МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

К. М. Рудаков

Числові і аналітичні методи аналізу динаміки і міцності машин та стійкості руху

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра за освітньою програмою «Динаміка і міцність машин» спеціальності 131 «Прикладна механіка»

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент: Солодей І. І., д.т.н., професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА

Відповідальний редактор: Крищук М. Г. д.т.н., професор, професор КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.) за поданням Вченої ради Механіко-машинобудівного інституту (протокол № № 6 від 31.01.2022 р.)

Рудаков К.М.

Числові і аналітичні методи аналізу динаміки і міцності машин та стійкості руху : Посібник. – К.: НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського", 2022. – 120 с.

Розглядаються основи моделювання геометрично і фізично нелінійних процесів деформування ізотропних матеріалів (металів), чисельні методи та алгоритми чисельного розв'язування крайових задач механіки деформівного твердого тіла з великими та необоротними деформаціями. На такій основі розв'язується питання стійкості деформування.

Для студентів технічних вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю "Прикладна механіка". Може бути корисним викладачам, аспірантам, науковим працівникам та інженерам, які застосовують методи математичного моделювання для чисельних розрахунків на ЕОМ напружено-деформованого стану елементів конструкцій та машин.

Реєстр № НП 21/22-532. Обсяг 5.3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, М. Київ, 03056
https://kpi.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Передмова

Явище втрати міцності, стійкості руху або геометричної форми технічних систем є дуже небезпечною із-за практично миттєвої реалізації. Імітаційні розрахунки таких можливих ситуацій є актуальними та складними, зазвичай проводяться із застосуванням ЕОМ, потребують фахового опанування.

Дисципліна "Числові і аналітичні методи аналізу динаміки і міцності машин та стійкості руху" є відносно новою, оскільки з’явилася в навчальних планах здобувачів ступеня магістра за освітньою програмою "Динаміка і міцність машин" спеціальності 131 "Прикладна механіка" лише у 2020 році. Її наповнення ще не можна вважати усталеним, тому ця книга подається як підручник, а не посібник. Вона містить основні відомості з теоретичної частини дисципліни.

Проблему визначення стійкості руху технічних систем можна розділити на два напрямки. Перший розглядає систему зі зосередженими умовно жорсткими об’єктами, а другий – з не жорсткими. Математична формалізація та розвиток першого напрямку є здобутком Олександра Михайловича Ляпунова (1857-1918 рр.) та його послідовників. Другий напрямок вважає технічну систему такою, що містить об’єкти, яки під впливом навантаження деформуються. При цьому можливі наступні ситуації втрати стійкості руху: при коливаннях, при квазістатичному навантаженні з відсутністю необоротних деформацій (пружна втрата стійкості форми) та внаслідок локалізації необоротних деформацій (локальна втрата стійкості деформування). Теорія першого напрямку фактично викладалася в дисципліні "Теорія коливань та стійкості руху" в діючій бакалаврській програмі. Теоретичною основою останніх двох випадків є теорія деформування при великих деформаціях/переміщеннях, яка зовсім не викладалася здобувачам ступенів бакалавра та магістра за освітньою програмою "Динаміка і міцність машин". Саме тому ця теорія і є основною частиною підручника.

Для розв’язування крайових задач, пов’язаних зі втратою стійкості механічних систем з елементами, що деформуються, використовують сучасний метод скінченних елементів (МСЕ). Оскільки в Україні дозволено мобільне навчання за магістерськими програмами, тобто можна поступати до магістратуру КПІ ім. Ігоря Сікорського з інших ВНЗ України, то Додатки 1, 2 та 3, які присутні в цієї книзі, дозволяють магістрантам ліквідувати деякі прогалини у знаннях МСЕ, якщо вони цей метод в програмі бакалавра не вивчали.

Отже, ця дисципліна має математичні моделі, які реалізуються у комп’ютерних програмних комплексах із застосуванням МСЕ.

Формульні частини викладеного матеріалу були знайдені у різних наукових виданнях (статтях та монографіях), посібниках, підручниках та навіть у Help програмних комплексів, тобто наукової новизни ця книга не має. Але в ній вперше проблема моделювання втрати стійкості механічних систем з елементами, що деформуються, висвітлюється у достатній повноті, комплексно.

Метою навчальної дисципліни "Числові і аналітичні методи аналізу динаміки і міцності машин та стійкості руху" є продовження формування у майбутніх фахівців з динаміки та міцності машин систематизованих знань щодо методів та алгоритмів для наближеного розв’язування крайових задач динаміки, міцності та стійкості руху машин й елементів конструкції із застосуванням ЕОМ.

Зміст

Розділ 1

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ТЕОРІЮ СТІЙКОСТІ РУХУ

1.1. Вступ

Одне з важливих питань, яке виникає при аналізі динаміки і міцності машин, є питання стійкості руху та деформування.

Історично першими щодо стійкості руху *технічних* систем розглядалися системи зі ***зосередженими масами***, коли математична формалізація проблеми призводить до системи лише з ***декількох*** алгебраїчних рівнянь. У цьому випадку основи теорії заклав О.М. Ляпунов (1857 – 1918 рр.), розглядаючи реакцію об'єкта на збурення.

Математична формалізація проблеми аналізу стійкості руху об'єктів ***деформівного*** твердого тіла призводить до системи з ***багатьма*** алгебраїчними рівняннями. Це можуть бути задачі, пов'язані зі втратою стійкості руху об'єктів при коливальних процесах. А можуть – при квазістатичному навантаженні за рахунок великих деформацій, переміщень чи поворотів при пружному або пружно-пластичному навантаженні. Останній випадок часто називають локальною втратою стійкості. Теоретичною основою пружної та локальної втрати стійкості є рівняння (крайові задачі) деформівного твердого тіла з ***великими деформаціями***.

Отже, є три напрямки аналізу стійкості руху (деформування). З першого та другого напрямків розглянемо лише основні ідеї, спираючись на матеріали Розділів 7 та 8 з підручника [2], а третій напрямок розглянемо докладніше, оскільки теорія деформівного твердого тіла з великими деформаціями є важливою та великою за обсягом, раніше не вивчалася.

1.2. Механічні системи зі зосередженими масами. Стійкість руху за Ляпуновим

Процес аналізу стійкості руху зі зосередженими масами за Ляпуновим можна представити у вигляді трьох етапів.

Перший етап: складання рівнянь незбуреного (основного) руху. У канонічному вигляді:

$$\boxed{\dot{y}_i = Y_i(y_1,...,y_n,\ \dot{y}_1,...,\dot{y}_n,\ t)};\quad i=1,...,2n, \tag{1.1}$$

де Y_i – аналітична функція фазових координат та їхніх швидкостей, а також, можливо, часу. Початкові умови: $y_i(t=0)=y_{i0}$ й $\dot{y}_i(t=0)=\dot{y}_{i0}$.

Другий етап: складання рівнянь збуреного руху. У канонічному вигляді:

$$\dot{\tilde{y}}_i = Y_i(\tilde{y}_1,...,\tilde{y}_n,\ \dot{\tilde{y}}_1,...,\dot{\tilde{y}}_n,\ t);\quad i=1,...,2n, \tag{1.2}$$

де застосовуються збурені $\tilde{y}_i = y_i(t) + \delta_i(t)$, $\dot{\tilde{y}}_i = \dot{y}_i(t) + \dot{\delta}_i(t)$ та початкові умови $\tilde{y}_i(t=0) = y_{i0} + \delta_{i0}$, $\dot{\tilde{y}}_i(t=0) = \dot{y}_{i0} + \dot{\delta}_{i0}$, а $\delta_i(t)$, $\dot{\delta}_i(t)$ – варіації.

Незбуреному руху відповідають нульові значення варіацій, тому дослідження стійкості незбуреного руху можна замінити на дослідження стійкості тривіального розв'язку рівняння (1.2) при $\delta_i(t) = \dot{\delta}_i(t) = 0$.

Підставимо $\tilde{y}_i = y_i(t) + \delta_i(t)$ та $\dot{\tilde{y}}_i = \dot{y}_i(t) + \dot{\delta}_i(t)$ у (1.2):

$$\dot{y}_i + \dot{\delta}_i = Y_i(y_1 + \delta_1, ..., y_n + \delta_n,\ \dot{y}_1 + \dot{\delta}_1, ..., \dot{y}_n + \dot{\delta}_n,\ t); \quad i = 1, ..., 2n \tag{1.3}$$

та розкладемо кожну функцію Y_i в ряд Тейлора за варіаціями:

$$\dot{y}_i + \dot{\delta}_i \approx Y_i(y_1, ..., y_n,\ \dot{y}_1, ..., \dot{y}_n,\ t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \delta_k} \right)_0 \delta_k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \dot{\delta}_k} \right)_0 \dot{\delta}_k . \tag{1.4}$$

Позначимо

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \delta_k} \right)_0,\ b_{ik} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \dot{\delta}_k} \right)_0, \tag{1.5}$$

скоротим (1.4) на $\dot{y}_i = Y_i(y_1, ..., y_n,\ \dot{y}_1, ..., \dot{y}_n,\ t)$, отримаємо рівняння збуреного руху у варіаціях:

$$\boxed{\dot{\delta}_i \approx \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{\delta}_k = D(\delta_1, ..., \delta_n,\ \dot{\delta}_1, ..., \dot{\delta}_n,\ t)}. \tag{1.6}$$

Третій етап: встановлення, чи є рух стійким. Незбурений рух називають ***стійким за Ляпуновим***, якщо виконуються умови:

$$\boxed{\left| \tilde{y}_i(t) - y_i(t) \right| < \varepsilon; \quad \left| \dot{\tilde{y}}_i(t) - \dot{y}_i(t) \right| < \varepsilon}; \quad i = 1, ..., 2n, \tag{1.7}$$

коли початкові умови

$$\boxed{\left| \tilde{y}_{i0} - y_{i0} \right| \le \delta(\varepsilon); \quad \left| \dot{\tilde{y}}_{i0} - \dot{y}_{i0} \right| \le \dot{\delta}(\varepsilon)}. \tag{1.8}$$

Як $\varepsilon > 0$ позначене невелике число, яке визначає похибку (допустиме збурення).

Є декілька особливих варіантів рівняння (1.1), а також декількох методів визначення, чи є рух стійким. Вони повинні були розглядатися на освітньому рівні бакалавра.

1.3. Про стійкість руху об'єктів деформівного твердого тіла. Коливання

Тверді тіла, що деформуються, після дискретизації простору розглядаються як сукупність скінченної кількості N точок (вузлів, елементарних об'ємів), кожна з яких у тривимірному просторі має 6 ступенів свободи (три переміщення та три кути повороту). Ці переміщення та кути поворотів збирають у вектор (матрицю-стовпчик) узагальнених переміщень $\{q\}$ з компонентами q_i.

Якщо розглядаються коливання об'єкта, то для аналізу стійкості руху достатньо використовувати припущення про нескінченно малі деформації (переміщення й повороти) та такі теореми:

- *теорема* ***Лагранжа-Діріхле***: положення рівноваги об'єкта стійке (за Ляпуновим), якщо у ньому потенціальна енергія Π має ізольований мінімум.
- *теорема* ***Четаєва***: положення рівноваги об'єкта не є стійким, якщо у ньому потенціальна енергія Π є ***однорідною*** функцією узагальнених переміщень q_i і не має в ньому мінімуму.

При цьому зазвичай використовують однорідне рівняння Лагранжа другого роду

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0}, \qquad (1.9)$$

а стану рівноваги відповідають всі $q_i = 0$.

Вирази для кінетичної T, потенційної Π та дисипативної Φ енергії розглядаються в "Теорії коливань" [2]. Згідно з наведеними теоремами Лагранжа-Діріхле та Четаєва основна увага приділяється властивостям виразів для потенціальної енергії Π.

1.4. Про квазістатичну втрату стійкості руху об'єктів деформівного твердого тіла

Як було вказано у Вступі, для проведення аналізу локальної втрати стійкості потрібно розглядати рівняння та крайові задачі нелінійної пружності та/або пружно-пластичності деформівного твердого тіла з ***великими деформаціями***.

Це можуть бути задачі про технологічні процеси формозміни: ковка, штамповка, розкатка, витискання, витягування, згинання, тощо. Вони характерні значними пластичними деформаціями.

Це можуть бути задачі про "нештатне" деформування при різноманітних аваріях автомобілів, літаків, інших механізмів та агрегатів. При цьому можливі як пружні, так і непружні малі та великі деформації, переміщення, повороти.

І ще багато варіантів.

Як виявилося, навить для моделювання процесів пружного втрачання стійкості геометричної форми об'єкта потрібно застосовувати теорію великих деформацій. Це можуть бути задачі про пружне втрачання стійкості геометричної форми стержнів, пластин, оболонок, тощо. Зокрема, про втрату стійкості елементів різних запобіжників та перемикачів (конструкційну втрату стійкості).

Отже, щоб розглядати та моделювати процеси пружного втрачання стійкості геометричної форми та локальної втрати стійкості внаслідок необоротних деформацій, потрібно вивчати ***теорію великих деформацій***. Саме це й буде основним наповненням наступних розділів.

Контрольні питання до розділу

1. В яких випадках розглядається проблема стійкості руху та деформування?
2. Дайте характеристику трьох етапів процесу аналізу стійкості руху об'єктів зі зосередженими масами за Ляпуновим.
3. Назвіть умови стійкості руху об'єктів зі зосередженими масами за Ляпуновим.
4. Яку умову висуває теорема Лагранжа-Діріхле для визначення стійкості руху та деформування?
5. За якою умовою, згідно з теоремою Четаєва, рух та деформування не буде стійким?
6. Яку теорію потрібно застосувати, щоб можна було визначити умови втрати локальної стійкості пружного твердого тіла?
7. Яку теорію потрібно застосувати, щоб можна було визначити умови втрати локальної стійкості твердого тіла при наявності необоротних деформацій?

Розділ 2

ГРАДІЄНТИ РУХУ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Вступ

При наявності значних деформацій та/або поворотів елементарних об’ємів матеріалу тіла потрібно застосовувати модель великих деформацій (**large strain**). Але знання цього факту недостатньо.

По-перше, є декілька варіантів формулювання геометричного простору та деформівного середовища. Їх назви наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 Назви формулювань

Скорочене	Повне англійською	Повне українською
TL	**T**otal **L**agrangian formulation	повне формулювання Лагранжа
UL	**U**pdated **L**agrangian formulation	модифіковане формулювання Лагранжа
E	**E**ulerian formulation	формулювання Ейлера
ALE (CLE)	**A**rbitrary (**C**ombination) **L**agrangian-**E**ulerian formulation	довільне (комбіноване) формулювання Лагранжа-Ейлера

Лагранжеві формулювання для елементарного об’єму середовища застосовують так звану "вморожену" (конвекційну) систему координат. При формулюванні **Ейлера** використовують нерухому просторову координатну систему, координати якої вказують ***місця***, в яких обчислюють параметри рухомого (деформованого) середовища. Ці формулювання взаємно пов’язані, тому, в принципі, можна всі необхідні дані перерахувати з однієї системи в іншу.

По-друге, при створенні алгоритмів розв’язування геометрично нелінійних крайових задач проявляються принаймні дві нові проблеми:

- на момент обчислення компонент системи алгебраїчних рівнянь (інтегрування в об’ємі Ω та на поверхні S) поточна геометрія тіла є невизначеною;
- при розрахунках напружень потрібно враховувати деформування та повороти площадок, на яких вони обчислюються.

Перша проблема примушує шукати розв’язок на основі ***попередньо*** визначеної (***опорної***) геометрії тіла, друга – ***перетворювати*** напруження.

Використання опорної, а не поточної, конфігурації тіла теж потребує перераховувань величин, що фігурують у формулах, на опорну конфігурацію. Тому змінюються навіть назви (міри) тензорів напружень та деформацій.

У **TL** за опорну геометрію на всіх етапах навантаження твердого деформівного тіла використовується ***початкова*** геометрія. Для **UL** використовується геометрія, що створена ***попереднім етапом навантаження*** ("поточна").

TL–формулювання можна застосовувати лише тоді, коли для розв'язків не має значення ***історія навантаження*** тіла. А **UL**–формулювання – при:

- складному пружно-пластичному навантаженні, коли в різних частинах тіла реалізуються різні траєкторії деформування, зокрема, одночасно десь відбуваються процеси активного пружно-пластичного деформування, а десь – пружного розвантаження;
- втраті стійкості геометрії тіла, якщо потрібно вивчати подальший його напружено-деформований стан, зокрема, після так званого "проклацювання" конструкції.

При застосуванні **UL**–формулювання потрібно всю історію навантаження (автоматично) розділяти на окремі етапи та на всіх етапах забезпечувати відносно невеликі прирости навантаження. Наявність багатьох етапів зазвичай збільшує час отримання розв'язку крайової задачі. Тому, якщо відсутні необоротні деформації або пружне-пластичне навантаження є пропорційним, не відбувається втрати стійкості геометрії тіла, використання формулювання **TL** зазвичай ефективніше, ніж **UL** (навантаження можна провести за один етап).

E-формулювання зазвичай використовують при аналізі течії газів і рідини, а також твердих матеріалів в умовах, коли вони ведуть себе майже як рідина (висока температура, тиск, швидкість навантаження тощо), причому рівняння процесу деформування записуються у швидкостях (переміщень, деформацій, напружень тощо).

ALE-формулювання є сенс застосовувати при моделюванні процесів, у яких одночасно фігурують газ або рідина та твердий матеріал, процес характеризується великими переміщеннями, швидкостями тощо.

Далі буде описуватися тільки **TL**- та **UL**-формулювання. Потрібно розглянути питання про відповідні міри деформацій та напружень, а також про визначальні рівняння, які будуть використовуватися при формулюванні постановок крайових задач, інші допоміжні питання.

2.2. Метричний опис деформівного середовища

Нагадаємо, що вектором (тензором першого рангу) та тензором другого рангу називаються відповідно об'єкти $\vec{b}$ та $\boldsymbol{c}$:

$$\vec{b} = b^i\vec{e}_i = b_i\vec{e}^{\,i}\,; \quad \boldsymbol{c} = c^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = c_{ij}\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} = c^i_j\vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j} = c^j_i\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}_j\,; \quad i,j = 1,2,3\,, \qquad (2.1)$$

інваріантні щодо перетворень системи координат.

Знак $\otimes$ вказує на подвійне (діадне) *зовнішнє* перемноження векторів. Якщо вектори визначають ортогональний базис, наприклад, з векторів $\vec{e}_i$, то $\delta_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = \boldsymbol{I}$. Ще зазначимо, що зовнішнє перемноження $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ визначається матрицею, де лише ij – та компонента дорівнює одиниці, а всі інші – нулі. Тому вираз $\boldsymbol{c} = c^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ визначається сумою з використанням вказаних дев'яті матриць.

Примітка 2.1. Надалі буде застосовуватися векторний, символьний та матричний запис тензорів і їхніх компонент. Наприклад, $\boldsymbol{\sigma}$, σ^{ij}, $[\sigma]$ відповідно.

2.2.1. Системи координат

Якщо середовище має в будь-якому елементарному об'ємі $d\Omega$ масу $dm = \bar{\rho} d\Omega$, де його густина $\bar{\rho}$ є безперервною функцією координат, то середовище вважається суцільним.

У загальному випадку для описування стану тіла зазвичай вводять початковий час t_0 та відповідний йому початковий стан з об'ємом Ω_0 та поверхнею S_0; поточний час t з поточними об'ємом Ω та поверхнею S. Ще вводять декілька координатних систем. Введемо такі системи:

- глобальну нерухому декартову систему координат з основним базисом $\vec{k}_i$, $i = 1,2,3$;
- глобальну нерухому, в загальному випадку криволінійну не ортогональну, систему координат з базисом $\vec{e}_i$ та координатними лініями x^i; $i = 1,2,3$ (рис.2.1). Він вводиться для опису руху реальних об'єктів. Базис $\vec{e}_i$ може співпадати з базисом $\vec{k}_i$. Положення початку базису $\vec{e}_i$ може бути довільним. Умова $x^i = const$; $i = 1,2,3$ задає ***координатну***, в загальному випадку *криволінійну*, ***поверхню***. Дві координатні поверхні x^i та x^j перетікаються (при $i \neq j$) по лінії, яка називається ***координатною лінією***, вона відповідає третій координаті x^m.

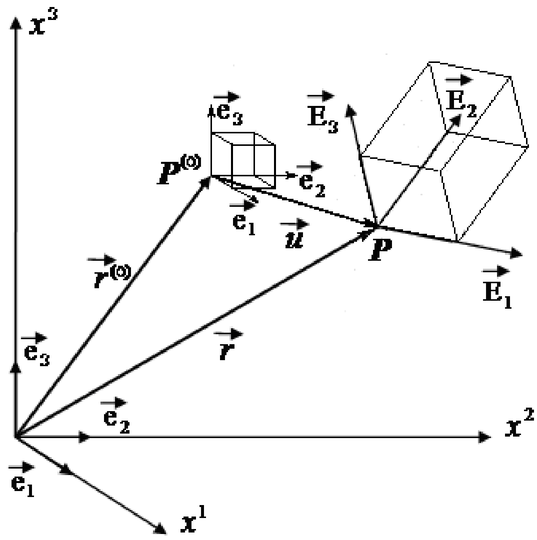


Рис.2.1. Координатні системи

У цій системі *початкове* положення $P^{(0)}$ будь-якої матеріальної точки задається радіус-вектором $\vec{r}(t_0) = \vec{r}^{(0)} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3 = a^i\vec{e}_i = \vec{a}$, а *поточне* положення P цієї ж точки – радіус-вектором $\vec{r}(t) = \vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 = x^i\vec{e}_i$. Співвідношення $a^i = a^i(x^j)$; $x^i = x^i(a^j)$; $i, j = 1,2,3$ є взаємно-однозначними зв'язками. Коваріантні вектори базису $\vec{e}_i$, який називається ***основним***, задаються як

$$\boxed{\vec{e}_i = \lim_{\Delta a^i \to 0} \frac{\Delta \vec{r}^{(0)}}{\Delta a^i} = \frac{\partial \vec{r}^{(0)}}{\partial a^i} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i}}; \quad i = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Ці три вектора основного базису є дотичними до координатних ліній у будь-якій точці $P^{(0)}$ недеформованого тіла. Будемо застосовувати декартову систему координат (ДСК). У ДСК зазвичай позначують $x^i = x, y, z$; всі модулі $|\vec{e}_i| = 1$;

• локальну рухому ("***вморожену***"), в загальному випадку криволінійну не ортогональну, систему координат з базисом $\vec{E}_i$, яка супроводжує кожну матеріальну точку P тіла при його деформуванні. На поточне положення кожної такої точки та координатної системи одночасно вказує радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(a^j, t)$.

