forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad f(x) < A + \varepsilon = A + (B - A) = B. \qquad \square$$

Теорема.

Нехай $f : D \to \mathbb{R},\ g : D \to \mathbb{R},\ a$ – гранична точка множини D, причому

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

$$\forall x \in D \quad f(x) \le g(x).$$

Тоді

$$A \le B.$$

Доведення:

За означенням за Гейне для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D, \quad x_n \neq a,$
2) $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B,$$

причому

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \le g(x_n).$$

Тоді

$$A \le B. \qquad \square$$

Теорема.

Нехай $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R}$, a – гранична точка множини D, причому

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A,$$

$$\forall x \in D \quad f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Тоді

$$\lim_{x\to a} h(x) = A.$$

Доведення:

За означенням за Гейне для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D, \quad x_n \ne a,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A,$$

причому

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n).$$

Тоді за теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A.$$

Отже, а означенням за Гейне

$$\lim_{x\to a} h(x) = A. \qquad \square$$

Теорема.

Нехай $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, a – гранична точка множини D, причому

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}.$$

Тоді

5) $\forall C \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x\to a}\big(Cf(x)\big) = C \lim\limits_{x\to a} f(x) = CA;$
6) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B;$
7) $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = AB;$
8) якщо додатково $B \ne 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(Ця теорема доводиться аналогічно попередній.)

Теорема.

Нехай $D_f \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ та

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \in \mathbb{R},$
2) $\forall x \in D_f \setminus \{a\} \quad f(x) \neq b.$

Тоді

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(b).$$

Доведення:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall y \in D_g \cap \overset{\circ}{B}(b,\gamma) \quad |g(y) - c| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad 0 < |f(x) - b| < \gamma,$$

звідки

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad |g(f(x)) - c| < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема *(критерій Коші).*

Нехай a – гранична точка області визначення функції $f(x)$. Скінченна границя функції $f(x)$ в точці a існує тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доведення:

Необхідність.

Якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R},$$

то за означенням за Коші

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall x, y \in D_f \cap \overset{\circ}{B}(a,\delta) \quad |f(x) - f(y)| = |f(x) - A + A - f(y)| \leq$$

$$\leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достатність.

Нехай $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ – довільні дві послідовності, що задовольняють умовам в означенні границі функції в точці за Гейне. Тоді ці умови також виконуються для послідовності

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}.$$

Дійсно, за побудовою

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \in D_f, \quad z_n \neq a.$$

Оскільки за означенням границі послідовності

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_1\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_1\quad |x_n-a|<\varepsilon,$$
$$\exists N_2\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_2\quad |y_n-a|<\varepsilon,$$
то при будь-якому $n\geq N$, де $N=\max\{2N_1;\,2N_2\}$,
$$|z_n-a|<\varepsilon.$$
За умовою
$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x,y\in D_f\cap\overset{\circ}{B}(a,\delta)\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$
За означенням границі послідовності
$$\exists N_0\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N_0\quad |z_n-a|<\delta,$$
звідки випливає, що
$$\forall n,m\geq N_0\quad |f(z_m)-f(z_n)|<\varepsilon.$$
Таким чином, послідовність $\{f(z_n)\}$ фундаментальна, звідки за критерієм Коші для послідовностей випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A.$$
Тому
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=A.$$
Таким чином,
$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$
за Гейне. □

Контрольні запитання

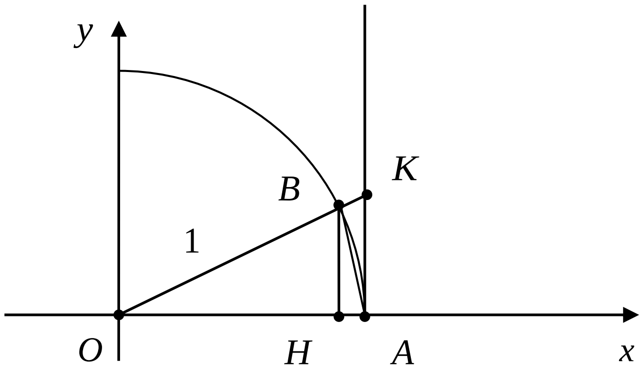
8. Що називається граничною точкою множини?
9. Сформулюйте означення границі функції за Коші.
10. Сформулюйте означення границі функції за Гейне.
11. Які властивості мають границі функцій?
12. Сформулюйте критерій Коші для границь функцій.

Лекція 6. Визначні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі

Дві визначні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Теорема про представлення функції, що має границю. Невизначеності. Порівняння нескінченно малих. Порівняння нескінченно великих.

Дві визначні границі

I. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.}$



Нехай $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Позначимо $A(1;0)$. Проведемо з початку координат промінь під кутом x до осі Ox. Позначимо через B його точку перетину з одиничним колом, а через K його точку перетину з віссю тангенсів $x=1$. Опустимо також з точки B перпендикуляр BH на вісь Ox. Позначимо через S_{AOB} площу сектора AOB.

$$S_{\triangle AOB}<S_{AOB}<S_{\triangle AOK}.$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2},$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle AOK}=\frac{1}{2}OA\cdot AK=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$$

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg}x}{2},$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Розділимо всі частини останньої нерівності на $\sin x>0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Оскільки функції $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$ парні, то остання нерівність справджується також для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Оскільки

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

II. $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$

Також, виконавши заміну $y = \frac{1}{x}$, одержимо

$$\boxed{\lim_{y\to 0+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.}$$

Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}$, для якої

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Позначимо цілу частину x_n як

$$k_n := [x_n].$$

Тоді

$$k_n \le x_n < k_n + 1 \le x_n + 1,$$

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{k_n},$$

$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \le 1+\frac{1}{k_n},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Послідовності $\left\{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\right\}$ та $\left\{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\right\}$, якщо з них вилучити елементи, що повторюються чи є меншими за попередні, стануть підпослідовностями послідовності $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}=e.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)=e\cdot 1=e.$$

За теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e.$$

За означенням за Гейне

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення.

Функція f називається *нескінченно малою* (НМ) при $x\to a$ (або в точці a), якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

Означення.

Функція f називається *нескінченно великою* (НВ) при $x\to a$ (або в точці a), якщо

$$\lim_{x\to a}\left|f(x)\right|=+\infty,$$

тобто

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\overset{\circ}{B}(a,\delta)\quad \left|f(x)\right|>C.$$

Приклад.

- $y=\sin x$ є нескінченно малою при $x\to 0$, але не буде нескінченно малою при $x\to 1$.
- $y=(1-\sin x)\ln x$ не є нескінченно великою при $x\to+\infty$, хоча ця функція необмежена.
- $y=(3-2\sin x)\ln x$ є нескінченно великою при $x\to+\infty$, оскільки

$$(3-2\sin x)\ln x\ge \ln x\to+\infty,\quad x\to+\infty.$$

Аналогічні означення вводяться й для послідовностей.

Теорема *(властивості нескінченно малих).*

1) Сума скінченної кількості нескінченно малих є нескінченно малою.
2) Добуток скінченної кількості нескінченно малих є нескінченно малою.
3) Добуток нескінченно малої та обмеженої функції є нескінченно малою.
4) Якщо $f(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$ та в околі точки a функція $f(x)$ відмінна від нуля, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика при $x \to a$.

Доведення:

1) Перевіримо твердження для двох нескінченно малих при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}(\alpha_1 + \alpha_2) = \lim_{x\to a}\alpha_1 + \lim_{x\to a}\alpha_2 = 0 + 0 = 0.$$

Припустимо, що для будь-яких n нескінченно малих при $x \to a$ сума є нескінченно малою при $x \to a$. Доведемо, що тоді сума будь-яких $n+1$ нескінченно малих при $x \to a$ є нескінченно малою при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) = \lim_{x\to a}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + \lim_{x\to a}\alpha_{n+1} = 0 + 0 = 0.$$

За принципом математичної індукції твердження вірне для будь-якої скінченної кількості довільних нескінченно малих при $x \to a$.

2) Перевіримо твердження для двох нескінченно малих при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \lim_{x\to a}\alpha_1 \cdot \lim_{x\to a}\alpha_2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Припустимо, що для будь-яких n нескінченно малих при $x \to a$ добуток є нескінченно малою при $x \to a$. Доведемо, що тоді добуток будь-яких $n+1$ нескінченно малих при $x \to a$ є нескінченно малою при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \alpha_{n+1}) = \lim_{x\to a}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n) \cdot \lim_{x\to a}\alpha_{n+1} = 0 \cdot 0 = 0.$$

За принципом математичної індукції твердження вірне для будь-якої скінченної кількості довільних нескінченно малих при $x \to a$.

3) Нехай $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, а $h(x)$ – обмежена функція, визначена в околі точки a. Тоді

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in D_h \quad |h(x)| < C,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_\alpha \cap \mathring{B}(a, \delta) \quad |\alpha(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{C},$$

а отже,

$$\forall x \in D_h \cap D_\alpha \cap \mathring{B}(a, \delta) \quad |\alpha(x)h(x) - 0| = |\alpha(x)||h(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)h(x) = 0.$$

4) $\forall C > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \mathring{B}(a, \delta) \quad |f(x) - 0| < \dfrac{1}{C},$

а отже,

$$\forall x \in D_f \cap \mathring{B}(a, \delta) \quad \frac{1}{|f(x)|} > C,$$

що й означає, що $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика при $x \to a$. $\square$

Теорема *(про представлення функції, що має границю).*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$.

Доведення:

Необхідність.

Позначимо

$$\alpha(x) := f(x) - A.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}\left(f(x) - A\right) = \lim_{x\to a} f(x) - A = A - A = 0.$$

Достатність.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(A + \alpha(x)\right) = A + \lim_{x\to a} \alpha(x) = A + 0 = A. \qquad \square$$

Невизначеності

Розглянемо приклади границь відношень $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, а $g(x) \neq 0$ в околі точки a.

- $f(x) = x^2, \quad g(x) = x, \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$
- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$
- $f(x) = Cx, \quad g(x) = x, \quad x \to 0, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} C = C.$
- $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x, \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

Отже, результат обчислення границі відношення двох нескінченно малих є наперед невизначеним. Тому говорять про невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Типи невизначеностей: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty - \infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$.

Вправа.

Навести відповідні приклади до решти невизначеностей.

Порівняння нескінченно малих

Означення.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, а $g(x) \neq 0$ в околі a.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то $\alpha(x)$ *має вищий порядок малості*, ніж $\beta(x)$, що позначають як

$$\alpha(x)=o(\beta(x)),\quad x\to a.$$

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$$

то $\alpha(x)$ *має нижчий порядок малості*, ніж $\beta(x)$, тобто

$$\beta(x)=o(\alpha(x)),\quad x\to a.$$

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ *мають однаковий порядок малості*.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються *еквівалентними*, що позначається

$$\alpha(x)\sim\beta(x),\quad x\to a.$$

Якщо

$$\nexists\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються *непорівнянними*.

Означення.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

то кажуть, що $\alpha(x)$ має *порядок* k відносно $\beta(x)$ при $x\to a$, а $C\left(\beta(x)\right)^k$ називається *головною частиною* $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to a$.

Порівняння нескінченно великих

Означення.

Нехай $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно великими при $x\to a$.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

то $f(x)$ *має нижчий порядок росту*, ніж $g(x)$.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,$$

то $f(x)$ *має вищий порядок росту*, ніж $g(x)$.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

то $f(x)$ та $g(x)$ *мають однаковий порядок росту*.

Якщо

$$\nexists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

то $f(x)$ та $g(x)$ називаються *непорівнянними.*

Означення.

Якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(g(x)\right)^k}=C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

то кажуть, що $f(x)$ має *порядок* k відносно $g(x)$ при $x\to a$.

Контрольні запитання

1. Запишіть першу визначну границю.
2. Запишіть другу визначну границю.
3. Яка функція називається нескінченно малою?
4. Яка функція називається нескінченно великою?
5. Які властивості мають нескінченно малі функції?
6. Сформулюйте теорему про представлення функції, що має границю.
7. Які є типи невизначеностей?
8. Які нескінченно малі називаються еквівалентними?
9. Що називається порядком та головною частиною нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно нескінченно малої $\beta(x)$ при $x\to a$?

Лекція 7. Еквівалентність нескінченно малих. Однобічні границі. Неперервні функції в точці

Еквівалентність нескінченно малих функцій (означення, властивості). Таблиця еквівалентних нескінченно малих. Границі функцій в точці зліва та справа. Неперервні функції в точці. Елементарні функції.

Еквівалентність нескінченно малих

Означення.

Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x \to a$ називаються *еквівалентними* при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Теорема.

Для того, щоб нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x \to a$ були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб

$$\alpha(x)=\beta(x)+o\big(\beta(x)\big), \quad x\to a.$$

Доведення:

Необхідність.

Оскільки

$$\alpha(x)\sim\beta(x), \quad x\to a,$$

маємо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-\lim_{x\to a}1=1-1=0,$$

тобто

$$\alpha(x)-\beta(x)=o\big(\beta(x)\big), \quad x\to a.$$

Достатність.

Якщо

$$\alpha(x)=\beta(x)+o\big(\beta(x)\big), \quad x\to a,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)+o\big(\beta(x)\big)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}1+\lim_{x\to a}\frac{o\big(\beta(x)\big)}{\beta(x)}=1+0=1,$$

тобто

$$\alpha(x)\sim\beta(x), \quad x\to a. \qquad \square$$

Лема.

Границя добутку (частки) не зміниться, якщо в ньому нескінченно малу замінити на еквівалентну їй нескінченно малу.

Доведення:

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$,

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \to a.$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) f(x)$, то

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \beta(x) f(x) =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to a} \beta(x) f(x) = \lim_{x\to a} \beta(x) f(x). \qquad \square$$

Теорема.

При $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x),$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, \quad a \neq 1),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Доведення:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (перша визначна границя) $\quad \Leftrightarrow \quad \sin x \sim x, \quad x \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \dfrac{1}{1} = 1.$
- Введемо заміну

$$z = \arcsin x.$$

Тоді

$$z \to 0, \quad x \to 0.$$

$$x = \sin z.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

- Введемо заміну

$$z = \operatorname{arctg} x.$$

Тоді

$$z \to 0, \quad x \to 0.$$

$$x = \operatorname{tg} z.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=1.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}}=1.$$
- Нехай

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}},\quad g(y)=\ln y.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0} f(x)=e \text{ (друга визначна границя)},$$

$$\lim_{y\to e} g(y)=g(e)=\ln e=1,$$

$$1=\lim_{x\to 0} g\left(f(x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

- Нехай

$$z=a^x-1.$$

Тоді

$$z\to 0,\quad x\to 0.$$

$$1=\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln a^x}{a^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{a^x-1}\quad\Rightarrow\quad a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.\qquad\square$$

Властивості відношення «о»:

Нехай f та g є нескінченно малими при $x\to a.$ Тоді при $x\to a$

1) $o(Cf)=o(f);$
2) $o(f)+o(f)=o(f);$
3) $o(f)\cdot o(g)=o(fg);$
4) $o(o(f))=o(f).$

Ці рівності використовуються зліва направо. Навпаки, взагалі кажучи, невірно.

Вправа.

Довести ці властивості.

Однобічні границі

Нехай точка a – гранична точка області визначення D_f функції $f(x)$.

Означення.

Число $A\in\mathbb{R}$ називається *границею зліва* функції $f(x)$ в точці a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap (a-\delta; a) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a-0)$.

Означення.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею справа* функції $f(x)$ в точці a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap (a; a+\delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+0)$.

Зауваження.

Для того, щоб

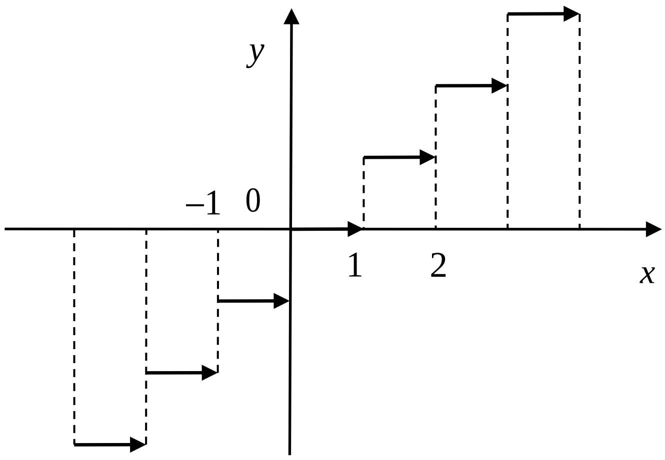
$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

необхідно й достатньо, щоб

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Приклад.

$f(x) = [x]$ – ціла частина дійсного числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x.



$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1, \quad f(1) = 1, \quad \nexists \lim_{x \to 1} f(x).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається

- *(строго) зростаючою*, якщо
$$\forall x, y \in D_f \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y);$$
- *неспадною*, якщо
$$\forall x, y \in D_f \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(y);$$
- *(строго) спадною*, якщо
$$\forall x, y \in D_f \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y);$$
- *незростаючою*, якщо
$$\forall x, y \in D_f \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge f(y).$$

Якщо виконується будь-яка з цих чотирьох умов, то функція $f(x)$ називається *монотонною*.

Означення.

Функція $f(x)$ називається обмеженою на множині D, якщо

$$\exists C>0 \quad \forall x\in D \quad |f(x)|<C.$$

Теорема.

Нехай для деякого $\gamma>0$ $(a-\gamma;a)\subset D$, $f:D\to\mathbb{R}$ та

1) $f(x)$ неспадна на D;
2) $f(x)$ обмежена на D.

