УДК 004.942

*КАЛИНОВСКИЙ Я.А.,*
*БОЯРИНОВА Ю.Е.*

# НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИЗОМОРФИЗМА КОММУТАТИВНЫХ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ

В работе рассматриваются некоторые необходимые и достаточные условия изоморфизма коммутативных гиперкомплексных числовых систем, которые позволят построить эффективные алгоритмы построения классов изоморфизмов гиперкомплексных числовых систем.

In this paper some necessary and sufficient conditions for the isomorphism of commutative hypercomplex number systems that will build effective algorithms of isomorphism classes of hypercomplex number systems.

## Введение

Существует бесконечное множество гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), которые отличаются размерностью и законами композиции базисных элементов. Свойства разных ГЧС существенным образом отличаются друг от друга, что влияет на использование этих систем для математического моделирования. Поэтому так важна задача классификации ГЧС [1-3].

Линейное преобразование базиса какой-либо ГЧС приводит к базису другой системы, которая отличается от исходной. Такие системы называются изоморфными. В общем случае не каждые две ГЧС изоморфны.

Отношение изоморфности разбивает всё множество ГЧС одной размерности на некоторое количество классов, которые называются классами изоморфизмов [4,5]. Классификация систем по этому признаку распределяет все системы на классы очень близких, а по сути эквивалентных по свойствам, ГЧС. Такое распределение предполагает последовательный просмотр всевозможных коммутативных ГЧС фиксированной размерности и для каждой просматриваемой ГЧС определить, не принадлежит ли она одному из уже построенных классов изоморфизма, или является первым представителем нового класса изоморфизмов. Для выполнения такой процедуры необходимо последовательно для каждого уже построенного класса изоморфизмов решить вопрос об изоморфизме рассматриваемой ГЧС представителю класса. Так как это занимает много времени, то очень важно найти простые условия изоморфизма двух ГЧС. В данной работе эта проблема решается с привлечением представлений экспоненты.

## Изоморфизм ГЧС

При изучении свойств ГЧС часто возникает вопрос изоморфности двух ГЧС. Формально эта задача имеет следующий вид.

Пусть заданы две канонические ГЧС размерности $n$ с базисами $e=(e_1,...,e_n)$ и $f=(f_1,...,f_n)$ соответственно $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$. Их таблицы умножения :

$$e_i \cdot e_j = 0 \cup \gamma_{ij}^k e_k, \quad i,j=1,...,n\,;\ k\in\{1...n\} \qquad (1)$$

и

$$f_i \cdot f_j = 0 \cup \gamma_{ij}^k f_k, \quad i,j=1,...,n\,; \quad k\in\{1...n\} \qquad (2)$$

Матрицу $L=\left(l_{ij}\right)_{i,j=1,...,n}$, которая связывает базисы этих систем:

$$e_i=\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \qquad (3)$$

называют оператором изоморфизма систем $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$.

Тогда условие изоморфизма заданных систем $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ сводится к существованию нетривиального вещественного решения системы квадратичных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \cdot \sum_{j=1}^{n} l_{sj} f_j = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j \bigcup 0 \qquad (4)$$
$$i,s=1,...,n\,; \quad k\in\overline{1,...,n}$$

при условии:

$$\det(L)=\det\left(l_{ij}\right)_{i,j=1,...,n} \neq 0 \qquad (5)$$

Система уравнений (4) – это результат подстановки (3) в таблицу умножения (1). Это система квадратичных уравнений относительно $n^2$ переменных. Она состоит из $\frac{n^2(n+1)}{2}$ уравнений. Решение таких систем вызывает значительные затруднения даже при использовании таких мощных систем аналитических вычислений, как Maple, Mathematica и др. При использовании системы Maple успешно решаются системы уравнений для $n = 3$. Уже для $n = 4$ время решения увеличивается до многих часов, что совершенно недопустимо при решении задачи построения классов изоморфизмов ГЧС, где необходимо решать большое количество систем квадратичных уравнений.

Приведенные резоны определяют актуальность исследований в направлении разработки таких методов установления изоморфизма между ГЧС, которые не требуют решения систем вида (4). Или хотя бы значительно уменьшают количество таких систем.

### Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

Поскольку в работе используется представления экспонент в ГЧС, то будут рассмотрены основные положения метода построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений, которые подробно изложены в [5].

