УДК 534.1+539.3

В.П. Легеза, Д.В. Легеза

УМОВИ ПОРУШЕННЯ "ЧИСТОГО" КОЧЕННЯ ЦИЛІНДРА ВЗДОВЖ БРАХІСТОХРОНИ

Вступ

Запропонована стаття є продовженням досліджень, розпочатих у працях [1–3], в яких побудовою і мінімізацією відповідного функціонала $T[z(x)]$ було вперше визначено диференціальне рівняння *брахістохрони* для циліндра, що перекочується по ній без ковзання.

Задача про "*брахістохрону для циліндра*" є актуальною в теоретичному плані. Її *актуальність* випливає з відповідної *прикладної проблеми.*

Для значної кількості віброгасників, амортизаторів, демпферів і стабілізаторів головним критерієм якості їх функціонування є мінімум переміщень деяких точок несучого об'єкта або мінімум зусиль (моментів) у найбільш небезпечних перерізах, які виникають у процесі його вимушених коливань. Проте існує цілий ряд віброзахисних пристроїв, для яких головним критерієм ефективності їх функціонування є мінімум часу, протягом якого вдається знизити рівень амплітуд вимушених коливань до унормованого [4–6]. У даній статті зазначений критерій використовується для віброзахисних пристроїв коткового типу [7, 8]. У зв'язку з цим виникла проблема визначення форми напрямної кривої циліндричної поверхні, по якій важкий циліндр здійснює спуск за *мінімальний час*. При цьому рух циліндра по напрямній кривій являє собою кочення без ковзання, а сам циліндр є однорідним. Умова "кочення без ковзання" пов'язана з технічними вимогами задач віброзахисту.

У 1696 р. І. Бернуллі вперше поставив таку "*проблему брахістохрони*": знайти форму кривої, по якій намистинка, що перебуває в початковий момент у положенні спокою і прискорюється дією гравітації, спуститься з однієї заданої точки в другу за мінімальний час. У цій задачі припускалось, що намистинка (матеріальна точка) рухається у вертикальній площині та в однорідному гравітаційному полі.

Зазначена "проблема брахістохрони" розглядалась у різних постановках задач. Багато публікацій було присвячено розв'язанню цієї проблеми у випадку руху матеріальної точки по різних просторових поверхнях та в різних силових полях [9–25].

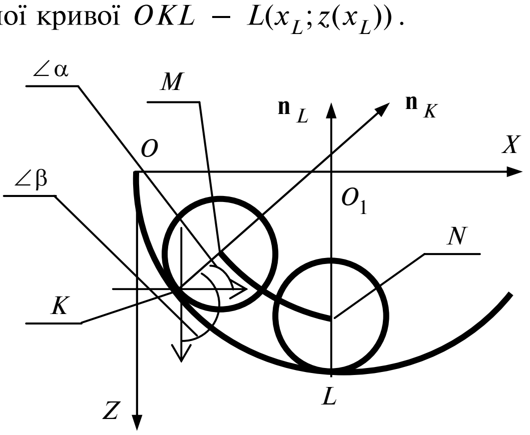
Наступним кроком теоретичного узагальнення "проблеми брахістохрони" є побудова її рівняння для рухомих тіл скінченних розмірів (куль, циліндрів, дисків, колес тощо), що котяться по ній. У статтях [26, 27] розглядаються різні постановки задачі про брахістохрону з коченням по ній тіл довільної форми. У працях [1–3] наведено постановку задачі про брахістохрону та побудовано диференціальне рівняння самої брахістохрони для важкого однорідного циліндра, що котиться по ній без ковзання в точці контакту. Проте для такого випадку не знайдено умов, при яких реалізується саме чисте кочення циліндра, тобто його кочення без проковзування, а також умови відриву від кривої.

Постановка задачі

Мета даної статті – встановити відповідні умови, при яких можливі ефекти порушення чистого кочення циліндра вздовж брахістохрони.