Тоді існує $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Доведення:

Множина

$$B:=\{f(x):\quad x\in D\cap(-\infty;a)\}\neq\varnothing$$

обмежена зверху, а тому

$$\exists A=\sup B\in\mathbb{R}.$$

За означенням точної верхньої межі

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists a'\in D\cap(-\infty;a) \quad f(a')>A-\varepsilon.$$

Для $\delta:=a-a'$ матимемо, що через монотонність функції $f(x)$ і той факт, що $a-\delta=a'$,

$$\forall x\in(a-\delta;a)\cap(a-\gamma;a) \quad A-\varepsilon<f(a')\leq f(x)\leq A,$$

а отже

$$\forall x\in(a-\min(\delta;\gamma);a) \quad |f(x)-A|<\varepsilon. \qquad \square$$

Неперервні функції в точці

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* a, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною зліва в точці* a, якщо

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною справа в точці* a, якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною на множині* B, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Позначення: $f(x)\in C(B)$.

Теорема.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці a. Тоді

9) для довільного дійсного числа C функція $Cf(x)$ неперервна в точці a;

10) функція $f(x)+g(x)$ неперервна в точці a;

11) функція $f(x)g(x)$ неперервна в точці a;

12) якщо додатково $g(a)\neq 0,$ то функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ неперервна в точці a.

Доведення:

1) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)=Cf(a).$

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a).$

3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)g(a).$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}.$ □

Теорема.

Нехай $D_f \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R},$

$$\lim_{x\to a} f(x)=b\in\mathbb{R},$$

функція $g(x)$ неперервна в точці b.

Тоді

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big)=g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)=g(b).$$

Доведення:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\gamma>0\quad \forall y\in D_g\cap(b-\gamma;b+\gamma)\quad \left|g(y)-g(b)\right|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\mathring{B}(a,\delta)\quad \left|f(x)-b\right|<\gamma,$$

звідки

$$\exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\mathring{B}(a,\delta)\quad \left|g\big(f(x)\big)-g(b)\right|<\varepsilon. \qquad \square$$

Наслідок.

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці a, а функція $g(x)$ неперервна в точці $f(a)$.

Тоді функція $g\big(f(x)\big)$ неперервна в точці a.

Означення.

Основними елементарними функціями називаються функції $x^{\alpha},\ a^{x},\ \log_a x,\ \sin x,$ $\cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x, \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$

Означення.

Елементарними функціями називаються функції, які одержуються з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

Твердження.

Основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення еквівалентних нескінченно малих функцій.
2. Запишіть таблицю еквівалентних нескінченно малих.
3. Сформулюйте означення границі функції зліва (справа) в точці.
4. Сформулюйте означення неперервної функції в точці.
5. Сформулюйте означення неперервної функції зліва (справа) в точці.
6. Які властивості мають неперервні в точці функції?
7. Які функції називаються елементарними?

Лекція 8. Неперервні на відрізку функції. Розриви функцій

Означення неперервної на відрізку функції. Теореми Вейєрштрасса. Теорема Больцано-Коші про нулі функції. Теорема Коші про проміжне значення. Теорема про обернену функцію. Рівномірно неперервні функції. Теорема Кантора. Розриви функцій та їх класифікація.

Неперервні на відрізку функції

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною зліва* в точці a, якщо

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною справа* в точці a, якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Означення.

Функція $f(x)$ називається *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;b)$, неперервна справа в точці a та неперервна зліва в точці b.

Теорема *(перша теорема Вейєрштрасса).*

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на ньому.

Доведення:

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Припустимо, що $f(x)$ не є обмеженою на $[a;b]$, тобто

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;b] \quad |f(x_n)| \geq n.$$

Послідовність $\{x_n\}$ обмежена, а отже, за лемою Больцано-Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $\{x_{n(k)}\}$. Позначимо

$$x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n(k)}.$$

Оскільки

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a \leq x_{n(k)} \leq b,$$

то за теоремою про граничний перехід у нерівностях

$$a \leq x_0 \leq b.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а $x_0 \in [a;b]$, то

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n(k)}\right),$$

що неможливо, оскільки

$$\left|f\left(x_{n(k)}\right)\right| \geq n(k) \to +\infty, \quad k \to \infty. \qquad \square$$

Приклад.

Функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

визначена в кожній точці відрізку $[0;1]$, проте необмежена на ньому. Функція $f(x)$ неперервна на проміжку $(0;1]$, а не на відрізку $[0;1]$.

Означення.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D, $x_0\in D$,

$$\forall x\in D \quad f(x)\le f(x_0),$$

то кажуть, що $f(x)$ приймає (досягає) *найбільше, або максимальне, значення* в точці x_0.

Позначення: $f(x_0)=\max\limits_{D} f(x)$.

Означення.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D, $x_0\in D$,

$$\forall x\in D \quad f(x)\ge f(x_0),$$

то кажуть, що $f(x)$ приймає (досягає) *найменше, або мінімальне, значення* в точці x_0.

Позначення: $f(x_0)=\min\limits_{D} f(x)$.

Теорема *(друга теорема Вейєрштрасса).*

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає на ньому найбільше та найменше значення.

Доведення:

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Доведемо існування найбільшого значення. Існування найменшого значення доводиться аналогічно.

За першою теоремою Вейєрштрасса функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$, а тому множина відрізку $\{f(x),\ x\in[a;b]\}$ значень цієї функції на відрізку $[a;b]$ теж обмежена. За теоремою про існування точної верхньої межі

$$\exists A=\sup_{[a;b]} f\in\mathbb{R}.$$

За означенням точної верхньої межі

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists x_n\in[a;b]\quad A-\frac{1}{n}<f(x_n)\le A.$$

Послідовність $\{x_n\}$ обмежена, оскільки $\{x_n\}\subset[a;b]$, а тому за лемою Больцано-Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $\{x_{n(k)}\}$. Позначимо

$$x^*:=\lim_{k\to\infty}x_{n(k)}.$$

За побудовою

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A - \frac{1}{n(k)} < f\left(x_{n(k)}\right) \le A.$$

За теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n(k)}\right) = A.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а $x^* \in [a;b]$, то

$$f\left(x^*\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n(k)}\right) = A.$$

Оскільки $A = \sup\limits_{[a;b]} f$, то

$$\forall x \in [a;b] \quad f(x) \le A = f\left(x^*\right). \qquad \square$$

***Теорема** (Больцано-Коші про нулі функції).*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та приймає різні за знаком значення на його кінцях, то існує принаймні одна така точка $x_0 \in (a;b)$, що

$$f(x_0) = 0.$$

Доведення:

Розділимо відрізок $[a;b]$ навпіл та позначимо через $[a_1;b_1]$ ту частину, на кінцях якої функція приймає різні за знаком значення (якщо в точці поділу функція дорівнює нулю, то потрібну точку вже знайдено). Далі розділимо відрізок $[a_1;b_1]$ навпіл та позначимо через $[a_2;b_2]$ ту частину, на кінцях якої функція приймає різні за знаком значення. І так далі. Продовжуючи цю процедуру, одержимо послідовність вкладених відрізків

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots,$$

причому

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

За принципом вкладених відрізків

$$\exists! x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \in [a_n;b_n],$$

причому

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

За теоремою про граничний перехід у нерівностях

$$a \le x_0 \le b.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а $x_0 \in [a;b]$, то

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Нехай для визначеності

$$f(a_n) < 0.$$

Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

Тоді

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0\le \lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(x_0),$$

звідки випливає, що

$$f(x_0)=0. \qquad \square$$

Теорема *(Коші про проміжне значення).*

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає на ньому всі проміжні значення між своїми найбільшим та найменшим значеннями на цьому відрізку.

Доведення:

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. За другою теоремою Вейєрштрасса

$$\exists\alpha\in[a;b]\quad f(\alpha)=\min_{x\in[a;b]} f(x),$$

$$\exists\beta\in[a;b]\quad f(\beta)=\max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Нехай для визначеності $\alpha<\beta.$

Розглянемо довільне число $L\in[f(\alpha);f(\beta)]$. Якщо $L=f(\alpha)$ або $L=f(\beta)$, то потрібна точка вже знайдена та дорівнює α або β. Якщо

$$f(\alpha)<L<f(\beta),$$

розглянемо функцію

$$g(x):=f(x)-L.$$

Функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$,

$$g(\alpha)=f(\alpha)-L<0,$$

$$g(\beta)=f(\beta)-L>0,$$

отже, за теоремою Больцано-Коші про нулі функції

$$\exists x_0\in(\alpha;\beta)\quad g(x_0)=0.$$

Тоді

$$f(x_0)=g(x_0)+L=L. \qquad \square$$

Означення.

Функція $g:Y\to X$ називається *оберненою* до функції $f:X\to Y$, якщо

$$\forall y\in Y\quad f(g(y))=y,$$

$$\forall x\in X\quad g(f(x))=x.$$

Теорема *(про обернену функцію).*

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$ та строго зростає (строго спадає) на $(a;b)$. Позначимо

$$c=\lim_{x\to a+} f(x),\quad d=\lim_{x\to b-} f(x).$$

При цьому

$$-\infty\le c<d\le+\infty\quad(-\infty\le d<c\le+\infty).$$

Тоді існує єдина функція $g:(c;d)\to(a;b)$ $\big(g:(d;c)\to(a;b)\big)$, для якої

1) функція $g(x)$ строго зростає на $(c;d)$ (функція $g(x)$ строго спадає на $(d;c)$);
2) функція $g(x)$ неперервна на $(c;d)$ (на $(d;c)$);
3) $\forall y\in(c;d)$ $\big(\forall y\in(d;c)\big)$ $f\big(g(y)\big)=y,$
   $\forall x\in(a;b)$ $g\big(f(x)\big)=x.$

(Без доведення.)

Означення.

Функція $f(x)$ називається *рівномірно неперервною* на множині $A\subset D_f$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x',x''\in A\quad |x'-x''|<\delta\quad\Rightarrow\quad \big|f(x')-f(x'')\big|<\varepsilon.$$

Зауваження.

Якщо функція $f(x)$ рівномірно неперервна на множині $A\subset D_f$, то $f(x)$ неперервна на A.

Дійсно, якщо зафіксуємо $x''=a\in A,$ одержимо

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x'\in A\quad |x'-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad \big|f(x')-f(a)\big|<\varepsilon,$$

що означає неперервність функції $f(x)$ в точці a. Оскільки вибір точки був довільним, то $f(x)$ неперервна на A.

Теорема *(Кантор).*

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона рівномірно неперервна на ньому.

Доведення:

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Припустимо, що $f(x)$ не рівномірно неперервна на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\exists\varepsilon_0>0\quad\forall\delta>0\quad\exists x'(\delta),x''(\delta)\in[a;b]$$
$$\Big(\big|x'(\delta)-x''(\delta)\big|<\delta\Big)\wedge\Big(\big|f\big(x'(\delta)\big)-f\big(x''(\delta)\big)\big|\ge\varepsilon_0\Big).$$

Розглядаючи в якості величини δ числа вигляду $\dfrac{1}{n}$, де n – натуральне число, одержимо дві послідовності $\{x'_n\}$ та $\{x''_n\}$, де

$$x'_n=x'\left(\frac{1}{n}\right),\quad x''_n=x''\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оскільки $\{x'_n\}\subset[a;b]$, послідовність $\{x'_n\}$ обмежена, а отже, за теоремою Больцано-Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $\left\{x'_{n(k)}\right\}$. Позначимо

$$x_0:=\lim_{k\to\infty}x'_{n(k)}\in[a;b].$$

Оскільки за побудовою

$$x'_{n(k)} - \frac{1}{n(k)} < x''_{n(k)} < x'_{n(k)} + \frac{1}{n(k)},$$

то за теоремою про проміжну послідовність

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n(k)} = x_0.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0 \in [a;b]$, то

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x'_{n(k)}\right) = f(x_0), \quad \lim_{k\to\infty} f\left(x''_{n(k)}\right) = f(x_0)$$

та

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x'_{n(k)}\right) - f\left(x''_{n(k)}\right)\right) = 0.$$

Проте за побудовою

$$\left| f\left(x'_{n(k)}\right) - f\left(x''_{n(k)}\right)\right| \geq \varepsilon_0.$$

Протиріччя. Таким чином, наше припущення невірне, а функція $f(x)$ рівномірно неперервна на відрізку $[a;b]$. □

Розриви функцій

Нехай $f:(a;x_0)\cup(x_0;b)\to\mathbb{R},\ -\infty \leq a < b \leq +\infty.$

Зауваження.

Для того, щоб функція $f(x)$ була неперервна в точці x_0, необхідно й достатньо, щоб

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0).$$

Означення.

Якщо функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то вона називається *розривною* в цій точці, а сама точка x_0 називається *точкою розриву* функції $f(x)$.

Означення.

- Якщо обидві однобічні границі існують і скінченні, але

$$f(x_0-0) \neq f(x_0)$$

або

$$f(x_0+0) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 називається *точкою розриву I роду*.

При цьому якщо

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0),$$

кажуть, що функція $f(x)$ має в точці x_0 *стрибок*.

Якщо

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0),$$

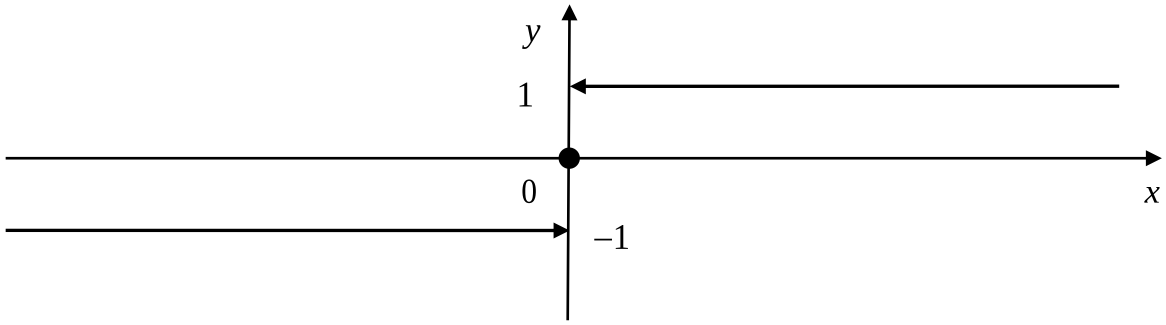
то точка x_0 називається *усувною точкою розриву*.

- Якщо хоча б одна з однобічних границь $f(x_0-0)$ чи $f(x_0+0)$ не існує або нескінченна, то x_0 називається *точкою розриву II роду*.

Приклад.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



Оскільки

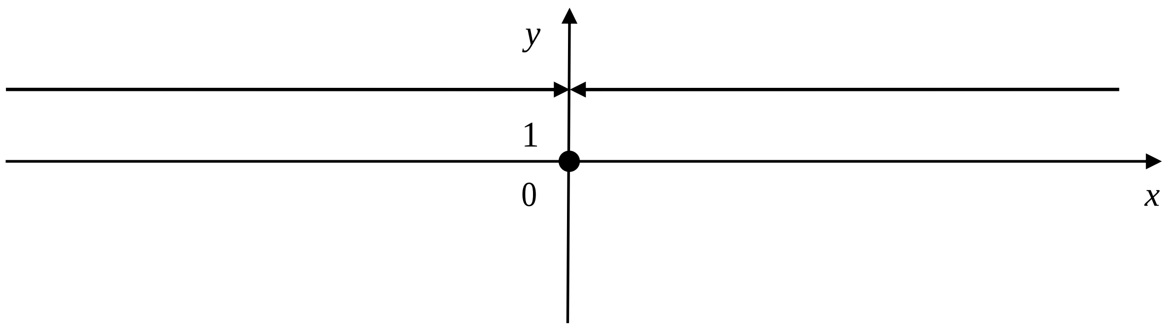
$$f(0-0) = -1 \neq 1 = f(0+0),$$

точка $x = 0$ – точка розриву I роду (стрибок).

Приклад.

$$f(x) = \operatorname{sgn}^2 x.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Оскільки

$$f(0-0) = f(0+0) = 1 \neq 0 = f(0),$$

точка $x = 0$ – точка розриву I роду (усувна).

Приклад.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Оскільки

$$f(0-0) = -\infty, \quad f(0+0) = +\infty,$$

точка $x = 0$ – точка розриву II роду.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте та порівняйте означення неперервної на множині та неперервної на відрізку функцій.
2. Сформулюйте першу теорему Вейєрштрасса.
3. Сформулюйте другу теорему Вейєрштрасса.
4. Сформулюйте теорему Больцано-Коші про нулі функції.
5. Сформулюйте теорему Коші про проміжне значення.
6. Яка функція називається оберненою до заданої функції?
7. Сформулюйте теорему про обернену функцію.
8. Сформулюйте означення рівномірно неперервної функції на множині.
9. Теорема Кантора.
10. Яка вводиться класифікація точок розриву функцій?

Лекція 9. Похідна

Означення похідної. Приклади. Фізичний та геометричний зміст похідної. Дотична та нормаль. Таблиця похідних. Правила диференціювання.

Означення.

Нехай $f : D_f \to \mathbb{R},\ (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \in D_f$ для деякого додатного числа δ.

Приростом аргументу називається вираз

$$\triangle x := x - x_0 \quad (x \neq x_0, x \in D_f).$$

Приростом функції називається вираз

$$\triangle y(x_0) = \triangle f(x_0) := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

Означення.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то ця границя називається *похідною* функції f в точці x_0.

Позначення: $f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0).$

Обчислення похідної називається *диференціюванням*.

Приклад.

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \triangle x) - \sin x_0}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\triangle x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\left(\frac{\triangle x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x_0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Приклад.