Пусть рассматривается ГЧС $\Gamma(e,n)$ размерности $n$ с базисом $e = (e_1,...,e_n)$. В дальнейшем обозначаться будут гиперкомплексные числа большими латинскими буквами:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \, ; M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i \qquad (6)$$

а вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел- большими латинскими буквами с чертой:

$$\overline{X} = (x_1,...,x_n)^T \, ; \overline{M} = (m_1,...,m_n)^T \qquad (7)$$

Представление экспоненты в системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, есть частное решение гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения:

$$\dot{X} = MX \qquad (8)$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon \qquad (9)$$

где $\varepsilon$ - единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (8) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом:

$$\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)^T \qquad (10)$$

а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа $MX$, можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы М размерами $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа $M$, на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X} \qquad (11)$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (8) превратится в систему из $n$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X} \qquad (12)$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ матрицы $\mathrm{M}$, то есть решить характеристическое уравнение

$$\det(\mathrm{M} - \lambda E) = 0 \qquad (13)$$

Таким образом, характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ будут зависеть от гиперкомплексного числа $M$.

После этого нужно построить общее решение, зависящее от $n^2$ произвольных постоянных, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от $n$ свободных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить соответствующую систему линейных уравнений [1], после чего можно получить общие решения (12), зависящие от $n$ произвольных постоянных - $\overline{X}(t, C_{1,...,} C_n)$. Значения произвольных постоянны х устанавливаются с помощью начального условия (9). Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа $M$:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i \qquad (14)$$

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений довольно легко формализуется для построения алгоритмов и программ в системах символьных вычислений.

## Нормальная форма представления экспоненты

В общем случае множество корней $\lambda_1,...,\lambda_n$ характеристического уравнения имеет $n$ корней и может состоять из следующих подмножеств:

1.Подмножество однократных вещественных корней $\lambda_i \in R$; в представлении экспоненты ему соответствует слагаемое вида

$$x_i = \bar{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i .$$

2.Подмножество сопряженных пар комплексных корней $\lambda_{i,} \lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i \in C$ .

Обычно при решения систем линейных дифференциальных уравнений для пары комплексно сопряженных корней частное решение берется в виде:

$$x = e^{\operatorname{Re}(\lambda t)}(C_1 \cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) + C_2 \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)).$$

В данной работе для записи решения не будет применяться формула Эйлера, так же как и представление вещественной экспоненты через гиперболические функции

$$e^{\varphi} = ch\varphi + sh\varphi ,$$

так как это значительно усложняет структуру формулы представления и затрудняет ее анализ. Вместо этого для пары комплексно-сопряженных корней компоненты представления записываются в виде двух слагаемых:

$$x_i = \bar{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i ;$$

$$x_{i+1} = \bar{x}_{i+1} \cdot e_{i+1} = \bar{C}_i e^{\bar{\lambda}_i} e_{i+1} ,$$

но произвольные константы здесь уже не вещественные, а комплексные: $C_i \in C$ .

3. Подмножество вещественных кратных корней.

Пусть кратность одного из наборов вещественных кратных корней равна $s$ :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = ...\lambda_{i+s}$$

Тогда, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, этой совокупности корней будут соответствовать $s$ компонентов общего решения вида:

$$x_{i+j} = \bar{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + ... + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j};\ j = 1,...,s ,$$

где $P_k^j$ - полином $k$-ой степени от переменных $m_1,...,m_n$ . Вид этих полиномов определяется из определяющего уравнения ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

4. Подмножество кратных пар комплексно-сопряженных корней.

Пусть кратность одного из наборов кратных пар комплексно-сопряженных корней равна $s$ . Тогда всего в этом наборе будет $2s$ корней:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3} = ... = \lambda_{i+2s-1}\ ;\ \lambda_{i+2} = ... = \lambda_{i+2s} = \bar{\lambda}_{i+1} .$$

Тогда этой совокупности корней соответствует $2 \cdot s$ компонентов общего решения вида:

$$\begin{aligned} x_{i+j} &= \bar{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + ... + P_s^j) e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j} ; \\ x_{i+j+1} &= \bar{x}_{i+j+1} e_{i+j+1} = \\ &= (\bar{P}_0^j + \bar{P}_1^j + ... + \bar{P}_s^j) e^{\bar{\lambda}_{i+j}} e_{i+j+1} \end{aligned} ;\ j = 1,3,...,2s-1 .$$

Здесь уже будут полиномы с комплексными коэффициентами.