Вихідні положення

У статті припускається, що однорідний циліндр з масою m і радіусом r знаходиться в однорідному гравітаційному полі та починає свій рух з точки O без початкової швидкості, здійснюючи його за рахунок чистого кочення по деякій циліндричній виїмці з напрямною кривою OKL у точку L (рисунок). При цьому крива OKL лежить у вертикальній площині. Центр циліндра знаходиться в точці M. Для подальших перетворень введено прямокутну декартову систему координат OXZ так, як показано на рисунку. Початкова точка руху циліндра – $O(0;0)$, друга визначальна точка шуканої кривої OKL – $L(x_L;z(x_L))$.



Рух однорідного циліндра

Інтегрування диференціального рівняння брахістохрони

У статті [3] було знайдено диференціальне рівняння брахістохрони для циліндра, що перекочується по ній без ковзання, в такому вигляді:

$$(z+\overline{C})[1+(z')^2]-r\sqrt{1+(z')^2}=C_1, \quad z(0)=0, z(x_L)=z_L. \tag{1}$$

Для рівняння (1) граничні умови визначались координатами двох заданих точок кривої: першої $O(0;0)$ і другої $L(x_L;z_L)$ точок контакту циліндра та брахістохрони (див. рисунок).

Важливим фактом є те, що рівняння (1) при $r=0$ перетворюється на відоме рівняння циклоїди [28, 29], що є очевидним при зменшенні розмірів циліндра до розмірів матеріальної точки.

Інтегрування рівняння (1) будемо проводити з використанням спеціальної *параметризації кривої* $z=z(x)$. Параметризацію введемо в такий спосіб $\left(\alpha=\frac{\varphi}{2}\right)$:

$$z'=\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\Rightarrow dx=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}dz, \tag{2}$$

$$z=C_1\sin^2\frac{\varphi}{2}+r\sin\frac{\varphi}{2}-\overline{C}\Rightarrow dz= \\ =\left(C_1\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}r\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi. \tag{3}$$

Підставимо праву частину співвідношення (3) у вираз (2):

$$dx=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\left(C_1\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}r\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\Rightarrow dx= \\ =\left(C_1\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}r\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi. \tag{4}$$

Після інтегрування співвідношення (4) дістанемо вираз для x як функцію параметра φ:

$$x(\varphi)=\frac{C_1}{2}(\varphi-\sin\varphi)-r\cos\frac{\varphi}{2}+C_2, \tag{5}$$

$$z(\varphi)=\frac{C_1}{2}(1-\cos\varphi)+r\sin\frac{\varphi}{2}-\overline{C}. \tag{6}$$

У рівнянні (6) константа $\overline{C}$ відповідає початковим умовам руху циліндра. Константи C_1 і C_2 визначаються координатами тих двох точок площини OXZ $O(0;0)$ і $L(x_L;z_L)$, через які має пройти оптимальна крива $z=z(x)$. Число констант відповідає порядку диференціального рівняння Ейлера–Пуассона [28] в даній варіаційній задачі. Визначимо ці константи.

Виберемо початкове положення циліндра так, щоб центр його мас розміщувався в точці з координатами $(r;0)$, а точка дотику до кривої $z=z(x)$ – у точці $O(0;0)$. Тоді дістанемо, що $\overline{C}=0$. Якщо ж $\overline{C}=\frac{r}{\sqrt{1+(z_0')^2}}=r\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{O(0;0)}\neq$ $\neq 0$, то з рівняння (6) дістанемо $C_1=0$ і розв'язку варіаційної задачі немає. Отже, початковій точці $O(0;0)$ в декартовій системі координат відповідає єдине початкове значення параметра $\varphi=0$ у параметричних рівняннях (5), (6).

З рівняння (5) визначимо сталу C_2. Оскільки шукана крива $z=z(x)$ має проходити через точку $O(0;0)$, що відповідає параметру $\varphi=0$, то $C_2=r$.