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Якщо $x_0 > 0,$ то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x > 0 \quad |x|' = 1.$$

Якщо $x_0 < 0,$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(-1)=-1 \quad\Rightarrow\quad \forall x>0 \quad |x|'=-1.$$

Якщо $x_0=0$, то

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to x_0}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad\Rightarrow\quad \nexists\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad\Rightarrow\quad \nexists f'(0).$$

Фізичний зміст похідної.

Розглянемо матеріальну точку, яка рухається вздовж деякої прямої за законом

$$s=s(t),$$

де $s(t)$ – переміщення точки в момент часу t. Нехай $0<t_1<t_2$. Середня швидкість точки за проміжок часу $[t_1;t_2]$ дорівнює

$$v(t_1,t_2)=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Миттєвою швидкістю матеріальної точки в момент часу t називається границя

$$v(t):=\lim_{\vartriangle t\to 0}v(t,t+\vartriangle t)=\lim_{\vartriangle t\to 0}\frac{s(t+\vartriangle t)-s(t)}{\vartriangle t}.$$

Отже,

$$\boxed{v(t)=s'(t).}$$

Геометричний зміст похідної.

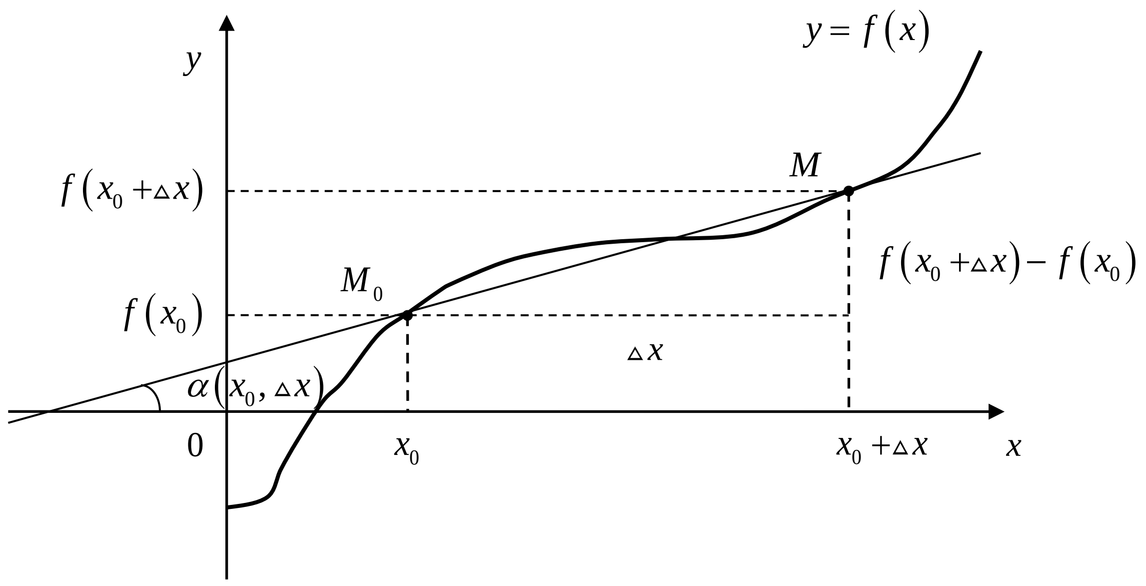
Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.

Пряма, що проходить через дві різні точки графіка функції f називається *січною*.

Тангенс кута між прямою та віссю абсцис називається *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої.

Розглянемо січну, яка проходить через точки $M_0(x_0, f(x_0))$ та $M(x_0+\vartriangle x, f(x_0+\vartriangle x))$ графіка функції f. Позначимо кут між нею та віссю Ox через $\alpha(x_0,\vartriangle x)$. Тоді кутовий коефіцієнт січної дорівнює

$$\operatorname{tg}\alpha(x_0,\vartriangle x)=\frac{f(x_0+\vartriangle x)-f(x_0)}{\vartriangle x}.$$



Якщо $\vartriangle x$ наблизити до нуля, то точка $M\left(x_0 + \vartriangle x,\ f\left(x_0 + \vartriangle x\right)\right)$ наблизиться до точки $M_0\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$. Якщо існує границя

$$\alpha\left(x_0\right) := \lim_{\vartriangle x \to 0} \alpha\left(x_0, \vartriangle x\right),$$

то пряма, яка проходить через точку $M_0\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ та утворює кут $\alpha\left(x_0\right)$ з віссю абсцис, називається *дотичною* до графіка функції f в точці $x = x_0$.

Кутовий коефіцієнт дотичної

$$k = \operatorname{tg}\alpha\left(x_0\right) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \operatorname{tg}\alpha\left(x_0, \vartriangle x\right) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \vartriangle x\right) - f\left(x_0\right)}{\vartriangle x},$$

звідки

$$\boxed{k = f'\left(x_0\right).}$$

Означення.

Пряма, що проходить через точку $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ та перпендикулярна до дотичної до графіка функції f в точці $x = x_0$, називається *нормаллю*.

Рівняння дотичної:

$$\boxed{y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).}$$

Рівняння нормалі:

$$\boxed{y = f\left(x_0\right) - \frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).}$$

Лема.

Якщо існує $f'\left(x_0\right)$, то

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + o\left(x - x_0\right), \quad x \to x_0.$$

Доведення:

За означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

За теоремою про представлення функції, що має границю,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$. Тоді

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

а

$$\alpha(x)(x - x_0) = o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

оскільки

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \qquad \square$$

Теорема.

Якщо існує $f'(x_0)$, то функція f неперервна в точці x_0.

Доведення:

За доведеною вище лемою

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 + 0 = f(x_0). \qquad \square$$

Таблиця похідних

$C' = 0.$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
$(\sin x)' = \cos x.$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$
$(\cos x)' = -\sin x.$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$(a^x)' = a^x \ln a.$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	$(e^x)' = e^x.$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гіперболічний синус.

$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гіперболічний косинус.

$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – гіперболічний тангенс.

$\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – гіперболічний котангенс.

Теорема.

Нехай існують похідні $u'(x)$ та $v'(x)$. Тоді

1) $\forall C \in \mathbb{R} \quad \left(Cu(x)\right)' = C\,u'(x)$,
2) $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$,
3) $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,
4) якщо $v(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доведення:

1) $$\left(Cu(x)\right)' = \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{Cu(x+\vartriangle x)-Cu(x)}{\vartriangle x} = \lim_{\vartriangle x\to 0} C\frac{u(x+\vartriangle x)-u(x)}{\vartriangle x} =$$
$$= C\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)-u(x)}{\vartriangle x} = Cu'(x).$$

2) $$\left(u(x)+v(x)\right)' = \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)+v(x+\vartriangle x)-u(x)-v(x)}{\vartriangle x} =$$
$$= \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)-u(x)}{\vartriangle x} + \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{v(x+\vartriangle x)-v(x)}{\vartriangle x} = u'(x)+v'(x).$$

3) $$\left(u(x)v(x)\right)' = \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)v(x+\vartriangle x)-u(x)v(x)}{\vartriangle x} =$$
$$= \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)v(x+\vartriangle x)-u(x)v(x+\vartriangle x)+u(x)v(x+\vartriangle x)-u(x)v(x)}{\vartriangle x} =$$
$$= \lim_{\vartriangle x\to 0}\left(\frac{u(x+\vartriangle x)-u(x)}{\vartriangle x}v(x+\vartriangle x)+u(x)\frac{v(x+\vartriangle x)-v(x)}{\vartriangle x}\right) =$$
$$= \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{u(x+\vartriangle x)-u(x)}{\vartriangle x}\lim_{\vartriangle x\to 0} v(x+\vartriangle x)+u(x)\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{v(x+\vartriangle x)-v(x)}{\vartriangle x} =$$
$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

4) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{1}{\triangle x}\left(\dfrac{u(x+\triangle x)}{v(x+\triangle x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}\right) =$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)v(x) - u(x)v(x+\triangle x)}{\triangle x\cdot v(x+\triangle x)\cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\triangle x)}{\triangle x\cdot v(x+\triangle x)\cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{v(x+\triangle x)v(x)}\left(\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}v(x) - u(x)\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\right) =$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \qquad \square$$

Теорема *(похідна складеної функції).*

Нехай функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $g(y)$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді суперпозиція цих функцій $g(f(x))$ має похідну в точці x_0, причому

$$\big(g(f)\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0).$$

Доведення:

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + \alpha(y)(y-y_0),$$

де $\alpha(y)$ – нескінченно мала при $y\to y_0$. При

$$y = f(x), \quad y_0 = f(x_0)$$

одержимо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)) + \alpha(f(x))(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(g'(f(x_0))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \alpha(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) =$$

$$= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + 0\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0),$$

оскільки $f(x)$ неперервна в точці x_0, а отже,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0, \quad \lim_{x\to x_0}\alpha(f(x)) = \lim_{y\to y_0}\alpha(y) = 0. \qquad \square$$

Теорема *(похідна оберненої функції).*

Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, де $-\infty\le a<b\le+\infty$,

1) функція f неперервна на інтервалі (a,b),
2) функція f строго монотонна на інтервалі (a,b),
3) існує $f'(x_0)\ne 0$, де $x_0\in(a,b)$.

Тоді обернена функція g до f має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, причому

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Доведення:

За теоремою про існування оберненої функції функція g існує, неперервна та строго монотонна, а тому при $y \neq y_0$ матимемо $g(y) \neq g(y_0)$. Згідно леми про представлення функції, що має похідну,

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) =$$
$$= f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0)),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0 = g(y_0)$. Оскільки функція g неперервна, то

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = x_0, \quad \lim_{y \to y_0} \alpha(g(y)) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0))} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{f'(g(y_0)) + \alpha(g(y))} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \qquad \square$$

Приклад.

$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

$g(y) = \arcsin y, \quad y \in [-1;1].$

$$\forall y \in (-1;1) \quad g'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$\forall x \in (-1;1) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення похідної функції.
2. Який фізичний зміст похідної?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
5. Запишіть таблицю похідних.
6. Наведіть правила диференціювання суми, добутку та частки функцій.
7. Сформулюйте правило диференціювання складеної функції.
8. Сформулюйте правило диференціювання оберненої функції. Наведіть приклад.

Лекція 10. Похідні функцій, заданих параметрично або неявно. Гіперболічні функції. Диференціал функції

Правила диференціювання функцій, заданих параметрично або неявно. Приклади. Гіперболічні функції і їх властивості. Диференціал функції. Інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала.

Похідні функцій, заданих параметрично або неявно

Теорема.

Нехай функція $y(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in(a,b),$$

причому на проміжку (a,b) існують похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$, причому похідна $\varphi'(t)$ і жодній точці проміжку не дорівнює нулю, а функція $\varphi(t)$ строго монотонна на інтервалі (a,b). Тоді існує похідна

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Доведення:

Оскільки на інтервалі (a,b) функція $\varphi(t)$ має похідну, то вона неперервна на ньому. А оскільки $\varphi(t)$ ще й строго монотонна на інтервалі (a,b), то існує обернена до неї функція $t=\varphi^{-1}(x)$. Похідна від неї

$$\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Функцію y можна розглядати як складену функцію

$$y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Її похідна дорівнює

$$y'_x=\left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)'=\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=$$

$$=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad \square$$

Під неявно заданою функцією розуміють функцію, задану рівнянням

$$F(x,y)=0,$$

не розв'язаним відносно залежної змінної y. Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина його розв'язків (x,y) така, що кожному числу x відповідає тільки одне значення y.

Щоб знайти похідну від неявно заданої функції, потрібно взяти похідну за змінною x від обох частин її рівняння, вважаючи y функцією від x, та розв'язати одержане рівняння відносно y'.

Приклад.

Знайдемо похідну від функції, заданої рівнянням

$$x^2 + y^2 = \cos xy.$$

Знайдемо похідні від обох частин рівняння та прирівняємо їх:

$$2x + 2yy' = -\left(y + xy'\right)\sin xy.$$

Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$2yy' + xy'\sin xy = -2x - y\sin xy,$$

$$\left(2y + x\sin xy\right)y' = -2x - y\sin xy,$$

$$y' = -\frac{2x + y\sin xy}{2y + x\sin xy}.$$

Приклад.

Знайти рівняння дотичної до одиничного кола в точці $M_0\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання:

I спосіб.

З рівняння одиничного кола

$$x^2 + y^2 = 1$$

маємо

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Оскільки ордината точки M_0 від'ємна, обираємо

$$y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Тоді

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(-2x\right),$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$y'\left(x_0\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Рівняння дотичної

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0),$$
$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

II спосіб.

Використаємо параметричні рівняння кола

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$$

Знайдемо значення параметра t_0, яке відповідає точці M_0:

$$\begin{cases} \cos t_0=\frac{1}{2}, \\ \sin t_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \Leftarrow \quad t_0=-\frac{\pi}{3}.$$

Знайдемо похідну:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t,$$
$$y'_x(t_0)=y'_x\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Рівняння дотичної

$$y=y(t_0)+y'_x(t_0)\big(x-x(t_0)\big),$$
$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

III спосіб.

З рівняння одиничного кола

$$x^2+y^2=1$$

маємо

$$2x+2yy'=0,$$
$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Тоді

$$y'(M_0)=-\frac{x_0}{y_0}=-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

Рівняння дотичної

$$y = y_0 + y'_x(M_0)(x - x_0),$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Гіперболічні функції

Гіперболічними функціями називаються функції:

- $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – *гіперболічний синус,*
- $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – *гіперболічний косинус,*
- $\operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – *гіперболічний тангенс,*
- $\operatorname{cth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – *гіперболічний котангенс.*

Функції $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x$ визначені на всій числовій осі, $\operatorname{cth} x$ визначений на множині $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція $\operatorname{ch} x$ парна, а функції $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ та $\operatorname{cth} x$ непарні. Графік функції

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

називається ланцюговою лінією.

Деякі формули для гіперболічних функцій:

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.}$$

$$\boxed{\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.}$$

$$\boxed{\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.}$$

Доведення:

Доведемо, наприклад, формулу

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

$$\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^xe^y+\cancel{e^xe^{-y}}+\cancel{e^{-x}e^y}+e^{-x}e^{-y}+e^xe^y-\cancel{e^xe^{-y}}-\cancel{e^{-x}e^y}+e^{-x}e^{-y}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}\right)=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{ch}(x+y). \quad \square$$

$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x.$	$(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x.$	$(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}.$	$(\operatorname{cth}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$

Доведення:

$$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(e^x\right)'-\left(e^{-x}\right)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}(-1)\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x.$$

$$(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(e^x\right)'+\left(e^{-x}\right)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}(-1)\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x.$$

$$(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x-(\operatorname{ch}x)'\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}.$$

$$(\operatorname{cth}x)'=\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)'=\frac{(\operatorname{ch}x)'\operatorname{sh}x-(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}. \quad \square$$

Диференціал функції

Означення.

Функція $f(x)$ називається *диференційовною* в точці x_0, якщо

$$\exists L\in\mathbb{R} \quad f(x)=f(x_0)+L(x-x_0)+o(x-x_0), \quad x\to x_0.$$

Тоді лінійна функція $L(x-x_0)$ називається *диференціалом* в точці x_0 функції $f(x)$ і позначається $df(x_0)$.

За означенням

$$dx:=x-x_0.$$

Зауваження.

Диференціал функції $f(x)$ в точці x_0 є головною частиною приросту функції $f(x)-f(x_0)$ відносно $x-x_0$ при $x\to x_0$.

Теорема.

Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли в точці x_0 існує похідна $f'(x)$, причому

$$df(x_0)=f'(x_0)dx.$$

Доведення:

Необхідність.

Якщо $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{L(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(L+\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right)=L+0=L.$$

Таким чином, існує похідна

$$f'(x_0)=L,$$

а

$$df(x_0)=L(x-x_0)=f'(x_0)dx.$$

Достатність.

Якщо існує похідна $f'(x)$, то за лемою про представлення функції, що має похідну

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

тобто $f(x)$ диференційовна в точці x_0 та

$$f'(x_0)=L,\quad df(x_0)=L(x-x_0)=f'(x_0)dx. \qquad \square$$

Зауваження.

Позначення для похідної функції $f(x)$ в точці x_0 можна розуміти як відношення диференціалів $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Розглянемо складену функцію $y=f(g(t))$, де функції $f(x)$ та $g(t)$ диференційовні в точках x та t відповідно. Тоді

$$y'(t)=f'(g(t))\cdot g'(t),$$

а

$$dy=f'(g(t))\cdot g'(t)dt=f'(x)dx.$$

Таким чином, форма запису диференціала функції не залежить від того, є змінна x незалежною змінною чи функцією від іншої змінної t. Ця властивість називається *інваріантністю форми диференціала*.

Застосування диференціала

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$f(x)=f(x_0)+df(x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

а тому поблизу точки x_0

$$f(x)\approx f(x_0)+df(x_0).$$

Геометрично це відповідає заміні значення функції f в точці x на ординату дотичної в цій точці.

Приклад.

Обчислимо наближено $\ln 1,02$.

Для цього розглянемо функцію

$$f(x) = \ln x.$$

Нам потрібно наближено обчислити її значення в точці $x = 1,02$. Приймемо за x_0 близьку до точки $x = 1,02$ точку, в якій значення f легко обчислити. Такою точкою є $x_0 = 1$. Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x_0) = f'(1) = 1,$$

$$\ln 1,02 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \ln 1 + 1(1,02 - 1) = 0,02.$$

Контрольні запитання

1. Як обчислюється похідна функції, заданої параметрично?
2. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно?
3. Які властивості мають гіперболічні функції?
4. Сформулюйте означення диференційовної функції?
5. Що називається диференціалом диференційовної функції?
6. У чому полягає інваріантність форми диференціала?

