УДК 517.581

Н.О. Вірченко

РІВНОСТІ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Using the generalized confluent hypergeometric function, we describe a new generalization of integral transforms (Laplace, Stieltjes, the potential theory). Specifically, we study main properties of these new integral transforms (linearity, similarity). We find representations of generalized integral Laplace transforms of the unit and power functions. Some composition relations are proved. Relying on the tables of the classical integral transforms, they permit finding the representations of more composite functions. Parseval-type equalities are proved. These equalities allow calculating new integrals, which haven't been yet described in the scientific literature.

Вступ

Метод інтегральних перетворень є одним із ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання задач математичної фізики, астрофізики, термодинаміки, біотехніки, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, квантової механіки, багатьох проблем прикладного аналізу тощо. Різноманітні застосування методу інтегральних перетворень широко подані в літературі (див., наприклад, [1—6]). Однак існує велика кількість складніших задач, які не можна розв'язати за допомогою відомих класичних інтегральних перетворень. Виникає потреба в запровадженні нових інтегральних перетворень — інтегральних перетворень з узагальненими спеціальними функціями в ядрах, зокрема з узагальненими функціями гіпергеометричного типу.

Постановка задачі

Метою статті є дослідження властивостей нових узагальнень класичних інтегральних перетворень Лапласа, Стілтьєса, теорії потенціалу та ін.

Основні результати

Нові узагальнення класичних інтегральних перетворень здійснюємо за допомогою (τ,β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ [7]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = $$

$$ = \frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c,\tau)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle| zt^{\tau}\right]dt, \quad (1) $$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0; \{\tau,\beta\}\subset R, \tau>0, \tau-\beta<1; B(a,c-a)$ — класична бета-функція, ${}_1\Psi_1$ — гіпергеометрична функція Райта [1]:

$$ {}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i;\alpha_i)_{1,p}\\(b_j;\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| z\right] = $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{p}\frac{\Gamma(a_i+n\alpha_i)}{\Gamma(b_j+n\beta_j)}\frac{z^n}{n!}, \quad (2) $$

де $z\in C;\ a_ib_j\in C; \alpha_i,\beta_j\in R=(-\infty,+\infty); \alpha_i,\beta_j\neq 0;$ $i=1,2,\dots,p;\quad j=1,2,\dots,q;\ 1+\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\geq 0.$

Розглянемо нові інтегральні перетворення:

1) узагальнені інтегральні перетворення Лапласа:

$$ L_{\gamma_1,\gamma_2}\{f(x);y\} = \int_0^{\infty} x^{\gamma_2}e^{-(xy)^{\gamma_1}}f(x)dx, \quad (3) $$

$$ \tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(x);y\} = $$

$$ = \int_0^{\infty} x^{\gamma_2}e^{-(xy)^{\gamma_1}}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x,y)^{\gamma\gamma_1})f(x)dx, \quad (4) $$

де $x>0, \gamma\in C, \gamma_1>0, \gamma_2>0, b\geq 0, f(x)\equiv 0$ при $x<0;\ x^{\gamma_2}f(x)<Me^{s_0x^{\gamma_1}};\ M>0$ і s_0 — сталі при $x>0$.

Зауважимо, що при $\gamma_2=0, \gamma_1=1, b=0$ інтегральне перетворення (4) збігається з класичним інтегральним перетворенням Лапласа

$$ L\{f(x);y\} = \int_0^{\infty} e^{-xy}f(x)\,dx; \quad (5) $$

2) узагальнене інтегральне перетворення Стілтьєса:

$$ P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\} = \tilde{P}_1\{f(u);x\} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^{\infty}\frac{u^{\gamma_2}f(u)}{(x^{\gamma_1}+u^{\gamma_1})^{\gamma_3}}\;{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a_1,\tau),(a_2;\gamma)\\(c,\beta)\end{matrix}\right| - $$

$$-b\left(\frac{u^{\gamma_1}}{x^{\gamma}+u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma_4}\Bigg]du, \qquad (6)$$

$$P_2^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\}=\tilde{P}_2\{f(u);x\}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^{\infty}\frac{u^{\gamma_2}f(u)}{(x^{\gamma_1}+u^{\gamma_1})^{\gamma_3}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a_1,\tau);(a_2,\gamma)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-$$

$$-b\left(\frac{x^{\gamma_1}}{x^{\gamma}+u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma_4}\Bigg]du, \qquad (7)$$