2.2.2. Тензори метрики простору

У системі координат з базисом $\vec{e}_i$ дев'ять величин

$$\boxed{g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^j}} \tag{2.3}$$

називають коваріантними компонентами ***симетричного метричного тензора***

$$\boldsymbol{g} = g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j, \tag{2.4}$$

причому

$$\boxed{\det |g_{ij}| = g > 0}. \tag{2.5}$$

У ДСК

$$\boxed{(g_{ij})_{ДСК} = \delta_{ij}}; \quad \boxed{g = 1}. \tag{2.6}$$

Тут і нижче символи Кронекера $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ та $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Для повноти опису геометричного простору, поряд з ***основним***, вводиться ***взаємний*** базис $\vec{e}^i$ у такий спосіб, щоб $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j = \delta_{ij}$ (вектори $\vec{e}_i$ вказують напрям координатних ліній, а вектори $\vec{e}^i$ – перпендикулярні до координатних поверхонь). Аналогічно g_{ij} вводиться контраваріантний симетричний метричний тензор з компонентами $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$. Тоді

$$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i; \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1}; \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j; \quad \vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j. \tag{2.7}$$

Із врахуванням (2.6) і (2.7)

$$(g^{ij})_{ДСК} = (g_{ij})_{ДСК} = \delta_{ij}. \tag{2.8}$$

Згідно з (2.2), нескінченно малий приріст $d\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ представляється у вигляді $d\vec{a} = da^i\, \vec{e}_i$, з використанням (2.7) – аналогічно: $d\vec{a} = da_i\, \vec{e}^i$.

У ДСК немає значення, де записані компонентні індекси.

Будь-який вектор $\vec{b}$ в основному та взаємному базисах має компоненти b^i та b_i відповідно, тому

$$\vec{b} = b^i \vec{e}_i = b_i \vec{e}^i. \tag{2.9}$$

З (2.9) із врахуванням перетворень (2.7)

$$b_j = b^i g_{ij}; \quad b^j = b_i g^{ij}. \tag{2.10}$$

Тому і координатний вектор $\vec{r}$ точки P, проведений до неї з початку координат, можна записати як

$$\vec{r} = x^i\, \vec{e}_i = x_i\, \vec{e}^i. \tag{2.11}$$

Будь-який тензор другого рангу $\boldsymbol{\sigma}$ в основному і взаємному базисах:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sigma_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j, \tag{2.12}$$

де σ_{ij},σ^{ij} – компоненти тензора $\boldsymbol{\sigma}$. З (2.12) із врахуванням перетворень (2.7):

$$\sigma^{ij}=\sigma_{mn}g^{im}g^{jn}; \quad \sigma_{ij}=\sigma^{mn}g_{im}g_{jn}. \tag{2.13}$$

За визначенням, квадрат лінійного елементу $(ds^{(0)})^2=d\vec{a}\cdot d\vec{a}=da^i\vec{e}_i\cdot da^j\vec{e}_j = = g_{ij}da^i da^j$.

2.2.3. Градієнт руху Гріна

Розглянемо початкову конфігурацію тіла з координатним вектором $\vec{r}^{(0)}=\vec{a}$ до точки $P^{(0)}$, а також поточну з координатним вектором $\vec{r}$ до точки P (див. рис.2.1). Використовуємо ДСК з базисом $\vec{e}_i$. Відповідно до (2.2) у початковому стані:

$$\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{a}}{\partial a^i}; \quad d\vec{a}=da^i\vec{e}_i=da_j\vec{e}^{\,j}. \tag{2.14}$$

У поточному стані маємо локальний ("вморожений") здеформований базис

$$\vec{E}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial a^i}; \quad d\vec{r}=da^i\vec{E}_i=da_j\vec{E}^j. \tag{2.15}$$

Введемо вектор ***переміщень*** $\vec{u}$ як $\vec{u}=\vec{r}-\vec{a}$ (див. рис.2.1). Тоді, із врахуванням (2.2) і першого виразу (2.15) визначимо, що

$$\boxed{\vec{E}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial a^i}=\frac{\partial(\vec{a}+\vec{u})}{\partial a^i}=\vec{e}_i+\frac{\partial\vec{u}}{\partial a^i}=\left(\delta_i^m+\frac{\partial u^m}{\partial a^i}\right)\vec{e}_m=X_{mi}\vec{e}_m}. \tag{2.16}$$

Вектори $\vec{E}_i$ називають ***градієнтом руху Гріна*** (Коші-Гріна). Компоненти

$$\boxed{X_{mi}=\partial x^m/\partial a^i=\delta_{mi}+\partial u^m/\partial a^i}, \tag{2.17}$$

створюють ***матрицю градієнта руху Гріна***

$$\boxed{[X]=\begin{bmatrix}X_{11}; & X_{12}; & X_{13}\\ X_{21}; & X_{22}; & X_{23}\\ X_{31}; & X_{32}; & X_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+b_{11}; & b_{12}; & b_{13}\\ b_{21}; & 1+b_{22}; & b_{23}\\ b_{31}; & b_{32}; & 1+b_{33}\end{bmatrix}}, \tag{2.18}$$

де позначено $\boxed{b_{mi}=\partial u^m/\partial a^i}$. Нагадаємо, що вирази записано в ДСК.

Введемо загальноприйняті позначення детермінанта матриці $[X]$:

$$\boxed{\det[X]=J>0}. \tag{2.19}$$

Примітка 2.2. Матеріал відносять до класу ***простих***, якщо для визначення тензора напружень в елементарному об’ємі тіла достатньо знання тензора $\boldsymbol{X}$ з компонентами X_{mi} (див. вираз (2.17)) як першого наближення для описування всієї попередньої історії деформування елементарного об’єму.

2.3. Загальні властивості матриці градієнта руху Гріна

2.3.1. Формула Нансона

Ця формула пов’язує ***площі та орієнтації елементарних поверхонь***: початкової $(dS)_0$ та здеформованої dS. Вона має такий вигляд у індексній:

$$X_{im}\nu_i dS=J\cdot(\nu_m)_0 dS_0; \quad i,m=1,2,3. \tag{2.20-a}$$

та у матричній формі запису:

$$\boxed{[X]^T\{\nu\}dS = J\cdot(\{\nu\})_0 dS_0}, \qquad (2.20\text{-б})$$

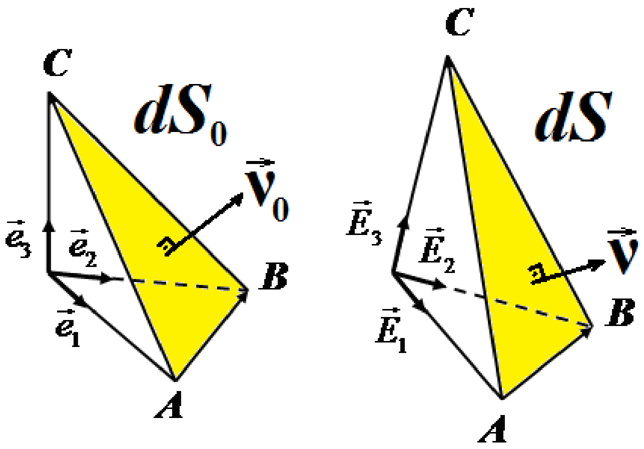


Рис.2.2. До формули Нансона

де позначені вектори $\{\nu\} = \{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}^T$ та $(\{\nu\})_0 = \{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}_0^T$, які визначають нормалі до поверхонь dS та відповідно dS_0 відносно базису $\vec{e}_i$ (ДСК) – див. рис.2.2.

Отже, матриця градієнта руху Гріна та її детермінант зв'язує здеформовану поверхню з початковою.

2.3.2. Зміна елементарного об'єму та густини матеріалу при деформуванні

Спочатку відзначимо, що, згідно з (2.14) та (2.15):

$$d\vec{a} = \vec{e}_i da^i = \vec{e}_1 da^1 + \vec{e}_2 da^2 + \vec{e}_3 da^3, \qquad (2.21)$$

$$d\vec{r} = \vec{E}_i da^i = \vec{E}_1 da^1 + \vec{E}_2 da^2 + \vec{E}_3 da^3, \qquad (2.22)$$

тобто окремі вектори $\vec{e}_i da^i$ визначають довжини сторін елементарного паралелепіпеда до його деформування, а $\vec{E}_i da^i$ – після його деформування.

Тому можна отримати, що:

- початкова величина елементарного об'єму

$$d\Omega_0 = (\vec{e}_1 da^1)\cdot\big((\vec{e}_2 da^2)\times(\vec{e}_3 da^3)\big) = \vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)da^1 da^2 da^3 = \sqrt{g}\,da^1 da^2 da^3, \qquad (2.23)$$

причому, згідно з (2.6), у ДСК $\sqrt{g} = 1$.

- величина елементарного об'єму після деформування

$$\boxed{d\Omega = J\cdot d\Omega_0}. \qquad (2.24)$$

- густина матеріалу (із закону збереження маси)

$$\boxed{\rho J = \rho_0}, \quad \text{або} \quad \boxed{\bar{\rho}_0 / \bar{\rho} = J > 0}, \qquad (2.25)$$

де ρ_0 – початкова густина матеріалу.

Отже, *детермінант матриці градієнта руху зв'язує величини здеформованого елементарного об'єму з початковим, а при дії закону збереження маси – поточну та початкові густини матеріалу*.

2.3.3. Полярна декомпозиція матриці градієнта руху Гріна

Квадратну матрицю $[X]$ з (2.18), для якої завжди $\det[X] > 0$, можна представити двома розкладами (***теорема Коші про полярну декомпозицію***):

$$\boxed{[X] = [\upsilon_L][R]}; \qquad (2.26\text{-а})$$

$$\boxed{[X] = [R][\upsilon_R]}, \qquad (2.26\text{-б})$$

де $[R]$ – *матриця* ***жорсткого повороту*** (*ортогональна*); $[\upsilon_L]$, $[\upsilon_R]$ – ліва та права *матриці* "***чистої деформації***" (симетричні). Тут L – від *Left*, R – від *Right*.

Згідно з (2.26-а) трансформацію елементарного об’єму можна уявити як процес, в якому послідовно реалізуються: спочатку жорсткий поворот, потім – його чиста деформація. У випадку (2.26-б) процес як би відбувається навпаки: спочатку – чиста деформація елементарного об’єму, потім – його жорсткий поворот. Рис.2.3 ілюструє ці положення для двовимірного випадку.

Як виявиться у подальшому, ***видалення жорсткого повороту з матриці градієнта руху є виключно важливим для вірного моделювання великих деформацій. При цьому буде мати значення, який розклад застосовувати: лівий або правий***.

Для формул (2.26-а) та (2.26-б) матриця жорсткого повороту $[R]$ є ***однаковою***. *Якщо квадратна матриця* $[X]$ *виявилася симетричною, то матриця жорсткого повороту* $[R]$ *для неї буде одиничною матрицею* $[I]$.

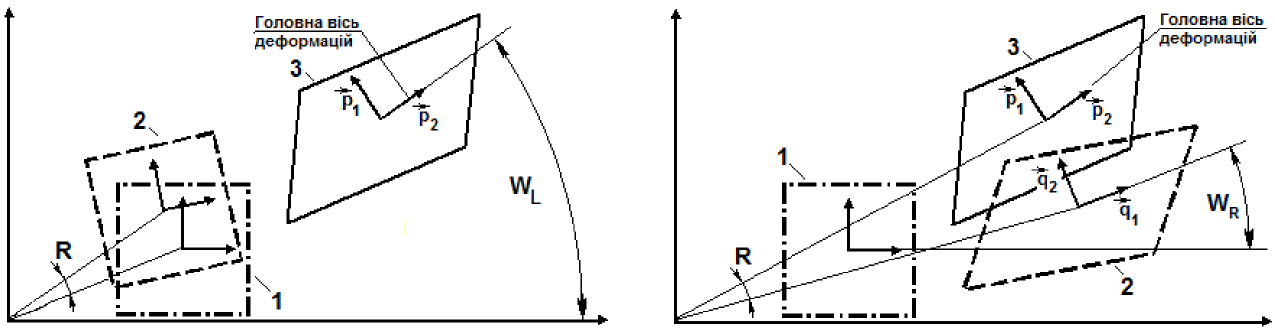


Рис.2.3. Схема початкового (1), проміжного (2) та поточного (3) стану елементарного об’єму матеріалу при розкладах: а) – лівому; б) – правому

У загальному випадку матриця $[X]$ не є симетричною, і для проведення розкладів (2.26) потрібно проблему спочатку симетризувати, при цьому двома варіантами виключається матриця $[R]$:

$$\boxed{[\Theta]=[X][X]^T=[\upsilon_L][R]([\upsilon_L][R])^T=[\upsilon_L]\left([R][R]^T\right)[\upsilon_L]^T=[\upsilon_L][\upsilon_L]^T=[\upsilon_L]^2}. \quad (2.27\text{-а})$$

$$\boxed{[C]=[X]^T[X]=([R][\upsilon_R])^T[R][\upsilon_R]=[\upsilon_R]^T([R]^T[R])[\upsilon_R]=[\upsilon_R]^T[\upsilon_R]=[\upsilon_R]^2}. \quad (2.27\text{-б})$$

Враховано властивість матриці повороту: $\boxed{[R]^T[R]=[I]}$, де $[I]$ – одинична матриця, а також властивість одиничної матриці $[I][A]=[A]$ та симетричність матриць $[\upsilon_L]$ та $[\upsilon_R]$.

Але швидко обчислити $[\upsilon_L]$ й $[\upsilon_R]$ з (2.27) вдається лише тоді, коли $[\Theta]$ та $[C]$ виявляться ***діагональними*** матрицями. У противному випадку для отримання компонент $[\upsilon_L]$ й $[\upsilon_R]$ розглядають стандартну проблему власних значень для симетричної матриці $[\Theta]$ або $[C]$:

$$[\Theta]\{w_L\}_i=\lambda_i\{w_L\}_i \quad \text{або} \quad [\Theta][W_L]=[\lambda][W_L]=[W_L][\lambda]. \quad (2.28\text{-а})$$

$$[C]\{w_R\}_i = \lambda_i \{w_R\}_i \quad \text{або} \quad [C][W_R] = [\lambda][W_R] = [W_R][\lambda]. \tag{2.28-б}$$

Тут із власних значень $\boxed{\lambda_i > 0;\ i = 1,2,3}$ складена діагональна матриця $[\lambda]$, а з власних векторів (стовпців) $\{w_L\}_i$ – матриця власних векторів $[W_L]$ (або з $\{w_R\}_i$ – матриця $[W_R]$).

Оскільки всі матриці $[\Theta]$, $[C]$, $[\upsilon_L]$ та $[\upsilon_R]$ мають одну й теж основу – матрицю $[X]$, (див. (2.27)), то всі вони мають єдиний головний базис. Оскільки матриці $[\Theta]$ та $[C]$ є не виродженими та позитивно визначеними, то їх власні значення є позитивними, які водночас є квадратами власних значень матриць $[\upsilon_L]$ й $[\upsilon_R]$. Тому з використанням величин $\lambda_i > 0$ можна зібрати ***діагональну*** матрицю (матрицю "***витягування***" (stretch) або (інша назва) матрицю "*кратності подовжень*"), позначимо її як $[\underline{\upsilon}]$, з діагональними компонентами:

$$\boxed{[\underline{\upsilon}] = [\lambda]^{1/2}}; \quad \boxed{\underline{\upsilon}_i = \sqrt{\lambda_i} > 0}. \tag{2.29}$$

Тепер із застосуванням матриці $[\underline{\upsilon}]$ та матриць власних векторів $[W_L]$ або $[W_R]$ можна отримати матриці, які й будуть саме ті матриці, що шукаються:

$$\boxed{[\upsilon_L] = [W_L][\underline{\upsilon}][W_L]^T}; \tag{2.30-а}$$

$$\boxed{[\upsilon_R] = [W_R][\underline{\upsilon}][W_R]^T}. \tag{2.30-б}$$

Матрицю жорсткого повороту $[R]$ можна отримати з виразів (2.26):

$$[R] = [\upsilon_L]^{-1}[X] = [X][\upsilon_R]^{-1}. \tag{2.31}$$

Властивість $[R]^T[R] = [I]$, яка обов’язкова для матриці повороту, була закладена при отриманні матриць $[\upsilon_L]$ й $[\upsilon_R]$. Щоб матриця $[R]$ була матрицею повороту, їй ще потрібно мати $\boxed{\det[R] = 1}$. Це дійсно так, оскільки:

$$\det[R] = \det[X] \cdot \det[\upsilon_L]^{-1} = J / \det[\upsilon_L] = J / \det[\underline{\upsilon}] = J / \det[\lambda]^{1/2} = J / J = 1.$$

Симетрична проблема власних значень для не виродженої позитивно визначеної матриці має лише ***один*** варіант розв’язку. Тому і полярна декомпозиція (2.26) завжди існує, якщо $\det[X] > 0$.

Матриця власних векторів $[W_L]$ фактично є матрицею повороту (напрямних косинусів) ***головних осей деформацій*** (*principal axes of strain*, *матеріальних* осей, ***тріади Ейлера***) до основної нерухомої системи координат ***після*** *виключення жорсткого повороту*.

А матриця власних векторів $[W_R]$ фактично є матрицею повороту (напрямних косинусів) *головних осей деформацій* (*principal axes of strain*, *матеріальних* осей, ***тріади Лагранжа***) до основної нерухомої системи координат *ще* ***перед*** *виключенням жорсткого повороту*.

В обох випадках компоненти матриці $[\upsilon_L]$ та $[\upsilon_R]$ з чистою деформацією елементарного об’єму обчислюються через компоненти матриці $[\underline{\upsilon}] = [\lambda]^{1/2}$, яка є діагональною та фактично містить інформацію лише про *деформацію подовження у напрямку* ***головних*** *осей* деформації (значення $1 + \underline{\varepsilon}_i$, $i = 1,2,3$).

З (2.26) $[X]=[R][\upsilon_R]=[\upsilon_L][R]$. Якщо помножимо на $[R]^T$ з правої сторони, то отримаємо, що $[R][\upsilon_R][R]^T=[\upsilon_L][R][R]^T=[\upsilon_L]$, тобто

$$\boxed{[\upsilon_L]=[R][\upsilon_R][R]^T}. \tag{2.32}$$

За умови $\det[R]=1$ з (2.26), (2.28) й (2.29) маємо, що:

$$\boxed{J=\det[X]=\det[\upsilon_R]=\det[\upsilon_L]=\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\underline{\upsilon}_1\underline{\upsilon}_2\underline{\upsilon}_3>0}. \tag{2.33}$$

Зі двовимірної схеми рис.2.3 бачимо, що, оскільки початковий та поточний стани при обох розкладах, а також повороти **R** є ідентичними, то очевидно, що матриці чистих деформацій $[\upsilon_L]$ та $[\upsilon_R]$, власних векторів $[W_L]$ та $[W_R]$ повинні бути різними.

Приклад 2.1. Візьмемо довільну не вироджену не симетричну матрицю $[X]$ з $\det[X]>0$ та обчислимо всі похідні від неї матриці та значення (див. табл.2.2, де округлення проведені з точністю до 6 знаків після розділового).

Таблиця 2.2 Матриця $[X]$ та похідні від неї матриці та значення

$[X]=\begin{bmatrix}1.3 & 0 & 0\\ 0.4 & 1.2 & 0\\ 0.5 & -0.2 & 1.1\end{bmatrix}$	
Лівий розклад	**Правий розклад**
$[\Theta]=[X][X]^T=\begin{bmatrix}1.69 & 0.52 & 0.65\\ & 1.60 & -0.04\\ Sym & & 1.50\end{bmatrix}$	$[C]=[X]^T[X]=\begin{bmatrix}2.10 & 0.38 & 0.55\\ & 1.48 & -0.22\\ Sym & & 1.21\end{bmatrix}$
$\lambda_1=2.433661$; $\lambda_2=1.600205$; $\lambda_3=0.756134$	
$[W_L]=\begin{bmatrix}0.745361 & -0.047384 & -0.664976\\ 0.440931 & 0.783175 & 0.438426\\ 0.500018 & -0.619994 & 0.604640\end{bmatrix}$	$[W_R]=\begin{bmatrix}0.894444 & -0.046108 & -0.444797\\ 0.275069 & 0.840961 & 0.465964\\ 0.352572 & -0.539128 & 0.764875\end{bmatrix}$
$[\upsilon_L]=\begin{bmatrix}1.254041 & 0.212247 & 0.268947\\ & 1.246342 & -0.039780\\ Sym & & 1.194188\end{bmatrix}$	$[\upsilon_R]=\begin{bmatrix}1.422789 & 0.154544 & 0.227570\\ & 1.201458 & -0.112321\\ Sym & & 1.070325\end{bmatrix}$
$[R]=\begin{bmatrix}0.964647 & -0.144677 & -0.220284\\ 0.163267 & 0.984196 & 0.068570\\ 0.206882 & -0.102110 & 0.973023\end{bmatrix}$	

2.4. Інші тензори просторових градієнтів

Крім градієнта руху Гріна використовують ще декілька просторових градієнтів. Всі ці градієнти створюють відповідні тензори. Відомості про ці тензори та їх компоненти зведені у таблицю 2.3. Враховано, що в ДСК метричний тензор $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Базовим вважають тензор градієнта руху Гріна $\boldsymbol{X} = X_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$. Як видно з табл.2.3, всі інші можна легко виразити через базовий тензор та навпаки. Тобто тензор $\boldsymbol{X}$ є базовим цілком умовно, ним міг би бути й інший тензор.

Диференціювання типу $\partial x^i / \partial a^j$ зазвичай називають ***матеріальним***, а $\partial a^i / \partial x^j = \partial(x^i - u^i) / \partial x^j = \delta_{ij} - \partial u^i / \partial x^j$ – ***просторовим*** (це – умовність, оскільки фактично обидві похідні є просторовими).