Лекція 11. Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків. Теореми про диференційовні функції

Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца. Приклади обчислення похідних вищих порядків. Друга похідна функції, заданої параметрично. Диференціали вищих порядків. Теореми про диференційовні функції.

Похідні вищих порядків

Означення.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Тоді похідна $f'(x)$ називається *першою похідною* (*похідною першого порядку*) функції $f(x)$ та може бути розглянута як функція від незалежної змінної x. Похідна від неї, якщо вона існує, називається *другою похідною* (*похідною другого порядку*) функції $f(x)$. Якщо існує похідна порядку n, де $n \in \mathbb{N}$, і вона диференційовна в точці x, то *похідною порядку* $n+1$ функції $f(x)$ називається

$$f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}(x) \right)'.$$

Позначення: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x).$

Позначення: $f^{(1)}(t) = f'(t), \quad f^{(2)}(t) = f''(t), \quad f^{(3)}(t) = f'''(t).$

Означення.

$$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Приклад *(механічний зміст другої похідної).*

Нехай точка рухається прямолінійно, а $s(t)$ – її переміщення в момент часу t. Швидкість матеріальної точки

$$v(t) = s'(t).$$

Швидкість зміни швидкості, тобто $v'(t)$, називається *прискоренням* та позначається $a(t)$. Тоді маємо

$$a(t) = s''(t).$$

Властивості похідних вищих порядків:

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{1; 2; \ldots; n\} \quad \left(f^{(n-k)} \right)^{(k)} = f^{(n)}.$
2) $\forall C \in \mathbb{R} \quad (Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}.$
3) $\quad (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$
4) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \left(f(ax+b) \right)^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$

Теорема *(формула Лейбніца).*

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ мають похідні порядку $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує похідна

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Доведення:

Доведемо цю теорему методом математичної індукції.

Перевіримо формулу Лейбніца при $n=1$.

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k f^{(k)} g^{(1-k)} = C_1^0 fg' + C_1^1 f'g = fg' + f'g = (fg)'.$$

Отже, при $n=1$ формула справджується.

Припустимо, що формула Лейбніца справедлива для деякого фіксованого натурального числа n.

Доведемо тоді її для $n+1$, тобто

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= C_n^n f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_n^0 fg^{(n+1)} = \left| i = k+1 \right| =$$

$$= C_n^n f^{(n+1)} g + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} f^{(i)} g^{(n-i+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_n^0 fg^{(n+1)} = \left| \begin{matrix} i \to k \\ C_n^0 = C_n^n = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + fg^{(n+1)} =$$

$$= f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g + C_{n+1}^0 fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Отже, за принципом математичної індукції формула Лейбніца виконується для всіх натуральних n. □

Приклади обчислення похідних вищих порядків.

1) $y = x^{\alpha}$.

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$.

$y'' = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}$.

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції. База індукції вже перевірена. Припустимо, що формула вірна для певного номера n. Доведемо її для номера $n+1$.

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\right)' =$$

$$= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\left(x^{\alpha-n}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}.$$

Отже, за принципом математичної індукції формула виконується для всіх натуральних n.

2) $y = \ln x.$

$$y' = x^{-1}.$$

$$y'' = (-1)x^{-2}.$$

$$y''' = (-1)(-2)x^{-3}.$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n+1)x^{-n}.$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) $y = a^x \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$

$$y' = a^x \ln a.$$

$$y'' = a^x \ln^2 a.$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

4) $y = \sin x.$

$$y' = \cos x.$$

$$y'' = -\sin x.$$

$$y''' = -\cos x.$$

$$y^{(4)} = \sin x.$$

$$y^{(5)} = \cos x.$$

$$y^{(6)} = -\sin x.$$

$$y^{(7)} = -\cos x.$$

$$y^{(8)} = \sin x.$$

$\ldots$

тобто

$$y^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 4k, \\ \cos x, & n = 4k+1, \\ -\sin x, & n = 4k+2, \\ -\cos x, & n = 4k+3, \end{cases}$$

Помітимо, що

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

5) $y = \cos x.$

$y' = -\sin x.$

$y'' = -\cos x.$

$y''' = \sin x.$

$y^{(4)} = \cos x.$

$y^{(5)} = -\sin x.$

$y^{(6)} = -\cos x.$

$y^{(7)} = \sin x.$

$y^{(8)} = \cos x.$

$\ldots$

тобто

$$y^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k, \\ -\sin x, & n = 4k+1, \\ -\cos x, & n = 4k+2, \\ \sin x, & n = 4k+3, \end{cases}$$

Помітимо, що

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Друга похідна функції, заданої параметрично

Нехай функція $y(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (a; b),$$

причому функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні другого порядку на інтервалі $(a; b)$. Тоді за правилом диференціювання параметрично заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_t} \cdot \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}.$$

Таким чином,

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.}$$

Аналогічно

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x'_t} \cdot \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t.$$

Диференціали вищих порядків

Означення.

Диференціалом n*-го порядку* (n*-м диференціалом*) функції $f\left(x\right)$ називається диференціал від її диференціала порядку $n-1$:

$$d^n f = d\left(d^{n-1} f\right),$$

причому

$$d^1 f = df.$$

Зауваження.

При обчисленні диференціалів вищих порядків важливо пам'ятати, що dx є довільним незалежним від x числом, яке при диференціюванні за x належить розглядати як постійний множник:

$$d^2 f = d\left(df\right) = d\left(f' dx\right) = \left(f' dx\right)' dx = \left(f'' dx\right)dx = f'' dx^2,$$

$$d^3 f = d\left(d^2 f\right) = d\left(f'' dx^2\right) = \left(f'' dx^2\right)' dx = \left(f''' dx^2\right)dx = f''' dx^3.$$

Методом математичної індукції доводиться, що

$$\boxed{d^n f = f^{(n)} dx^n.}$$

Лема.

Другий диференціал не має властивості інваріантності форми.

Доведення:

Якщо $y = f\left(x\right)$, а x – незалежна змінна, то

$$d^2 f = f'' dx^2.$$

Якщо $y = f\left(x\right)$, а $x = g\left(t\right)$, тобто $y = f\left(g\left(t\right)\right)$, то

$$d^2 f = \left(f\left(g(t)\right)\right)''_{tt} dt^2 = \left(f'(x)x'_t\right)'_t dt^2 =$$
$$= \left(f''(x)\left(x'_t\right)^2 + f'(x)x''_{tt}\right)dt^2 =$$
$$= f''(x)\left(x'_t\right)^2 dt^2 + f'(x)x''_{tt}dt^2 =$$
$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, форма диференціалів вищих порядків залежить від того, беруться вони за незалежною змінною чи ні. □

Теореми про диференційовні функції

Теорема *(Ферма).*

Нехай функція $f(x)$ визначена на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$ та

$$f(x_0) = \max_{x\in(a;b)} f(x) \quad \text{або} \quad f(x_0) = \min_{x\in(a;b)} f(x).$$

Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці x_0, то

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення:

Доведемо теорему для випадку, коли

$$f(x_0) = \max_{x\in(a;b)} f(x).$$

Тоді для всіх $x \in (a;b)$

$$f(x) - f(x_0) \le 0.$$

Оскільки

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

то

$$f'(x_0) = 0. \quad \square$$

Теорема *(Ролль).*

Нехай $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ та

1) $f \in C\left([a;b]\right)$;
2) $\forall x \in (a;b) \quad \exists f'(x)$;
3) $f(a) = f(b)$.

Тоді

$$\exists c \in (a;b) \quad f'(c) = 0.$$

Доведення:

Якщо

$$\forall x \in (a; b) \quad f(x) = f(a),$$

то

$$\forall x \in (a; b) \quad f'(x) = 0.$$

Нехай

$$\exists x \in (a; b) \quad f(x) \neq f(a).$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса вона приймає на ньому найбільше та найменше значення, тобто

$$\exists x_* \in [a; b] \quad f(x_*) = \min_{x \in [a; b]} f(x),$$

$$\exists x^* \in [a; b] \quad f(x^*) = \max_{x \in [a; b]} f(x),$$

причому виконується хоча б одна з умов $f(x_*) \neq f(a)$ або $f(x^*) \neq f(a)$. Нехай для визначеності

$$f(x^*) \neq f(a).$$

Оскільки

$$f(a) = f(b),$$

то $x^* \in (a; b)$. Тоді за теоремою Ферма

$$f'(x^*) = 0. \qquad \square$$

Теорема *(Лагранжа про середнє).*

Нехай $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ та

1) $f \in C([a; b])$;
2) $\forall x \in (a; b) \quad \exists f'(x)$.

Тоді

$$\exists c \in (a; b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доведення:

Розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a; b].$$

Функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, оскільки $f(x)$ неперервна на цьому відрізку. В кожній точці $x \in (a; b)$ існує похідна

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

а

$$g(a) = g(b) = f(a).$$

За теоремою Ролля

$$\exists c \in (a; b) \quad g'(c) = 0,$$

звідки випливає, що

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad \square$$

Наслідок.

Якщо

$$\forall x\in(a;b) \quad f'(x)=0,$$

то

$$\exists L\in\mathbb{R} \quad \forall x\in(a;b) \quad f(x)=L.$$

Доведення:

Розглянемо дві довільні різні точки $x_1, x_2 \in(a;b)$. Нехай для визначеності

$$x_1<x_2.$$

За теоремою Лагранжа

$$\exists c\in(x_1;x_2) \quad f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0,$$

звідки випливає, що

$$f(x_1)=f(x_2). \qquad \square$$

Теорема *(Коші).*

Нехай $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ та

1) $f, g\in C([a;b])$;
2) $\forall x\in(a;b)$ існують похідні $f'(x)$ та $g'(x)$;
3) $\forall x\in(a;b) \quad g'(x)\neq 0.$

Тоді

$$\exists c\in(a;b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення:

Зазначимо, що

$$g(a)\neq g(b),$$

бо інакше за теоремою Ролля

$$\exists c\in(a;b) \quad g'(c)=0.$$

Розглянемо функцію

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big), \quad x\in[a;b].$$

Функція $h(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, оскільки $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на цьому відрізку. В кожній точці $x\in(a;b)$ існує похідна

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

а

$$h(a)=h(b)=0.$$

За теоремою Ролля

$$\exists c \in (a; b) \quad h'(c) = 0,$$

звідки випливає, що

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad \square$$

Приклад *(доведення нерівностей).*

Довести, що

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|.$$

Доведення:

Якщо $x = y$, твердження очевидне.

Якщо $x \ne y$, то за теоремою Лагранжа існує таке $z \in (x; y)$ або $z \in (y; x)$, що

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \frac{1}{1 + z^2}(x - y),$$

звідки

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \frac{1}{1 + z^2}|x - y| \le |x - y|. \qquad \square$$

Контрольні запитання

1. Що називається похідною порядку n?
2. Запишіть формулу Лейбніца.
3. Що називається диференціалом порядку n?
4. Сформулюйте теорему Ферма.
5. Сформулюйте теорему Ролля.
6. Сформулюйте теореми Лагранжа про середнє та Коші.

Лекція 12. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя. Порівняння росту елементарних функцій. Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя.

Теорема *(правило Лопіталя для невизначеності типу* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$*).*

Нехай $f:(a;b)\to\mathbb{R},\ g:(a;b)\to\mathbb{R}$, та

1) $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to b-} g(x)=0,$
2) $\forall x\in(a;b)\quad \exists f'(x), g'(x),$
3) $\forall x\in(a;b)\quad g'(x)\neq 0,$
4) існує (скінченна чи нескінченна) границя $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)},$

Тоді існує границя

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення:

Продовжимо функції f і g на півінтервал $(a;b]$, поклавши

$$f(b)=0,\quad g(b)=0.$$

При цьому функції неперервні зліва в точці b. З умови (3) та теореми Ролля випливає, що

$$g(x)\neq 0,\quad x\in(a;b).$$

З теореми Коші випливає, що при довільному $x\in(a;b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

для деякого $c(x)\in(x;b)$. Оскільки

$$|c(x)-b|\le|x-b|\to 0,\quad x\to b-0,$$

то

$$\lim_{x\to b-0}c(x)=b.$$

Тому

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to b-0}\frac{f'(c)}{g'(c)}.\qquad \square$$

Зауваження.

Аналогічне твердження для границі справа доводиться аналогічно.

Теорема.

Теорема також справедлива при $b=+\infty$ або $a=-\infty$.

Доведення:

Доведемо твердження для $b=+\infty$. Позначимо
$$z=\frac{1}{x}$$
та
$$F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right),\quad G(z)=g\left(\frac{1}{z}\right).$$
Тоді
$$F'(z)=f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),\quad G'(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$
та
$$\lim_{z\to 0+}F(z)=\lim_{z\to 0+}f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$
$$\lim_{z\to 0+}G(z)=\lim_{z\to 0+}g\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$
Тоді за правилом Лопіталя
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0+}\frac{F(z)}{G(z)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{z\to 0+}\frac{F'(z)}{G'(z)}=$$
$$=\lim_{z\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\qquad\square$$

Приклад.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

Теорема *(правило Лопіталя для невизначеності типу* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$*).*

Нехай $f:(a;b)\to\mathbb{R},\ g:(a;b)\to\mathbb{R},$ та

1) $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to b-}g(x)=+\infty,$
2) $\forall x\in(a;b)\quad \exists f'(x),g'(x),$
3) $\forall x\in(a;b)\quad g'(x)\neq 0,$

4) існує (скінченна чи нескінченна) границя $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

Тоді існує границя

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Без доведення).

Зауваження.
Аналогічне твердження для границі справа також справедливе.

Зауваження.
Теорема також справедлива при $b=+\infty$ або $a=-\infty$.

Порівняння росту елементарних функцій

Нехай $\alpha>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0.$$

Отже, $\ln x$ зростає повільніше за будь-який степінь x з додатним показником.

Нехай $a>1,\ \alpha>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a}.$$

Продовживши застосовувати правило Лопіталя, одержимо в чисельнику степінь з недодатним показником, а тому границя буде дорівнювати нулю.

Отже, a^{x} при $a>1$ зростає швидше за будь-який степінь x з додатним показником.

Зауваження.
З існування границі відношення функцій не випливає існування границі відношення похідних.

Наприклад,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=1,$$

але

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x,$$

а границя

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\cos x)$$

не існує.

1) Невизначеність $[0\cdot\infty]$ зводиться до $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

та

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{-3}=0.$$

2) Невизначеність $[\infty-\infty]$ зводиться до $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Нехай

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a} g(x)=+\infty.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-x^{-2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{tg}^2 x}{x^2\operatorname{tg}^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-x\sin x-\cancel{\cos x}}{3x^2}\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2}\cdot(1+1)=-\frac{1}{3}\cdot 2=-\frac{2}{3}.$$

3) Невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ зводяться до $\left[0\cdot\infty\right]$, оскільки

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} \overset{Л}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$$

Наслідок.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.}$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте правило Лопіталя для невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
2. Що зростає швидше: $\ln x$ чи степінь x з додатним показником?
3. Що зростає швидше: e^{x} чи степінь x з додатним показником?
4. Як можна розкрити невизначеності типів $\left[0\cdot\infty\right]$, $\left[\infty-\infty\right]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ за допомогою правила Лопіталя? Наведіть приклади.

Лекція 13. Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано та у формі Лагранжа. Формули Маклорена для деяких елементарних функцій. Приклади застосування формули Тейлора.

Для будь-якої точки $x_0 \in \mathbb{R}$ многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

можна подати у вигляді

$$P(x) = b_n (x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + b_2 (x-x_0)^2 + b_1 (x-x_0) + b_0.$$

Знайдемо коефіцієнти b_k. Для цього будемо послідовно знаходити значення многочлена та його похідних в точці $x = x_0$.

$$P(x) = b_n (x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + b_1 (x-x_0) + b_0 \quad \Rightarrow \quad P(x_0) = b_0,$$

$$P'(x) = nb_n (x-x_0)^{n-1} + (n-1)b_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + 2b_2 (x-x_0) + 1b_1 \quad \Rightarrow \quad P'(x_0) = 1b_1,$$

$$P''(x) = n(n-1)b_n (x-x_0)^{n-2} + (n-1)(n-2)b_{n-1}(x-x_0)^{n-3} + \ldots + 2b_2 \quad \Rightarrow \quad P''(x_0) = 2\cdot 1 b_2,$$

…

Продовжуючи, можна переконатись, що

$$\forall k \geq 0 \quad b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Таким чином,

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{P^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + P(x_0),$$

тобто

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ця формула називається *формулою Тейлора для многочлена*.

Зауваження.

Многочлен повністю визначається своїм значенням та значеннями своїх похідних в одній довільній точці.

Для інших функцій така рівність виконується лише наближено.

Теорема *(формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано).*

Нехай $f:(a;b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a;b)$, $n \in \mathbb{N}$ та

1) $\forall x \in (a;b) \quad \exists f^{(n-1)}(x)$;
2) $\exists f^{(n)}(x_0)$.