Запишемо рівняння брахістохрони в параметричній формі для циліндра, що котиться по ній, із врахуванням визначених вище констант:

$$x(\varphi)=\frac{C_1}{2}(\varphi-\sin\varphi)-r\cos\frac{\varphi}{2}+r, \tag{7}$$

$$z(\varphi)=\frac{C_1}{2}(1-\cos\varphi)+r\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{8}$$

Константу C_1 знайдемо з умови, що крива проходить через точку $L(x_L;z(x_L))$, тобто при деякому значенні параметра $\varphi=\varphi_L$ мають виконуватись такі співвідношення:

$$x_L=\frac{C_1}{2}(\varphi_L-\sin\varphi_L)-r\cos\frac{\varphi_L}{2}+r, \tag{9}$$

$$z_L=\frac{C_1}{2}(1-\cos\varphi_L)+r\sin\frac{\varphi_L}{2}. \tag{10}$$

Із формули (7) з очевидністю випливає, що $C_1>0$. З нелінійної системи рівнянь (9), (10) знайдемо величину параметра φ_L, що відповідає точці $L(x_L; z(x_L))$, та константу C_1, яка має розмірність довжини.

Використовуючи знайдені рівняння (7), (8) для кривої $z = z(x)$, визначимо траєкторію переміщення центра мас циліндра. Запишемо векторне співвідношення, яке пов'язує вектори $\mathbf{OK}$, $\mathbf{OM}$ і $\mathbf{KM} = r\mathbf{n}$:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OK} + \mathbf{KM}.$$

В результаті дістанемо відоме параметричне рівняння циклоїди:

$$x_M(\varphi) = \frac{C_1}{2}(\varphi - \sin\varphi) + r,$$

$$z(\varphi) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\varphi).$$

Отже, *центр мас циліндра у випадку руху циліндра по кривій* (7), (8) *описує циклоїду.*

Умови реалізації руху циліндра без відривів і проковзування

Перевіримо загальну умову реалізації руху циліндра по кривій: радіус кривизни кривої (7), (8) має бути більшим, ніж радіус циліндра.

Радіус кривизни ρ кривої (7), (8) визначимо за відомою формулою

$$\rho = \left| \frac{[(x'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}{z''_{\varphi\varphi} x'_\varphi - z'_\varphi x''_{\varphi\varphi}} \right|. \quad (11)$$

Підставивши у формулу (11) рівняння (7), (8), дістанемо (проміжні перетворення не наведені)

$$\rho = 2C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + r. \quad (12)$$

Через те що $C_1 > 0$ і $\varphi \in [0; 2\pi]$, то загальна умова реалізації руху виконується: $\rho \geq r$.

Після цього встановимо умови реалізації руху циліндра без відривів та проковзування відносно кривої $z = z(x)$.

Запишемо рівняння руху циліндра по кривій (7), (8) із врахуванням реакції $\mathbf{R}$-в'язі в точці K:

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{R} + mg\mathbf{j}, \quad (13)$$

$$J\ddot{\psi} = -r\mathbf{n} \times \mathbf{R}, \quad (14)$$

де $\mathbf{j}$ – орт осі OZ; ψ – кут обертання циліндра навколо осі, що проходить через центр його мас; $\dot{\mathbf{V}}$ – лінійне прискорення центра мас циліндра: $\dot{\mathbf{V}} = (\ddot{x}(\varphi); \ddot{z}(\varphi))$.