Таблиця 2.3. Різновиди тензорів просторових градієнтів (ДСК)

Назва градієнта	Тензори	Компоненти	Матриці з компонент тензорів, зв'язок з $[X]$
градієнт руху	$\mathbf{X} = \vec{E}_j \otimes \vec{e}^{\,j} = X_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$X_{ij} = \partial x^i / \partial a^j$	$[X]$
градієнт місця	$\bar{\boldsymbol{X}} = \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{E}_i = \bar{X}_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\bar{X}_{ij} = \partial x^j / \partial a^i$	$[\bar{X}] = [X]^T$
обернений градієнт руху	$\boldsymbol{G} = \vec{e}_i \otimes \vec{E}^i = G_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$G_{ij} = \partial a^i / \partial x^j$	$[G] = [X]^{-1}$
обернений градієнт місця	$\bar{\boldsymbol{G}} = \vec{E}^i \otimes \vec{e}_i = \bar{G}_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\bar{G}_{ij} = \partial a^j / \partial x^i$	$[\bar{G}] = [X]^{-T}$
градієнт переміщень	$\boldsymbol{H} = H_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$H_{ij} = \partial u^i / \partial a^j =$ $= X_{ij} - \delta_{ij}$	$[H] = [X] - [I]$
	$\bar{\boldsymbol{H}} = \bar{H}_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\bar{H}_{ij} = \partial u^j / \partial a^i =$ $= X_{ji} - \delta_{ij}$	$[\bar{H}] = [H]^T = [X]^T - [I]$
обернений градієнт переміщень	$\boldsymbol{K} = K_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$K_{ij} = \partial a^i / \partial u^j =$ $= (X_{ij} - \delta_{ij})^{-1}$	$[K] = ([X] - [I])^{-1}$
	$\bar{\boldsymbol{K}} = \bar{K}_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\bar{K}_{ij} = \partial a^j / \partial u^i =$ $= (X_{ji} - \delta_{ji})^{-1}$	$[\bar{K}] = [K]^T = ([X] - [I])^{-T}$

Примітка 2.3. У вітчизняній та російськомовній літературі часто замість словосполучення "*градієнт руху*" використовують інше: "*градієнт деформацій*". В англомовній літературі зазвичай використовують словосполучення "*deformation gradient*", а не "*strain gradient*". Це не випадково.

Strain – це деформація, а слово *deformation* має більш широке тлумачення, зокрема, й наближене до слова ***рух***. Дійсно, наприклад, згідно з виразом $[X]=[R][\upsilon_R]$ матриця $[X]$ містить не тільки матрицю $[\upsilon_R]$ градієнтів переміщень, а й матрицю жорсткого повороту $[R]$, причому в $[\upsilon_R]$ складові від жорсткого переміщення відсутні, оскільки воно не має градієнтів. Тобто застосування визначень "*strain*" та "*деформація*" буде звужувати зміст інформації матриці $[X]$.

Очевидно, що й назва "градієнт переміщень" в таблиці 2.3 не точно відповідає дійсності: градієнти $\boldsymbol{H}$ та $\boldsymbol{K}$ теж містять інформацію про жорсткій поворот елементарного об'єму.

2.5. Поняття про об'єктивні, індиферентні (просторові, Ейлерові), інваріантні (матеріальні, Лагранжеві) та ізотропні об'єкти: тензори, вектори та скаляри

Для побудови моделей деформівного твердого тіла використовують ***об'єктивні*** тензори, тобто такі, ***значення компонент яких не змінюються при перетвореннях, що відповідають жорсткому зміщенню/повороту***.

Очевидно, що *всі тензори таблиці 2.3 не є об'єктивними*, оскільки містять інформацію про жорсткій поворот елементарного об'єму.

Об'єктивними бувають не тільки тензори, а й вектори та скаляри.

Відомо, що рух точки тіла як абсолютно жорсткого в лагранжевих змінних описують виразом

$$\vec{x}^*(\vec{a},t)=\mathbf{R}(t)\cdot\vec{x}(\vec{a},t)+\vec{c}(t), \tag{2.34}$$

де $\vec{c}(t)$ – вектор жорсткого плоско-паралельного зміщення; $\mathbf{R}(t)$ – матриця жорсткого повороту з компонентами R^{ij}, тобто $\mathbf{RR}^T=\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}=\mathbf{I}$; $\det\mathbf{R}=1$.

Серед об'єктивних тензорів розрізняють ***інваріантні*** (позначимо їх як $\boldsymbol{Y}$) та ***індиферентні*** ($\boldsymbol{Z}$) тензори. Вони відповідно повинні мати такі властивості:

$$\boxed{\boldsymbol{Y}(\vec{x}^*)=\boldsymbol{Y}(\vec{x})}\;;\quad \boxed{\boldsymbol{Z}(\vec{x}^*)=\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{Z}(\vec{x})\cdot\mathbf{R}^T}\,. \tag{2.35}$$

Якщо ***об'єктивні*** тензори, вектори чи скаляри визначені в *матеріальному* відліковому базисі (***в тріаді Лагранжа***), то вони є ***інваріантними*** (матеріальними, Лагранжевими).

Якщо ***об'єктивні*** аналогічні об'єкти визначені в *локальному* базисі, що переміщується (***в тріаді Ейлера***), то вони є ***індиферентними*** (просторовими, Ейлеревими).

Приклади об'єктів: температура, густина матеріалу (скаляри), локальний "вморожений" базис (вектори), є й тензори, зокрема, деформацій та напружень.

Ізотропні об'єкти – ті, що не змінюються при будь-якому ***ортогональному*** перетворенні. Будь-який скаляр є ізотропнім; ізотропний вектор тільки один – нульовий; ізотропний тензор другого рангу теж тільки один – одиничний (оскільки $[\alpha I]=\alpha[I]$, де α – скаляр).

Контрольні питання до розділу

1. Надайте характеристику формулюванням Лагранжа та Ейлера, специфіку їхнього застосування.
2. Які координатні системи застосовують в кінематиці деформівного тіла?
3. Що таке основний та взаємний базис, чим вони відрізняються?
4. Що таке градієнт руху Гріна і як він пов'язаний з основним базисом?
5. Що пов'язує формула Нансона?
6. Які основні властивості має матриця градієнта руху Гріна?
7. Яким є алгоритм видалення жорсткого повороту з матриці градієнта руху?
8. Що це таке: тріада Ейлера та тріада Лагранжа?
9. Які загальні наслідки наявності двох варіантів полярної декомпозиції матриці градієнта руху Гріна?
10. Поняття про об’єктивні, індиферентні, інваріантні та ізотропні об’єкти.

Розділ 3

ДЕФОРМАЦІЇ, МІРИ ДЕФОРМАЦІЙ

3.1. Тензори (міри) деформацій

У Розділі 2.5 зазначено, що тензори просторових градієнтів, які зведені в таблицю 2.3, не є об'єктивними, тобто значення їхніх компонент змінюються при перетвореннях, що відповідають жорсткому зміщенню/повороту тіла. До того ж ці тензори не є симетричними. Тому їх застосування для побудови визначальних рівнянь недоречно. Потрібні об'єктивні та симетричні тензори.

3.1.1. Тензори деформацій Коші-Гріна й Піола

Компоненти *тензора деформацій* ***Коші-Гріна*** (тензора дилатації елементарного об'єму) визначають як

$$C_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = X_{mi}\vec{e}_m \cdot X_{nj}\vec{e}_n = X_{mi}\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n X_{nj} = X_{mi}\delta_{mn}X_{nj} = X_{mi}X_{mj}\,, \tag{3.1}$$

де згідно з (2.17), компоненти матриці градієнтів руху Гріна (Коші-Гріна)

$$X_{mi} = \partial x^m / \partial a^i = \delta_i^m + \partial u^m / \partial a^i\,; \quad m,i = 1,2,3\,; \tag{3.2}$$

$x^m = x^m(a^j)$ – поточні та $x^m(a^j,0) = a^m$ – початкові координати точки.

Примітка 3.1. У виразі $X_{mi}X_{mj}$ з (3.1) ліва матриця є транспонованою (див. (3.3)), оскільки індекси, за якими проводиться згортання, повинні бути суміжними, а верхні індекси (якщо вони є) вважаються першими.

Нагадаємо, що компоненти *матриці градієнтів руху Гріна* X_{mi} створюють матрицю $[X]$ (див. (2.18)), а з неї в (2.27) створили та застосовували матриці

$$\boxed{[\Theta] = [X][X]^T}\,; \quad \boxed{[C] = [X]^T[X]}\,. \tag{3.3}$$

Ще нагадаємо, що для проведення полярної декомпозиції (2.26) були задіяні вирази (2.27), а саме у такий спосіб:

$$[\Theta] = [X][X]^T = [\upsilon_L][R]([\upsilon_L][R])^T = [\upsilon_L]\left([R][R]^T\right)[\upsilon_L]^T = [\upsilon_L][\upsilon_L]^T = [\upsilon_L]^2\,; \tag{3.4}$$

$$[C] = ([R][\upsilon_R])^T[R][\upsilon_R] = [\upsilon_R]^T([R]^T[R])[\upsilon_R] = [\upsilon_R]^T[I][\upsilon_R] = [\upsilon_R]^T[\upsilon_R] = [\upsilon_R]^2\,. \tag{3.5}$$

Тут було враховано, що матриця жорсткого повороту є ортогональною: $[R]^T[R] = [R]^{-1}[R] = [I]$.

Обидві матриці $[\Theta]$ та $[C]$ є *симетричними* матрицями з компонентами *тензорів деформацій* ***Коші-Гріна***: ***лівого*** та ***правого*** тензора відповідно.

Якщо застосувати обернений градієнт руху $\boldsymbol{G} = G_{ij}\vec{E}^i \otimes \vec{E}^j$, де $G_{ij} = \partial a^i / \partial r^j$ (див. табл. 2.3) та провести його полярну декомпозицію, то одержимо *тензори деформацій* ***Піола***: теж ***лівий*** та ***правий*** тензор. Їхні матричні вирази:

$$[\Psi] = [G]^T[G] = [X]^{-T}[X]^{-1} = [\Theta]^{-1} = ([\upsilon_L][R])^{-T}([\upsilon_L][R])^{-1} =$$
$$= [\upsilon_L]^{-T}([R]^{-T}[R]^{-1})[\upsilon_L]^{-1} = [\upsilon_L]^{-T}[I][\upsilon_L]^{-1} = [\upsilon_L]^{-T}[\upsilon_L]^{-1} = [\upsilon_L]^{-2}\,; \tag{3.6}$$

$$[F]=[G][G]^T=[X]^{-1}[X]^{-T}=[C]^{-1}=([R][\upsilon_R])^{-1}([R][\upsilon_R])^{-T}=$$
$$=[\upsilon_R]^{-1}([R]^{-1}[R]^{-T})[\upsilon_R]^{-T}=[\upsilon_R]^{-1}[I][\upsilon_R]^{-T}=[\upsilon_R]^{-1}[\upsilon_R]^{-T}=[\upsilon_R]^{-2}. \quad (3.7)$$

Всі ці чотири тензори ***симетричні*** та ***об'єктивні*** (мають незмінні компоненти при жорсткому зміщенні та повороті). Тензори $\boldsymbol{\Theta}$ й $\boldsymbol{\Psi}$ ***індиферентні***, а $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{F}$ – ***інваріантні***.

3.1.2. Тензори деформацій Фінгера, Гріна-Лагранжа, Альмансі, Карні

Описані в попередньому підрозділі тензори деформацій Коші-Гріна й Піола мають такий недолік: ***ненульові*** *значення при* ***відсутності*** *деформацій*. Це тому, що їх значення містять *початкову метрику простору*.

Тому вводять прямо пов'язані з тензорами деформацій Коші-Гріна й Піола ***об'єктивні та симетричні тензори Фінгера*** $[\in]_F$***, Гріна-Лагранжа*** $[\in]_{GL}=[\in]$***, Альмансі (Альмансі-Гамеля)*** $[\in]_A$ ***та Карні (Карні-Райнера)*** $[\in]_K$***,*** які додатково володіють властивістю мати ***нульові компоненти при відсутності деформацій*** елемента об'єму (за рахунок видалення метричного тензора, який відповідає початковому стану). Їхні матричні визначення:

$$[\in]_F=0.5([\Theta]-[g])=0.5([\upsilon_L]^2-[g]); \quad (3.8)$$
$$\boxed{[\in]_{GL}=[\in]=0.5([C]-[g])=0.5([\upsilon_R]^2-[g])}; \quad (3.9)$$
$$\boxed{[\in]_A=0.5([g]-[\Psi])=0.5([g]-[\upsilon_L]^{-2})}; \quad (3.10)$$
$$[\in]_K=0.5([g]-[F])=0.5([g]-[\upsilon_R]^{-2}), \quad (3.11)$$

де в ДСК матриця $[g]=[I]$, тобто є одиничною. Оскільки тензор деформацій Гріна-Лагранжа $[\in]_{GL}$ використовують найчастіше, то зазвичай нижню позначку опускають, тобто пишуть просто $[\in]$.

Ці чотири симетричні тензори належать сім'ї тензорів *деформацій Хілла*.

Тензори деформацій Фінгера та Гріна-Лагранжа часто називають *лівим* та *правим* тензорами деформацій Гріна-Лагранжа відповідно.

Усі ці тензори зв'язані між собою достатньо простими співвідношеннями. Деякі з них наведені в підрозділі 3.1.5.

Примітка 3.2. Деформації Гріна-Лагранжа є наближенням, обмеженим ***першою*** похідною розкладу поточної координати точки в ряд: якщо $x=a+u$, то $dx=(\partial a/\partial a)da+(\partial u/\partial a)da+...\approx\left(1+\partial u/\partial a\right)da$. Саме так розглядав В.В. Новожилов деформацію Гріна-Лагранжа в знаменитій книзі "Теорія пружності" 1958 року видання [6], яка була першою книгою з цієї проблеми. Він доказав, що деформації Гріна-Лагранжа мають ***мірою*** величину $\in_{GL}=0.5(ds^2-ds_0^2)/ds_0^2$.

Тут квадрат довжини вектора, що зв'язує дві нескінченно близькі матеріальні точки, до і після деформування є, відповідно:

$$(ds_0)^2=d\vec{r}_0\cdot d\vec{r}_0=(da^i\vec{e}_i)\cdot(da_j\vec{e}^j)=da^i da_j\delta_i^j=da^i da_i=da^i g_{ij}da^j=g_{ij}da^i da^j; \quad (3.12)$$
$$ds^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=(da^i\vec{E}_i)\cdot(da_j\vec{E}^j)=C_i^j da^i da_j=C_{ij}da^i da^j=C^{ij}da_i da_j. \quad (3.13)$$

В одновимірному випадку при $ds \approx ds_0$ (нескінченно малі деформації) маємо $\in_{GL} = 0.5(ds - ds_0)(ds + ds_0) / ds_0^2 \approx (ds - ds_0)ds_0 / ds_0^2 = \Delta(ds) / ds_0 = \varepsilon$.

Всі інші міри деформацій теж є наближеннями, з достатньою для практичних обчислень точністю.

Зокрема, *деформації* ***Альмансі*** мають мірою величину $\in_A = 0.5(ds_0^2 - ds^2) / ds^2$. Вони використовують обернену залежність $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{a},t)$, тобто $\vec{a} = \vec{\Psi}(\vec{x},t)$. Для цього вводять ортогональний базис (***тріаду Ейлера***), який супроводжує актуальну матеріальну точку:

$$\boxed{\vec{p}_i = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta x^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}}; \quad i = 1,2,3, \tag{3.14}$$

причому вводять так, щоб

$$\boxed{\vec{p}_i = \mathbf{R}_E \cdot \vec{e}_i}; \quad i = 1,2,3, \tag{3.15}$$

де $[R]_E = [R][W_R] = [W_L]$. Відзначимо, що $\vec{r} = x^i \vec{p}_i$, а $\vec{a} = \vec{r} - \vec{u} = (x^i - u^i)\vec{p}_i$.

Тепер метричний тензор g_{ij} визначиться як

$$\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \mathbf{R}_E \vec{e}_i \cdot \mathbf{R}_E \vec{e}_j = (\mathbf{R}_E \mathbf{R}_E^T)\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \mathbf{I} g_{ij} = g_{ij} \quad \text{або} \quad g_{ij} = \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}. \tag{3.16}$$

Аналогічно (3.15) введемо вектор градієнта руху з відліком у базисі $\vec{p}_i$:

$$\boxed{\vec{\ni}_i = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} = \frac{\partial(\vec{r} - \vec{u})}{\partial x^i} = \vec{p}_i - \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} = (\delta_i^m - \tilde{\nabla}_i u^m)\vec{p}_m = G_{mi}\vec{p}_m}, \tag{3.17}$$

де в ДСК похідна $\tilde{\nabla}_i u^m = \partial u^m / \partial x^i$.

З (3.14) маємо, що $d\vec{r} = dx^i \vec{p}_i$. Квадрати довжини вектора, що зв'язує дві нескінченно близькі матеріальні точки, до і після деформування, тепер будуть:

$$(ds_0)^2 = d\vec{a}_0 \cdot d\vec{a}_0 = (dx^i \vec{p}_i) \cdot (dx^j \vec{p}_j) = \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j; \tag{3.18}$$

$$ds^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = (dx^i \vec{\ni}_i) \cdot (dx^j \vec{\ni}_j) = \vec{\ni}_i \cdot \vec{\ni}_j dx^i dx^j = \Psi_{ij} dx^i dx^j. \tag{3.19}$$

З (3.18) і (3.19) маємо інваріант

$$(ds_0)^2 - ds^2 \equiv (g_{ij} - \Psi_{ij}) dx^i dx^j, \tag{3.20}$$

який прямо пов'язаний з ***лівим тензором Піола Ψ*** та ***тензором деформацій Альмансі*** $\in_A$ в точці тіла щодо ***поточної*** конфігурації, з компонентами $(\in_{ij})_A = (g_{ij} - \Psi_{ij}) / 2$.

Із врахуванням (3.5), (2.29) та (2.30-б) тензор деформацій Гріна-Лагранжа (3.9) можна виразити як (ДСК, матричне представлення)

$$\boxed{[\in] = 0.5([C] - [I]) = 0.5([W_R][\underline{\upsilon}]^2[W_R]^T - [I]) = [W_R]\big(0.5([\lambda] - [I])\big)[W_R]^T}. \tag{3.21}$$

Тут враховано, що $[C] = [\upsilon_R]^T[\upsilon_R] = ([W_R][\underline{\upsilon}][W_R]^T)^T[W_R][\underline{\upsilon}][W_R]^T = [W_R][\underline{\upsilon}]^2[W_R]^T = [W_R][\lambda][W_R]^T$, а також властивість матриці власних векторів $[W_R][W_R]^T = [W_R]^T[W_R] = [I]$; $[W_R][I][W_R]^T = [I]$. Аналогічно можна отримати такі записи матриць з компонентами інших тензорів деформацій (ДСК):

$$[\in]_F = 0.5([\Theta] - [I]) = [W_L]\big(0.5([\lambda] - [I])\big)[W_L]^T; \tag{3.22}$$

$$\boxed{[\in]_A = 0.5([I]-[\Psi]) = [W_L]^{-1}(0.5([I]-[\lambda]^{-1})[W_L]^{-T}};\tag{3.23}$$

$$[\in]_K = 0.5([I]-[F]) = [W_R]^{-1}(0.5([I]-[\lambda]^{-1})[W_R]^{-T}.\tag{3.24}$$

3.1.3. Лівий та правий тензор логарифмічних деформацій Генкі

Якщо розглянути *повздовжнє деформування волокна* матеріалу з вихідною довжиною s_0 до поточної довжини s, то повздовжню деформацію цього волокна можна визначити як

$$\boxed{\in_H = \int_{s_0}^{s} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = \ln\left(\frac{s_0+\Delta s}{s_0}\right) = \ln(1+\varepsilon)},\tag{3.25}$$

де ***умовна*** (інженерна) деформація $\varepsilon = \Delta s / s_0$, а $\in_H$ – ***логарифмічна*** (натуральна) *деформація* ***Генкі*** (названа на честь H. Hencky, 1885-1951 рр.; розглядалася раніше, зокрема, П. Людвиком (P. Ludvik)).

Спосіб введення деформації Генкі вказує на те, що вона є *мірою повздовжнього деформування елементарних відрізків, кутових деформацій Генкі немає*.

Приклад 3.1. Якщо зміна довжини волокна матеріалу Δs викликана, наприклад, пружними, температурними та пластичними деформаціями, то можна записати, що $\Delta s = \Delta s^{e\theta p} = \Delta s^e + \Delta s^\theta + \Delta s^p$. Тоді замість (3.25) маємо, що

$$\in_H = (\in^{e\theta p})_H = \ln\left(\frac{s_0+\Delta s}{s_0}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta s^e + \Delta s^\theta + \Delta s^p}{s_0}\right) = \ln(1+\varepsilon^e+\varepsilon^\theta+\varepsilon^p).$$

Видалимо температурну деформацію з повних логарифмічних деформацій.

Спочатку запишемо, що $1+\varepsilon^e+\varepsilon^\theta+\varepsilon^p = \exp(\in_H)$, а після перенесення ε^θ у праву частину та обчислення логарифма маємо, що

$$(\in^{ep})_H = \ln(1+\varepsilon^e+\varepsilon^p) = \ln\left(\exp(\in_H)-\varepsilon^\theta\right).$$

Але так можна робити лише при відсутності зміни напрямку волокна.

Вираз (3.21), а саме його частина $\boxed{[\in] = [W_R]\left(0.5([\lambda]-[I])\right)[W_R]^T}$, показує, як можна створити ***правий тензор логарифмічних деформацій Генкі***. Для цього застосовують матрицю $[W_R]$ орієнтації головних осей проміжного стану відносно осей *основної* (нерухомої) системи координат:

$$\boxed{([\in]_H)_R = [W_R][\Delta]_H[W_R]^T},\tag{3.26-а}$$

тобто діагональна матриця $[\underline{\Delta}]_H$ зі значеннями *головних деформацій Генкі* підставляється замість діагональної матриці $0.5([\lambda]-[I])$, яка теж описує компоненти головних деформацій, але правого тензора Гріна-Лагранжа.