Тоді

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0.}$$

Доведення:

Позначимо різницю

$$r_n(x):=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ця різниця називається *залишковим членом*. Оскільки при $m\le n$

$$r_n^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)-\sum_{k=m}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(k-1)\ldots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m},$$

маємо, що

$$r_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0)-\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}m\cdot(m-1)\cdot\ldots2\cdot1=0.$$

Тоді

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Доведемо, що

$$r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0$$

методом математичної індукції. Більше того, ми доведемо, що будь-яка функція $g(x)$, для якої

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0,$$

має вигляд

$$g(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0.$$

Перевіримо наше твердження при $n=1$, тобто доведемо, що якщо

$$g(x_0)=g'(x_0)=0,$$

то

$$g(x)=o(x-x_0),\quad x\to x_0.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)=0,$$

а отже, за означенням

$$g(x)=o(x-x_0),\quad x\to x_0.$$

Припустимо, що наше твердження виконується для деякого номера n та доведемо, що тоді воно виконується й для номера $n+1$, тобто з того, що

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=g^{(n+1)}(x_0)=0,$$

випливає, що

$$g(x)=o\left((x-x_0)^{n+1}\right),\quad x\to x_0.$$

Для функції $g'(x)$ з припущення індукції випливає, що

$$g'(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0.$$

За теоремою Лагранжа

$$g(x)=g(x)-g(x_0)=g'(c(x))(x-x_0),$$

де точка $c(x)$ знаходиться між x та x_0. Оскільки

$$|c(x)-x_0|\le|x-x_0|,$$

то $c\to x_0$ при $x\to x_0$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right|=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{g'(c(x))}{(x-x_0)^n}\right|\le\lim_{c\to x_0}\left|\frac{g'(c)}{(c-x_0)^n}\right|=0,$$

тобто

$$g(x)=o\left((x-x_0)^{n+1}\right),\quad x\to x_0.$$

За принципом математичної індукції наше твердження справедливе для всіх $n\in\mathbb{N}$. □

Теорема *(формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа).*
Нехай $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a;b)$, $n\in\mathbb{N}$ та

$$\forall x\in(a;b)\quad\exists f^{(n+1)}(x).$$

Тоді

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in(a;b)\quad\exists\theta\in(0;1)\\[4pt] \qquad f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),\\[4pt] \text{де}\\[4pt] \quad r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\end{array}}$$

Доведення:
При $x=x_0$, оскільки $r_n(x_0)=0$,

$$f(x)=f(x_0)=f(x_0)+r_n(x),$$

тобто формула справедлива.

Нехай $x\ne x_0$. Позначимо для дійсного числа L, про вибір якого ми поговоримо пізніше,

$$g(u)=f(x)-f(u)-\frac{f'(u)}{1!}(x-u)-\frac{f''(u)}{2!}(x-u)^2-\ldots-$$
$$-\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n-\frac{L}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}$$

для u між x та x_0.

Функція $g(u)$ диференційовна на відрізку $[x;x_0]$ або $[x_0;x]$.

$$g(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Виберемо L так, щоб $g(x_0)=0.$ Тоді за теоремою Ролля

$$\exists\theta\in(0;1)\quad g'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)=0.$$

Але

$$g'(u)=-f'(u)+f'(u)-\frac{f''(u)}{1!}(x-u)+\frac{f''(u)}{1!}(x-u)-\frac{f'''(u)}{2!}(x-u)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n+\frac{L}{n!}(x-u)^n=$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n+\frac{L}{n!}(x-u)^n=-\frac{f^{(n+1)}(u)-L}{n!}(x-u)^n.$$

Оскільки

$$g'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)=0,$$

то

$$-\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)-L}{n!}\left(x-x_0-\theta(x-x_0)\right)^n=0,$$

звідки

$$L=f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right).$$

Оскільки

$$g(x_0)=0,$$

то

$$0=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\ldots-$$

$$-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n-\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\qquad\square$$

Означення.

При $x_0=0$ формула Тейлора називається *формулою Маклорена.*

Формули Маклорена для деяких елементарних функцій

I. $f(x)=e^x.$

Оскільки

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(0)=e^x\Big|_{x=0}=1,$$

то

$$e^x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to0,$$

тобто

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right), \quad x \to 0.}$$

II. $f(x) = \sin x.$

Оскільки

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k, \\ \cos x, & n = 4k+1, \\ -\sin x, & n = 4k+2, \\ -\cos x, & n = 4k+3, \end{cases} \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 4k, \\ 1, & n = 4k+1, \\ 0, & n = 4k+2, \\ -1, & n = 4k+3, \end{cases}$$

то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0,$$

тобто

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0.}$$

III. $f(x) = \cos x.$

Оскільки

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n = 4k, \\ -\sin x, & n = 4k+1, \\ -\cos x, & n = 4k+2, \\ \sin x, & n = 4k+3, \end{cases} \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & n = 4k, \\ 0, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+2, \\ 0, & n = 4k+3, \end{cases}$$

то

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \quad x \to 0,$$

тобто

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \quad x \to 0.}$$

IV. $f(x) = \ln(1+x).$

Оскільки

$f'(x) = (1+x)^{-1},$

$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3},$

$\ldots$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)(-3)\ldots(-n+1)(1+x)^{-n},$$

тобто

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

то

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right),\quad x\to 0,$$

тобто

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+o\left(x^{n+1}\right),\quad x\to 0.}$$

Покладаючи $-x$ замість x одержимо, що

$$\boxed{\ln(1-x)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}+o\left(x^{n+1}\right),\quad x\to 0.}$$

V. $f(x)=\operatorname{sh}x.$

Оскільки

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\operatorname{sh}x, & n=2k,\\ \operatorname{ch}x, & n=2k+1,\end{cases}\qquad f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ 1, & n=2k+1,\end{cases}$$

то

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0,$$

тобто

$$\boxed{\operatorname{sh}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0.}$$

VI. $f(x)=\operatorname{ch}x.$

Оскільки

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}x, & n=2k,\\ \operatorname{sh}x, & n=2k+1,\end{cases}\qquad f^{(n)}(0)=\begin{cases}1, & n=2k,\\ 0, & n=2k+1,\end{cases}$$

то

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right),\quad x\to 0,$$

тобто

$$\boxed{\operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right),\quad x\to 0.}$$

VII. $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

Оскільки

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0)=\alpha,$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$
$$\ldots$$

то

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n), \quad x\to 0.}$$

Якщо ввести позначення

$$C_{\alpha}^{n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, & n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

то

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}x^k+o(x^n), \quad x\to 0.$$

Приклади застосування формули Тейлора

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x-x^2}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{x^2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\cancel{x}-\cancel{x^2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

Приклад.

Для яких значень x справедлива з точністю 0,001 наближена формула

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}?$$

Розв'язання:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+r_3(x),$$

де

$$r_3(x)=\frac{\cos\theta x}{4!}x^4, \quad \theta\in(0;1).$$

Оскільки

$$|r_3(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{4!}x^4\right|\le\frac{x^4}{24},$$

то достатньо, щоб

$$\frac{x^4}{24}<0,001 \quad \Leftrightarrow \quad x^4<0,024 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<\sqrt[4]{0,024}\approx 0,39.$$

Відповідь: $x\in(-0,39;\,0,39)$.

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу Тейлора для многочлена.
2. Запишіть формулу Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.
3. Запишіть формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.
4. Запишіть формули Маклорена для $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, (1+x)^\alpha$.

Лекція 14. Дослідження функцій за допомогою похідних

Монотонність функції. Локальні екстремуми. Найбільше або найменше значення неперервної функції на відрізку. Опуклість. Точки перегину. Асимптоти. Схема повного дослідження функції.

Монотонність

Теорема.

Нехай функція f диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб вона була неспадною (незростаючою) на $(a;b)$, необхідно та достатньо, щоб

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)\geq 0\quad \left(f'(x)\leq 0\right).$$

Доведення:

Необхідність.

Якщо функція f неспадна на інтервалі $(a;b)$, то

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0+0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\geq 0,$$

оскільки при $\triangle x>0$ маємо

$$f(x+\triangle x)-f(x)\geq 0.$$

Достатність.

Нехай

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)\geq 0.$$

Виберемо дві довільні різні точки з інтервалу $(a;b)$ та позначимо меншу через x', а більшу через x''. За теоремою Лагранжа

$$\exists c\in(x';x'')\quad f(x'')-f(x')=f'(c)(x''-x')\geq 0.$$

Отже,

$$f(x'')\geq f(x'). \qquad \square$$

Теорема.

Нехай функція f диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб вона була зростаючою (спадною) на $(a;b)$, необхідно та достатньо, щоб

1) $\forall x\in(a;b)\quad f'(x)\geq 0\quad \left(f'(x)\leq 0\right)$;
2) $\nexists(\alpha;\beta)\subset(a;b)\quad \forall x\in(\alpha;\beta)\quad f'(x)=0.$

Доведення:

Необхідність.

Якщо функція f зростає на інтервалі $(a;b)$, то вона є неспадною на ньому, а тому за попередньою теоремою

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)\geq 0.$$

Припустимо, що

$$\exists(\alpha;\beta)\subset(a;b)\quad \forall x\in(\alpha;\beta)\quad f'(x)=0.$$

Тоді за наслідком з теореми Лагранжа

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (\alpha; \beta) \quad f(x) = C,$$

що неможливо. Отже, умова (2) має виконуватись.

Достатність.

Нехай виконуються умови (1) та (2). З умови (1) випливає, що функція f є неспадною на інтервалі $(a; b)$. Виберемо дві довільні різні точки з інтервалу $(a; b)$ та позначимо меншу через x', а більшу через x''. Якщо

$$f(x') = f(x''),$$

то з монотонності функції випливає, що

$$\forall x \in (x'; x'') \quad f(x) = f(x').$$

Тоді

$$\forall x \in (x'; x'') \quad f'(x) = 0,$$

що суперечить умові (2). Отже,

$$f(x') < f(x''). \quad \square$$

Локальні екстремуми

Означення.

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, якщо

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D_f \quad f(x) \le f(x_0).$$

Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D_f \quad f(x) \ge f(x_0).$$

Точки локального мінімуму та локального максимуму називаються точками *локального екстремуму*.

Теорема*(необхідна умова існування екстремуму).*

Нехай точка x_0 є точкою локального екстремуму функції $f(x)$ та існує похідна $f'(x_0)$. Тоді

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення:

За означенням локального екстремуму існує таке додатне число δ, що

$$f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)} f(x) \quad \text{або} \quad f(x_0) = \min_{x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)} f(x).$$

Тоді за теоремою Ферма

$$f'(x_0) = 0. \quad \square$$

Означення.

Точки $x = x_0$, в яких $f'(x_0) = 0$, називаються *стаціонарними точками* функції $f(x)$.

Точки $x = x_0$, в яких $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними точками* функції $f(x)$.

Правило.
Точки екстремуму слід шукати серед критичних точок функції.

Означення.
Кажуть, що функція $g(x)$ *зберігає знак зліва* від точки x_0, якщо або
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta;x_0) \quad g(x)>0,$$
або
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta;x_0) \quad g(x)<0.$$
Кажуть, що функція $g(x)$ *зберігає знак справа* від точки x_0, якщо або
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0;x_0+\delta) \quad g(x)>0,$$
або
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0;x_0+\delta) \quad g(x)<0.$$

Теорема *(перша достатня умова існування екстремуму).*
Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, похідна $f'(x)$ існує в деякому проколеному околі точки x_0 та похідна $f'(x)$ зберігає знак справа та зліва від точки x_0.

- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "$-$" на "$+$", то x_0 є точкою локального мінімуму.
- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "$+$" на "$-$", то x_0 є точкою локального максимуму.
- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то x_0 не є точкою локального екстремуму.

Доведення:
- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "$-$" на

"$+$", то існує таке додатне число δ, що $(x_0-\delta;x_0)$ похідна $f'(x)$ від'ємна (тобто $f(x)$ спадає), а на $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ додатна (тобто $f(x)$ зростає). Тоді
$$\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta) \quad f(x)>f(x_0),$$
тобто x_0 є точкою локального мінімуму.
- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "$+$" на

"$-$", то існує таке додатне число δ, що $(x_0-\delta;x_0)$ похідна $f'(x)$ додатна (тобто $f(x)$ зростає), а на $(x_0;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ від'ємна (тобто $f(x)$ спадає). Тоді
$$\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta) \quad f(x)<f(x_0),$$
тобто x_0 є точкою локального максимуму.
- Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta) \quad f'(x)>0$$
або
$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta) \quad f'(x)<0.$$

В першому випадку $f(x)$ зростає на проміжках $(x_0-\delta; x_0)$ та $(x_0; x_0+\delta)$, а через неперервність в точці x_0 і на всьому проміжку $(x_0-\delta; x_0+\delta)$. А тому x_0 не є точкою екстремуму. Другий випадок аналізується аналогічно. $\square$

Приклад.
Дослідити на екстремуми функцію

$$f(x)=x^x, \quad x>0.$$

Розв'язання:
Знайдемо похідну

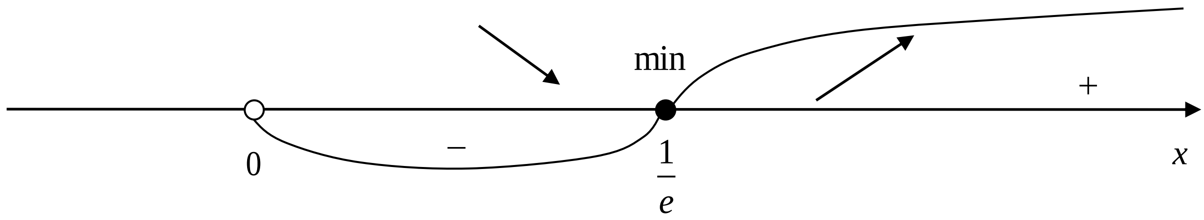
$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1).$$

Точок, де $f'(x)$ не існує на проміжку $(0;+\infty)$ немає. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'(x)=0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^x(\ln x+1)=0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=-1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{e}.$$

Отже, маємо одну критичну точку $x=\frac{1}{e}$.

Перевіримо достатні умови існування екстремуму для неї.



$x=\frac{1}{e}$ – точка мінімуму.

Відповідь: $f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}.$

Теорема *(друга достатня умова існування екстремуму).*
Нехай $m\geq 2$ та

1) $\exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta; x_0+\delta) \quad \exists f^{(m-1)}(x)$,
2) $\exists f^{(m)}(x_0)$,
3) $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0, \quad f^{(m)}(x_0)\neq 0.$

Тоді

- якщо m парне та $f^{(m)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимуму;
- якщо m парне та $f^{(m)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального мінімуму;
- якщо m непарне, то x_0 не є точкою локального екстремуму.

Доведення:
Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано має вигляд

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+o\left(\left(x-x_0\right)^m\right),\quad x\to x_0,$$

а через умову (3)

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}\left(x-x_0\right)^m+o\left(\left(x-x_0\right)^m\right),\quad x\to x_0,$$

звідки при $x\neq x_0$

$$f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x-x_0\right)^m\left(\frac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}+\frac{o\left(\left(x-x_0\right)^m\right)}{\left(x-x_0\right)^m}\right),\quad x\to x_0.$$

Оскільки за означенням

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{o\left(\left(x-x_0\right)^m\right)}{\left(x-x_0\right)^m}\right|=0<\left|\frac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}\right|,$$

то

$$\exists\delta>0\quad\forall x\in\overset{\circ}{B}\left(x_0,\delta\right)\qquad\left|\frac{o\left(\left(x-x_0\right)^m\right)}{\left(x-x_0\right)^m}\right|<\left|\frac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}\right|,$$

звідки випливає, що вираз

$$\frac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}+\frac{o\left(\left(x-x_0\right)^m\right)}{\left(x-x_0\right)^m}$$

має той самий знак, що й $\dfrac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}$, а тому приріст $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$ функції f має той самий знак, що й $\dfrac{f^{(m)}\left(x_0\right)}{m!}\left(x-x_0\right)^m$.

- Якщо m парне та $f^{(m)}\left(x_0\right)<0$, то $\left(x-x_0\right)^m>0$ при $x\neq x_0$ та $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)<0$, а тому x_0 – точка локального максимуму.
- Якщо m парне та $f^{(m)}\left(x_0\right)>0$, то $\left(x-x_0\right)^m>0$ при $x\neq x_0$ та $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)>0$, а тому x_0 – точка локального мінімуму.
- Якщо m непарне, то $\left(x-x_0\right)^m$ змінює знак при переході через точку x_0, а тому й $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$ змінює знак при переході через точку x_0, звідки випливає, що x_0 не є точкою локального екстремуму. □

Приклад.

Перевірити, чи буде точкою екстремуму для функції

$$f\left(x\right)=e^x+e^{-x}+2\cos x$$

точка $x_0=0$.

Розв'язання:

Перепишемо функцію у більш зручному вигляді:

$$f(x)=2(\operatorname{ch}x+\cos x).$$

Тоді

$$f'(0)=2(\operatorname{sh}x-\sin x)\big|_{x=0}=0,$$

$$f''(0)=2(\operatorname{ch}x-\cos x)\big|_{x=0}=0,$$

$$f'''(0)=2(\operatorname{sh}x+\sin x)\big|_{x=0}=0,$$

$$f^{(4)}(0)=2(\operatorname{ch}x+\cos x)\big|_{x=0}=4>0.$$

отже, x_0 – точка локального мінімуму.

Відповідь: $f_{\min}(0)=4.$

Правило.

Для того, щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на відрізку, треба

1) знайти значення в критичних точках;
2) знайти значення функції на кінцях цього відрізку;
3) порівняти всі знайдені значення.

Опуклість

Означення.

Функція $f(x)$ називається *опуклою донизу* на інтервалі $(a;b)$, якщо

$$\forall x_1,x_2\in(a;b)\quad \forall\alpha\in[0;1]\quad f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

Функція $f(x)$ називається *опуклою вгору* на інтервалі $(a;b)$, якщо

$$\forall x_1,x_2\in(a;b)\quad \forall\alpha\in[0;1]\quad f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\ge\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

Приклад.

Якщо функція $f(x)$ опукла донизу, то при $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Якщо функція $f(x)$ опукла вгору, то при $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Лема.