де $\operatorname{Re}a_1>0$, $\operatorname{Re}a_2>0$, $\operatorname{Re}c>0$, $\gamma_i>0$, $i=\overline{1,4}$; $\{\tau,\beta\}\subset R$; $\tau>0$; $\tau-\beta<1$; $b\ge 0$, ${}_2\Psi_1$ — функція вигляду (2).

При $b=0$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=p$ інтегральні перетворення (6), (7) збігаються з класичним перетворенням Стілтьєса:

$$S_p\{f(x);y\}=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{(x+y)^p}dx. \qquad (8)$$

Властивості узагальнених інтегральних перетворень

Для інтегрального перетворення (4) легко перевіряємо властивості.

Лінійність:

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x);y\right\}=\sum_{i=1}^{n}c_ig_i(y), \qquad (9)$$

де $c_i=\mathrm{const}(i=\overline{1,n})$, $g(y)=\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(x);y\}$.

Подібність:

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(ax);y\}=\frac{1}{a^{\gamma_2+1}}\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\left\{f(x);\frac{y}{a}\right\}, \qquad (10)$$

$a=\mathrm{const}>0$.

Знайдемо образи інтегрального перетворення (4) для деяких функцій $f(x)$:

а) для $f(x)=\eta(x)=\begin{cases}1, x>0,\\0, x<0\end{cases}$ маємо

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{\eta(x);y\}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\gamma_1\Gamma(a)}\frac{1}{y^{\gamma_2+1}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle|-b\right]; \qquad (11)$$

б) для $f(x)=x^k$ маємо

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{x^k;y\}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\gamma_1\Gamma(a)}\frac{1}{y^{k+\gamma_2+1}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+k+1}{\gamma_1},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle|-b\right]; \qquad (12)$$

в) для $f(x)=e^{-kx^{\gamma_1}}$ маємо

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{e^{-kx^{\gamma_1}};y\}=\frac{\Gamma(c)}{\gamma_1\Gamma(a)}\frac{1}{(y^{\gamma_1}+k)^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}}}\times$$

$$\times\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle|-b\left(\frac{y^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1+k}}\right)^{\gamma}\right]. \qquad (13)$$

Теорема 1.

Якщо $f(x)\in L(0;+\infty)$, $g(x)\in L(0;+\infty)$, то при умові абсолютної збіжності інтегралів справедлива рівність

$$\int_0^{\infty}u^{\gamma_2}\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(t);u\}g(u)du=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{\gamma_2}\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{g(u);t\}f(t)dt. \qquad (14)$$

Для практичних цілей корисна формула

$$\int_0^{\infty}x^{\mu-1}\tilde{L}_{m,m_{m-1},\gamma}\{e^{-tu}g(t);x\}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle|-b\right]L\{t^{m-1-\mu}g(t);u\}. \qquad (15)$$

Її легко отримати, якщо покласти в (4) $\gamma_2=$ $=m-1,\gamma_1=m, f(t)=e^{-tu}g(t)$. Очевидно, що формулу (15) зручно використовувати для обчислення інтегралів, що стоять зліва в (15), застосовуючи відому таблицю перетворення Лапласа [2].