При цьому спочатку після знаходження матриці $[C]=[X]^T[X]$ знаходять матриці її власних значень $[\lambda]$ та векторів $[W_R]$. Три компоненти *головних умовних* деформацій $\underline{\varepsilon}_i = \sqrt{\lambda_i} - 1 = \underline{\upsilon}_i - 1$; $i = 1,2,3$ (див. (2.29)), тому значення діагональних членів діагональної матриці $[\underline{\Delta}]_H$ з головними деформаціями

Генкі для виразу (3.26-а) обчислюють як (далі ***підкреслюються всі головні значення***)

$$\boxed{(\underline{\Lambda}_{ii})_H = \ln\sqrt{\underline{\lambda}_i} = \ln \underline{\upsilon}_i = \ln(1+\underline{\varepsilon}_i) = (\underline{\in}_i)_H};\quad i = 1,2,3\,. \tag{3.27}$$

Дійсно, згідно з (2.17) при одновісному розтягненні вздовж першої вісі $X_{11} = 1 + h_{11} = 1 + \varepsilon_{11}$, а з (2.28-б) та (3.3) при $X_{21} = X_{31} = 0$ маємо $\lambda_1 = c_{11} = (X_{11})^2 =$ $= (1+\varepsilon_{11})^2 = 1 + 2\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11})^2$. Тоді значення компоненти деформації Гріна-Лагранжа $\in_{11} = 0.5(c_{11} - 1) = 0.5(1 + 2\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11})^2 - 1) = \varepsilon_{11} + 0.5(\varepsilon_{11})^2$, а умовна деформація $\varepsilon_{11} \approx \in_{11}$. Ще маємо $1 + \varepsilon_{11} = \sqrt{\lambda_1}$, тому $(\Lambda_{11})_H = \ln(1+\varepsilon_{11}) = \ln\sqrt{\lambda_1}$.

Окрім правого, вводиться й ***лівий тензор логарифмічних деформацій Генкі***

$$\boxed{([\in]_H)_L = [W_L]^T [\underline{\Lambda}]_H [W_L]}\,. \tag{3.28-а}$$

Лівий тензор логарифмічних деформацій Генкі є ***індиферентним***, на відміну від *правого* тензора, який є ***інваріантним*** об'єктом.

Компоненти $[\underline{\Lambda}]_H$, тобто $(\underline{\in}_i)_H$, часто використовують для виводу (візуалізації) результатів розрахунків у ***поточних напрямах головних осей деформацій***.

Примітка 3.3. Для підкреслення того, що використовуються логарифмічні деформації Генкі, в літературі часто записують замість формул (3.26-а) та (3.28-а) їхні спрощені (мнемонічні) записи:

$([\in]_H)_R = (\ln[\upsilon])_R$ або $([\in]_H)_R = [W_R][\ln \underline{\upsilon}][W_R]^T$, $([\in]_H)_R = [W_R][\ln \lambda][W_R]^T$; (3.26-б)

$([\in]_H)_L = (\ln[\upsilon])_L$ або $([\in]_H)_L = [W_L][\ln \underline{\upsilon}][W_L]^T$, $([\in]_H)_L = [W_L][\ln \lambda][W_L]^T$. (3.28-б)

Тобто ці позначення не можна вважати точними, але сутність логарифмічних деформацій Генкі вони відображають.

3.2. Зведена таблиця об'єктивних симетричних тензорів деформацій

Описані в підрозділах 3.1.1 … 3.1.3 тензори, із врахуванням введених в підрозділі 2.5 понять про індиферентні (просторові, Ейлерові) та інваріантні (матеріальні, Лагранжеві) об'єкти, зведемо в таблицю 3.1.

Показано, що тензори Карні та Фінгера є мірами деформування елементарних площадок, а всі інші – мірами деформування елементарних відрізків.

Примітка 3.4. Оскільки тензори Карні та Фінгера є мірами деформування елементарних площадок, а не елементарних відрізків, то при визначенні деформацій вони використовуються значно рідше, ніж інші.

В практиці розрахунків найчастіше застосовують тензори деформацій Гріна-Лагранжа, Альмансі та Генкі.

Таблиця 3.1. Різновиди об'єктивних симетричних тензорів деформацій (декартова система координат)

Назва тензора деформацій	Тензори	Компоненти (ДСК)	Матриці з компонент тензорів, зв'язок з $[X]$, $[\upsilon]$, $[\underline{\upsilon}]$
індиферентні (просторові, Ейлерові)			
Коші-Гріна лівий	$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\Theta_{ij} = X_{im}X_{jm} = (\upsilon_L)^2_{ij}$	$[\Theta] = [X][X]^T = [\upsilon_L]^2$
Піола лівий	$\boldsymbol{\Psi} = \Psi_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\Psi_{ij} = \Theta^{-1}_{ij} = (\upsilon_L)^{-2}_{ij}$	$[\Psi] = ([X][X]^T)^{-1} = [\upsilon_L]^{-2}$
Фінгера	$\in_F = (\in_{ij})_F\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$(\in_{ij})_F = (\Theta_{ij} - \delta_{ij})/2 =$ $= ((\upsilon_L)^2_{ij} - \delta_{ij})/2$	$[\in]_F = ([X][X]^T - [I])/2 =$ $= ([\upsilon_L]^2 - [I])/2$
Альмансі	$\in_A = (\in_{ij})_A\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$(\in_{ij})_A = (\delta_{ij} - \Psi_{ij})/2 =$ $= (\delta_{ij} - (\upsilon_L)^{-2}_{ij})/2$	$[\in]_A =$ $=([I]-[X]^{-T}[X]^{-1})/2 =$ $=([I]-[\upsilon_L]^{-2})/2$
Генкі лівий	$(\in_H)_L =$ $=((\in_{ij})_H)_L\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$((\in_{ij})_H)_L =$ $= (W_L)_{im}(\underline{\Lambda}_{mn})_H(W_L)_{jn}$	$([\in]_H)_L = [W_L]^T[\underline{\Lambda}]_H[W_L]$
інваріантні (матеріальні, Лагранжеві)			
Коші-Гріна правий	$\boldsymbol{C} = C_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$C_{ij} = X_{mi}X_{mj} = (\upsilon_R)^2_{ij}$	$[C] = [X]^T[X] = [\upsilon_R]^2$
Піола правий	$\boldsymbol{F} = B_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$F_{ij} = C_{ij}^{-1} = (\upsilon_R)^{-2}_{ij}$	$[F] = ([X]^T[X])^{-1} = [\upsilon_R]^{-2}$
Гріна-Лагранжа	$\in = \in_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\in_{ij} = (C_{ij} - \delta_{ij})/2 =$ $= ((\upsilon_R)^2_{ij} - \delta_{ij})/2$	$[\in] = ([X]^T[X] - [I])/2 =$ $= ([\upsilon_R]^2 - [I])/2$
Карні	$\in_K = (\in_{ij})_K\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$(\in_{ij})_K = (\delta_{ij} - F_{ij})/2 =$ $= (\delta_{ij} - (\upsilon_R)^{-2}_{ij})/2$	$[\in]_K =$ $=([I]-[X]^{-1}[X]^{-T})/2 =$ $=([I]-[\upsilon_R]^{-2})/2$
Генкі правий	$(\in_H)_R =$ $(\in_{ij})_H\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$((\in_{ij})_H)_R =$ $= (W_R)_{im}(\underline{\Lambda}_{mn})_H(W_R)_{jn}$	$([\in]_H)_R = [W_R][\underline{\Lambda}]_H[W_R]^T$

3.3. Визначення тензорів головних деформацій в головних осях (тріадах) Ейлера та Лагранжа

Окрім введеного виразом (3.14) ортогонального базису $\vec{p}_i$, який супроводжує актуальну матеріальну точку, введемо ще один ортогональний базис $\vec{q}_i$, причому пов'яжемо їх виразом

$$\boxed{\vec{q}_i = \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{p}_i}\,; \quad i = 1,2,3\,. \tag{3.29}$$

На рис.2.2 базис $\vec{p}_i$ відповідає головним осям лівого розкладу, а базис $\vec{q}_i$ – правого, тобто базис $\vec{p}_i$ є *тріадою Ейлера*, а базис $\vec{q}_i$ – *тріадою Лагранжа*.

Напрямні косинуси осей цих базисів містяться в стовпцях матриць $[W_L]$ та $[W_R]$ відповідно (див. підрозділ 2.3.3).

В цих базисах тензори мають нульові "бокові" компоненти, тобто матриці, що їм відповідають, є діагональними. Тому вирази (2.30) для тензорів градієнтів переміщень відповідно

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_L = \underline{\upsilon}_{ii}\, \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i}\,; \quad \boxed{\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_R = \underline{\upsilon}_{ii}\, \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i}\,; \quad i = 1,2,3\,. \tag{3.30}$$

де, згідно з (2.29), компоненти $\underline{\upsilon}_{ii} = \sqrt{\lambda_i} > 0$.

Наведені в таблиці 3.1 симетричні тензори деформацій теж можна записати в тріадах Ейлера й Лагранжа (див. таблицю 3.2).

Таблиця 3.2. Запис об'єктивних симетричних тензорів деформацій в тріадах Ейлера та Лагранжа

Назва тензора деформацій	**Тензори ($i = 1,2,3$)**
індиферентні (просторові, Ейлерові)	
Коші-Гріна лівий	$\underline{\boldsymbol{\Theta}} = \underline{\upsilon}_{ii}^2\, \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i = \lambda_i\, \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i$
Піола лівий	$\underline{\boldsymbol{\Psi}} = \underline{\upsilon}_{ii}^{-2}\, \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i = \lambda_i^{-1}\, \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i$
Фінгера	$\underline{\in}_F = 0.5(\underline{\upsilon}_{ii}^2 - 1)\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i = 0.5(\lambda_i - 1)\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i$
Альмансі	$\underline{\in}_A = 0.5(1 - \underline{\upsilon}_{ii}^{-2})\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i = 0.5(1 - \lambda_i^{-1})\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i$
Генкі лівий	$(\underline{\in}_H)_L = \ln(\underline{\upsilon}_{ii})\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i = \ln(\sqrt{\lambda_i})\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i$
інваріантні (матеріальні, Лагранжеві)	
Коші-Гріна правий	$\underline{\boldsymbol{C}} = \underline{\upsilon}_{ii}^2\, \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i = \lambda_i\, \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i$
Піола правий	$\underline{\boldsymbol{F}} = \underline{\upsilon}_{ii}^{-2}\, \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i = \lambda_i^{-1}\, \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i$
Гріна-Лагранжа	$\underline{\in} = 0.5(\underline{\upsilon}_{ii}^2 - 1)\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i = 0.5(\lambda_i - 1)\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i$
Карні	$\underline{\in}_K = 0.5(1 - \underline{\upsilon}_{ii}^{-2})\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i = 0.5(1 - \lambda_i^{-1})\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i$
Генкі правий	$(\underline{\in}_H)_R = \ln(\underline{\upsilon}_{ii})\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i = \ln(\sqrt{\lambda_i})\vec{q}_i \otimes \vec{q}_i$

Всі ці тензори мають лише головні значення, тобто їхні компоненти створюють діагональні матриці.

Вираз (2.32) для тензорів градієнтів переміщень зберігається; запишемо його у вигляді

$$\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_L = \boldsymbol{R}\,\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_R\,\boldsymbol{R}^T\,. \tag{3.31}$$

Із врахуванням (3.29) і (3.31) легко встановлюються зв'язки між відповідними парами тензорів, введених у базисах $\vec{p}_i$ та $\vec{q}_i$:

$$\underline{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{R}^T; \quad \underline{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{R}^T;$$

$$(\underline{\in}_H)_L = \boldsymbol{R}\,(\underline{\in}_H)_R\,\boldsymbol{R}^T; \quad \underline{\in}_F = \boldsymbol{R}\,\underline{\in}\,\boldsymbol{R}^T; \quad \underline{\in}_A = \boldsymbol{R}\,\underline{\in}_K\,\boldsymbol{R}^T\,. \tag{3.32}$$

3.4. Узагальнена класифікація мір деформації

Сформульовано (Doyle T.C., Ericksen J.L., 1956 р.) так званий узагальнений підхід до визначення мір деформацій.

При використанні тріад Ейлера або Лагранжа *узагальнений* тензор деформацій $\underset{\approx}{\in}$ записується у вигляді

$$\underset{\approx}{\in} = g(\underline{\upsilon}_{ii})\vec{v}_i \otimes \vec{v}_i\,, \tag{3.33}$$

де $\vec{v}_i$ є базисом ($\vec{p}_i$ або $\vec{q}_i$), а компоненти $g(\underline{\upsilon}_{ii})$ обчислюються як

$$\boxed{g(\underline{\upsilon}_{ii}) = \begin{cases} k^{-1}[(\underline{\upsilon}_{ii})^k - 1]; & k \neq 0; \\ \ln(\underline{\upsilon}_{ii}); & k = 0, \end{cases}} \tag{3.34}$$

причому $\underline{\upsilon}_{ii} > 0$, а k є цілим числом. Повинні виконуватися умови: $g(0) = 0$ та $g'(0) = 1$. Враховано, що відповідно до правила Лопіталя $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{g(\underline{\upsilon}_{ii})}{\ln(\underline{\upsilon}_{ii})} =$ $= \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{(\underline{\upsilon}_{ii})^k - 1}{k\ln(\underline{\upsilon}_{ii})} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\partial[(\underline{\upsilon}_{ii})^k - 1]/\partial k}{\partial[k\ln(\underline{\upsilon}_{ii})]/\partial k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{(\underline{\upsilon}_{ii})^k \ln(\underline{\upsilon}_{ii})}{\ln(\underline{\upsilon}_{ii})} = \lim\limits_{k\to 0}(\underline{\upsilon}_{ii})^k = 1$ для будь-яких значень $\underline{\upsilon}_{ii}$, тому $g(\underline{\upsilon}_{ii}) = \ln(\underline{\upsilon}_{ii})$ при $k = 0$.

Зокрема, з (3.34) при $k = 2$ та $\vec{v}_i = \vec{q}_i$ маємо випадок міри деформацій Гріна-Лагранжа, при $k = -2$ та $\vec{v}_i = \vec{p}_i$ – міри Альмансі, а при $k = 0$ та $\vec{v}_i = \vec{p}_i$ – логарифмічної міри Генкі. При $k = 1$ та $\vec{v}_i = \vec{q}_i$ будемо мати міру деформації Біота (така теж є).

Примітка 3.5. Оскільки компоненти $\underline{\upsilon}_{ii} = \sqrt{\lambda_i} > 0$, вирази (3.28-а), (3.26-а) та інші, які записані в базисі $\vec{e}_i$ (в матричній формі), часто записують аналогічно (3.33) в узагальненому вигляді через функцію $g(\underline{\upsilon}_{ii}) = g(\lambda_i) = g([\lambda])$:

$$\boxed{([\in])_L = [W_L]^T [g([\lambda])][W_L]}\,; \tag{3.28-в}$$

$$\boxed{([\in])_R = [W_R][g([\lambda])][W_R]^T}\,, \tag{3.26-в}$$

де, наприклад, діагональна матриця $[g([\lambda])] = 0.5([\lambda] - [I])$ для правого тензора деформацій Гріна-Лагранжа та $[g([\lambda])] = [\ln\lambda]$ для правого тензора деформацій Генкі. Тобто узагальнену класифікацію мір деформацій можна формулювати й у вихідному базисі, у матричному вигляді, хоча нічого нового це не дає.

3.5. Числовий приклад порівняльного аналізу деяких мір тензорів деформацій

Дуже корисними є числові приклади, що ілюструють важливіші положення теорії.

Приклад 3.2. Візьмемо дані з Прикладу 2.1 та визначимося з деформаціями, що були закладені у матрицю градієнта $[X]$.

Таблиця 3.3. Головні деформації, матриці компонент тензорів деформацій

Лівий розклад	Правий розклад
$(\underline{\Delta}_{11})_H = 0.444698$; $(\underline{\Delta}_{22})_H = 0.235066$; $(\underline{\Delta}_{33})_H = -0.139769$	
$\underline{\in}_1 = 0.716831$; $\underline{\in}_2 = 0.300102$; $\underline{\in}_3 = -0.121933$	
$[\in]_F = \begin{bmatrix} 0.345 & 0.260 & 0.325 \\ & 0.300 & -0.020 \\ Sym & & 0.250 \end{bmatrix}$	$[\in] = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.190 & 0.275 \\ & 0.240 & -0.110 \\ Sym & & 0.105 \end{bmatrix}$
$([\in]_H)_L = \begin{bmatrix} 0.185781 & 0.178176 & 0.228839 \\ & 0.203773 & -0.053146 \\ Sym & & 0.150442 \end{bmatrix}$	$([\in]_H)_R = \begin{bmatrix} 0.328619 & 0.129265 & 0.193633 \\ & 0.169542 & -0.113262 \\ Sym & & 0.041834 \end{bmatrix}$

Як бачимо, різні розклади призводять до різних значень деформацій при однакових значеннях головних деформацій. Це тому, що напрямки цих головних деформацій є різними (див. рис.2.2): в їх положенні жорсткий поворот враховано (лівий розклад) або не враховано (правий розклад).

3.6. Вироджений випадок: "нескінченно малі" деформації

У випадку "нескінченно малих" деформацій всі міри деформацій дають однакові значення деформацій, такі ж, як і при використанні лінійного тензора деформацій Коші, з компонентами $\varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$.

Оскільки у тензорі деформацій Гріна-Лагранжа (3.8) "відфільтрована" матриця повороту $[R]$ і він не залежить від жорсткого повороту елементарного об'єму тіла, то будь-яке його наближення, зокрема, вказаний тензор "нескінченно малих" деформацій $\varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$, який є лінійним наближенням компонент тензора деформацій Гріна-Лагранжа, генерує *паразитні* (насправді відсутні) деформації при жорсткому повороті елементарного об'єму тіла. Наприклад, якщо елементарний об'єм жорстко повернути відносно осі на кут у 90 градусів, то ці формули згенерують дві компоненти тензора деформації величиною в мінус одиницю, тобто величиною у 100% на стискування! Саме тому формулою $\varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$ не можна користуватися навіть для моделювання малих деформацій при наявності значного жорсткого повороту елементарного об'єму тіла.

При повороті елемента тіла на 5 градусів паразитні деформації, які генеруються рівняннями "нескінченно малих" деформацій, будуть досягати 0.38% при повної відсутності реальних деформацій, а при додаткової наявності однієї з осьових деформацій в 2%, "нескінченно малі" деформації будуть мати значення $\approx 1.6\%$, тобто обчислюватися з погрішністю майже у 20%.

Які кути повороту допустимі при застосуванні рівнянь $\varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$? Чисельні експерименти показують, що конкретної відповіді немає, оскільки погрішності дуже залежать від рівня та спрямованості деформацій. Тому потрібно розв’язувати конкретну задачу як геометрично нелінійну та геометрично лінійну, потім в актуальних точках тіла порівняти величини $\in_{ij}$ з ε_{ij}, а також напруження, й оцініть погрішності.

В моделі середовища з "нескінченно малими" деформаціями при наявності двох або більшої кількості типів деформацій використовують принцип суперпозиції деформацій різних типів. Похибки, що виникають при використанні цього принципу, вважаються невеликими лише у межах приблизно до 2% деформації. При більших величинах деформацій похибки вже зовсім неприйнятні, потрібно застосовувати модель великих деформацій (large strain).

Контрольні питання до розділу

1. Тензори деформацій Коші-Гріна й Піола, їхні властивості.
2. Тензори деформацій Фінгера, Гріна-Лагранжа, Альмансі, Карні, їхні властивості.
3. Поняття про логарифмічні деформації.
4. Лівий та правий тензор логарифмічних деформацій Генкі.
5. Яким чином визначаються тензори головних деформацій в головних осях (тріадах) Ейлера та Лагранжа?
6. Яким чином пов’язані проміж собою тріади Ейлера та Лагранжа?
7. Наведіть узагальнену класифікацію мір деформації.

Розділ 4

НАПРУЖЕННЯ, МІРИ НАПРУЖЕНЬ

4.1. Модель міжатомної взаємодії. Зусилля та напруження

4.1.1. Модель міжатомної взаємодії

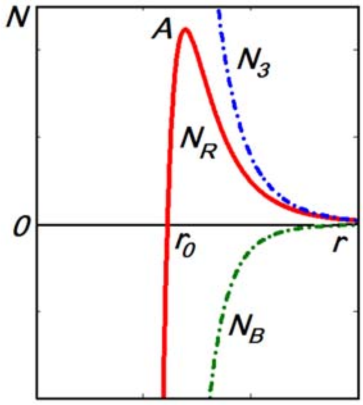


Рис.4.1. Модель парної взаємодії атомів: графіки сил міжатомної взаємодії

Тверді деформівні середовища мають таку фундаментальну властивість, як міцність. Під ***міцністю*** розуміють здатність твердих тіл витримувати визначене навантаження, не руйнуючись. Природною основою міцності є баланс сил міжатомних взаємодій.

Розглянемо *модель парної взаємодії атомів*.

Відстань між центрами двох атомів позначимо як r, а рівноважну відстань – як r_0. Між атомами діють сили, що зближують $N_З > 0$, а також сили відштовхування $N_В < 0$ (причини їх виникнення тут не обговорюємо). Для твердих матеріалів функція $N_З = N_З(r) \sim r^{-m}$, а функція $N_В = N_В(r) \sim (-r^{-n})$, причому $0 < m < n$. Зусилля, що врівноважує, $N_R(r) = N_З(r) + N_В(r)$. При $r = r_0$, тобто при відсутності деформації, атоми врівноважені, тобто $N_R(r_0) = N_З(r_0) + N_В(r_0) = 0$. Графіки зусиль моделі (при $m = 7,\ n = 9$) зображено на рис.4.1.

З моделі парної взаємодії атомів є три важливі *висновки*:

• при збільшенні відстані між атомами завжди є граничне значення зусилля N_R (точка А), після якого відбувається розрив міжатомного зв’язку, а для його повернення потрібно затратити додаткову енергію (зазвичай, потрібно розплавлення матеріалу);

• при зближенні атомів ніколи не може відбутися розриву зв’язків, оскільки результуюча сила уходить на мінус нескінченність (при $r \to 0$ повинне відбутися видалення електронного оточення ядер атомів, а на це потрібні міліонні значення температури та тиску, що неможливо в земних умовах);

• значення модуля Юнга E пропорційне дотичній до кривої $N_R(r)$ в околі r_0, тобто при $r \approx r_0$:

$$\boxed{E \sim \frac{dN_R}{dr}}. \qquad (4.1)$$

Ці висновки вказують на те, що і межа міцності на розрив, і модуль Юнга мають глибинну (атомарну) фізичну основу.

4.1.2. Зусилля та напруження

Внутрішня сила, яка спрямована на утримання двох атомів у врівноваженому стані, $N_R(r) \in [-\infty, N_R(r_A)]$, виникає тільки при примусової зміні відстані між центрами атомів, тобто при примусовому деформуванні. Цю внутрішню силу, що виникає, називають ***зусиллям***.

Приклад 4.1. Якщо рукою надавити на стіну, то відчувається спротив. Це атоми на поверхні стіни пручаються деформуванню. Згідно з третім законом Ньютона, сила протидії дорівнює силі дії.