Функція $f(x)$ є опуклою донизу на інтервалі $(a;b)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (x_1; x_2) \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доведення:

При $\alpha \in \{0;1\}$ нерівність виконується завжди. Для $\alpha \in (0;1)$ виберемо

$$x = x_2 - \alpha(x_2 - x_1) \in (x_1; x_2).$$

Тоді

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Зазначимо, що

$$\alpha \in (0;1) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (x_1; x_2).$$

Оскільки

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \frac{x_1 x_2 - x x_1 + x x_2 - x_1 x_2}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{x x_2 - x x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x,$$

нерівність в означенні опуклої донизу функції може бути перетворена таким чином:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\big(f(x) - f(x_1)\big) \le (1-\alpha)\big(f(x_2) - f(x)\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\big(f(x) - f(x_1)\big) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x)\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \qquad \square$$

Теорема.

Нехай функція f диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб вона була опуклою донизу (опуклою вгору) на $(a;b)$, необхідно та достатньо, щоб її похідна $f'(x)$ була неспадною (незростаючою) на $(a;b)$.

Доведення:

Необхідність.

Виберемо дві довільні точки з інтервалу $(a;b)$ та позначимо через x_1 меншу, а через x_2 більшу. Оскільки

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1+0}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le$$

$$\le\lim_{x\to x_1+0}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$f'(x_2)=\lim_{x\to x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2-0}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\ge$$

$$\ge\lim_{x\to x_2-0}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

то

$$f'(x_1)\le f'(x_2).$$

Оскільки вибір точок був довільним, то функція $f'(x)$ неспадна на $(a;b)$.

Достатність.

Виберемо дві довільні точки з інтервалу $(a;b)$ та позначимо через x_1 меншу, а через x_2 більшу. Тоді для довільної точки $x\in(x_1;x_2)$ за теоремою Лагранжа

$$\exists c_1\in[x_1;x]\quad f'(c_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1},$$

$$\exists c_2\in[x;x_2]\quad f'(c_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Оскільки $c_1<c_2$, а функція $f'(x)$ неспадна на $(a;b)$, то

$$f'(c_1)\le f'(c_2),$$

тобто

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

що й означає, що функція f опукла донизу на $(a;b)$. □

Точки перегину

Означення.

Точка x_0 називається *точкою перегину* функції f, якщо f неперервна в точці x_0 та існує такий її окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset D_f$, що на кожному з інтервалів $(x_0-\delta;x_0)$ та $(x_0;x_0+\delta)$ функція f опукла, але напрями опуклості на цих інтервалах різні.

Лема.

Нехай функція f має похідну на інтервалі $(a;b)$, причому $f'(x)$ неперервна в точці $x_0\in(a;b)$. Якщо точка x_0 є точкою перегину цієї функції, то точка x_0 є точкою локального екстремуму функції $f'(x)$.

Доведення:

Якщо функція f опукла на $(x_0-\delta; x_0)$ вгору, а на $(x_0; x_0+\delta)$ донизу, то на $(x_0-\delta; x_0)$ функція $f'(x)$ незростаюча, а на $(x_0; x_0+\delta)$ неспадна, а тому x_0 є точкою локального мінімуму функції $f'(x)$. Якщо функція f опукла на $(x_0-\delta; x_0)$ донизу, а на $(x_0; x_0+\delta)$ вгору, то на $(x_0-\delta; x_0)$ функція $f'(x)$ неспадна, а на $(x_0; x_0+\delta)$ незростаюча, а тому x_0 є точкою локального максимуму функції $f'(x)$. □

Теорема *(необхідна умова існування точки перегину).*

Нехай точка x_0 – точка перегину функції $f(x)$ та існує $f''(x_0)$. Тоді

$$f''(x_0)=0.$$

Доведення:

Якщо точка x_0 – точка перегину функції $f(x)$, то вона є точкою локального екстремуму функції $f'(x)$, а тому її похідна в точці x_0 має дорівнювати 0, тобто

$$f''(x_0)=0. \quad \square$$

Теорема *(достатня умова існування точки перегину).*

Нехай функція $f(x)$ має похідну другого порядку в деякому околі точки x_0, ця похідна $f''(x)$ зберігає знак справа та зліва від точки x_0 та $f''(x_0)=0$.

- Якщо при переході через точку x_0 $f''(x)$ змінює знак, то x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.
- Якщо при переході через точку x_0 $f''(x)$ не змінює знак, то x_0 не є точкою перегину функції $f(x)$.

Доведення:

Якщо $f''(x)$ від'ємна на $(x_0-\delta; x_0)$ та додатна на $(x_0; x_0+\delta)$, то $f'(x)$ спадає на $(x_0-\delta; x_0)$ та зростає на $(x_0; x_0+\delta)$, а $f(x)$ опукла вгору на $(x_0-\delta; x_0)$ та опукла донизу на $(x_0; x_0+\delta)$. Оскільки напрям опуклості функції $f(x)$ змінюється при переході через точку x_0, то ця точка є точкою перегину.

Якщо $f''(x)$ додатна на $(x_0-\delta; x_0)$ та від'ємна на $(x_0; x_0+\delta)$, то $f'(x)$ зростає на $(x_0-\delta; x_0)$ та спадає на $(x_0; x_0+\delta)$, а $f(x)$ опукла донизу на $(x_0-\delta; x_0)$ та опукла вгору на $(x_0; x_0+\delta)$. Оскільки напрям опуклості функції $f(x)$ змінюється при переході через точку x_0, то ця точка є точкою перегину.

Якщо при переході через точку x_0 $f''(x)$ не змінює знак, то $f'(x)$ або зростає в проколеному околі $\overset{\circ}{B}(x_0,\delta)$, або спадає в ньому. В першому випадку $f(x)$ опукла донизу в околі точки x_0, а в другому є опуклою вгору в околі цієї точки. Отже, x_0 не є точкою перегину функції $f(x)$. □

Асимптоти

Означення.

Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Означення.

Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to -\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0.$$

При $k = 0$ асимптота $y = kx + b$ називається *горизонтальною асимптотою*.

Теорема.

Для того, щоб пряма $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ була асимптотою графіка функції $f(x)$, необхідно та достатньо, щоб

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R},$$

$$b = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx\right) \in \mathbb{R}.$$

Доведення:

Необхідність.

Нехай $y = kx + b$ – асимптота графіка функції $f(x)$ при $x \to +\infty$. Позначимо

$$\alpha(x) := f(x) - kx - b.$$

За означенням асимптоти

$$\lim_{x\to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x) + kx + b}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \alpha(x)\cdot\frac{1}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\alpha(x) + b\right) = b.$$

Достатність.

Якщо

$$b = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx\right) \in \mathbb{R},$$

то

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx\right) - b = b - b = 0. \qquad \square$$

Приклад.

Знайти похилі асимптоти функції

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}.$$

Розв'язання:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1 \in \mathbb{R},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $y = x$ – похила асимптота.

Схема повного дослідження функції

1. Область визначення. Точки перетину з координатними осями.
2. Парність, непарність.
3. Періодичність.
4. Точки розриву, інтервали неперервності.
5. Асимптоти, поведінка на нескінченності.
6. Інтервали монотонності. Точки екстремумів.
7. Опуклість. Точки перегину.
8. Побудова графіка.
9. Область значень.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте необхідну та достатню умову для того, щоб функція була неспадною (незростаючою) на відрізку.
2. Сформулюйте необхідну та достатню умову для того, щоб функція була строго спадною (зростаючою).
3. Що називається точкою локального екстремуму функції?
4. Сформулюйте необхідну умову існування локального екстремуму.
5. Сформулюйте дві достатні умови існування локального екстремуму.
6. Як можна знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на відрізку?
7. Сформулюйте означення функції, опуклої донизу (вгору) на інтервалі.
8. Сформулюйте необхідну та достатню умову для того, щоб функція була опуклою донизу (вгору).
9. Що називається точкою перегину функції?
10. Сформулюйте необхідну умову існування точки перегину.
11. Сформулюйте достатні умови існування точки перегину.
12. Що називається вертикальною асимптотою графіка функції?
13. Що називається похилою асимптотою графіка функції?
14. Що називається горизонтальною асимптотою графіка функції?
15. Як можна знайти похилі асимптоти графіка функції?
16. Наведіть схему повного дослідження функції.

Лекція 15. Комплексні числа. Многочлени. Раціональні функції

Різні форми запису комплексного числа. Операції над комплексними числами. Многочлени. Теорема Безу. Основна теорема алгебри. Розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники. Раціональні функції. Розклад раціонального дробу на елементарні дроби.

Комплексні числа

Означення.

Два дійсних числа x і y називаються *впорядкованою парою*, якщо вказано, яке з них є першим, а яке другим.

Якщо x є першим числом, то пару позначають (x, y).

Означення.

Комплексними числами називаються впорядковані пари $z=(x, y)$ дійсних чисел, для яких операції додавання та множення вводяться за такими правилами:

- *сумою* чисел $z_1=(x_1, y_1)$ та $z_2=(x_2, y_2)$ називається число
$$z_1+z_2=(x_1+x_2, y_1+y_2);$$
- *добутком* чисел $z_1=(x_1, y_1)$ та $z_2=(x_2, y_2)$ називається число
$$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

При цьому x називається *дійсною частиною* комплексного числа $z=(x, y)$, а друге y – його *уявною частиною*.

Позначення: $x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z.$

Множину комплексних чисел позначають $\mathbb{C}$. Якщо уявна частина дорівнює нулю, то пару $(x, 0)$ ототожнюють з дійсним числом x. Це дозволяє розглядати множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ як підмножину $\mathbb{C}$.

Введені вище операції додавання та множення комплексних чисел узгоджуються з означеннями додавання та множення дійсних чисел.

Означення.

Два комплексних числа $z_1=(x_1, y_1)$ та $z_2=(x_2, y_2)$ називаються *рівними*, якщо
$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2.$$

Означення.

Два комплексних числа $z=(x, y)$ та $\overline{z}=(x, -y)$ називаються *спряженими*.

Означення.

Різницею чисел z_1 та z_2 називається таке комплексне число z, що
$$z+z_2=z_1,$$

тобто

$$z_1 - z_2 = z = \left(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2\right).$$

тобто

$$z_1 - z_2 = z = \left(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2\right).$$

Означення.

Часткою чисел z_1 та $z_2 \neq 0$ називається таке комплексне число z, що

$$z \cdot z_2 = z_1.$$

Означення.

Число $(0, 1)$ називається *уявною одиницею* і позначається символом i.

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,\, 0) = -1.$$

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

$$x + iy = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x,0) + (0\cdot y - 1\cdot 0, 0\cdot 0 + 1\cdot y) = (x,0) + (0, y) = (x, y).$$

Таким чином, будь-яке комплексне число $z = (x, y)$ можна подати у вигляді

$$z = x + iy,$$

що називається *алгебраїчною формою* запису комплексного числа.

Ця форма дозволяє виконувати арифметичні операції над комплексними числами, як над многочленами.

Приклад.

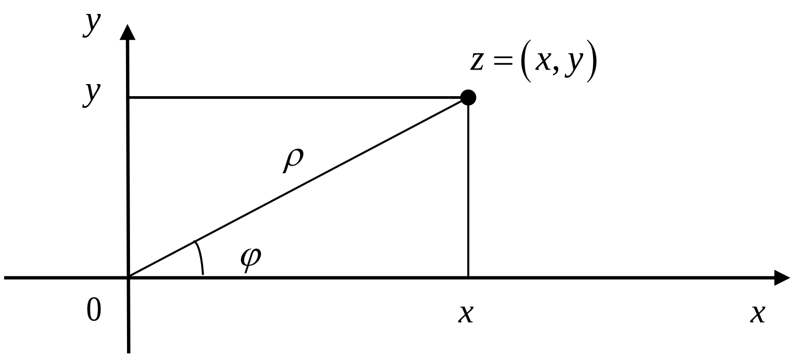
$z_1 = 2 + 3i,\quad z_2 = 1 + 2i,$

$z_1 + z_2 = (2+1) + (3+2)i = 3 + 5i,$

$z_1 - z_2 = (2-1) + (3-2)i = 1 + i,$

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1+2i) = 2\cdot 1 + 2\cdot 2i + 1\cdot 3i + 3\cdot 2\cdot i^2 = 2 - 6 + (4+3)i = -4 + 7i,$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2 + 6 + 3i - 4i}{1+4} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.$$



Означення.

Число $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ називається *модулем* числа $z=x+iy$.

Позначення: $\rho=|z|$.

Означення.

Кут між додатним напрямом осі Ox і радіус-вектором точки (x,y) називається *аргументом* числа $z=(x,y)$ і позначається $\operatorname{Arg} z$.

Означення.

Головним значенням аргументу називається таке значення аргументу φ, що $\varphi\in(-\pi,\pi]$.

Позначення: $\varphi=\arg z$.

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Формули зв'язку:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

Тоді

$$z=x+iy=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Ми одержали *тригонометричну форму* запису комплексного числа:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Нехай

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тоді

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right),$$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Таким чином, при множенні модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Методом математичної індукції це правило можна поширити на випадок скінченної кількості множників. Зокрема,

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Ця формула називається *формулою Муавра*.

Аналогічно для ділення

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Означення.

Коренем степеня n із комплексного числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ називається таке число w, що $w^n=z$.

Позначення: $w=\sqrt[n]{z}$.

Якщо

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad w=r(\cos\psi+i\sin\psi),$$

то

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=w^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi),$$

а отже,

$$\boxed{\begin{aligned}&r=\sqrt[n]{\rho},\\&\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\quad k=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned}}$$

При інших значеннях параметра k значення кореня будуть збігатися з уже знайденими.

Для коротшого запису комплексного числа використовують *формулу Ейлера*:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Тоді комплексне число

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

можна подати в *показниковій формі* запису:

$$z=\rho e^{i\varphi}.$$

Многочлени

Означення.

Многочленом з однією змінною називається функція

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

де n – натуральне число, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – числа, $a_n \neq 0,$ x – незалежна змінна. При цьому n називається *степенем* многочлена, а числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ називаються *коефіцієнтами* многочлена.

Означення.

Число x_0 називається *нулем* (*коренем*) многочлена $P_n(x)$, якщо

$$P_n(x_0) = 0.$$

Теорема *(Безу).*

Число x_0 є коренем многочлена $P_n(x)$ тоді й тільки тоді, коли $P_n(x)$ ділиться на $x - x_0$.

Доведення:

Достатність.

Якщо $P_n(x)$ ділиться на $x - x_0$, то

$$P_n(x) = S_{n-1}(x) \cdot (x - x_0).$$

А тому

$$P_n(x_0) = S_{n-1}(x_0) \cdot (x_0 - x_0) = 0,$$

тобто x_0 є коренем $P_n(x)$.

Необхідність.

Розділимо $P_n(x)$ на $x - x_0$:

$$P_n(x) = S_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + R(x).$$

Оскільки степінь остачі має бути менше степені дільника $x - x_0$, то він може бути тільки 0, тобто $R(x)$ є константою r:

$$P_n(x) = S_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r.$$

Якщо x_0 – корінь $P_n(x)$, то $P_n(x_0) = 0$. Підставимо $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = S_{n-1}(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + r,$$

$$0 = r. \qquad \square$$

Теорема *(основна теорема алгебри).*

Многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами має в множині комплексних чисел принаймні один корінь.

Наслідок.

Многочлен степеня n має рівно n комплексних коренів.

Доведення:

За основною теоремою алгебри многочлен $P_n(x)$ має принаймні один корінь x_1, а за теоремою Безу

$$P_n(x) = (x - x_1) P_{n-1}(x).$$

Аналогічно

$$P_{n-1}(x) = (x - x_2)P_{n-2}(x),$$
$$P_{n-2}(x) = (x - x_3)P_{n-3}(x),$$
$$\ldots$$
$$P_1(x) = (x - x_n)P_0(x),$$

але многочлен нульового степеня є константою, тобто

$$P_0(x) \equiv a,$$

причому $a \neq 0.$ Отже,

$$P_n(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Оскільки

$$P_n(x_k) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

то $x_1, x_2, \ldots x_n$ — корені $P_n(x)$. Якщо y не співпадає з жодним з цих коренів, то

$$y - x_k \neq 0, \quad k = \overline{1,n},$$

а отже,

$$P_n(y) \neq 0. \qquad \square$$

Означення.

Якщо x_0 – нуль многочлена $P_n(x)$ та

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x),$$

де

$$Q_{n-1}(x_0) \neq 0,$$

то x_0 називається *простим нулем* многочлена $P_n(x)$, або *нулем кратності* 1.

Якщо x_0 – нуль многочлена $P_n(x)$ та

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),$$

де

$$Q_{n-k}(x_0) \neq 0,$$

то x_0 називається *нулем кратності* k многочлена $P_n(x)$.

Тоді

$$P_n(x) = a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_m)^{k_m},$$

де k_l – кратність кореня x_l, а

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Для многочлена

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

позначимо через $\overline{P}_n(z)$ многочлен, коефіцієнти якого є комплекслими числами, спряженими коефіцієнтам многочлена $P_n(z)$:

$$\overline{P}_n(z) = \overline{a}_n z^n + \overline{a}_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_2 z^2 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0.$$

Многочлен $\overline{P}_n(z)$ називається многочленом, *спряженим* многочлену $P_n(z)$.

При цьому

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} =$$

$$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a}_n \overline{z}^n + \overline{a}_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a}_2 \overline{z}^2 + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_0 = \overline{P}_n(\overline{z}).$$

Лема.

Якщо $z_0 = \alpha + i\beta$ – нуль многочлена $P_n(z)$ з дійсними коефіцієнтами, то $\overline{z}_0 = \alpha - i\beta$ теж є нулем цього многочлена тієї самої кратності.