Наприклад:

$$\int_0^{\infty}x^{\mu-1}\tilde{L}_{m,m_{m-1},\gamma}\{t^{\nu+\mu-m}e^{-(a+u)t};x\}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(\nu)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle|-b\right](u+a)^{-\nu};$$

$$\int_0^{\infty}x^{\mu-1}\tilde{L}_{m,m_{m-1},\gamma}\{t^{\mu+\nu-m}e^{-tu}(t+a)^{-1};x\}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\left(\frac{\mu}{m},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-b\right]\Gamma(\nu+1)a^{\nu}e^{\alpha u}\Gamma(-\nu;\alpha u);$$

$$\int_0^{\infty}x^{\mu-1}\tilde{L}_{m,m_{m-1},\gamma}\{t^{\mu-m+1}e^{-tu}\cos\alpha t;x\}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\left(\frac{\mu}{m},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-b\right]u(u^2+a^2)^{-1}.$$

Теорема 2. Для узагальнених інтегральних перетворень (6), (7) при умові абсолютної збіжності інтегралів виконується рівність типу Парсеваля:

$$\int_0^{\infty}x^{\gamma_2}\tilde{P}_1\{f(t);x\}g(x)dx=\int_0^{\infty}x^{\gamma_2}\tilde{P}_2\{g(t);x\}f(x)\,dx\,.\qquad(16)$$

Теорема 3. При умовах існування та абсолютної збіжності інтегралів (3), (4), (6), (7) справедливі такі композиційні співвідношення:

$$L_{\gamma_1\gamma_2}\{\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{g(u);x\};y\}=$$

$$=\frac{1}{\gamma_1}\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right)P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\{g(u);y\},\qquad(17)$$

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{L_{\gamma_1,\gamma_2}\{g(u);x\};y\}=$$

$$=\frac{1}{\gamma_1}\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right)P_2^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\{g(u);y\}.\qquad(18)$$

Доведення. Використовуючи рівності (3), (4) та абсолютну збіжність інтегралів, матимемо

$$L_{\gamma_1\gamma_2}\{\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{g(u);x\};y\}=\int_0^{\infty}x^{\gamma_2}e^{-(xy)^{\gamma_1}}\left(\int_0^{\infty}u^{\gamma_2}e^{-(xu)^{\gamma_1}}\times\right.$$

$$\left.\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(xu)^{\gamma\gamma_1})g(u)du\right)dx=\int_0^{\infty}u^{\gamma_2}g(u)\times$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}x^{\gamma_2}e^{-x\gamma_2(y^{\gamma_1}-u^{\gamma_1})}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(xu)^{\gamma\gamma_1}dx\right)du=$$

$$=\frac{1}{\gamma_2}\int_0^{\infty}\frac{u^{\gamma_2}}{(y^{\gamma_1}+u^{\gamma_1})^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}}}g(u)\times$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}e^{-z}z^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-b\left(\frac{zu^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1}+u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma}\right)dz\right)du=$$

$$=\frac{1}{\gamma_1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{u^{\gamma_2}}{(y^{\gamma_1}+u^{\gamma_1})^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}}}g(u)\times$$

$$\times\,{}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1};\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-b\left(\frac{u^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1}+u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma}\right]du=$$

$$=\frac{1}{\gamma_1}\Gamma\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}\right)\mathrm{P}_1^{\gamma_1,\gamma_2,\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1},\gamma}\{g(u);y\},$$

що і доводить формулу (17). Доведення формули (18) аналогічне.

Теорема 4. При існуванні інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність

$$\int_0^{\infty}\tilde{L}_m\{f(x);y\}dy=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\left(\frac{1}{m};\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-b\right]\times$$

$$\times\int_0^{\infty}x^{m-2}f(x)dx.\qquad(19)$$

Доведення. Проінтегруємо обидві частини рівності

$$\tilde{L}_m\{f(x);y\}=$$

$$=\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-x^my^m}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^my^m)^{\gamma})f(x)dx$$