Приклад 4.2. Якщо подумки розсікти примусово здеформоване тіло площиною та відкинути одну частину, друга частина тіла повинна залишитися у рівновазі, тобто відкинуту частину потрібно замінити внутрішньою силою – а саме зусиллям.

Напруження (повна назва: механічне напруження) – це *зусилля, що припадає на одиницю площі перерізу*. *Тобто напруження є інтенсивністю зусилля, його мірою*. Їх розглядають на елементарних поверхнях dS елементарного об’єму $d\Omega$ (у форми паралелепіпеда) та розкладають на напрями: **нормальні** та **дотичні**, в результаті отримують тензор напружень другого рангу.

Значення напружень неможливо поміряти безпосередньо, але їх можна розрахувати. Отримані значення використовують як міру навантаження та опору матеріалу процесу деформування.

4.2. Тензори (міри) напружень Ейлера-Коші, Кірхгофа та Піола-Кірхгофа

За визначенням Л. Ейлера (1707-1783 рр.) та О.Л. Коші (1789-1857 рр.), напруження – це внутрішня сила, яка діє на елементарній площадці, віднесена до її площі при умові прагнення цієї площі до нуля. Крім того, розглядаються шість елементарних площадок на сторонах елементарного (нескінченно малого) *паралелепіпеда*, який подумки вирізається з тіла.

Результуючий вектор напружень на елементарній площадці dS_1, яка перпендикулярна $\vec{e}_1$, позначимо як $\vec{\sigma}^1 dS_1$, де $\vec{\sigma}^1$ – вектор напружень на одиниці площі dS_1. Аналогічно введемо вектори напружень $\vec{\sigma}^2$ та $\vec{\sigma}^3$. Кожні три n-ті компоненти векторів

$$\vec{\sigma}^m = \sigma^{mn}\vec{e}_n \,. \tag{4.2}$$

в основному базисі $\vec{e}_n$, а саме σ^{mn}, називаються контраваріантними компонентами симетричного *тензора напружень* ***Ейлера-Коші***

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{mn}\vec{e}_n \otimes \vec{e}_m = \sigma^{nm}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n = \sigma^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n} \,. \tag{4.3}$$

Тобто цей тензор містить такі напруження: ***нормальні*** до елементарних площадок σ^{mn}; $m = n = 1,2,3$, та ***дотичні*** до них $\sigma^{mn} = \sigma^{nm}$; $m \neq n$; $m,n = 1,2,3$. Перший індекс вказує, перпендикулярно до якої осі $\vec{e}_m$ розташована елементарна площадка, а другий – напрям напруження, тобто вздовж якої осі $\vec{e}_n$ направлена компонента тензора напружень.

Але не завжди напрями визначає вихідний *глобальний* базис $\vec{e}_m$. Іноді напрям компонент напружень визначає вихідний *локальний* базис, наприклад, в пластинах та оболонках вектор $\vec{e}_3$ зазвичай перпендикулярний центральній поверхні; в стрижнях – паралельний поздовжній осі. Але найчастіше застосовують *ортогональний* базис.

В кожній точці нахиленої площадки dS, зовнішня нормаль до якої $\vec{\nu}$ має компоненти ν_m, результуючий вектор напружень Ейлера-Коші

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^m \nu_m = \sigma^{mn} \vec{e}_n \nu_m = \sigma^{nm} \nu_m \vec{e}_n = \sigma^{mn} \nu_n \vec{e}_m . \tag{4.4}$$

При наявності геометричної нелінійності розглядаються ще кілька мір тензорів напружень.

Компоненти векторів

$$\boxed{\underset{\sim}{\vec{\sigma}}^m = \underset{\sim}{\sigma}^{mn} \vec{E}_n} . \tag{4.5}$$

в *здеформованому* базисі $\vec{E}_n$, а саме $\underset{\sim}{\sigma}^{mn}$, називаються (контраваріантними) компонентами симетричного *другого тензора напружень* ***Піола*** (1836) – ***Кірхгофа*** (1850):

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\sigma}^{mn} \vec{E}_m \otimes \vec{E}_n . \tag{4.6}$$

В кожній точці нахиленої площадки dS, зовнішня нормаль до якої $\vec{\nu}$ має компоненти ν_m, результуючий вектор тензора напружень Піола-Кірхгофа

$$\underset{\sim}{\vec{\sigma}} = \underset{\sim}{\vec{\sigma}}^m \nu_m = \underset{\sim}{\sigma}^{mn} \vec{E}_n \nu_m = \underset{\sim}{\sigma}^{nm} \nu_m \vec{E}_n = \underset{\sim}{\sigma}^{mn} \nu_n \vec{E}_m . \tag{4.7}$$

Але, оскільки при деформуванні базис $\vec{E}_n$ зазвичай не є ортогональним, то $\underset{\sim}{\vec{\sigma}}$ у вигляді (4.7) якщо й застосовують, то лише як деяку розрахункову (допоміжну) дефініцію. Оскільки в різних точках здеформованого тіла напрямки локального здеформованого базису $\vec{E}_n$ відносно осей $\vec{e}_n$ будуть різними, то результати розрахунків є сенс представляти відносно осей $\vec{e}_n$, тобто відносно відомих початкових напрямів. Саме тому перед представленням результатів розрахунків, а саме напружень, зазвичай переходять до компонент тензора Ейлера-Коші. Крім того, оскільки на момент обчислення компонент САР поточна геометрія тіла не є визначеною (див. Розділ 2.1), то приходиться використовувати опорну конфігурацію. Наприклад, у випадку **TL**-формулювання опорною конфігурацією є *вихідна* конфігурація.

Симетричний *другий тензор напружень* ***Піола-Кірхгофа***

$$(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 \vec{E}_m \otimes \vec{E}_n , \tag{4.8}$$

на поверхні вихідної конфігурації dS_0 створює результуючий вектор напружень

$$\boxed{(\underset{\sim}{\vec{\sigma}})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 \vec{E}_n (\nu_m)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{nm})_0 (\nu_m)_0 \vec{E}_n = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 (\nu_n)_0 \vec{E}_m} , \tag{4.9}$$

причому *розглядається саме та поверхня* dS_0, *яка перетворилася в* dS .

Компоненти векторів

$$(\vec{T}^m)_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_n \,. \qquad (4.10)$$

в *основному* базисі $\vec{e}_n$, а саме $(T^{mn})_0$, називаються (контраваріантними) компонентами несиметричного *першого тензора напружень* ***Піола-Кірхгофа*** (*тензора напружень Лагранжа*):

$$(\boldsymbol{T})_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \,. \qquad (4.11)$$

Його визначають шляхом проектування компонент тензора Ейлера-Коші до *початкової* геометрії з *повним* урахуванням змін елементарної площадки: як її розміру, так й орієнтації. Тому у кожній точці поверхні dS_0 він створює результуючий вектор напружень

$$\boxed{(\vec{T})_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_n (\nu_m)_0 = (T^{nm})_0^T (\nu_m)_0 \vec{e}_n = (T^{mn})_0^T (\nu_n)_0 \vec{e}_m} \,. \qquad (4.12)$$

Надалі 1-й $(\boldsymbol{T})_0$ та 2-й $(\underset{\sim}{\sigma})_0$ тензори напружень Піола-Кірхгофа, для скорочення запису, будемо називати абревіатурами **ТН1ПК** і **ТН2ПК** відповідно.

Примітка 4.1. Підкреслимо, що компоненти тензора напружень Ейлера-Коші завжди мають відомі напрямки: *паралельні* осям базису $\vec{e}_n$, але визначаються на здеформованих поверхнях dS_n, *перпендикулярних* осям $\vec{e}_n$ (з фіксованим положенням). Компоненти ТН2ПК, навпаки, мають напрямками базис $\vec{E}_m$, який в загальному випадку не ортогональний та в кожній точці тіла зорієнтований індивідуально; однак вони визначаються на не здеформованих поверхнях $(dS_m)_0$, які були здеформовані в поверхні dS_n. Індивідуальна орієнтація робить ТН2ПК допоміжним, який використовується для проміжних обчислень.

Напруження

$$\boxed{\tau^{mn} = J\sigma^{mn}} \qquad (4.13)$$

називають *напруженнями* ***Кірхгофа***.

Введемо матриці з компонентами розглянутих тензорів напружень:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^{11}; & \sigma^{12}; & \sigma^{13} \\ & \sigma^{22}; & \sigma^{23} \\ symm & & \sigma^{33} \end{bmatrix}; \quad [\tau] = \begin{bmatrix} \tau^{11}; & \tau^{12}; & \tau^{13} \\ & \tau^{22}; & \tau^{23} \\ symm & & \tau^{33} \end{bmatrix};$$

$$[T]_0 = \begin{bmatrix} (T^{11})_0; & (T^{12})_0; & (T^{13})_0 \\ (T^{21})_0; & (T^{22})_0; & (T^{23})_0 \\ (T^{31})_0; & (T^{32})_0; & (T^{33})_0 \end{bmatrix}; \quad [\underset{\sim}{\sigma}]_0 = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{\sigma}^{11})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{12})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{13})_0 \\ & (\underset{\sim}{\sigma}^{22})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{23})_0 \\ symm & & (\underset{\sim}{\sigma}^{33})_0 \end{bmatrix}. \qquad (4.14)$$

Є й інші тензори напружень. Між всіма видами тензорів напружень існують однозначні перетворення, деякі з них розглянуто в наступних розділах.

4.3. Зв’язки між компонентами тензорів напружень

4.3.1. Співвідношення між компонентами тензорів напружень Кірхгофа, Ейлера-Коші та Піола-Кірхгофа

Із застосуванням співвідношень між базисними векторами $\vec{E}_n$ та $\vec{e}_i$, формули Нансона, розглядаючи різні представлення результуючих векторів напружень за напрямками та прирівнюючи їх між собою, отримані такі формули зв’язків між компонентами різних мір напружень:

$$(T^{mi})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X_{in} \quad \text{або} \quad \boxed{[T]_0 = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T}\,; \tag{4.15}$$

$$J\,\sigma^{mn} = X_{mj} (\underset{\sim}{\sigma}^{ji})_0 X_{ni} \quad \text{або} \quad \boxed{J[\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T}\,. \tag{4.16}$$

Оскільки матриця $[\sigma]$ є симетричною, то конгруентна їй матриця $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ теж є симетричною, тобто ТН2ПК дійсно є симетричним тензором. Нагадаємо, що матриця $[T]_0$ не є симетричною.

Отже, співвідношення між компонентами всіх чотирьох тензорів: Кірхгофа, Ейлера-Коші, ТН2ПК та ТН1ПК:

$$\boxed{\tau^{mn} = J\,\sigma^{mn} = X_{nj} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 X_{mi} = X_{mj} (T^{jn})_0} \quad \text{або} \quad \boxed{[\tau] = J[\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T = [X][T]_0}\,. \tag{4.17}$$

4.3.2. Тензори напружень "з видаленим поворотом"

Тензор деформацій Генкі, введений в Розділі 3.1.3, може застосовуватися для обчислення напружень у точці тіла при великих деформаціях (буде доказано в підрозділі 5.2). Матриця $[\underset{\sim}{\Lambda}]_H$ у формулах (3.26-а) та (3.28-а) містить компоненти тензора головних деформацій Генкі. Якщо з них виділити пружні складові, тобто $[\underset{\sim}{\Lambda}^e]_H$, та застосувати фізичний закон, наприклад, закон Гука, то компонентам $[\underset{\sim}{\Lambda}^e]_H$ головних деформацій Генкі будуть відповідати головні компоненти тензора напружень, позначимо діагональну матрицю з ними як $[\underset{\sim}{\Sigma}]$. Компоненти $[\underset{\sim}{\Sigma}]$ також можуть обчислюватися із застосуванням фізичних рівнянь на основі головних компонент тензора деформацій будь-якої іншої міри деформації.

Якщо користувалися ***інваріантним*** (правим) тензором деформацій, то напрямні косинуси $[\underset{\sim}{\Sigma}]$ зібрані в матриці $[W_R^e]$, яка обчислюється аналогічно матриці $[W_R]$ згідно з теоремою Коші про полярну декомпозицію (див. підрозділ 2.3.3) з матриці "пружного градієнта руху" $[X^e]$ (про цю матрицю буде далі). Тоді можна обчислити матрицю з компонентами симетричного "*тензора **Ейлера-Коші з видаленим поворотом***"

$$\boxed{[\Sigma] = [W_R^e][\underset{\sim}{\Sigma}][W_R^e]^T}\,. \tag{4.18}$$

Якщо всі деформації пружні, то $[X^e] = [X]$ та $[W_R^e] = [W_R]$.

Щоб отримати напруження Ейлера-Коші $[\sigma]$, залишилося врахувати жорсткий поворот, тобто застосувати матрицю повороту $[R]$. Тому залежності між компонентами $[\underset{\sim}{\Sigma}]$, $[\Sigma]$ та $[\sigma]$ – через матриці повороту $[R]$ та $[R^e]_E = [R][W_R^e]$:

$$\boxed{[\sigma] = [R][\Sigma][R]^T = [R]([W_R^e][\underset{\sim}{\Sigma}][W_R^e]^T)[R]^T = [R^e]_E[\underset{\sim}{\Sigma}][R^e]_E^T}. \tag{4.19-а}$$

Якщо користувалися ***індиферентним*** (лівим) тензором деформацій, то напрямні косинуси $[\underset{\sim}{\Sigma}]$ зібрані в матриці $[W_L^e]$, а жорсткий поворот вже врахований. Із застосуванням формул полярної декомпозиції градієнта руху можемо визначити, що

$$[R^e]_E = [R][W_R^e] = [W_L^e], \tag{4.20}$$

тому (4.19-а) можемо записати як

$$\boxed{[\sigma] = [W_L^e][\underset{\sim}{\Sigma}][W_L^e]^T}. \tag{4.19-б}$$

З першої частини (4.19-а), оскільки $[R]^{-1} = [R]^T$ та $[R]^{-T} = [R]$, отримаємо, що матриця

$$\boxed{[T] = J[\Sigma] = J[R]^T[\sigma][R]} \tag{4.21}$$

містить компоненти симетричного "*тензора напружень **Кірхгофа з видаленим поворотом***" (тензор напружень Кірхгофа $[\tau] = J[\sigma]$, див. вираз (4.13)), або (інакше) *тензора **Нолла***.

З (4.17) маємо, що

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}[\sigma][X]^{-T} = [X]^{-1}[\tau][X]^{-T}. \tag{4.22}$$

Якщо застосувати правий розклад (2.26-б), тобто $[X] = [R][\upsilon_R]$, з (4.22) із врахуванням $[R]^{-1} = [R]^T$, $[R]^{-T} = [R]$, $[\upsilon_R]^{-T} = [\upsilon_R]^{-1}$ (симетричності $[\upsilon_R]$) та (4.21) отримаємо зв'язок між матрицями $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ та $[T]$:

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J([R][\upsilon_R])^{-1}[\sigma]([R][\upsilon_R])^{-T} = [\upsilon_R]^{-1}(J[R]^{-1}[\sigma][R]^{-T})[\upsilon_R]^{-T} = [\upsilon_R]^{-1}[T][\upsilon_R]^{-1}. \tag{4.23}$$

Іноді у математичних викладках створюється вираз $[\upsilon_R][T][\upsilon_R]$. Вважається, що матриця

$$\boxed{[T]_{GR} = [\upsilon_R][T][\upsilon_R]} \tag{4.24}$$

містить компоненти "*тензора напружень **Гріна-Рівліна***". Якщо в (4.24) підставити (4.21), то, із врахуванням полярної декомпозиції градієнта руху (2.26-б) $[T]_{GR} = [\upsilon_R](J[R]^T[\sigma][R])[\upsilon_R] = J[X]^T[\sigma][X]$, остаточно:

$$\boxed{[T]_{GR} = J[X]^T[\sigma][X]}. \tag{4.25}$$

4.3.3. "Повернуті" тензори напружень

Якщо застосувати лівий розклад (2.26-а), тобто $[X] = [\upsilon_L][R]$, з (4.22) із врахуванням $[R]^{-1} = [R]^T$ та $[R]^{-T} = [R]$ отримаємо вираз

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J([\upsilon_L][R])^{-1}[\sigma]([\upsilon_L][R])^{-T} = [R]^{-1}([\upsilon_L]^{-1}J[\sigma][\upsilon_L]^{-T})[R]^{-T} = [R]^T[\underset{\sim}{\Sigma}]_0[R]. \tag{4.26}$$

Із врахуванням $[\upsilon_L]^{-T}=[\upsilon_L]^{-1}$ (симетричності $[\upsilon_L]$) тут введено позначення для матриці

$$[\underset{\sim}{\Sigma}]_0 = J[\upsilon_L]^{-1}[\sigma][\upsilon_L]^{-1} = [\upsilon_L]^{-1}[\tau][\upsilon_L]^{-1} \qquad (4.27)$$

з компонентами "***повернутого ТН2ПК***". З крайніх виразів (4.26)

$$\boxed{[\underset{\sim}{\Sigma}]_0 = [R][\underset{\sim}{\sigma}]_0[R]^T}\,. \qquad (4.28)$$

Іноді у математичних викладках створюється вираз $[\upsilon_L][\tau][\upsilon_L]$. Вважається, що матриця

$$[\tau]_{GR} = [\upsilon_L][\tau][\upsilon_L] \qquad (4.29)$$

містить компоненти "***повернутого тензора напружень Гріна-Рівліна***". Якщо в (4.29) підставити (4.13), то:

$$\boxed{[\tau]_{GR} = J[\upsilon_L][\sigma][\upsilon_L]}\,. \qquad (4.30)$$

4.4. Зведена таблиця тензорів напружень

Всі розглянуті симетричні тензори напружень є об'єктивними, тобто значення їх компонент не змінюються при перетвореннях, що відповідають жорсткому зміщенню/повороту тіла (див. формули (2.34) та (2.35)).

Описані в розділах 4.2 й 4.3 об'єктивні тензори напружень, із врахуванням введених в Розділі 2.5 понять про індиферентні та інваріантні об'єкти, зведемо в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1. Різновиди об'єктивних (симетричних) тензорів напружень

Назва тензора напружень	**Тензори**	**Зв'язок з $[\sigma]$**	
		Компоненти	**Матриці**
індиферентні			
Ейлера-Коші	$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$	σ^{mn}	$[\sigma]$
Кірхгофа	$\boldsymbol{\tau} = \tau^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$	$\tau^{mn} = J\sigma^{mn}$	$[\tau] = J[\sigma]$
ТН2ПК повернутий	$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_0 = (\Sigma^{mn})_0 \vec{p}_m \otimes \vec{p}_n$	$(\underset{\sim}{\Sigma}^{ij})_0 = J(\upsilon_L)^{-1}_{mi}\sigma^{mn}(\upsilon_L)^{-1}_{jn}$	$[\underset{\sim}{\Sigma}]_0 = J[\upsilon_L]^{-1}[\sigma][\upsilon_L]^{-1}$
Гріна-Рівліна повернутий	$\boldsymbol{\tau}_{GR} = (\tau_{mn})_{GR}\vec{p}^m \otimes \vec{p}^n$	$(\tau_{ij})_{GR} = J(\upsilon_L)_{im}\sigma^{mn}(\upsilon_L)_{nj}$	$[\tau]_{GR} = J[\upsilon_L][\sigma][\upsilon_L]$
інваріантні			
ТН2ПК на $(dS)_0$	$(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$	$(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = J\,X^{-1}_{mi}\sigma^{mn}X^{-T}_{nj}$	$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}[\sigma][X]^{-T}$
Ейлера-Коші з видаленим поворотом	$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma^{mn}\vec{q}_m \otimes \vec{q}_n$	$\Sigma^{ij} = R_{mi}\sigma^{mn}R_{nj}$	$[\Sigma] = [R]^T[\sigma][R]$
Нолла (Кірхгофа з видаленим поворотом)	$\boldsymbol{T} = T^{mn}\vec{q}_m \otimes \vec{q}_n$	$T^{ij} = JR_{mi}\sigma^{mn}R_{nj}$	$[T] = J[R]^T[\sigma][R]$
Гріна-Рівліна	$\boldsymbol{T}_{GR} = (T_{mn})_{GR}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$	$(T_{ij})_{GR} = JX_{mi}\sigma^{mn}X_{nj}$	$[T]_{GR} = J[X]^T[\sigma][X]$

4.5. Вироджений випадок: напруження при нескінченно малих деформаціях та поворотах

У випадку "нескінченно малих" деформацій та поворотів співпадають не тільки всі значення компонент тензорів деформацій, отримані із застосуванням різних мір, а й всі значення компонент різноманітних тензорів напружень. Те ж стосується й їхніх головних напрямків.

Контрольні питання до розділу

1. Яки три важливі *висновки* можна зробити з моделі парної взаємодії атомів?
2. Що це таке та чим відрізняються зусилля та механічні напруження?
3. Яким чином вводяться тензори (міри) напружень Ейлера-Коші, Кірхгофа та Піола-Кірхгофа?
4. Чи є взаємно-однозначні співвідношення між компонентами тензорів напружень Кірхгофа, Ейлера-Коші та Піола-Кірхгофа?
5. Які ще є міри напружень?

Розділ 5

СПРЯЖЕНІ ТЕНЗОРИ ДЕФОРМАЦІЙ ТА НАПРУЖЕНЬ

5.1. Другий закон термодинаміки. Тензор швидкості деформації

Для несуперечливого формулювання фізичних рівнянь, що описують стан матеріалу в елементарному об’ємі, використовують закони термодинаміки.

Відомо, що *першим законом термодинаміки* є закон збереження енергії.

Другий закон термодинаміки (для відносно повільних процесів у об’єкті) часто записують у вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема:

$$\bar{\rho}\dot{\psi} \le \sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho} s \dot{\theta} - \frac{\bar{q}_m}{\theta} \nabla_m \theta\,, \tag{5.1}$$

де $\bar{\rho}$ – питома густина середовища; σ^{mn} – компоненти симетричного тензора напружень Ейлера-Коші; d_{mn} – компоненти симетричної частини тензора швидкості деформації; θ – температура (абсолютна); s – питома ентропія; $\bar{q}_m$ – компоненти теплового потоку у об’єкт ззовні; величина ψ є питомою вільною енергією системи (Гельмгольца), а частину виразу (5.1):

$$\boxed{\dot{\psi}_M = \sigma^{mn} d_{mn} / \bar{\rho}} \tag{5.2}$$

називають *потужністю внутрішніх* (механічних) *зусиль*, або *механічною потужністю* (нагадаємо, що потужність є енергією за одиницю часу).