Доведення:

Нехай $z_0 = \alpha + i\beta$ є нулем $P_n(z)$ кратності k. Тоді цей многочлен можна подати у вигляді

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z),$$

де $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Тоді

$$\overline{P}_n(\overline{z}) = (\overline{z} - \overline{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}), \quad \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}_0) \neq 0.$$

Оскільки $\overline{z}$ є довільним комплексним числом, як і z, то це й означає, що число $\overline{z}_0$ є нулем кратності k для многочлена $\overline{P}_n$.

Оскільки всі коефіцієнти многочлена P_n є дійсними числами, то спряжений многочлен

$$\overline{P}_n(z) = \overline{a}_n z^n + \overline{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_2 z^2 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0 =$$

$$= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = P_n(z). \qquad \square$$

Теорема *(про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами).*

Многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами можна подати у вигляді

$$P_n(x) = a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$

де k_j – кратність дійсних коренів x_j, а $x^2 + p_j x + q_j$ – незвідні квадратні тричлени $(p_j^2 - 4q_j < 0)$, яким відповідає по парі комплексних нулів многочлена кратності m_j.

Доведення:

За наслідком з основної теореми алгебри та за попередньою лемою

$$P_n(x) = a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} \cdot$$

$$\cdot (x - z_1)^{m_1} (x - \overline{z}_1)^{m_1} \ldots (x - z_l)^{m_l} (x - \overline{z}_l)^{m_l}.$$

Якщо $z = \alpha + i\beta$, то $\overline{z} = \alpha - i\beta$,

$$\begin{aligned}(x-z)(x-\overline{z}) &= \left(x-(\alpha+i\beta)\right)\left(x-(\alpha-i\beta)\right)= \\ &=(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2-(i\beta)^2= \\ &=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q,\end{aligned}$$

де

$$p=-2\alpha,\quad q=\alpha^2+\beta^2,\quad p^2-4q=4\alpha^2-4\left(\alpha^2+\beta^2\right)=-4\beta^2<0.\quad \square$$

Раціональні функції

Означення.

Нехай $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Відношення $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ називається *раціональною функцією*, або *раціональним дробом*. Якщо $m<n$, то раціональний дріб називається *правильним*, а якщо $m\geq n$, то *неправильним*.

Лема 1.

Нехай $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильний раціональний дріб з дійсними коефіцієнтами, a – дійсний нуль многочлена $P(x)$ кратності k. Тоді існують такі дійсне число A та многочлен $R(x)$ та $\Phi(x)$, що

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{R(x)}{(x-a)^{k-1}\Phi(x)},$$

де дріб $\dfrac{R(x)}{(x-a)^{k-1}\Phi(x)}$ правильний, а $\Phi(a)\neq 0.$

Доведення:

Розглянемо для поки що довільного дійсного числа A різницю

$$\frac{Q(x)}{P(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{Q(x)-A\Phi(x)}{(x-a)^k\Phi(x)},$$

де $P_n(x)=(x-a)^k\Phi(x)$. Виберемо тепер число A так, щоб a був нулем чисельника в правій частині, тобто

$$Q(a)-A\Phi(a)=0\quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{Q(a)}{\Phi(a)}.$$

Тоді за теоремою Безу існує такий многочлен $R(x)$ степеня не більше $n-2$ (степінь $Q(x)$ менше n, оскільки початковий дріб правильний, а степінь многочлена $\Phi(x)$ дорівнює $n-k$), що

$$Q(x)-A\Phi(x)=(x-a)R(x).\qquad \square$$

Лема 2.

Нехай $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильний раціональний дріб з дійсними коефіцієнтами, $z=\alpha+i\beta$ – нуль многочлена $P(x)$ кратності k, $\beta\neq 0$. Тоді існують такі дійсні числа M, N та многочлени $R(x)$ і $\Phi(x)$, що

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{R(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\Phi(x)},$$

де дріб $\dfrac{R(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\Phi(x)}$ правильний, $x^2+px+q=(x-z)(x-\overline{z})$ – незвідний квадратний тричлен, а $\Phi(z)\neq 0$.

Доведення:

Розглянемо для поки що довільного дійсного числа A різницю

$$\frac{Q(x)}{P(x)}-\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{Q(x)-(Mx+N)\Phi(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\Phi(x)},$$

де $P_n(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\Phi(x)$. Виберемо тепер числа M, N так, щоб $z=\alpha+i\beta$ був нулем чисельника в правій частині, тобто

$$Q(z)-(Mz+N)\Phi(z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad M\alpha+i\beta M+N=\frac{Q(z)}{\Phi(z)} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} M=\dfrac{1}{\beta}\operatorname{Im}\left(\dfrac{Q(z)}{\Phi(z)}\right),\\ N=\operatorname{Re}\left(\dfrac{Q(z)}{\Phi(z)}\right)-M\alpha.\end{cases}$$

Тоді за теоремою Безу існує такий многочлен $R(x)$ степеня не більше n (степінь $Q(x)$ менше n, оскільки початковий дріб правильний, а степінь $\Phi(x)$ дорівнює $n-2k$), що

$$Q(x)-(Mx+N)\Phi(x)=(x-z)(x-\overline{z})R(x). \qquad \square$$

Наслідком цих двох лем є такий результат.

Теорема *(про представлення правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних дробів).*

Якщо $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильний раціональний дріб, де

$$P_n(x)=a\left(x-x_1\right)^{k_1}\left(x-x_2\right)^{k_2}\ldots\left(x-x_r\right)^{k_r}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\ldots\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{m_l},$$

k_j – кратність дійсних коренів x_j, а $x^2+p_jx+q_j$ – незвідні квадратні тричлени $\left(p_j^2-4q_j<0\right)$, яким відповідає по парі комплексних нулів многочлена кратності m_j, то

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{\left(x-x_i\right)^j}\right)+\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{M_{ij}x+N_{ij}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^j}\right).$$

Приклад.

$$\frac{2x^2+3x+4}{x^3\left(x+2\right)^2\left(x-3\right)^4\left(x^2+2x+2\right)^3}=$$

$$=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x+2}+\frac{A_5}{\left(x+2\right)^2}+$$

$$+\frac{A_6}{x-3}+\frac{A_7}{\left(x-3\right)^2}+\frac{A_8}{\left(x-3\right)^3}+\frac{A_9}{\left(x-3\right)^4}+$$

$$+\frac{A_{10}x+A_{11}}{x^2+2x+2}+\frac{A_{12}x+A_{13}}{\left(x^2+2x+2\right)^2}+\frac{A_{14}x+A_{15}}{\left(x^2+2x+2\right)^3}.$$

Таким чином, будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми *найпростіших* (*елементарних*) *дробів* 4 типів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{\left(x-a\right)^n}$, $n>1$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, $n>1$.

Схема розкладу раціонального дробу на елементарні дроби:

1. Якщо дріб неправильний, виділяємо цілу частину.
2. Розкладаємо знаменник на множники.
3. Правильний дріб розкладаємо в суму елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами.
4. Зводимо праву частину до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники справа та зліва.
5. Складаємо та розв’язуємо систему для невизначених коефіцієнтів.

Контрольні запитання

1. Що називається комплексним числом?
2. Як знаходяться аргумент та модуль комплексного числа? Який їх геометричний зміст?

3. Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі? Для яких операцій яка форма комплексного числа зручніше?
4. Напишіть й доведіть формулу Муавра.
5. Як знайти корінь степеня n із комплексного числа?
6. Сформулюйте теорему Безу.
7. Сформулюйте основну теорему алгебри.
8. Сформулюйте теорему про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами.
9. Що називається раціональною функцією, або раціональним дробом? Який раціональний дріб називається правильним?
10. Які раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
11. Як представити правильний раціональний дріб у вигляді суми елементарних дробів?

Лекція 16. Первісна та інтеграл.

Первісна та інтеграл. Таблиця інтегралів. Заміна змінної в невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.

Первісна та інтеграл.

Означення.

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо функція $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ та

$$\forall x \in (a;b) \quad F'(x) = f(x).$$

Приклад.

Для функції

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

первісними є

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_2(x) = -\operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_3(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Висновок: первісна може бути не єдина.

Теорема *(достатня умова існування первісної).*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$, то на $(a;b)$ існує первісна функції $f(x)$.

Теорема.

Нехай $F_1(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб функція $F_2(x)$ також була первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a;b) \quad F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Доведення:

Необхідність.

Розглянемо допоміжну функцію

$$G(x) := F_2(x) - F_1(x).$$

Оскільки

$$\forall x \in (a;b) \quad G'(x) = \left(F_2(x) - F_1(x)\right)' = f(x) - f(x) = 0,$$

то за наслідком з теореми Лагранжа

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a;b) \quad G(x) = C.$$

Отже,

$$\forall x \in (a;b) \quad F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Достатність.

$$\forall x \in (a;b) \quad F_2'(x) = \left(F_1(x) + C\right)' = f(x) + 0 = f(x). \qquad \square$$

Означення.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ називається вираз

$$F(x) + C, \quad x \in (a;b),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, а C – довільна стала.

Позначення:

$\int f(x)dx$ – невизначений інтеграл від функції $f(x)$,

$f(x)$ – підінтегральна функція,

dx – диференціал незалежної змінної,

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

$\int$ – знак інтеграла.

Елементарні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Доведення:

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x) + 0 = f(x). \qquad \square$$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

Доведення:

$$\left(f(x) + C\right)' = f'(x). \qquad \square$$

3. Лінійність:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \int \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right)dx = \alpha \int f_1(x)dx + \beta \int f_2(x)dx.$

Доведення:

$$\left(\alpha \int f_1(x)dx + \beta \int f_2(x)dx\right)' = \alpha \left(\int f_1(x)dx\right)' + \beta \left(\int f_2(x)dx\right)' = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x). \square$$

4. Якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Доведення:

$$\left(\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)\right)' = \frac{1}{a}F'\left(ax+b\right)\cdot\left(ax+b\right)' = \frac{1}{a}f\left(ax+b\right)\cdot a = f\left(ax+b\right). \qquad \square$$

Таблиця інтегралів

$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1.$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$
$\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C, \quad a>0, \quad a\neq 1.$	$\int e^{x}dx = e^{x}+C.$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$
$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ («високий логарифм»).
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C, \quad a\neq 0$ («довгий логарифм»).

Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Теорема.

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in (a;b),$$

а функція $\varphi:(\alpha;\beta) \to (a;b)$ диференційовна на $(\alpha;\beta)$.

Тоді

$$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = F(\varphi(u)) + C, \quad u \in (\alpha;\beta).$$

Доведення:

За правилом диференціювання складеної функції

$$\left(F(\varphi(u)) + C\right)' = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u). \qquad \square$$

Зауваження.

При $x = \varphi(u)$ формулу

$$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = F(\varphi(u)) + C$$

Можна переписати як

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

оскільки

$$dx = \varphi'(u)du.$$

Тобто формула

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

зберігає свій вигляд, хоча зараз x не є незалежною змінною. Цей факт пояснює, чому в позначенні інтеграла присутній диференціал.

Приклад.

$$\int xe^{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C,$$

або

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Приклад.

$$\int \sin^3 x\,dx = \left| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \\ \sin^2 x = 1-t^2 \end{matrix} \right| = -\int \left(1-t^2\right)dt = \int \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C,$$

або

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\left(\cos x\right) = -\int \left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

Перший спосіб називається *методом заміни змінної*, або *методом підстановки*. Другий спосіб називається *введенням функції під знак диференціалу*. Різниця, по суті, лише в оформленні.

Інтегрування частинами

Теорема.

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, а функція $u(x)v'(x)$ має первісну на $(a;b)$. Тоді функція $u'(x)v(x)$ також маж первісну на $(a;b)$ та справедлива рівність

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx, \quad x \in (a;b),$$

тобто

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Доведення:

За правилом диференціювання добутку

$$(uv)' = u'v + uv',$$

звідки

$$\int \left(u'v + uv'\right)dx = uv + C.$$

Оскільки існує $\int u'v\,dx,$ а інтеграл лінійний, то існує

$$\int uv'\,dx = \int \left(\left(u'v+uv'\right) - u'v\right)dx = \int \left(u'v+uv'\right)dx - \int u'v\,dx = uv + C - \int u'v\,dx,$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx + C. \qquad \square$$

Класи функцій, що інтегруються частинами:

I. $\displaystyle\int P_n(x) \left\{ \begin{matrix} e^{\alpha x} \\ \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{matrix} \right\} dx, \quad u = P_n(x).$

II. $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \operatorname{arctg} x\\ \operatorname{arcctg} x\\ \log_a x\end{matrix}\right\}dx=\int P_n(x)\varphi(x)\,dx,\quad u=\varphi(x).$

III. Функції

$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx, \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \int\cos\ln x\,dx, \int\sin\ln x\,dx, \int\sqrt{x^2\pm a^2}dx, \int\sqrt{a^2-x^2}dx$ інтегруються кілька раз, щоб отримати рівняння відносно шуканого інтегралу (циклічне інтегрування).

Приклад.

$$\int\left(x^2+x+1\right)e^x\,dx=\begin{vmatrix}u=x^2+x+1, & du=(2x+1)\,dx,\\ dv=e^x\,dx, & v=e^x,\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)e^x-\int(2x+1)e^x\,dx=\begin{vmatrix}u=2x+1, & du=2\,dx,\\ dv=e^x\,dx, & v=e^x,\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)e^x-(2x+1)e^x+2\int e^x\,dx=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)e^x-(2x+1)e^x+2e^x+C=\left(x^2-x+2\right)e^x+C.$$

Приклад.

$$\int(2x+1)\operatorname{arctg}x\,dx=\begin{vmatrix}u=\operatorname{arctg}x, & du=\dfrac{dx}{x^2+1},\\ dv=(2x+1)\,dx, & v=x^2+x,\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2+x\right)\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^2+x}{x^2+1}dx=$$

$$=\left(x^2+x\right)\operatorname{arctg}x-\int\left(1+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left(x^2+x\right)\operatorname{arctg}x-\int dx-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\left(x^2+x\right)\operatorname{arctg}x-\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\left(x^2+x\right)\operatorname{arctg}x-x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+C=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\operatorname{arctg}x-x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Приклад.
Обчислити

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

Розв'язання:
Позначимо

$$I=\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

Тоді

$$I=\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a^2}, & du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \\ dv=dx, & v=x, \end{matrix}\right|=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{\left(x^2+a^2-a^2\right)dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C_1,$$

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C_1,$$

$$2I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C_1,$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$$

де $C=\dfrac{1}{2}C_1$.

Відповідь: $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$

Контрольні запитання

1. Що називається первісною функції?
2. Сформулюйте достатню умову існування первісної.
3. Що називається невизначеним інтегралом?
4. Запишіть елементарні властивості невизначеного інтеграла.
5. Запишіть таблицю інтегралів.
6. Сформулюйте теорему про заміну змінної в невизначеному інтегралі. Наведіть приклад.
7. Сформулюйте теорему про інтегрування частинами. Наведіть приклад.
8. Які класи функцій інтегруються частинами?

Лекція 17. Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних функцій

Приклади інтегралів, що не виражаються в елементарних функціях. Інтегрування раціональних дробів. Приклади. Інтегрування тригонометричних функцій. Універсальна тригонометрична підстановка.

Інтегрування раціональних дробів

Надалі ми розглянемо спеціальні прийоми для інтегрування певних класів функцій.

Не всі інтеграли від елементарних функцій є елементарними функціями. Приклади інтегралів, що не виражаються в елементарних функціях («не беруться»):

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{e^x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x},\quad \int\cos\left(x^2\right)dx,\quad \int\sin\left(x^2\right)dx,\quad \int e^{-x^2}dx.$$

Проте ми доведемо, що інтеграли від раціональних дробів виражаються в елементарних функціях.

Як відомо, раціональну функцію $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна подати як суму многочлена та найпростіших дробів 4 типів:

V. $\dfrac{A}{x-a}$,

VI. $\dfrac{A}{(x-a)^n},\quad n>1,$

VII. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q},$

VIII. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n},\quad n>1,$

де многочлен x^2+px+q є незвідним квадратним тричленом.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C.$

II. При $n>1$

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}dx=A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+C=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| d\left(x^2+px+q\right) = (2x+p)dx \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Приклад.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}dx = \left| d\left(x^2+x+1\right) = (2x+1)dx \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{7}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

IV. При $n > 1$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \left| d\left(x^2+px+q\right) = (2x+p)dx \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} =$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Позначимо

$$t=x+\frac{p}{2},\quad a^2=q-\frac{p^2}{4}>0\quad (a>0).$$

Тоді

$$\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}:=I_n.$$

Проінтегруємо I_n частинами:

$$I_n:=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\left|\begin{matrix} u=\dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n}, & du=-\dfrac{2nt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt, \\ dv=dt, & v=t, \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\int\frac{2nt^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt-2n\int\frac{a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}.$$

Ми одержали рекурентне рівняння

$$I_n=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}.$$

З нього маємо, що

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+(2n-1)I_n\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

де

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Таким чином,

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2}\left(\dfrac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right), \quad n>1, \\ I_1 = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{a} + C. \end{array}}$$

Висновок.

Первісною від раціональної функції є сума, яка, можливо, включає раціональну та логарифмічну функції та арктангенс.