Таким образом, представление экспоненты будет включать в себя сумму $n$ слагаемых, каждое из которых – одночлен, у которого в первых двух случаях три сомножителя: вещественная или комплексная произвольная постоянная, экспонента от вещественного или комплексного характеристического корня и базисный элемент. В третьем и четвертом случаях – четыре сомножителя. К трем предыдущим сомножителям добавляется полином $(s-1)$-ой степени с вещественными или комплексными переменными. Такую форму представления экспоненты будем называть нормальной формой представления.

Для примера приведем оба вида представлений для некоторых ГЧС.

1. Система триплексных чисел $T$ .

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $(e_3 - e_1/2)$ | $-e_2$ |
| $e_3$ | $e_e$ | $-e_2$ | $e_1$ |

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = m_1 + m_3;\ \lambda_{2,3} = m_1 - m_3 \pm i m_2;$$

Ненормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=\frac{1}{2}(e^{m_1+m_3}+e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_1+$$
$$+e^{m_1-m_3}\sin m_2\cdot e_2+\frac{1}{2}(e^{m_1+m_3}-e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_3$$

Нормализованное представление:

$$Exp\ (m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=$$
$$\frac{1}{2}(e_1+e_3)e^{\lambda_1}+\frac{1}{4}(e_1-e_3-2ie_2)e^{\lambda_2}+$$
$$\frac{1}{4}(e_1-e_3+2ie_2)e^{\overline{\lambda}_2}=$$
$$=C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\overline{C}_2e^{\overline{\lambda}_2}$$

2. Система вещественно-комплексных чисел $R\oplus C$.

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | 0 | 0 |
| $e_2$ | 0 | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_3$ | 0 | $e_3$ | $-e_1$ |

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=m_1;\ \lambda_{2,3}=m_2\pm im_3;$$

Ненормализованное представление:

$$Exp(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=$$
$$=e^{m_1}e_1+e^{m_2}\left(\cos m_3\cdot e_2+\sin m_3\cdot e_3\right)$$

Нормализованное представление:

$$Exp\,(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=$$
$$=e_1e^{\lambda_1}+\frac{1}{2}(e_2-ie_3)e^{\lambda_2}+\frac{1}{4}(e_2+ie_3)e^{\overline{\lambda}_2}=$$
$$C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\overline{C}_2e^{\overline{\lambda}_2}$$

## 5. Действие оператора изоморфизма на представление экспоненты

Для изоморфных ГЧС для операций сложения и умножения образ результата выполнения этих операций равен результату выполнения операции над операндами. Поэтому любое выражение с конечным числом гиперкомплексных операций преобразуется этим же линейным преобразованием.

Представление экспоненты через степенной ряд содержит счетное число операций. Однако и в этом случае, как будет показано ниже, изоморфное преобразование представления экспоненты от числа в одной ГЧС приведет к представлению экспоненты от образа этого числа в другой ГЧС.

Действительно, пусть даны две изоморфные ГЧС $\Gamma_1(e,n)\simeq\Gamma_2(f,n)$ и линейное изоморфное преобразование $L$:

$$\Gamma_1(e,n)\simeq\Gamma_2(f,n) \tag{15}$$

и

$$L:e_k=\sum_{j=1}^{n}l_{kj}f_j;\ \ k=1,...,n \tag{16}$$

Посмотрим, во что превратится число $X=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in\Gamma_1(e,n)$ при переходе к системе $\Gamma_2(f,n)$ с помощью изоморфизма $L$:

$$\begin{aligned}&X=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\Leftrightarrow\\&x_1(l_{11}f_1+l_{12}f_2+...+l_{1n}f_n)+\\&+x_2(l_{21}f_1+l_{22}f_2+...+l_{2n}f_n)+...\\&...+x_n(l_{n1}f_1+l_{n2}f_2+...+l_{nn}f_n)=\\&=(x_1l_{11}+x_2l_{21}+...+x_nl_{n1})f_1+\\&+(x_1l_{12}+x_2l_{22}+...+x_nl_{2n})f_2+\\&+...+(x_1l_{1n}+x_2l_{2n}+...+x_nl_{nn})f_n=\\&=y_1f_1+...+y_nf_n\in\Gamma_2(f,n)\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$y_i=x_1l_{1i}+x_2l_{2i}+...+x_nl_{ni} \tag{18}$$

Тогда

$$\overline{Y}=L^T\overline{X} \tag{19}$$

то есть компоненты гиперкомплексного числа $Y\in\Gamma_2(f,n)$ (вектор-столбец $\overline{Y}$) получаются умножением слева вектор-столбца $\overline{X}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования $L^T$.