Визначимося з компонентами тензора d_{mn}. Спочатку введемо транспонований тензор (у змінних Ейлера):

$$\boldsymbol{L}^T = \nabla \vec{V}\,, \tag{5.3}$$

де $\vec{V}$ – вектор швидкості переміщення актуальної точки (елементарного об’єму) тіла. Тензор $\boldsymbol{L}$ називають як "***тензор Ейлерева (просторового) градієнта швидкості руху***" ("*Eulerian velocity gradient tensor*"). В загальному випадку він не є симетричним. Тензор $\boldsymbol{L}$ є ***індиферентним***.

Конкретизуємо компоненти цього тензора. Введемо матрицю $[L]$ з компонентами

$$\boxed{L_{mn} = \partial \dot{x}^m / \partial x^n = \partial \dot{u}^m / \partial x^n = \dot{X}_{mi} (X_{ni})^{-1}}\,; \quad \text{або} \quad \boxed{[L] = [\dot{X}][X]^{-1}}\,. \tag{5.4}$$

Дійсно, оскільки $dx^m = X_{mi} da^i$ та $d(da^i)/dt \equiv 0$, то $d\dot{x}^m = dx^m/dt = d(X_{mi} da^i)/dt =$
$= (d(X_{mi})/dt) da^i + X_{mi} d(da^i)/dt = \dot{X}_{mi} da^i + 0 = \dot{X}_{mi} (X_{ni})^{-1} dx^n$.

Оскільки у загальному випадку матриця $[X]$ з компонент X_{mi} не є симетричною, то й всі похідні від неї можуть бути не симетричними.

Із використанням полярного розкладу (2.26) можна отримати *фундаментальний розклад* ***Ейлера-Коші-Стокса***

$$\boxed{[L] = [d] + [w]}\,. \tag{5.5}$$

Оскільки тензор $\boldsymbol{d}$ є симетричним, а тензор $\boldsymbol{w}$ – антисиметричним, то часто їх визначають операціями відокремлення симетричної та антисиметричної частини тензора:

$$\boxed{[d]=([L]+[L]^T)/2} \quad \text{або} \quad \boxed{d_{mn}=(L_{mn}+L_{nm})/2=(\partial\dot{u}^m/\partial x^n+\partial\dot{u}^n/\partial x^m)/2}; \tag{5.6}$$

$$[w]=([L]-[L]^T)/2=-[w]^T \quad \text{або} \quad w_{mn}=(L_{mn}-L_{nm})/2=(\partial\dot{u}^m/\partial x^n-\partial\dot{u}^n/\partial x^m)/2. \tag{5.7}$$

Симетричний тензор $\boldsymbol{d}$ в літературі має декілька назв: "*тензор **швидкості деформації***" ("*rate strain tensor*"), "*Ейлерів тензор швидкості деформації*" ("*Eulerian rate of deformation tensor*"), "*Ейлерева швидкість деформацій*" ("*Eulerian Strain rate*"), просто "*швидкість деформації*" ("*velocity strain*"), навіть "*тензор розтягів*" ("*stretching tensor*"). Він характеризує швидкість деформування матеріальної частки, а також не залежить від системи відліку, *є **об'єктивним***.

Антисиметричний тензор $\boldsymbol{w}$ називають як "***тензор вихору***" ("*vorticity tensor*") або "*тензор спіну*" ("*spin tensor*"). Він характеризує кутову швидкість повороту матеріальних волокон, які у будь-яку мить співпадають з головними осями тензора $\boldsymbol{d}$, ***не є об'єктивним***.

5.2. Спряжені тензори деформацій та напружень

5.2.1. Поняття про еквівалентні формулювання потужності внутрішніх сил

У попередніх розділах було введено чимало мір деформацій та напружень. Їхнє використання повинно бути погодженим. Погоджені пари тензорів деформацій та напружень називають ***спряженими***. Погодження проводиться за *принципом **еквівалентності потужності внутрішніх сил*** ψ_M:

$$\boxed{\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M=\bar{\rho}_0(\sigma^{mn}d_{mn}/\bar{\rho})=J\sigma^{mn}d_{mn}=\tau^{mn}d_{mn}=\tilde{\sigma}^{mn}\,\dot{\tilde{\varepsilon}}_{mn}}, \tag{5.8}$$

де $\tilde{\sigma}^{mn}$ та $\dot{\tilde{\varepsilon}}$ є компонентами деякої ***спряженої пари*** тензорів напружень та швидкостей деформацій, а $\tilde{\rho}$ – відповідна їй густина матеріалу.

5.2.2. Тензори напружень, спряжені з інваріантними тензорами деформацій

Запишемо (5.8) у матричному вигляді:

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M=J[\sigma]:[d]=[\tau]:[d]=[\tilde{\sigma}]:[\dot{\tilde{\varepsilon}}], \tag{5.9}$$

де знак ":" між матрицями означає операцію подвійного скалярного добутку (або "згортання"), результат якої – число.

Для будь-яких симетричних матриць $[A]$ та $[D]$ є такі властивості ($[I]$ – симетрична одинична, $[Z]$ – несиметрична матриця):

$$[A]:[D]=([D]^T[A]):[I]; \quad ([D]^T[A]):[I]\equiv([Z][D]^T[A][Z]^{-1}):[I];$$
$$([D]^T[A]):[I]\equiv([Z]^{-1}[D]^T[A][Z]):[I]; \quad ([A][D])^T\equiv[D]^T[A]^T. \tag{5.10}$$

Підставимо формулу (4.16), а саме $J[\sigma]=[X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T$, у вираз (5.9):

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = J[\sigma]:[d] = ([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T):[d]. \tag{5.11}$$

Отримаємо вираз для похідної $\dot{\in}_{ij} = d\in_{ij}/dt$ (ДСК):

$$\frac{d\in_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(X_{mi}X_{mj}-\delta_{ij})}{dt} = \frac{1}{2}\left(X_{mi}\frac{dX_{mj}}{dt}+\frac{dX_{mi}}{dt}X_{mj}\right) = \frac{1}{2}\left(X_{mi}\frac{d(\nabla_j u^m)}{dt}+\frac{d(\nabla_i u^m)}{dt}X_{mj}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(X_{mi}\frac{\partial\dot{u}^m}{\partial a^j}+\frac{\partial\dot{u}^n}{\partial a^i}X_{nj}\right) = \frac{1}{2}\left(X_{mi}\frac{\partial\dot{u}^m}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial a^j}+\frac{\partial\dot{u}^n}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial a^i}X_{nj}\right) = \frac{1}{2}\left(X_{mi}\frac{\partial\dot{u}^m}{\partial x^n}X_{nj}+\frac{\partial\dot{u}^n}{\partial x^m}X_{mi}X_{nj}\right) =$$

$$= X_{mi}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{u}^m}{\partial x^n}+\frac{\partial\dot{u}^n}{\partial x^m}\right)X_{nj} = X_{mi}d_{mn}X_{nj}; \quad \text{або} \quad \boxed{[\dot{\in}] = [X]^T[d][X]}. \tag{5.12}$$

З виразу (5.12) маємо, що $[d] = [X]^{-T}[\dot{\in}][X]^{-1}$. З використанням властивостей (5.10) та симетричності матриць $[\dot{\in}]$ й $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$, з (5.11):

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = ([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T):([X]^{-T}[\dot{\in}][X]^{-1}) = ([X]^{-T}[\dot{\in}]^T\underline{[X]^{-1}[X]}[\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T):[I] =$$

$$= ([X]^{-T}[\dot{\in}]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T):[I] = ([\dot{\in}]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0):[I] = [\underset{\sim}{\sigma}]_0:[\dot{\in}], \tag{5.13}$$

тобто *тензор* $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_0$ (***ТН2ПК***) з компонентами $(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0$ *та тензор деформацій* ***Гріна-Лагранжа*** $\boldsymbol{\in}$ *з компонентами* $\in_{ij}$ *є* ***спряженими***. В (5.13) підкреслено вираз, результатом якого є одинична матриця.

Можна аналогічно (5.13) показати, що

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = [\tau]:[d] = J[\sigma]:[d] = [T]_{GR}:[\dot{\in}]_K. \tag{5.14}$$

Наступним виразом введемо в обіг симетричну матрицю $[\tilde{d}]$:

$$[d] = [R][\tilde{d}][R]^T. \tag{5.15}$$

З використанням формули (4.21) для симетричної матриці з компонентами симетричного *тензора* ***Нолла*** $[T] = J[\Sigma] = J[R]^T[\sigma][R]$, а також із урахуванням формул (5.10), (5.15) й властивості матриці жорсткого повороту $[R]^T = [R]^{-1}$, отримаємо, що:

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = J[\sigma]:[d] = J[\sigma]:([R][\tilde{d}][R]^T) = J(([R][\tilde{d}][R]^T)^T[\sigma]):[I] =$$

$$= J([R][\tilde{d}][R]^T[\sigma]):[I] = J([R][\tilde{d}]([R]^T[\sigma][R])[R]^T):[I] =$$

$$= ([R][\tilde{d}][T][R]^{-1}):[I] = ([\tilde{d}][T]):[I] = [T]:[\tilde{d}] = J[\Sigma]:[\tilde{d}]. \tag{5.16}$$

Отже, симетричний *тензор* ***Нолла*** та "тензор напружень **Ейлера-Коші з видаленим поворотом**" $\boldsymbol{\Sigma}$ з компонентами Σ^{mn} є спряженими з деяким тензором деформацій, часова похідна від якого дорівнює $\tilde{\boldsymbol{d}}$ з компонентами $\tilde{d}_{mn}$.

Але, оскільки не знайдено інваріантного тензора деформацій, часова похідна якого мала би компоненти $\tilde{d}_{mn}$, то це означає, що тензори напружень $\boldsymbol{T}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ не мають спряженого їм за потужністю тензора деформацій. З деяким *наближенням* таке спряження (з тензором Нолла $\boldsymbol{T}$) признають за ***правим*** *тензором логарифмічних деформацій* ***Генкі*** $\in_H$ з компонентами $((\in_{ij})_H)_R$.

Ще відзначимо, що $\dot{\in}_{mn} = \dot{C}_{mn}/2$ й $(\dot{\in}_{mn})_K = -\dot{F}_{mn}/2$ (див. табл.3.1). Отриманий набір енергетично спряжених пар для тензорів напружень та деформацій наведено в таблиці 5.1. В них всі тензори є ***інваріантними***.

Таблиця 5.1. Енергетично спряжені за критерієм $\dot{\psi}_M = \sigma^{mn} d_{mn} / \bar{\rho} = \tilde{\sigma}^{mn} \dot{\tilde{\epsilon}}_{mn} / \tilde{\rho}$ пари (інваріантних) напружень та інваріантних деформацій

№	Напруження $\tilde{\sigma}^{mn}$	Інваріантні деформації $\tilde{\epsilon}_{mn}$	Швидкості деформацій $\dot{\tilde{\epsilon}}_{mn}$	Густина матеріалу $\tilde{\rho}$
1	$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$	ϵ_{mn}	$\dot{\epsilon}_{mn} = \dot{C}_{mn} / 2$	$\bar{\rho}_0$
2	$(T^{mn})_{GR}$	$(\epsilon_{mn})_K$	$(\dot{\epsilon}_{mn})_K = -\dot{F}_{mn} / 2$	$\bar{\rho}_0$
3	$J\Sigma^{mn} = T^{mn}$	$((\epsilon_{mn})_H)_R$	$((\dot{\epsilon}_{mn})_H)_R \approx d_{mn}$	$\bar{\rho}$
4	$J\Sigma^{mn} = T^{mn}$	-	$\tilde{d}_{mn}$	$\bar{\rho}$

5.2.3. Тензори напружень, спряжені з індиферентними тензорами деформацій

Виявилося, що "*повернуті*" тензори ***Гріна-Рівліна*** $\boldsymbol{\tau}_{GR}$ й ТН2ПК $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}})_0$ спряжені з тензорами деформацій ***Альмансі*** й Фінгера відповідно, оскільки

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = J\sigma^{mn} d_{mn} = (\tau^{mn})_{GR} ((\dot{\epsilon}_{mn})_A)_{GM} = (\underset{\sim}{\Sigma}^{mn})_0 ((\dot{\epsilon}_{mn})_F)_{GM} . \tag{5.17}$$

Оскільки немає індиферентного тензора деформацій, матеріальна похідна якого мала би компоненти d_{mn}, то це означає, що тензори напружень Ейлера-Коші й Кірхгофа $\boldsymbol{\sigma}$ й $\boldsymbol{\tau}$ з компонентами σ^{mn} й $\tau^{mn} = J\sigma^{mn}$ не мають спряженого їм за потужністю індиферентного тензора деформацій. Однак виявилося, що

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = J\sigma^{mn} d_{mn} = J\sigma^{mn} ((\dot{\epsilon}_{mn})_A)_{CR} = \tau^{mn} ((\dot{\epsilon}_{mn})_A)_{CR} , \tag{5.18}$$

де $(\bullet)_{CR}$ є *конвенційної похідною* ***Коттер-Рівліна*** від тензора. Тому вважають, що тензори напружень Кірхгофа $\boldsymbol{\tau}$ (й Ейлера-Коші $\boldsymbol{\sigma}$) з компонентами $\tau^{mn} = J\sigma^{mn}$ (й σ^{mn}) мають спряжений їм за потужністю індиферентний тензор деформацій ***Альмансі*** з компонентами $(\epsilon_{ij})_A$.

З деяким наближенням енергетичне спряження з тензором ***Кірхгофа*** $\boldsymbol{\tau}$ (й Ейлера-Коші $\boldsymbol{\sigma}$) признають за ***лівим*** *тензором логарифмічних деформацій* ***Генкі*** $(\epsilon_H)_L$ з компонентами $((\epsilon_{ij})_H)_L$, введеними в Розділі 3.1.3 (див. табл.3.1):

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = J\sigma^{mn} d_{mn} \approx J\sigma^{mn} (((\dot{\epsilon}_{mn})_H)_L)_{CR} = \tau^{mn} (((\dot{\epsilon}_{mn})_H)_L)_{CR} . \tag{5.19}$$

Якщо замість коротаційної похідної Гріна-Макіннеса використати *індиферентну коротаційну похідну* ***Рейнхардта-Дюбі*** $(((\dot{\epsilon}_{ij})_H)_L)_{RD}$, для якої точно $d_{ij} = (((\dot{\epsilon}_{ij})_H)_L)_{RD}$, то з компонентами $((\epsilon_{ij})_H)_L$ буде точно спряженими компоненти тензорів напружень ***Кірхгофа*** $\boldsymbol{\tau}$ (й Ейлера-Коші $\boldsymbol{\sigma}$):

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = J\sigma^{mn} d_{mn} = J\sigma^{mn} (((\dot{\epsilon}_{mn})_H)_L)_{RD} = \tau^{mn} (((\dot{\epsilon}_{mn})_H)_L)_{RD} . \tag{5.20}$$

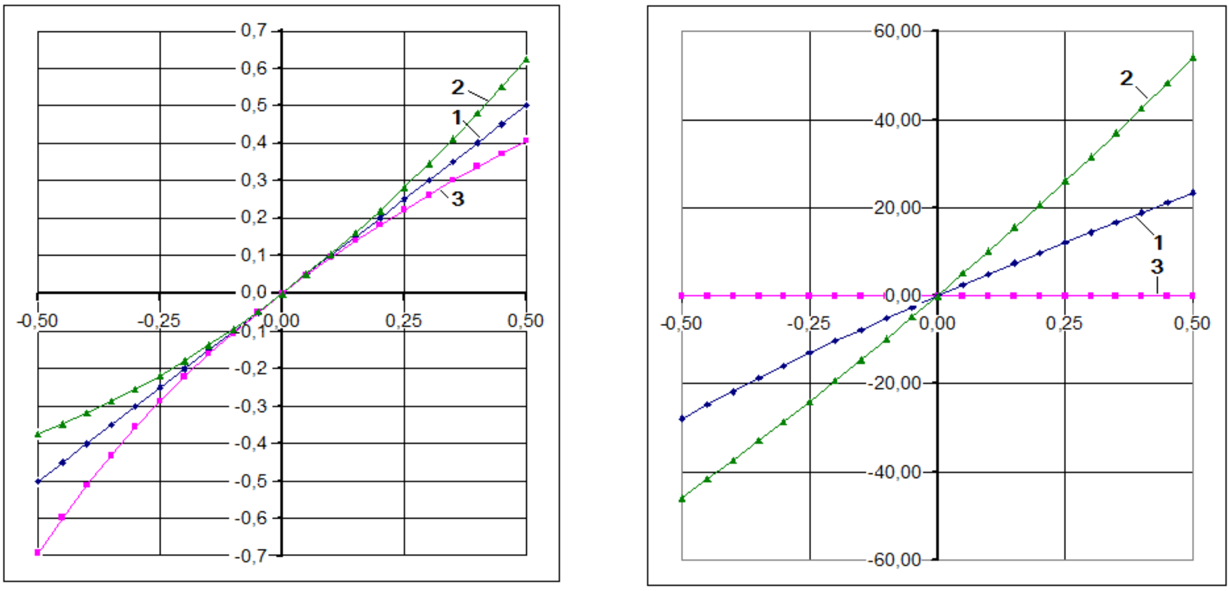
Ще відзначимо, що $(\dot{\epsilon}_{ij})_F = \dot{\Theta}_{ij} / 2$ й $(\dot{\epsilon}_{ij})_A = -\dot{\Psi}_{ij} / 2$ (див. табл.3.1). Отриманий набір енергетично спряжених пар для тензорів напружень та деформацій наведено в таблиці 5.2. В них всі тензори є ***індиферентними***.

Таблиця 5.2. Енергетично спряжені за критерієм $\dot{\psi}_M = \sigma^{mn} d_{mn} / \bar{\rho} = \tilde{\sigma}^{mn} \dot{\tilde{\in}}_{mn} / \tilde{\rho}$ пари (індиферентних) напружень та індиферентних деформацій

№	Напруження $\tilde{\sigma}^{mn}$	Індиферентні деформації $\tilde{\in}_{mn}$	Швидкості деформацій $\dot{\tilde{\in}}_{mn}$	Густина матеріалу $\tilde{\rho}$
1	$\sigma^{mn} = \tau^{mn} / J$	-	d_{mn}	$\bar{\rho}$
2	$(\Sigma^{mn})_0$	$(\in_{mn})_F$	$((\dot{\in}_{mn})_F)_{GM} = (\dot{\Theta}_{ij})_{GM} / 2$	$\bar{\rho}_0$
3	$(\tau^{mn})_{GR}$	$(\in_{mn})_A$	$((\dot{\in}_{mn})_A)_{GM} = -(\dot{\Psi}_{mn})_{GM} / 2$	$\bar{\rho}_0$
4	$J\sigma^{mn} = \tau^{mn}$	$(\in_{mn})_A$	$((\dot{\in}_{mn})_A)_{CR} = -(\dot{\Psi}_{mn})_{CR} / 2$	$\bar{\rho}$
5	$J\sigma^{mn} = \tau^{mn}$	$((\in_{mn})_H)_L$	$(((\dot{\in}_{mn})_H)_L)_{RD} \approx (((\dot{\in}_{mn})_H)_L)_{GM}$	$\bar{\rho}$

5.3. Деякі графічні пояснення щодо обирання мір деформацій та спряжених з ними напружень

На рис.5.1 наведено графіки поздовжньої деформацій волокна матеріалу: "умовної" $\varepsilon = \Delta s / s_0$, Гріна-Лагранжа $\in = \varepsilon + 0.5\varepsilon^2$ та логарифмічної $\in_H = \ln(1+\varepsilon)$ як функції величин "умовної" деформації ε, а також графіки відносних відхилень перших двох деформацій по відношенню до логарифмічної ("істинної").



а) б)

Рис.5.1. Графіки: а) – деформації "умовної " ε (1), Гріна-Лагранжа $\in$ (2) та логарифмічної $\in_H$ (3); б) – відхилення відносно $\in_H$, у відсотках

Графіки показують, наскільки значно відрізняються умовні деформації та деформації Гріна-Лагранжа від логарифмічних, особливо деформації Гріна-

Лагранжа. Останні (TL-формулювання) застосовуються в розрахунках при великих деформаціях для моделювання процесів, у яких історія навантаження не має великого значення, а логарифмічні (UL-формулювання) – для більш складних процесів.

Нагадаємо, що деформаціям Гріна-Лагранжа відповідає другий тензор напружень Піола-Кірхгофа $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$, тобто тензор напружень Ейлера-Коші, перерахований на вихідну конфігурацію за формулою (4.22), а саме $[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = [X]^{-1} J [\sigma][X]^{-T}$. А логарифмічним деформаціям в головних осях пружних деформацій відповідає тензор напружень Нолла: тензор "напружень Ейлера-Коші с видаленим поворотом", помножений на величину $J = \det[X]$, тобто $[T] = J[\Sigma] = J[R]^T[\sigma][R]$ згідно з формулою (4.21). Щодо "умовної" деформації ε, її при великих деформаціях не можна застосувати вже тому, що вона не має спряженої їй міри напружень.

Контрольні питання до розділу

1. Чому саме другий закон термодинаміки використовується для несуперечливого формулювання фізичних рівнянь матеріалу?
2. Які складові містить тензор Ейлерева (просторового) градієнта швидкості руху?
3. Чи є об’єктивними тензори швидкості деформації та вихору?
4. Для чого шукають спряжені пари тензорів напружень та швидкостей деформацій?
5. Назвіть та дайте характеристики інваріантних спряжених пар тензорів напружень та деформацій.
6. Назвіть та дайте характеристики індиферентних спряжених пар тензорів напружень та деформацій.

Розділ 6

МОДЕЛІ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ. ТЕРМОПРУЖНІСТЬ

6.1. Загальні визначення

6.1.1. Прості, "пружні" та "непружні" матеріали

Згідно з аксіомами Нолла тензор напружень у момент часу t повністю визначається історією руху тіла до цього моменту часу (*принцип детермінізму*), не залежить явно від часу (*принцип матеріальної незалежності від системи відліку*) та процесів, що відбуваються за межами елементарного об'єму (*принцип локальної дії*).

Матеріал відносять до класу *простих*, якщо для визначення тензора напружень в елементарному об'ємі достатньо знання компонент тензора $\boldsymbol{X}$ з компонентами X_{mi} (див. вираз (2.17)) як першого наближення для описування всієї попередньої історії деформування елементарного об'єму.