З рівняння (13) запишемо проекції реакції $\mathbf{R}$-в'язі на координатні осі OX і OZ, відповідно:

$$R_X = m\left[\left(C_1 \sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_1}{2}\sin\varphi + \frac{r}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2\right], \quad (15)$$

$$R_Z = m\left[\left(\frac{C_1}{2}\sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_1}{2}\cos\varphi - \frac{r}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2\right] - mg. \quad (16)$$

З рівнянь (15) і (16) знайдемо проекції реакції $\mathbf{R}$-в'язі на вектор нормалі $\mathbf{n} = \left(\cos\frac{\varphi}{2}; -\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ і одиничний вектор дотичної $\boldsymbol{\tau} = \left(\sin\frac{\varphi}{2}; \cos\frac{\varphi}{2}\right)$, які позначимо відповідно R_n і R_τ:

$$R_\tau = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau} = m\left[\left(C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)\ddot{\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2\right] - mg\cos\frac{\varphi}{2}, \quad (17)$$

$$R_n = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = m\left(\frac{C_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + mg\sin\frac{\varphi}{2}. \quad (18)$$

З умови чистого кочення циліндра $ds = r d\psi$ (ds – елемент дуги кривої (7), (8)) визначимо співвідношення між диференціалами $d\psi$ і $d\varphi$:

$$ds = \sqrt{1 + (z')^2}dx = \left(C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)d\varphi. \quad (19)$$

Отже, із співвідношення (19) дістанемо

$$d\psi = \frac{1}{r}\left(C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)d\varphi. \qquad (20)$$

З використанням виразу (20) визначимо $\ddot{\psi}$:

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{r}\left[\frac{C_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2 + \left(C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{2}\right)\ddot{\varphi}\right]. \qquad (21)$$

Після деяких перетворень із врахуванням виразів (13) і (21) рівняння (14) набуває такого вигляду:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\frac{4}{3}g - C_1\dot{\varphi}^2}{2C_1 \sin\frac{\varphi}{2} + r}\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (22)$$

Підставимо праву частину співвідношення (22) у вираз (17) для R_τ. В результаті дістанемо

$$R_\tau = -\frac{1}{3}mg\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (23)$$

Проаналізуємо отримані результати. З формули (18) можна визначити умову, при якій буде можливим *відрив циліндра* від кривої — брахістохрони:

$$\left(\frac{C_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + g\sin\frac{\varphi}{2} = 0. \qquad (24)$$

З виразу (24) випливає, що відрив буде можливий у випадку, якщо одночасно виконуватимуться рівності $\dot{\varphi} = 0$ і $\varphi = 0$ або $\dot{\varphi} = 0$ і $\varphi = 2\pi$, через те що $R_n > 0$ для $\forall\varphi \in (0; 2\pi)$.

Проковзування циліндра відносно брахістохрони виникне при такій умові. Нехай коефіцієнт зчеплення між циліндром і кривою в точці K дорівнює $f_{зч}$. Використаємо відоме положення із статики, при якому можливе проковзування циліндра відносно брахістохрони в точці їх контакту:

$$|R_\tau| \le F_{зч}^{\max} = f_{зч} R_n. \qquad (25)$$

Підставивши вирази (18) і (23) в нерівність (25), дістанемо умову, яка визначає можливе кочення циліндра вздовж брахістохрони з проковзуванням:

$$\frac{\frac{1}{3}g\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|}{\left(\frac{C_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{r}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + g\sin\frac{\varphi}{2}} \le f_{зч}. \qquad (26)$$

Наприклад, якщо значення параметра точки контакту на кривій $\varphi = \pi$, то $R_\tau = 0$ і тому в околі зазначеної точки буде спостерігатися проковзування.

Визначення часу швидкодії

Нехай параметр $\varphi = \varphi_L$ відповідає точці $L(x_L; z(x_L))$ кривої $z = z(x)$.

Раніше в працях [1—3] визначено функціонал часу $T[z(x)]$, після мінімізації якого і було виведене рівняння (1):

$$T[z(x)] = \sqrt{\frac{3}{4g}}\int_0^{x_L} \frac{\sqrt{[1+(z')^2]^3} + rz''}{[1+(z')^2]\sqrt{z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \overline{C}}}\,dx, \qquad (27)$$

$$z(0) = 0,\ z(x_L) = z_L.$$

Визначимо значення функціонала $T[z(x)]$ за формулою (27), виходячи з формул (7), (8). Після деяких громіздких перетворень, які тут не наводяться, дістанемо

$$T = \sqrt{\frac{3C_1}{4g}}\varphi_L. \qquad (28)$$

Як випливає з формули (28), час T швидкодії не залежить від радіуса циліндра, а залежить від розміщення точки $L(x_L; z(x_L))$, бо величина φ_L і стала C_1 цілком визначаються по координатах цієї точки із системи рівнянь (9), (10).