Значит, если к экспоненте от гиперкомплексного числа $X$ в ГЧС $\Gamma(e,n)$ применить линейное преобразование изоморфизма $L$, то получится экспонента от гиперкомплексного числа $Y\in\Gamma_2(f,n)$, являющегося образом числа $X$:

$$Exp(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\overset{L}{\Leftrightarrow}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y^k}{k!}=Exp(Y)\in\Gamma_2(f,n) \tag{20}$$

Таким образом, подвергая изоморфному преобразование экспоненту в одной ГЧС, можно получить экспоненту в изоморфной ГЧС от чисел-образов. То же самое можно сказать и о представлениях экспонент, поскольку их построение по степенному ряду даст единственное представление.

Тогда главный результат состоит в следующем: если есть две изоморфные системы (15) и их изоморфизм (16), то изоморфное преобразование представления экспоненты в одной из ГЧС есть представление экспоненты в другой ГЧС.

## Набор корней характеристического уравнения и изоморфизм ГЧС

Если гиперкомплексная числовая система $\Gamma_1(e,n)$ является прямой суммой $k$ числовых систем $\Gamma_{1i}$:

$$\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} \Gamma_{1i}, \qquad (21)$$

то нормальная форма представления ее экспоненты состоит из нормальных форм экспонент каждой из входящих подсистем. То есть число слагаемых равно числу корней характеристического уравнения, которое равно, в свою очередь, размерности всей ГЧС. Каждое слагаемое определяется, прежде всего, одним из корней характеристического уравнения.

При переходе линейным преобразованием от базиса $e$ системы $\Gamma_1(e,n)$ к изоморфной ей системе $\Gamma_2(f,n)$, корни характеристического уравнения, входящие в слагаемые экспоненты системы $\Gamma_1(e,n)$ будут изменятся. Так как эти корни являются функциями от компонентов числа $\overline{M}$, то они будут меняться по (17), то есть умножением слева вектор–столбца $\overline{M}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования $L^T$. Значит, корни характеристического уравнения преобразуются линейно. А это означает, что их тип не меняется: разные вещественные корни переходят в разные вещественные, разные комплексные в разные комплексные, одинаковые корни – в одинаковые, вещественные не могут преобразоваться в комплексные и наоборот. Действительно, уравнение (13) можно представить в виде

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)...(\lambda-\lambda_n)=0 \qquad (22)$$

где $\lambda_i$, $i=1,...,n$ – корни характеристического уравнения. Поскольку они зависят от компонентов $\overline{M}$, то линейное преобразование их не меняет типа. А это означает, что нормальная форма экспоненты системы $\Gamma_2(f,n)$ имеет такую же структуру, что и экспонента в системе $\Gamma_1(e,n)$.

Если базис системы $\Gamma_1(e,n)$ преобразовать другим линейным преобразованием, то получится система $\Gamma_3(g,n)$, изоморфная $\Gamma_1(e,n)$:

$$\Gamma_3(g,n) \simeq \Gamma_1(e,n)$$

и, ввиду транзитивности отношения изоморфизма, получаем:

$$\Gamma_3(g,n) \simeq \Gamma_2(f,n).$$

Таким образом, преобразуя всевозможными невырожденными линейными преобразованиями какой-либо базис, которому соответствует фиксированный набор корней характеристического уравнения, можно получить весь класс изоморфизмов. То есть данному классу изоморфизмов будет соответствовать один и только один набор корней характеристического уравнения.

К сожалению, обратное утверждение неверно – одному и тому же набору корней могут соответствовать различные неизоморфные ГЧС. Это может произойти в том случае, когда в составе корней характеристического уравнения есть кратные вещественные или (и) комплексные корни кратности, большей 2. Корням такой кратности соответствуют несколько классов изоморфизмов неразложимых ГЧС, а кратности 2 соответствует только один класс изоморфизмов системы дуальных чисел $D$ с таблицей умножения:

| $D$ | $e_1$ | $e_2$ |
|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $0$ |

Кратности 3 соответствуют 2 класса изоморфизмов. Таблицы умножения представителей классов приведены ниже.