В механіці деформівного твердого тіла всі матеріали можна розділити на два великих класи: "*пружні*" та "*непружні*" матеріали.

Всі "пружні" матеріали, в свою чергу, розділяють на *гіпопружні* (тобто гіпотетично пружні), *пружні* та *гіперпружні* (тобто суперпружні).

6.1.2. Теорема Нолла

Згідно з теоремою Нолла, пружний матеріал є окремим випадком гіпопружного матеріалу, а ізотропний гіперпружний матеріал – окремим випадком пружного, тобто й гіпопружного матеріалу.

6.1.3. Гіпопружний матеріал

Матеріал вважається *гіпопружним* (тобто гіпотетично пружним), якщо швидкість зміни напружень є ***лінійною*** функцією від швидкості його деформування. Тобто компоненти похідної тензора напружень Ейлера-Коші є лінійними однорідними функціями компонент тензора швидкості деформації:

$$\boxed{(\dot{\sigma}^{ij})_{\triangleright} = \overline{E}^{ijmn} d^{e}_{mn}}\,, \tag{6.1-a}$$

де $\overline{E}^{ijmn}$ – симетричний матеріальний тензор четвертого рангу, компоненти якого можуть залежати від компонент σ^{ij} тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$. Знак $\triangleright$ при похідної від напруження вказує на те, що таких похідних є декілька. Зокрема, похідні ***Яуманна*** $(\dot{\sigma}^{ij})_{J}$, ***Гріна-Макіннеса*** $(\dot{\sigma}^{ij})_{GM}$ або ***Трусделла*** $(\dot{\sigma}^{ij})_{Tr}$.

З огляду на (5.18) можна вважати, що компоненти $d_{mn} = ((\dot{\in}_{mn})_{A})_{CR}$, тобто дорівнюють компонентам конвенційної похідної Коттер-Рівліна від тензора деформацій Альмансі. Після конкретизації похідних замість (6.1-а) застосовують вирази

$$\boxed{(\dot{\sigma}^{ij})_J = \bar{E}^{ijmn}((\dot{\in}^e_{mn})_A)_{CR}} \quad \text{або} \quad \boxed{(\dot{\sigma}^{ij})_{GM} = \tilde{E}^{ijmn}((\dot{\in}^e_{mn})_A)_{CR}} \quad \text{або}$$

$$\boxed{(\dot{\sigma}^{ij})_{Tr} = \breve{E}^{ijmn}((\dot{\in}^e_{mn})_A)_{CR}}. \qquad (6.1\text{-б})$$

Важливе слідство з (6.1): гіпопружний матеріал не може бути в'язким, тобто напруження не можуть залежати від часу витримки матеріалу під навантаженням.

6.1.4. Пружний матеріал

Пружним матеріалом зветься матеріал класу простих, напружений стан якого для будь-яких попередніх історій деформування визначається рівнянням (**E**-formulation)

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi(\boldsymbol{X}, \vec{a}); \quad \boxed{\sigma^{ij} = \Phi(X_{mn}, a^k)}, \qquad (6.2)$$

взаємно однозначним для σ^{ij} й X_{mn}. Тут σ^{ij} й X_{mn} – компоненти тензорів напружень $\boldsymbol{\sigma}$ й градієнта руху $\boldsymbol{X}$, a^k – початкові координати. Далі, як зазвичай це роблять в таких записах, компоненти a^k опускають.

Якщо пружний матеріал має властивість не стискуватися, то вираз (6.2) змінюється на (p – гідростатичний тиск):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \Upsilon(\boldsymbol{X}); \quad \sigma^{ij} = -p\delta^{ij} + \Upsilon(X_{mn}); \quad |\det \boldsymbol{X}| = 1. \qquad (6.3)$$

Вирази (6.2) й (6.3) означають, що пружний матеріал має миттєво зникаючу пам'ять, але ідеально пам'ятає початковий (вихідний) стан, який обирається довільно. Зазвичай за початковий стан обирають "природний", тобто без напружень.

Компоненти X_{mn} тензора градієнта руху можуть містити в себе (окрім жорсткого повороту) всі типи деформацій: температурних, пружних, необоротних тощо. Тому при конкретизації $\Phi(X_{mn})$ зазвичай від X_{mn} переходять до компонент інших величин, які безпосередньо формують X_{mn} або є похідними величинами від X_{mn}.

6.1.5. Пружний потенціал

Пружним потенціалом (або потенційною енергією деформацій) називають *аналітичну* функцію ψ^e, *обов'язковими параметрами якої є компоненти тензора пружних деформацій* $\in^e_{mn}$. Серед додаткових параметрів може бути температура θ та необоротні деформації, оскільки відомо, що пружні характеристики матеріалів в першу чергу залежать саме від них.

Властивість *опуклості* для цієї функції є обов'язковою принаймні для ізотропних матеріалів.

6.1.6. Гіперпружний матеріал

Матеріал вважається *гіперпружним*, якщо для нього існує початковий "природний" стан, а також така "*питома потенційна енергія деформацій*" $\rho_0\psi(\in_{mn})$, що для ізотропного матеріалу рівняння стану мають вигляд

$$\boxed{(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = \partial(\rho_0 \psi(\in_{mn})) / \partial \in_{ij}} . \tag{6.4}$$

Важливо, що тут вважається, що $\in_{mn} = \in^e_{mn}$ й $\psi = \psi^e$ (є тільки оборотні деформації). Міри деформацій та напружень у співвідношенні типу (6.4) для гіперпружного матеріалу можуть бути іншими, але спряженими. Гіперпружний матеріал не може мати внутрішньої дисипації енергії.

Дуже часто замість *гіперпружний* пишуть просто *пружний* матеріал.

6.2. Основні моделі "пружних" матеріалів

6.2.1. Закон Гука

Окремим випадком (6.4) вважається вираз

$$\boxed{(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = E^{ijmn} \in_{mn}} , \tag{6.5}$$

де E^{ijmn} – симетричний матеріальний тензор четвертого рангу. Умова симетрії:

$$E^{ijmn} = E^{jimn} = E^{ijnm} . \tag{6.6}$$

Рівняння (6.5) зветься *узагальненим законом* ***Гука***. Важливо, що тут $\in_{mn} = \in^e_{mn}$, тобто всі деформації є пружними.

6.2.2. Ізотропний пружний (гіперпружний) матеріал

Як зазначалося в Розділі 2.5, ізотропні об’єкти – ті, що не змінюються при будь-якому ортогональному перетворенні.

Через деформації Альмансі закон ізотропної пружності можна записати у вигляді виразу (матричне позначення)

$$[\tau] = k_0(I_1, I_2, I_3)[I] + k_1(I_1, I_2, I_3)[\in^e]_A + k_2(I_1, I_2, I_3)[\in^e]^2_A , \tag{6.7}$$

де k_i; $i = 0,1,2$ є скалярні функції інваріантів тензора деформацій Альмансі I_1, I_2 й I_3, які можна обчислити як

$$I_1 = \delta^{im} C_{mi} ; \quad I_2 = (\delta^{im}\delta^{jn} C_{mi} C_{nj} - \delta^{im}\delta^{jn} C_{ij} C_{mn}) / 2 ; \quad I_3 = \det X_{ij} . \tag{6.8}$$

Окремий випадок рівняння (6.7) – для лінійно-пружного матеріалу:

$$\boxed{\tau^{ij} = J\sigma^{ij} = \overline{E}^{ijmn} (\in^e_{mn})_A} . \tag{6.9}$$

Для *ізотропного лінійно-пружного* матеріалу зазвичай припускають, що ψ^e *є квадратичним функціоналом від пружних деформацій*, тобто

$$\overline{\rho}_0 \psi^e = 0.5\lambda (I^e_1)^2 + G \in^e_{mn} \in^e_{mn} , \tag{6.10}$$

де $\lambda = \mu E / [(1-2\mu)(1+\mu)] = 2G\mu / (1-2\mu)$ та $G = E / [2(1+\mu)]$ є параметрами Ламе, значення яких можуть залежати від температури ($E = E(\theta)$ – модуль Юнга; $\mu = \mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона); $I^e_1 = \in^e_{11} + \in^e_{22} + \in^e_{33}$ є першим інваріантом тензора пружних деформацій. З (6.4) та (6.10) отримаємо *закон Гука для ізотропного матеріалу*

$$\boxed{(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = \lambda \delta^{ij} I^e_1 + 2G\delta^{ijmn} \in^e_{mn} = E^{ijmn} \in^e_{mn}} , \tag{6.11}$$

причому в (6.11) позначено (ДСК)

$$E^{ijmn} = \lambda \underline{\delta}^{ijmn} + 2G\underline{\underline{\delta}}^{ijmn} ; \quad \underline{\delta}^{ijmn} = \delta^{ij}\delta^{mn} ; \quad \underline{\underline{\delta}}^{ijmn} = (\delta^{im}\delta^{jn} + \delta^{jm}\delta^{in}) / 2 . \tag{6.12}$$

Як допоміжну характеристику пружного матеріалу розглядають модуль об'ємної деформації (об'ємний модуль)

$$k = E(\theta)/[3(1-2\mu(\theta))] = k(\theta). \tag{6.13}$$

Для лінійного ізотропного матеріалу знайдемо співвідношення між $\bar{E}^{ijmn}$ та E^{ijmn}, що застосуються в співвідношеннях (6.9) та (6.11). Зі зміною індексів, із врахуванням можливої наявності не тільки пружних деформацій:

$$\tau^{ij} = J\sigma^{ij} = X_{iq}(\underset{\sim}{\sigma}^{qr})_0 X_{jr}. \tag{6.14}$$

$$\in^e_{mn} = X^e_{sm}(\in^e_{st})_A X^e_{tn}; \tag{6.15}$$

Спочатку підставимо (6.5) у (6.14):

$$\tau^{ij} = J\sigma^{ij} = X_{iq}E^{qrmn} \in^e_{mn} X_{jr}, \tag{6.16}$$

потім (6.15) у (6.16):

$$\tau^{ij} = J\sigma^{ij} = X_{iq}E^{qrmn}X^e_{sm}(\in^e_{st})_A X^e_{tn}X_{jr} = \bar{E}^{ijmn}(\in^e_{mn})_A. \tag{6.17}$$

З цього виразу можна отримати співвідношення між $\bar{E}^{ijmn}$ та E^{ijmn} для рівняння (6.9), тобто $\tau^{ij} = \bar{E}^{ijmn}(\in^e_{mn})_A$:

$$\boxed{\bar{E}^{ijmn} = X_{ik}X^e_{jq}E^{kqrs}X^e_{mr}X_{ns}/J}. \tag{6.18}$$

Отже, пружні характеристики матеріалу залежать від тих мір напружень і деформацій, які обрані для описування НДС тіла. Оскільки компоненти X_{ij} мають деформаційну складову, а компоненти E^{ijmn} традиційно вважаються постійними, то компоненти $\bar{E}^{ijmn}$ є змінними, залежать від деформованого стану.

6.2.3. Термопружний (гіпертермопружний) матеріал. Температурна деформація

Якщо вільна енергія залежить лише від поточних значень пружних деформацій та температури, тобто $\psi = \psi(\theta, \in_{mn})$, то такий матеріал вважається термопружним, в якому внутрішня дисипація відсутня.

Для ізотропного матеріалу компоненти X^θ_{mj} градієнта температурних деформацій $\boldsymbol{X}^\theta$ записують як

$$\boxed{(X_{mj})^\theta = \delta_{mj}(1+\bar{\alpha}_\theta\cdot(\theta-\theta_0)) = \delta_{mj}\vartheta(\theta)}, \tag{6.19}$$

де позначена функція

$$\boxed{\vartheta(\theta) = 1+\bar{\alpha}_\theta\cdot(\theta-\theta_0)}. \tag{6.20}$$

Тому, із врахуванням (3.9) й (3.3), тензор температурних деформацій Гріна-Лагранжа в ізотропному матеріалі (ДСК):

$$\in^\theta_{ij} = (X^\theta_{mi}X^\theta_{mj}-\delta_{ij})/2 = (C^\theta_{ij}-\delta_{ij})/2 = 0.5(\vartheta^2(\theta)-1)\delta_{ij}; \quad \boxed{[\in^\theta] = 0.5(\vartheta^2(\theta)-1)[I]}. \tag{6.21}$$

При зменшенні значень температурних деформацій функція $0.5(\vartheta - 1/\vartheta) \to (\vartheta - 1)$, тому значення температурних деформацій наближується до обчислених за відомими рівняннями Дюґамеля-Неймана, причому майже лінійно. Наприклад, при $\bar{\alpha}_\theta = 0.00001$ та $\theta-\theta_0 = 10000$ маємо похибку у 4.8%; при $\theta-\theta_0 = 100$ у 0.05%; при $\theta-\theta_0 = 10$ у 0.005%, а при $\theta-\theta_0 = 1$ вже у 0.0005%.

У Розділі 13.2 книги [8] докладно описана процедура визначення $\bar{\alpha}_\theta = \bar{\alpha}_\theta(\theta)$, тобто врахування залежності коефіцієнта температурного подовження від температури (матеріали з такою залежністю є).

6.2.4. Закон Гука з деформаціями Генкі (пружний матеріал Генкі)

Будемо вважати, що відома матриця $[X^e]$ з компонентами X^e_{ij} пружного градієнта руху $\boldsymbol{X}^e$, причому $J^e = \det[X^e] > 0$.

Для встановлення основ застосування логарифмічної міри деформації Генкі при великих деформаціях потрібно користуватися величинами, визначеними в *головних* напрямках.

Позначимо головні пружні "розтяги" (principal elastic stretches) як $\underline{\upsilon}^e_i$; $i = 1,2,3$ (тут і далі *головні компоненти підкреслюємо*). Визначимося, що

$$\underline{\upsilon}^e_i = \sqrt{\underline{\lambda}^e_i} = 1 + \underline{\varepsilon}^e_i; \quad J^e = \det[X^e] = \sqrt{\underline{\lambda}^e_1 \underline{\lambda}^e_2 \underline{\lambda}^e_3} = \underline{\upsilon}^e_1 \underline{\upsilon}^e_2 \underline{\upsilon}^e_3 . \tag{6.22}$$

Відповідно до (3.27)

$$\ln \underline{\upsilon}^e_i = (\underline{\in}^e_i)_H ; \quad i = 1,2,3 , \tag{6.23}$$

тобто ці компоненти є головними пружними деформаціями Генкі.

Ще введемо *ізохорні* головні пружні "розтяги" (isochoric principal elastic stretches) $\underline{\breve{\upsilon}}^e_i$; $i = 1,2,3$, за формулою

$$\underline{\breve{\upsilon}}^e_i = \underline{\upsilon}^e_i / \sqrt[3]{J^e} = (J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i , \tag{6.24}$$

де величина $\sqrt[3]{J^e} = \sqrt[3]{\underline{\upsilon}^e_1 \underline{\upsilon}^e_2 \underline{\upsilon}^e_3}$ надає усереднене значення головних пружних "розтягів". Із використанням властивостей логарифмів та (6.24):

$$\sum_{i=1}^{3} \ln \underline{\breve{\upsilon}}^e_i = \sum_{i=1}^{3} \ln((J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \ln J^e + \sum_{i=1}^{3} \ln \underline{\upsilon}^e_i =$$

$$= -\ln J^e + \ln(\underline{\upsilon}^e_1 \underline{\upsilon}^e_2 \underline{\upsilon}^e_3) = -\ln J^e + \ln J^e = 0 . \tag{6.25}$$

Відомо, що сума девіаторних частин будь-якого тензора повинна дорівнювати нулю. Тому можна визначити девіаторні частини головних пружних деформацій Генкі через ізохорні головні пружні "розтяги":

$$(\underline{\in}^e_i)^d_H = \ln \underline{\breve{\upsilon}}^e_i = \ln((J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i) ; \quad i = 1,2,3 . \tag{6.26}$$

Очевидно, що величина третини першого інваріанта тензора пружних деформацій Генкі (середньої деформації)

$$(I^e_1)_H / 3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} (\underline{\in}^e_i)_H = (\in^e_V)_H = (\underline{\in}^e_i)_H - (\underline{\in}^e_i)^d_H = \ln \underline{\upsilon}^e_i - \ln((J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i) =$$

$$= \ln\left(\frac{\underline{\upsilon}^e_i}{(J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i} \right) = \ln((J^e)^{1/3}) = \frac{1}{3} \ln J^e . \tag{6.27}$$

Отже, можна записати компоненти головних пружних деформацій Генкі як

$$\boxed{(\underline{\in}^e_i)_H = (\underline{\in}^e_i)^d_H + (\in^e_V)_H = \ln((J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}^e_i) + (1/3) \ln J^e} ; \quad i = 1,2,3 , \tag{6.28}$$

або у матричному вигляді (всі матриці – *діагональні*):

$$\boxed{[\underline{\in}^e]_H = [\underline{\in}_i^e]_H^d + (\in_V^e)_H [I]}\,. \tag{6.29}$$

Відомо, що класичний закон Гука у головних осях записується як $\underline{\sigma}_i = 3k\cdot \in_V^e + 2G\cdot(\underline{\in}_i^e)^d$; $i = 1,2,3$, де $k = E(\theta)/[3(1-2\mu(\theta))] = k(\theta)$ є модулем об'ємної деформації; $G = E(\theta)/[2(1+\mu(\theta))] = G(\theta)$ є модулем зсуву.

Із використанням правил диференціювання та властивостей логарифмів, можна показати, що при обиранні функціонала $\psi^e((\underline{\in}_i^e)_H)$, який відображає питому потенціальну енергію деформування ізотропних металів при урахуванні геометричної нелінійності, у вигляді

$$\psi^e(\underline{\upsilon}_1^e, \underline{\upsilon}_2^e, \underline{\upsilon}_3^e) = \frac{1}{2}k\cdot(\ln J^e)^2 + G\sum_{m=1}^{3}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}_m^e)^2\,, \tag{6.30}$$

маємо, що

$$\boxed{\frac{\partial \psi^e}{\partial(\underline{\in}_i^e)_H} = 3k\cdot(\in_V^e)_H + 2G\cdot(\underline{\in}_i^e)_H^d}\,. \tag{6.31}$$

Виявлено, що останній вираз (в головних осях) відповідає мірі напружень ***Нолла***:

$$\boxed{\underline{T}^i = J\underline{\Sigma}^i = 3k\cdot(\in_V^e)_H + 2G\cdot(\underline{\in}_i^e)_H^d}\,; \quad i = 1,2,3\,, \tag{6.32}$$

тобто *закон Гука через пружні логарифмічні деформації Генкі визначає головні компоненти напружень* ***Нолла*** $\underline{T}^i$ (інакше – компоненти "напружень Ейлера-Коші $\underline{\Sigma}^i$ з видаленим поворотом", помножені на величину J).

6.2.5. Матеріал типу "гума"

Матеріалом типу "гума" називають матеріал, що має властивість не стискуватися, якщо тіло з такого матеріалу має значну відкриту поверхню, яка у змозі вільно деформуватися. Напружений стан пружного матеріалу типу "гума" для будь-яких попередніх історій деформування визначається рівняннями (6.3), а саме $\boldsymbol{\sigma}^{ij} = -p\boldsymbol{I} + \Upsilon(\boldsymbol{X})$; $\sigma^{ij} = -p\delta^{ij} + \Upsilon(X_{mn})$; $|\det \boldsymbol{X}| = |\det \boldsymbol{C}| = 1$, де $p = \sigma^{ii}/3 = \sigma_V$ – гідростатичний тиск (середнє напруження).

Запропоновано багато виразів, що відповідають рівнянням (6.3).

Зокрема, застосовується полігональна форма *моделі* ***Муні-Рівліна*** (Mooney-Rivlin). Вона використовує властивість $I_3 = J = \det X_{ij} = \det C_{ij} = 1$.

Якщо скористатися теорією штрафу, то вираз для функціонала питомої пружної енергії $W = \overline{\rho}_0\psi(\in_{mn})$ можна представити у вигляді

$$W = \overline{W}(\in_{ij}) + \lambda\cdot(I_3 - 1)\,, \tag{6.33}$$

де $\overline{W} = \overline{W}(I_1, I_2)$; λ – коефіцієнт штрафу. Тоді замість (6.4)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \in_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \in_{ij}} + \lambda\frac{\partial I_3}{\partial \in_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \in_{ij}} + 2\lambda X^{ij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \in_{ij}} + pX^{ij}\,, \tag{6.34}$$

де $p = 2\lambda$ – гідростатичний тиск, а компоненти $\in_{ij}$ задовольняють умові $\det X_{ij} = 1$. Перший доданок у (6.34) описує "викривлення", а другий – зміну об'єму.

Апроксимацію $\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2)$ поліномом можна записати у вигляді обмеженого ряду:

$$\bar{W} = \sum_{m+n=1}^{q} A_{mn}(I_1 - 3)^m (\bar{I}_2 - 3)^n \, ; \quad m, n = 0, 1, \ldots \, , \tag{6.35}$$

де $q = \max\{m + n\}$; $\bar{I}_2 = (I_1^2 - I_2)/2$; а компоненти A_{mn} мають таку же розмірність, як і модуль Юнга.

У цьому розкладі зазвичай зберігають члени однакової степені q. Наприклад, якщо $q = 3$, то отримаємо дев'ятикомпонентну модель:

$$\bar{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) + A_{11}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + A_{20}(I_1 - 3)^2 + A_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \\ + A_{30}(I_1 - 3)^3 + A_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + A_{21}(I_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + A_{12}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 \, . \tag{6.36}$$

З (6.36) легко отримати моделі з п'яти ($q = 2$) та трьох ($q = 1$) компонент. Якщо зберегти лише два лінійних члена ($q = 1$), то це буде *модель* ***Муні-Рівліна***, яка задовільно описує поведінку матеріалів типу "гума" при деформаціях десь до 450...500 відсотків:

$$\boxed{\bar{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_1^2 - I_2 - 6)/2} \, . \tag{6.37}$$

Якщо в (6.37) прийняти $A_{01} = 0$, то це буде *модель матеріалу неогуківського* (***Трелоара***)

$$\boxed{\bar{W} \approx A_{10}(I_1 - 3)} \, . \tag{6.38}$$

Однак якщо застосовувати співвідношення (6.34), то необхідно залучати ще одне рівняння для визначення гідростатичного тиску, що збільшує загальну кількість рівнянь. Тому замість виразу (6.33) часто застосовують модель

$$W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1)^{2(k+1)} \quad \text{або} \quad W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1 - \bar{\alpha}_\theta \Delta\theta)^{2(k+1)} ; \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.39}$$

де $J = I_3$; $\bar{\alpha}_\theta \Delta\theta$ – температурна деформація, а компоненти D_k мають таку же розмірність, як і модуль Юнга. Простіший варіант:

$$W = \bar{W} + D_0 (J - 1)^2 \quad \text{або} \; W = \bar{W} + D_0 (J - 1 - \bar{\alpha}_\theta \Delta\theta)^2 \, . \tag{6.40}$$

Величину D_0 розраховують за формулою

$$D_0 = (A_{10} + A_{01})/(1 - 2\mu) \, , \tag{6.41}$$

де коефіцієнт Пуассона μ задають у межах 0.495 ... 0.4999 (рекомендують, щоб було $D_0 < 10^3 (A_{10} + A_{01})$). Якщо $\bar{W}$ відповідає (6.37), а деформації – незначні, то величини $2(A_{10} + A_{01}) = G$ – модуль зсуву, а $2D_0 = K$ – об'ємний модуль.