Обчислимо, наприклад, час T_{OL} швидкодії при перекочуванні циліндра з точки $O(0;0)$ в точку $L(r+\pi; r+2)$, яка визначається параметром $\varphi_L = \pi$ і для якої $C_1 = 2$. В результаті обчислень за формулою (29) дістанемо

$$T_{OL} = \pi\sqrt{\frac{3}{2g}}. \qquad (29)$$

Висновки

На основі застосування спеціальної параметризації, а саме $z'(x) = \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$, виведене раніше в працях [1—3] диференціальне рівняння (1) допускає квадратуру. Знайдено систему алгебричних параметричних рівнянь, що визначає шукану брахістохрону і має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(\varphi) = \dfrac{C_1}{2}(\varphi - \sin\varphi) - r\cos\dfrac{\varphi}{2} + r, \\ z(\varphi) = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\varphi) + r\sin\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

З використанням виведених рівнянь руху циліндра з реакцією в'язі (13), (14) було показано, що його відриви можливі тільки в точках, де мають місце такі рівності: $\dot{\varphi} = 0$ і $\varphi = 0$ або $\dot{\varphi} = 0$ і $\varphi = 2\pi$. Ефект проковзування циліндра відносно брахістохрони можливий тільки в тому разі, якщо виконується нерівність (26), яка пов'язує поточні параметри точки дотику φ і кутової швидкості $\dot{\varphi}$ з коефіцієнтом зчеплення $f_{зч}$ між циліндром і брахістохроною. У статті також виведено загальну формулу (28) для часу швидкодії – найменшого часу, за який циліндр перекотиться з однієї заданої точки площини в іншу. Цей час не залежить від радіуса циліндра r. Встановлено важливий теоретичний факт: центр мас циліндра при його чистому коченні вздовж брахістохрони описує циклоїду.

Подальші наукові дослідження в цьому напрямку будуть пов'язані з використанням отриманих у даній статті результатів для розробки віброзахисних пристроїв (віброгасників, демпферів, амортизаторів тощо) "найшвидшої дії".

В.П. Легеза, Д.В. Легеза

УСЛОВИЯ НАРУШЕНИЯ "ЧИСТОГО" КАЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ВДОЛЬ БРАХИСТОХРОНЫ

Определено алгебраическое уравнение направляющей линии наибыстрейшего спуска цилиндра в параметрическом виде. С использованием уравнений движения цилиндра с реакцией связи определены условия реализации его чистого качения без отрывов и проскальзывания относительно брахистохроны. Получен важный теоретический результат: центр масс цилиндра при его движении вдоль брахистохроны описывает циклоиду.

V.P. Legeza, D.V. Legeza

THE CONDITIONS OF VIOLATION OF CYLINDER "CLEAN" ROLLING ALONG THE BRACHISTOCHRONE

We obtain the algebraic equation of the directive line of the fastest cylinder descent in the parametrical form. By utilizing the equation of cylinder motion with the binding reaction, we also determine the conditions of the cylinder rolling without slipping and tearing off along the brachistochrone. On the theoretical side, we get a significant theoretical result: a center of the cylinder masses circumscribes the cycloid when it moves along the brachistochrone.