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}.$$

Розв'язання:

Дріб під інтегралом неправильний, а тому маємо виділити цілу частину. Для цього розкриємо дужки в знаменнику та розділимо чисельник на знаменник:

$$(x-1)^2\left(x^2-1\right) = \left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-1\right) = x^4-2x^3+x^2-x^2+2x-1 =$$

$$= x^4-2x^3+2x-1.$$

$$\begin{array}{rl} x^5 & \big| \, \underline{x^4-2x^3+2x-1} \\ -\underline{x^5-2x^4+2x^2-x} & \quad x+2 \\ 2x^4-2x^2+x & \\ -\underline{2x^4-4x^3+4x-2} & \\ 4x^3-2x^2-3x+2 & \end{array}$$

Інтеграл від цілої частини обчислюється безпосередньо:

$$\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)} = \int \left(x+2+\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}\,dx.$$

Тепер розкладемо правильний дріб на найпростіші дроби.

$$\int \frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}\,dx = \int \frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} \right) dx.$$

Для того, щоб знайти невизначені коефіцієнти зведемо праву частину до спільного знаменника та прирівняємо чисельники:

$$4x^3-2x^2-3x+2 = A(x-1)^2(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3.$$

$$x=1:\quad 1=2C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{2},$$

$$x=-1:\quad -1=-8D \quad\Rightarrow\quad D=\frac{1}{8},$$

$$x^3:\quad 4=A+D \quad\Rightarrow\quad A=\frac{31}{8},$$

$$x^2:\quad -2=-A+B-3D \quad\Rightarrow\quad B=A+3D-2=\frac{9}{4}.$$

Отже,

$$\int\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{31}{8}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{31}{8}\ln|x-1|-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C.$$

Таким чином, остаточно

$$\int\frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C.$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int\frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}.$$

Розв'язання:

Оскільки дріб під інтегралом правильний, одразу розкладемо його на елементарні дроби:

$$\int\frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2-6x+13}+\frac{Cx+D}{(x^2-6x+13)^2}\right)dx.$$

Для того, щоб знайти невизначені коефіцієнти зведемо праву частину до спільно знаменника та прирівняємо чисельники:

$$5x^2-12=(Ax+B)(x^2-6x+13)+Cx+D.$$

$$x^3:\quad 0=A,$$

$$x^2:\quad 5=-6A+B \quad\Rightarrow\quad B=5,$$

$$x:\quad 0=13A-6B+C \quad\Rightarrow\quad C=30,$$

$$x^0:\quad -12=13B+D \quad\Rightarrow\quad D=-77.$$

Таким чином,

$$\int\frac{\left(5x^2-12\right)dx}{\left(x^2-6x+13\right)^2}=\int\left(\frac{5}{x^2-6x+13}+\frac{30x-77}{\left(x^2-6x+13\right)^2}\right)dx,$$

$$\int\frac{5dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{5dx}{\left(x-3\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C_1,$$

$$\int\frac{30x-77}{\left(x^2-6x+13\right)^2}dx=\int\left(15\cdot\frac{2x-6}{\left(x^2-6x+13\right)^2}+\frac{13}{\left(x^2-6x+13\right)^2}\right)dx=$$

$$=15\int\frac{d\left(x^2-6x+13\right)}{\left(x^2-6x+13\right)^2}+13\int\frac{dx}{\left(\left(x-3\right)^2+2^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{15}{x^2-6x+13}+13I_2.$$

Використаємо рекурентну формулу:

$$I_2:=\int\frac{dx}{\left(\left(x-3\right)^2+2^2\right)^2},$$

$$I_2=\frac{1}{2\cdot1\cdot2^2}\left(\frac{x-3}{\left(x-3\right)^2+2^2}+\left(2\cdot2-3\right)I_1\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x-3}{x^2-6x+13}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\left(x-3\right)^2+2^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x-3}{x^2-6x+13}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C_2.$$

Остаточно маємо

$$\int\frac{\left(5x^2-12\right)dx}{\left(x^2-6x+13\right)^2}=$$

$$=\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}-\frac{15}{x^2-6x+13}+\frac{13}{8}\cdot\frac{x-3}{x^2-6x+13}+\frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C=$$

$$=\frac{13x-159}{8\left(x^2-6x+13\right)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{13x-159}{8\left(x^2-6x+13\right)}+\dfrac{53}{16}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C.$

Інтегрування тригонометричних функцій

Означення.

Многочленом від двох змінних називається функція $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ вигляду

$$P\left(x,y\right)=\sum_{0\le i+j\le n}a_{ij}x^iy^j.$$

Раціональною функцією двох змінних називається відношення двох многочленів від двох змінних.

Теорема *(універсальна тригонометрична підстановка).*

Нехай R – раціональна функція двох змінних. Тоді інтеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

раціоналізується, тобто зводиться до інтеграла від раціональної функції, підстановкою

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Доведення:

Введемо підстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Тоді

$$x = 2\operatorname{arctg} t,$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad \square$$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & dx=\dfrac{2dt}{1+\mathrm{t}^2}, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+1}=\int \frac{2dt}{3\left(1-t^2\right)+2t+1+t^2}=\int \frac{2dt}{-2t^2+2t+4}=$$

$$=-\int \frac{dt}{t^2-t-2}=-\int \frac{dt}{(t-2)(t+1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t+1|-\ln|t-2|\right)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+1}{t-2}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2}\right|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2}\right|+C.$

Зауваження.
Часто універсальна підстановка призводить до громіздких інтегралів.

Теорема.
Якщо раціональна функція $R(u,v)$ парна відносно u, тобто

$$\forall u,v\in\mathbb{R}\quad R(-u,v)=R(u,v),$$

то

$$R(u,v)=R_1\left(u^2,v\right),$$

де $R_1(u,v)$ – раціональна функція.

Якщо $R(u,v)$ непарна відносно u, тобто

$$\forall u,v\in\mathbb{R}\quad R(-u,v)=-R(u,v),$$

то $\dfrac{R(u,v)}{u}$ є парною функцією відносно u та

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)}{u}\cdot u=R_2\left(u^2,v\right)u.$$

I. Нехай $R(u,v)$ непарна відносно u. Тоді інтеграл

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

раціоналізується підстановкою

$$\boxed{t=\cos x.}$$

Дійсно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_3\left(\sin^2 x, \cos x\right)\sin x\, dx =$$

$$= -\int R_3\left(1-\cos^2 x, \cos x\right)d\left(\cos x\right) = -\int R_3\left(1-t^2, t\right)dt.$$

II. Нехай $R(u, v)$ непарна відносно v. Тоді інтеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

раціоналізується підстановкою

$$\boxed{t = \sin x.}$$

Дійсно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_4\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x\, dx =$$

$$= \int R_4\left(\sin x, 1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right) = \int R_4\left(t, 1-t^2\right)dt.$$

III. Нехай $R(u, v)$ парна відносно u та v, тобто

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad R(-u, -v) = R(u, v).$$

Тоді інтеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

раціоналізується підстановкою

$$\boxed{t = \operatorname{tg} x.}$$

Дійсно,

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_5\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_5\left(\frac{-u}{-v}, -v\right) = R_5\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_6\left(\frac{u}{v}, v^2\right),$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_6\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)dx =$$

$$= \int R_6\left(\operatorname{tg} x, \cos^2 x\right)\cos^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int R_6\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}d\left(\operatorname{tg} x\right) = \int R_6\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Будь-яку раціональну функцію можна подати у вигляді суми з виразів указаних типів

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2},$$

а тому для обчислення інтегралів $\int R(\sin x, \cos x)dx$ достатньо підстановок $t = \cos x, t = \sin x, t = \operatorname{tg} x.$

Зауваження.

Інтеграл

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx,$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, зручніше обчислювати за допомогою формул пониження степеня.

При $n \geq m$

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \int (\sin x \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}} \int \sin^{2m} 2x (1 - \cos 2x)^{n-m}\, dx.$$

При $n < m$

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \int (\sin x \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}} \int \sin^{2n} 2x (1 + \cos 2x)^{m-n}\, dx.$$

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади інтегралів, що не виражаються в елементарних функціях.
2. Як інтегруються елементарні дроби перших трьох типів?
3. Як застосовується універсальна тригонометрична підстановка?
4. За яких умов для обчислення $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ використовуються підстановки $t = \cos x, t = \sin x, t = \operatorname{tg} x$?
5. Запишіть рекурентну формулу для $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$.

Лекція 18. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей. Диференціальні біноми. Квадратичні ірраціональності. Підстановки Ейлера. Частинні випадки. Тригонометричні підстановки.

Теорема.

Інтеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_n}\right)dx,$$

де $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Q}$, а R – раціональна функція від $n+1$ змінної, раціоналізується підстановкою

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

де m – спільний знаменник дробів $k_1, \ldots, k_n$.

Доведення:

Нехай

$$k_i = \frac{s_i}{m}, \quad s_i \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_i} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{s_i}{m}} = t^{s_i},$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

$$ax+b = cxt^m + dt^m,$$

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m},$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_n}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{s_1}, \ldots, t^{s_n}\right)\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)' dt. \qquad \square$$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\,dx.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} m = НСК(2,3) = 6, \\ t = \sqrt[6]{x}, \quad x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt, \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{t^3+1}{t^4-t^3} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^5+t^2}{t-1} dx = 6\int \frac{\left(t^5-1\right)+\left(t^2-1\right)+2}{t-1} dt =$$

$$= 6\int\left(t^4+t^3+t^2+2t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+t^2+2t+2\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}+12\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}+12\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$

Диференціальні біноми

Означення.

Диференціальним біномом називається вираз

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

де $a, b \in \mathbb{R},\ m, n,\ p \in \mathbb{Q}$.

Теорема.

Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ раціоналізується підстановками:

1) $t = \sqrt[s]{x}$, де s – спільний знаменник дробів m та n, якщо $p \in \mathbb{Z}$;
2) $t = \sqrt[l]{a+bx^n}$, де l – знаменник p, якщо $p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;
3) $t = \sqrt[l]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, де l – знаменник p, якщо $p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z},\ p+\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.

Теорема *(Чебишов, 1853).*

Якщо $p \notin \mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z},\ p+\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z},$ то інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ не виражається в елементарних функціях.

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^4}}.$$

Розв'язання:

$$p=-\frac{1}{5},\quad m=0,\quad n=4,$$

$$p=-\frac{1}{5}\notin\mathbb{Z},\quad \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z},\quad p+\frac{m+1}{n}=\frac{1}{20}\notin\mathbb{Z},$$

отже, за теоремою Чебишова інтеграл не виражається в елементарних функціях.

Відповідь: інтеграл не виражається в елементарних функціях.

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Розв'язання:

$$p=-\frac{1}{3},\quad m=0,\quad n=3,$$

$$p=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z},\quad \frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z},\quad p+\frac{m+1}{n}=0\in\mathbb{Z},$$

отже, робимо підстановку

$$t=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}.$$

З неї маємо

$$t^3=\frac{1+x^3}{x^3},\quad t^3x^3=1+x^3,\quad x=\sqrt[3]{\frac{1}{t^3-1}},\quad x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$dx=-\frac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}3t^2dt,\quad dx=-\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}t^2dt.$$

Цією підставкою ми зводимо наш інтеграл до інтеграла від раціонального дробу, а далі обчислюємо за стандартною схемою інтегрування раціональних дробів:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}\cdot x}=-\int \frac{\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}t^2dt}{t\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}}=-\int \frac{t\,dt}{t^3-1}=$$

$$=-\int \frac{t\,dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)dt.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$-t = A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right).$$

$$t=1:\quad -1=3A \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{3},$$

$$t^2:\quad 0=A+B \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{3},$$

$$t^0:\quad 0=A-C \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\frac{1}{3}\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+t+1}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+t+1\right)}{t^2+t+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, де $t=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}$.

Квадратичні ірраціональності

Інтеграли $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ завжди можна раціоналізувати за допомогою підстановок Ейлера.

Перша підстановка Ейлера: якщо $a>0$, то $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.}$

Друга підстановка Ейлера: якщо $c>0$, то $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.}$

Третя підстановка Ейлера: якщо $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, то $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right).}$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Розв'язання:

Можна скористатися як першою, так і другою підстановками Ейлера. Виберемо першу. Знак в ній між доданками обираємо за власним бажанням.

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x,$$

$$\cancel{x^2}-x+1=t^2-2tx+\cancel{x^2},$$

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},$$

$$dx=\frac{2t(2t-1)-2\left(t^2-1\right)}{(2t-1)^2}dt,$$

$$dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-\frac{t^2-1}{2t-1},$$

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2t-1}+\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\cdot 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt=$$

$$=2\int \frac{t^2-t+1}{\left(2t^2-t\right)(2t-1)}dt=\int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=$$

$$=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{2t-1}+\frac{C}{(2t-1)^2}\right)dt,$$

$$2t^2-2t+2=A(2t-1)^2+Bt(2t-1)+Ct,$$

$$t=\frac{1}{2}:\quad \frac{3}{2}=\frac{1}{2}C \quad\Rightarrow\quad C=3,$$

$$t=0:\quad 2=A,$$

$$t^2:\quad 2=4A+2B \quad\Rightarrow\quad B=-3.$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2} \right) dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{4t-2} + C.$$

Відповідь: $2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{4t-2} + C,$ де $t = x + \sqrt{x^2-x+1}.$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Розв'язання:

Оскільки

$$a=-1<0, \quad c=-10<0, \quad 7x-10-x^2 = -(x-2)(x-5),$$

то підходить тільки третя підстановка Ейлера, причому можна за власним бажанням обрати будь-яку з підстановок $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2)$ та $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-5)$. Виберемо першу з них. Тоді

$$\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2),$$

$$-(x-2)(x-5) = t^2(x-2)^2,$$

$$-x+5 = t^2(x-2),$$

$$x = \frac{2t^2+5}{t^2+1},$$

$$\sqrt{7x-10-x^2} = t\left(\frac{2t^2+5}{t^2+1} - 2 \right), \quad \sqrt{7x-10-x^2} = \frac{3t}{t^2+1},$$

$$dx = \frac{4t(t^2+1) - 2t(2t^2+5)}{(t^2+1)^2} dt, \quad dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Підставимо все це в наш інтеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = \int \frac{t^2+1}{3t} \cdot \frac{2t^2+5}{t^2+1} \cdot \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt =$$

$$= -2\int \frac{2t^2+5}{(t^2+1)^2} dt = -2\int \frac{2t^2+2+3}{(t^2+1)^2} dt = -4\int \frac{dt}{t^2+1} - 6\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+C_1,$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+I_1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C_2,$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=-4\operatorname{arctg}t-3\frac{t}{t^2+1}-3\operatorname{arctg}t+C=-7\operatorname{arctg}t-\frac{3t}{t^2+1}+C.$$

Відповідь: $-7\operatorname{arctg}t-\dfrac{3t}{t^2+1}+C,$ де $t=\dfrac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}.$

Зауваження.

Для раціоналізації інтегралів $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ достатньо першої та третьої підстановок Ейлера.

Дійсно, якщо ax^2+bx+c має дійсні корені, то інтеграл раціоналізується третьою підстановкою Ейлера.

Якщо ж не має дійсних коренів, то ax^2+bx+c має той самий знак, що й a на всій числовій осі, а тому $a>0$ та інтеграл раціоналізується першою підстановкою Ейлера.

Частинні випадки:

- $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}},$ де $\alpha\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N},$ зводиться до попереднього випадку заміною $t=\dfrac{1}{x-\alpha}.$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Розв'язання:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=A\sqrt{7x-10-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Щоб знайти невизначені коефіцієнти, продиференціюємо обидві частини:

$$\frac{x}{\sqrt{7x-10-x^2}}=\frac{A(7-2x)}{2\sqrt{7x-10-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{7x-10-x^2}},$$
$$2x=A(7-2x)+2\lambda,$$
$$x:\quad 2=-2A \quad\Rightarrow\quad A=-1,$$
$$x^0:\quad 0=7A+2\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{7}{2}.$$

Тоді

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=$$
$$=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}=$$
$$=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$$

Відповідь: $-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$

Тригонометричні підстановки

Виділивши повний квадрат у виразі ax^2+bx+c, одержимо один з трьох інтегралів:

Інтеграл	Підстановки, які його раціоналізують
$\int R\left(z,\sqrt{a^2+z^2}\right)dz$	$z=a\,\mathrm{tg}\,t,\quad z=a\,\mathrm{sh}\,t$
$\int R\left(z,\sqrt{a^2-z^2}\right)dz$	$z=a\sin t,\quad z=a\cos t$
$\int R\left(z,\sqrt{z^2-a^2}\right)dz$	$z=\frac{a}{\cos t},\quad z=\frac{a}{\sin t},\quad z=a\,\mathrm{ch}\,t$

Приклад.

Обчислити інтеграл

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}.$$

Зробимо заміну

$$x-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}\sin t.$$

З неї одержимо

$$x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t, \quad dx=\frac{3}{2}\cos t\,dt,$$

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{3}{2}\cos t,$$

$$t=\arcsin\frac{2x-7}{3}.$$

Тоді

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = \int \frac{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t}{\frac{3}{2}\cos t}\frac{3}{2}\cos t\,dt = \int\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t\right)dt =$$

$$=\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}\cos t+C=\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}-\sqrt{7x-10-x^2}+C.$$

Відповідь: $-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$

Контрольні запитання

1. Як інтегруються дробово-лінійні ірраціональності?
2. Що називається диференціальним біномом?
3. Якими підстановками та у яких випадках раціоналізуються диференціальні біноми?
4. Сформулюйте теорему Чебишова.
5. Запишіть підстановки Ейлера.
6. Які тригонометричні підстановки використовуються для інтегрування квадратичних ірраціональностей та у яких випадках?

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Математика в технічному університеті [Електронний ресурс] : підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – Т. 1. – 496 с.
2. Математика в технічному університеті [Електронний ресурс] : підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. – Т. 2. – 504 с.
3. Математика в технічному університеті [Електронний ресурс] : підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – Т. 3. – 454 с.
4. Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад.: В. В. Дрозд, В. А. Жук, Т. В. Маловічко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 213 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Ч.1 – К. Либідь, 1993. – 320 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посібн. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
7. Грималюк В.П. Вища математика: У 2 ч.: навч. посіб. / Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 1. – 376 с.