по змінній y в проміжку від 0 до ∞:

$$\int_0^{\infty}\tilde{L}_m\{f(x);y\}dy=$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-x^my^m}f(x)\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^my^m)^{\gamma})dx\right]dy=$$

$$=\int_0^{\infty}x^{m-1}f(x)\left[\int_0^{\infty}e^{-x^my^m}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^my^m)^{\gamma})dy\right]dx=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\left(\frac{1}{m},\gamma\right)\\(c,\beta)\end{matrix}\right|-b\right]\int_0^{\infty}x^{m-2}f(x)\,dx.$$

Якщо в (19) покласти $m = 1$, $f(x) = e^{-xy} g(x)$, то одержимо цікаву формулу для обчислення інтегралів:

$$\int_0^\infty \tilde{L}_m\{e^{-xu} g(x); y\} dy =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a,\tau);(1,\gamma) \\ (c,\beta) \end{matrix} \middle| -b \right] L\left\{ \frac{g(x)}{x}; u \right\}. \quad (20)$$

Використовуючи (20) та відому таблицю перетворень Лапласа L, легко знайти значення інтегралу в лівій частині рівності для різних значень функцій $g(x)$.

Наприклад, покладемо у (20)

$$g(x) = x \sin \alpha x \sin \beta x,$$

тоді, врахувавши рівність [2]

$$L\{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x; u\} = \frac{2\alpha\beta u}{[u^2 + (\alpha+\beta)^2][u^2 + (\alpha-\beta)^2]},$$

матимемо

$$\int_0^\infty \tilde{L}\{x e^{-xu} \sin \alpha x \cdot \sin \beta x; y\} dy = \frac{2\alpha\beta\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \times$$

$$\times {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a;\tau);(1;\gamma) \\ (c;\beta) \end{matrix} \middle| -b \right] \frac{u}{[u^2 + (\alpha+\beta)^2][u^2 + (\alpha-\beta)^2]}.$$

Теорема 5. При існуванні інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність типу Парсеваля

$$\int_0^\infty x^{m-1} L_m\{f(y); \sqrt[m]{x^m + z^m}\} \tilde{L}_m\{g(u); x\} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)} L_m\{f(y) \tilde{\mathrm{P}}_{m,1}\{g(u); y\}; z\}, \quad (21)$$

де

$$\tilde{\mathrm{P}}_{m,1}\{f(x); y\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^m + y^m} f(x) {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a,\tau);(1,\gamma) \\ (c,\beta) \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{x^{m_1}}{x^m + y^m} \right)^\gamma \right] dx.$$

Доведення. Врахувавши, що

$$L_m\{e^{-y^m z^m} f(y); x\} = L_m\{f(y) l \sqrt[m]{x^m + z^m}\},$$

одержимо

$$\int_0^\infty x^{m-1} L_m\{f(y); \sqrt[m]{x^m + z^m}\} \tilde{L}_m\{g(u); x\} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{m\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y^m z^m} f(y) \tilde{\mathrm{P}}_{m,1}\{g(u); y\} dy,$$

згадавши (3), матимемо (21).

Висновки

Нові узагальнення інтегральних перетворень відкривають більші можливості для використання методу інтегральних перетворень для розв'язання нових задач практичної математики.

Враховуючи перспективу одержаних наукових результатів, плануємо і далі досліджувати властивості нових узагальнених інтегральних перетворень, розширити область застосування їх для розв'язання складніших практичних задач.

1. *Kilbas A.A., Saigo M.H.* Transforms. – London: Chapman and Hall / CRC, 2004. – 390 p.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
3. *Вірченко Н.О.* Парні (N-арні) інтегральні рівняння. – К.: ТОВ "Задруга", 2009. – 476 с.
4. *Debnath L., Bhatta D.* Integral Transforms and Their Applications. – London: Chapman and Hall / CRC, 2007. – 688 p.
5. *Sneddon I. N.* The Use of Integral Transforms. – New York: MsGraw-Hill Inc., 1972. – 544 p.
6. *Трантер К.* Интегральные преобразования в математической физике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1957. – 316 с.
7. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its applications // Intern. J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 1999. – **9**, N 2. – P. 101–108.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 травня 2011 року