1. *Легеза В.П., Пятецький В.О.* Про диференціальне рівняння напрямної лінії найшвидшого спуску важкого однорідного циліндра // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 77–83.
2. *Легеза В.П., Легеза Д.В.* Про рівняння брахістохрони для однорідного циліндра // Тези доп. на XII Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15–17 травня 2008 р. – К.: НТУУ "КПІ", 2008. – С. 238.
3. *Легеза В.П.* О кривой "наискорейшего спуска" в задаче о качении однородного цилиндра // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 12. – С. 131–138.
4. *Постнов В.А., Калинин В.О., Ростовцев Д.М.* Вибрации корабля. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
5. *Шмырев А.Н., Моренщильдт В.А., Ильина С.Г.* Успокоители качки судов. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 516 с.
6. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock and Vibration. – Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. – 436 p.
7. *Легеза В.П.* Моделі і метод віброзахисту динамічних систем на основі котково-демпфірувальних пристроїв: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – К.: НТУУ "КПІ", 2004. – 38 с.
8. *Легеза В.П.* Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 106–118.
9. *Dunham W.* Journey Through Genius. – New York: Penguin Books, 1991.
10. *Gelfand I.M., Fomin S.V.* Calculus of Variations. Englewood Cliffs. – New York: Prentice-Hall, Inc., 1963.

11. *Erlichson H.* Johann Bernoulli's Brachistochrone Solution Using Fermat's Principle of Least Time // Eur. J. Phys. – 1999. – N 20. – P. 299–304.
12. *Ashby N., Britting W.E., Love W.F., Wyss W.* Brachistochrone with Coulomb Friction // Am. J. Phys. – 1975. – **43**, N 10. – P. 902–906.
13. *Hayen J.C.* Brachistochrone with Coulomb Friction // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2005. – **40**. – P. 1057–1075.
14. *Van der Heijden A.M.A., Diepstraten J.D.* On the Brachistochrone with Dry Friction // Ibid. – 1975. – **10**. – P. 97–112.
15. *Covic V., Veskovic M.* Brachistochrone on a Surface with Coulomb Friction // Ibid. – 2008. – **43**. – P. 437–450.
16. *Vratanar B., Saje M.* On analytical solution of the Brachistochrone Problem in a Non-Conservative Field // Ibid. – 1998. – **33**, N 3. – P. 437–450.
17. *Yamani H.A., Mulhem A.A.* A Cylindrical Variation on the Brachistochrone Problem // Am. J. Phys. – 1988. – **56**, N 5. – P. 467–469.
18. *Palmieri D.* The Brachistochrone Problem, a New Twist to an Old Problem // Undergraduate Honors Thesis. Millersville University of PA, 1996.
19. *Aravind P.K.* Simplified Approach to Brachistochrone Problem // Am. J. Phys. – 1981. – **49**, N 9. – P. 884–886.
20. *Denman H.H.* Remarks on Brachistochrone-Tautochrone Problem // Ibid. – 1985. – **53**, N 3. – P. 224–227.
21. *Venezian G.* Terrestrial Brachistochrone // Ibid. – 1966. – **34**, N 8. – P. 701.
22. *Parnovsky A.S.* Some Generalisations of the Brachistochrone Problem // Acta Physica Polonica. – 1998. – **A 93 Supplement**. – P. 5–55.
23. *Tee G.* Isochrones and Brachistochrones // Neural, Parallel Sci. Comput. – 1999. – **7**. – P. 311–342.
24. *Goldstein H.F., Bender C.M.* Relativistic Brachistochrone // J. Math. Phys. – 1986. – **27**. – P. 507–511.
25. *Scarpello G.M., Ritelli D.* Relativistic Brachistochrone under Electric or Gravitational Uniform Field // Z. Angew. Math. Mech. – 2006. – **86**, N 9. – P. 736–743.
26. *Rodgers E.* Brachistochrone and Tautochrone Curves for Rolling Bodies // Am. J. Phys. – 1964. – **32**, N 4. – P. 249–252.
27. *Ju-Xing Yang, Stork D.G., Galloway D.* The Rolling Unrestrained Brachistochrone // Ibid. – 1987. – **55**, N 9. – P. 844–847.
28. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
29. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Часть первая. – М.: Наука, 1969. – 468 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 травня 2009 року