| $\Gamma_{31}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $0$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $0$ | $0$ |

| $\Gamma_{32}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_3$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $0$ | $0$ |

Кратности 4 будут соответствовать 6 классов изоморфизмов. Таблицы умножения представителей классов приведены ниже.

| $\Gamma_{41}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_1$ | $e_4$ | $-e_3$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_4$ | $0$ | $0$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $-e_3$ | $0$ | $0$ |

| $\Gamma_{42}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ |

| $\Gamma_{43}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_3$ | 0 | 0 |
| $e_3$ | $e_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $e_4$ | $e_4$ | 0 | 0 | 0 |

| $\Gamma_{44}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_4$ | 0 | 0 |
| $e_3$ | $e_3$ | 0 | $e_4$ | 0 |
| $e_4$ | $e_4$ | 0 | 0 | 0 |

| $\Gamma_{45}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_4$ | 0 | 0 |
| $e_3$ | $e_3$ | 0 | $-e_4$ | 0 |
| $e_4$ | $e_4$ | 0 | 0 | 0 |

| $\Gamma_{46}$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_4$ | $e_4$ | 0 |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_4$ | 0 | 0 |
| $e_4$ | $e_4$ | 0 | 0 | 0 |

В обоих ГЧС характеристические уравнения будут иметь трехкратные корни $\lambda_{1,2,3} = m_1$. В ГЧС $\Gamma_{41}$ уравнение имеет двукратную пару комплексно-сопряженных корней:

$$\lambda_{1,2} = m_1 \pm im_2 ; \lambda_{3,4} = m_1 \pm im_2 .$$

Остальные ГЧС имеют вещественные четырехкратные корни $\lambda_{1,2,3,4} = m_1$. Поэтому, судя по характеристическим корням, всегда можно утверждать, что система $\Gamma_{41}$ не изоморфна ни одной из остальных систем и обратно. Но об изоморфизме в совокупности систем $\Gamma_{42}$, $\Gamma_{43}, \Gamma_{44}, \Gamma_{45}, \Gamma_{46}$ только по характеристическим корням ничего сказать нельзя. Использованием других методов, установлено, что в этой совокупности нет ни одной хотя бы пары изоморфных систем.

Если кратность характеристических корней ГЧС равна ее размерности, то ГЧС неизоморфна никакой прямой сумме ГЧС низших размерностей, ибо в противном случае она бы имела нормальную форму представления экспоненты совершенно другой структуры. Если имеется еще одна ГЧС с такими же свойствами, то судить об их изоморфизме только по виду наборов характеристических корней нельзя. Для решения этого вопроса необходимы дальнейшие исследования.

## Выводы

Пусть количественный состав корней характеристического уравнения (13) по всем подмножествам типов: вещественных разных, пар комплексно-сопряженных, кратных вещественных по их кратностям и кратных пар комплексно-сопряженных корней также по их кратностям называется *типом набора корней.* Тогда, можно сформулировать условия изоморфности пар ГЧС одной размерности.

1) Если *тип набора корней* одной ГЧС отличается хотя бы в одном компоненте от *типа набора корней* другой ГЧС, то эти ГЧС являются неизоморфными. Это условие является достаточным, но не необходимым, так как существуют пары ГЧС с одинаковыми *типами наборов корней*, у которых есть кратные корни, но вопрос об изоморфизме которых остается открытым.

2) Если в наборе корней пары ГЧС отсутствуют корни с кратностями выше второй, то необходимым и достаточным условием их изоморфности является совпадение их *типов наборов корней.*

3) Для пары ГЧС в случае совпадения *типов наборов корней*, в которых имеются корни кратности выше второй, необходимым и достаточным условием изоморфности является существование обратимого линейного преобразования, связывающего базисы этих ГЧС.

## Список литературы


1. Olariu S. Complex numbers in N dimensions // ELSEVIER Science B.V. 2002. – P.242
2. Petersson H.P. The classification of two-dsmensional nonassociative algebras // RosultMath. – 2000. – Vol. 37. – P. 120–154.
3. Lounesto P. Octonions and triality // Advances in Applied Clifford algebras –2001. –№.2. –191–213p.
4. Khosravi B. The Number of Isomorphism Classes of Finite Groups with the set of Order Components of $C_4(g)$ // Applicable Algebra in Engeeniring, Communication and Computing. –2005. – Vol. 15. –P. 349–359.
5. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. – К.: Инфодрук, 2010.– 388с.