Є й інші моделі. Наприклад, така:

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3 - 1)^2 \, , \tag{6.42}$$

де для обчислення C та D застосовують формули:

$$C = A_{10}/2 + A_{01} ; \quad D = [A_{10}(5\mu - 2) + A_{01}(11\mu - 5)]/[2(1 - 2\mu)] \, . \tag{6.43}$$

Контрольні питання до розділу

1. Пояснить сутність та значення аксіом Нолла.
2. "Прості", "пружні" та "непружні" матеріали.
3. Яким виразом визначається зв'язок між напруженнями та деформаціями або їхніми швидкостями в гіпопружному матеріалі?
4. Яким виразом визначається зв'язок між напруженнями та деформаціями або їхніми швидкостями у пружному матеріалі?
5. Пружний потенціал. Яким виразом визначається зв'язок між напруженнями та деформаціями або їхніми швидкостями у гіперпружному матеріалі?
6. Узагальнений закон Гука. Чи є залежність модулів пружності від мір напружень та деформацій, що застосовуються?
7. Поняття про термопружний потенціал, тензор градієнта температурних деформацій та тензор температурних деформацій Гріна-Лагранжа.
8. Пружний матеріал Генкі.
9. Матеріал типу "гума".

Розділ 7

ТЕОРЕТИЧНА ОСНОВА ЗАСТОСУВАННЯ ІНКРЕМЕНТАЛЬНИХ ТЕОРІЙ ПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ

7.1. Мультиплікативний розклад градієнта руху

Питання про допустиму форму рівнянь теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях було теоретично вирішено із застосуванням мультиплікативного розкладу матриці градієнта руху.

У 1969 році ***Лі*** (Lee E.H.) запропонував мультиплікативний розклад матриці градієнта пружно-пластичного руху (деформацій). Він фактично використав групові властивості операторів відображення з абстрактної алгебри. При цьому трансформація точки тіла в часі може бути описана оператором однозначного відображення $\Pi(t_o,t)$ при будь-яких t_o та t (зі стану t_o у стан t через стан t_*) з наступними груповими властивостями (абстрактна алгебра):

$$\Pi(t,t)=I\,; \quad \Pi(t_o,t)=\Pi(t_*,t)\odot\Pi(t_o,t_*)\,, \tag{7.1}$$

де I – тотожне відображення. Друге співвідношення відбиває транзитивність.

Розглянемо мультиплікативний розклад градієнта руху (деформацій) при одночасної наявності основних чотирьох типів деформації: температурної, пружної, пластичності та повзучості.

7.1.1. Модифіковані підпростори

Завжди можна записати, що в поточній ситуації положення точки тіла може бути описано вектором $\vec{r}=\vec{a}+\vec{u}^e+\vec{u}^c+\vec{u}^p+\vec{u}^\theta$ з компонентами

$$r^m=a^m+(u^e)^m+(u^c)^m+(u^p)^m+(u^\theta)^m\,, \tag{7.2}$$

де $m=1,2,3$, а верхні індекси e,c,p,θ визначають тип деформації: пружна, повзучості, пластична, температурна. Введемо ще такі позначення:

$$\vec{u}^{ecp}=\vec{u}^e+\vec{u}^c+\vec{u}^p\,; \quad \vec{r}^{ecp}=\vec{a}+\vec{u}^{ecp}\,; \quad \vec{u}^{cp}=\vec{u}^c+\vec{u}^p\,; \quad \vec{r}^{cp}=\vec{a}+\vec{u}^{cp}\,, \tag{7.3}$$

тоді, наприклад, вектор $\vec{r}=\vec{r}^{ecp}+\vec{u}^\theta=\vec{r}^{cp}+\vec{u}^e+\vec{u}^\theta$ буде мати компоненти

$$r^m=(r^m)^{ecp}+(u^m)^\theta=(r^m)^{cp}+(u^m)^e+(u^m)^\theta\,. \tag{7.4}$$

Ще потрібно уяснити, що, наприклад, у просторі $\vec{r}^{cp}=\vec{a}+\vec{u}^{cp}$ немає напружень, оскільки в ньому є тільки необоротні переміщення (деформації). У разі поповнення цього простору температурними та пружними переміщеннями (деформаціями та відповідними пружним деформаціям напруженнями) він буде переходити у простір $\vec{r}=\vec{r}^{ecp\theta}=\vec{r}^{cp}+\vec{u}^e+\vec{u}^\theta$. Іншій простір, а саме простір $\vec{r}^{e\theta}=\vec{a}+\vec{u}^e+\vec{u}^\theta$ є вільним від необоротних переміщень (деформацій), в ньому є температурні та пружні переміщення (деформації та напруження від пружних деформацій). У разі поповнення цього простору необоротними переміщеннями (при незмінних напруженнях та температурах) він буде переходити у простір $\vec{r} = \vec{r}^{\,e c p \theta} = \vec{r}^{\,e\theta} + \vec{u}^{\,c} + \vec{u}^{\,p}$.

У зв'язку з цими обставинами говорять про *проміжні конфігурації* (intermediate configurations) елементарного об'єму тіла.

Взаємозалежність типів переміщень не відкидається, просто вона враховується в інший спосіб.

7.1.2. Мультиплікативний розклад градієнта руху при великих деформаціях чотирьох типів

Далі всюди для спрощення будемо застосовувати декартову систему координат (ДСК). Використовуємо матрицю градієнтів руху Коші-Гріна $[X]$ з компонентами $X_{mi} = \nabla_i x^m = \delta_{mi} + \partial u^m / \partial a^i$, де ∇_i – оператор просторової похідної; a^i визначають вихідний базис; $i, m = 1,2,3$.

Задача про температурний стан завжди передує задачі про напружено-деформований стан, навіть тоді, коли ці дві задачі (через ітерації) розглядаються як зв'язані. Крім того, в земних умовах ніщо не може завадити реалізації температурних деформацій; вони реалізуються практично миттєво (за декілька циклів коливань атомів); в ізотропному матеріалі з малими деформаціями описуються рівнянням $\varepsilon_{ij}^{\theta} = \delta_{ij}\bar{\alpha}_{\theta}(\theta - \theta_0)$, де $\bar{\alpha}_{\theta} = \bar{\alpha}_{\theta}(\theta)$ є приведеним коефіцієнтом температурного подовження.

Нагадаємо, що згідно з формулами (6.19) – (6.21) для ізотропного матеріалу компоненти X_{mj}^{θ} градієнта температурних деформацій $\boldsymbol{X}^{\theta}$ записують у вигляді

$$\boxed{(X_{mj})^{\theta} = \delta_{mj}(1 + \bar{\alpha}_{\theta} \cdot (\theta - \theta_0)) = \delta_{mj}\vartheta(\theta)}\,; \quad \boxed{[X^{\theta}] = \vartheta(\theta)[I]}\,, \tag{7.5}$$

де позначена функція $\vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_{\theta} \cdot (\theta - \theta_0)$. А тензор температурних деформацій Гріна-Лагранжа в ізотропному матеріалі $\in_{ij}^{\theta} = (X_{mi}^{\theta} X_{mj}^{\theta} - \delta_{ij})/2 = (C_{ij}^{\theta} - \delta_{ij})/2 = 0.5(\vartheta^2(\theta) - 1)\delta_{ij}$, або в матричному позначенні $[\in^{\theta}] = 0.5(\vartheta^2(\theta) - 1)[I]$, завжди є визначеним (і інші тензори температурних деформацій – теж).

Тепер проведемо перший мультиплікативний розклад, в якому виділимо температурний градієнт (7.5) з повного градієнта руху.

Із врахуванням (7.2) ... (7.4) отримаємо, що:

$$X_{mi} = \frac{\partial x^m}{\partial a^i} = \frac{\partial [a^m + (u^{ecp})^m + (u^{\theta})^m]}{\partial a^i} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial a^i} + \frac{\partial (u^{\theta})^m}{\partial a^i} =$$

$$= \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\frac{\partial (x^{\theta})^n}{\partial a^i} + \frac{\partial (u^{\theta})^m}{\partial a^i} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\frac{\partial [a^n + (u^{\theta})^n]}{\partial a^i} + \frac{\partial (u^{\theta})^m}{\partial a^i} =$$

$$= \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\left(\delta_{ni} + \frac{\partial (u^{\theta})^n}{\partial a^i}\right) + \frac{\partial (u^{\theta})^m}{\partial a^i} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^i} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\frac{\partial (u^{\theta})^n}{\partial a^i} + \frac{\partial (u^{\theta})^m}{\partial a^i} =$$

$$= \left(\delta_{mn} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\right)\left(\delta_{ni} + \frac{\partial (u^{\theta})^n}{\partial a^i}\right) = \left(\delta_{mn} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{\partial (x^{\theta})^n}\right) X_{ni}^{\theta}. \tag{7.6}$$

Аналогічно до $[X]$ введемо матрицю $[X^{ecp}]$ з компонентами

$$X_{mn}^{ecp} = \delta_{mn} + \frac{\partial (u^{ecp})^m}{(\partial x^\theta)^n}. \tag{7.7}$$

Тоді *перший* мультиплікативний розклад градієнта руху Коші-Гріна (7.6) запишемо у вигляді

$$X_{mi} = X_{mn}^{ecp} X_{ni}^\theta; \qquad [X] = [X^{ecp}][X^\theta]. \tag{7.8}$$

Оскільки в (7.7) $\partial (u^{ecp})^m / \partial (x^\theta)^n$ є похідною в штучно створеному просторі, то для знаходження X_{mn}^{ecp} потрібно використовувати не вираз (7.7), а перетворену формулу (7.8):

$$X_{mn}^{ecp} = X_{mi} (X_{ni}^\theta)^{-1}; \quad \boxed{[X^{ecp}] = [X][X^\theta]^{-1}} \tag{7.9}$$

після того, як будуть знайдені компоненти X_{ni}^θ згідно з (7.5), а також X_{mi}. Оскільки матриця $[X^\theta]$ є діагональною, то обернена матриця $[X^\theta]^{-1}$ для (7.9) знаходиться з $[X^\theta]$ мінімумом елементарних дій: $[X^\theta]^{-1} = [I] / \vartheta(\theta)$.

Подальші розклади аналогічні. Вкажемо лише, що пружні деформації для МСЕ визначаються в останню чергу, а деформації пластичності реалізуються незрівнянно швидше, ніж деформації повзучості, тому їх визначають раніше.

Остаточно можна отримати, що

$$X_{jn}^p = \delta_{jn} + \frac{\partial (u^p)^j}{\partial (x^\theta)^n}; \quad X_{mj}^{ec} = X_{mn}^{ecp} (X_{jn}^p)^{-1} \quad \boxed{[X^{ec}] = [X^{ecp}][X^p]^{-1}}; \tag{7.10}$$

$$X_{kj}^c = \delta_{kj} + \frac{\partial (u^c)^k}{\partial (x^{p\theta})^j}; \quad X_{mk}^e = X_{mj}^{ec} (X_{kj}^c)^{-1}; \quad \boxed{[X^e] = [X^{ec}][X^c]^{-1}}, \tag{7.11}$$

а повний розклад градієнта руху Коші-Гріна

$$\boxed{X_{mi} = X_{mk}^e X_{kj}^c X_{jn}^p X_{ni}^\theta}; \quad \boxed{[X] = [X^e][X^c][X^p][X^\theta]}. \tag{7.12}$$

З (7.12) очевидно, що

$$\boxed{0 < J = \det[X^e]\det[X^c]\det[X^p]\det[X^\theta] = J^e J^c J^p J^\theta}. \tag{7.13}$$

7.1.3. Деякі властивості матриць мультиплікативного розкладу градієнта руху

Якщо деформації якогось типу відсутні, то відповідна матриця градієнтів є одиничною матрицею $[I]$ з $\det[I] = 1$, а з формул (7.6) … (7.13) видаляються непотрібні складові, а також символи позначення таких типів деформацій.

Матриця $[X^\theta]$, що введена виразом (7.5), з компонентами $X_{mj}^\theta = \delta_{mj}(1 + \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0)) = \delta_{mj}\vartheta(\theta)$, містить градієнти тільки температурних переміщень. Оскільки для металів величина $\bar{\alpha}_\theta$ має значення порядку 10^{-5}, а величини $\theta - \theta_0$ в земних умовах мають значення до порядку 10^3, то для переважної більшості конкретних задач про НДС тіл гарантовано, що функція $\vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0) > 0$, а тоді й $\boxed{\det[X^\theta] = \vartheta^3(\theta) > 0}$.

У теоріях пластичності та повзучості зазвичай враховується експериментально підтверджений факт, що при не дуже великих величинах всебічного тиску (середнього напруження), що реалізуються в земних умовах, об'єм елемента матеріалу (металічного) від непружного деформування практично не змінюється, тому приймають, що $J^p = \det[X^p] = 1$ та $J^c = \det[X^c] = 1$.

Тоді, з урахуванням $J = \det[X] > 0$, з виразу (7.13) маємо, що й $\boxed{J^e = \det[X^e] = J/(J^c J^p J^\theta) > 0}$. Отже, достатньо слідкувати, щоб $J^\theta = \det[X^\theta] > 0$. Випадок з порушенням цієї умови далі не розглядаємо, як малоймовірний.

Відповідно до теореми Коші про полярну декомпозицію (див. Розділ 2.3.3), існує однозначна полярна декомпозиція будь-якої матриці, якщо її детермінант більше нуля. Тому, аналогічно (2.26) можемо записати, що

$$[X^e] = [\upsilon_L^e][R^e];\quad [X^c] = [\upsilon_L^c][R^c];\quad [X^p] = [\upsilon_L^p][R^p];\quad [X^\theta] = [\upsilon_L^\theta][R^\theta]; \qquad (7.14\text{-а})$$

$$[X^e] = [R^e][\upsilon_R^e];\quad [X^c] = [R^c][\upsilon_R^c];\quad [X^p] = [R^p][\upsilon_R^p];\quad [X^\theta] = [R^\theta][\upsilon_R^\theta]. \qquad (7.14\text{-б})$$

Підставимо формули (2.26), а саме $[X] = [\upsilon_L][R]$ та $[X] = [R][\upsilon_R]$, а також (7.14) до виразу (7.12):

$$[X] = [\upsilon_L][R] = [X^e][X^c][X^p][X^\theta] = [\upsilon_L^e][R^e][\upsilon_L^c][R^c][\upsilon_L^p][R^p][\upsilon_L^\theta][R^\theta]; \qquad (7.15\text{-а})$$

$$[X] = [R][\upsilon_R] = [X^e][X^c][X^p][X^\theta] = [R^e][\upsilon_R^e][R^c][\upsilon_R^c][R^p][\upsilon_R^p][R^\theta][\upsilon_R^\theta]. \qquad (7.15\text{-б})$$

Температурна деформація ізотропного матеріалу ізотропна та однакова для всіх напрямків, тому вона не викликає кутових деформацій та жорсткого повороту, тобто $[R^\theta] = [I]$ і діагональна матриця $[X^\theta] = [\upsilon_L^\theta] = [\upsilon_R^\theta]$.

Всі інші типи деформацій можуть мати не тільки повздовжні деформації, а й кутові, тому в загальному випадку матриці $[X^e]$, $[X^c]$ та $[X^p]$ можуть бути як недіагональними, так і несиметричними.

З теорії матриць відомо, що результатом множення симетричної матриці на діагональну матрицю є симетрична матриця. Тобто матриця $[X^{p\theta}] = [X^p][X^\theta] = [\upsilon_L^p][R^p][\upsilon_L^\theta] = [R^p][\upsilon_R^p][\upsilon_R^\theta]$ є симетричною лише тоді, коли є симетричною матриця $[X^p]$, тобто в точці тіла за рахунок процесу пластичності кутові деформації не з'явилися.

Також відомо, що результат перемноження двох симетричних недіагональних матриць не є симетричною матрицею. Щоб отримати симетричну матрицю $[X] = [X^e][X^{cp\theta}]$, якщо матриця $[X^{cp\theta}]$ є несиметричною, потрібно, як мінімум, мати несиметричну матрицю $[X^e]$.

Тому в загальному випадку деформування матриці $[X^e]$, $[X^c]$ та $[X^p]$ є несиметричними, а матриці $[R^e]$, $[R^c]$ та $[R^p]$ не є одиничними.

Оскільки в виразах (7.15) матриці $[R^e]$, $[R^c]$ та $[R^p]$ неможливо вивести на останні або перші позиції, то в загальному випадку $[R^e][R^c][R^p] \neq [R]$.

Отже, для ізотропного матеріалу вирази (7.15) дещо спрощуються, але незначно:

$$\boxed{[X] = [\upsilon_L][R] = [X^e][X^c][X^p][X^\theta] = [\upsilon_L^e][R^e][\upsilon_L^c][R^c][\upsilon_L^p][R^p][\upsilon_L^\theta]}. \qquad (7.16\text{-а})$$

$$\boxed{[X]=[R][\upsilon_R]=[X^e][X^c][X^p][X^\theta]=[R^e][\upsilon_R^e][R^c][\upsilon_R^c][R^p][\upsilon_R^p][\upsilon_R^\theta]}. \tag{7.16-б}$$

Ці вирази дають *другий*, модифікований варіант мультиплікативного розкладу градієнта руху, який враховує, що для ізотропних матеріалів $[R^\theta]=[I]$.

7.1.4. Тензори Гріна-Лагранжа різних типів деформацій

Згідно з груповими властивостями операторів відображення (7.1) процес трансформація точки тіла в часі може бути описаним операторами неперервних відображень, які розглядаються (записуються) справа-наліво. Саме так побудоване мультиплікативне представлення процесу деформування згідно з розкладом (7.12): спочатку як би відбувається температурна трансформація, потім реалізуються пластичні деформації, ще пізніше – іде процес повзучості, і лише наостаннє – пружне деформування. Тому в кожному з підпросторів

$$\boxed{[\in^p]=0.5([X^{p\theta}]^T[X^{p\theta}]-[C^\theta])=0.5([C^{p\theta}]-[C^\theta])}; \tag{7.17}$$

$$\boxed{[\in^c]=0.5([X^{cp\theta}]^T[X^{cp\theta}]-[X^{p\theta}]^T[X^{p\theta}])=0.5([C^{cp\theta}]-[C^{p\theta}])}; \tag{7.18}$$

$$\boxed{[\in^e]=0.5([X]^T[X]-[X^{cp\theta}]^T[X^{cp\theta}])=0.5([C]-[C^{cp\theta}])}, \tag{7.19}$$

а також повні деформації міри Гріна-Лагранжа

$$\boxed{[\in]=0.5([X]^T[X]-[I])=0.5([C]-[I])=[\in^e]+[\in^c]+[\in^p]+[\in^\theta]}. \tag{7.20}$$

Природно, що із використанням матриць $[X^\theta]$, $[X^p]$, $[X^{p\theta}]=[X^p][X^\theta]$, $[X^c]$, … $[X^e]$, … $[X]$ можна записати вирази для відповідних типів деформацій в інших мірах, зокрема Альмансі, Генкі тощо.

7.2. Швидкісні та просторові градієнти в модифікованих підпросторах

Виразом

$$\dot{X}_{mi}=\partial X_{mi}/\partial t, \tag{7.21}$$

введемо компоненти матриці швидкості градієнтів руху.

Нагадаємо, що виразами (5.4), (5.6) та (5.7) ввели матрицю "просторового градієнта швидкості руху" та виділили її симетричну та антисиметричну частини, а саме:

$$[L]=[\dot{X}][X]^{-1}. \tag{7.22}$$

$$[d]=([L]+[L]^T)/2=[d]^T; \tag{7.23}$$

$$[w]=([L]-[L]^T)/2=-[w]^T. \tag{7.24}$$

Якщо у (7.21) підставити мультиплікаційний розклад (7.12) та застосувати вирази (7.22) – (7.24), то в підсумку можна отримати, що потрібні надалі компоненти "*приведених швидкостей руху*"

$$\underset{\sim}{L}^c_{kq}=\dot{X}^c_{kj}(X^c_{qj})^{-1};\quad [\underset{\sim}{L}^c]=[\dot{X}^c][X^c]^{-1}; \tag{7.25}$$

$$\underset{\sim}{L}^p_{kq}=X^c_{kj}\dot{X}^p_{jn}(X^p_{rn})^{-1}(X^c_{qr})^{-1};\quad [\underset{\sim}{L}^p]=[X^c][\dot{X}^p][X^p]^{-1}[X^c]^{-1}; \tag{7.26}$$

$$\underset{\sim}{L}^\theta_{kq}=X^c_{kj}X^p_{jn}\dot{X}^\theta_{ni}(X^\theta_{si})^{-1}(X^p_{rs})^{-1}(X^c_{qr})^{-1};\quad [\underset{\sim}{L}^\theta]=[X^c][X^p][\dot{X}^\theta][X^\theta]^{-1}[X^p]^{-1}[X^c]^{-1}; \tag{7.27}$$

$$\bar{L}^e_{\mu\nu} = X^e_{m\mu} L^e_{mn} X^e_{n\nu} = X^e_{m\mu} \dot{X}^e_{mi} (X^e_{ni})^{-1} X^e_{n\nu} = X^e_{m\mu} \dot{X}^e_{m\nu}; \quad [\bar{L}^e] = [X^e]^T [\dot{X}^e]. \tag{7.28}$$

Оскільки в загальному випадку матриця $[X]$ з компонент X_{mi} не є симетричною, то й матриці (7.25) – (7.27) можуть бути не симетричними. Із вказаних матриць можна виділити їх *симетричні*

$$\underset{\sim}{d}^c_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^c_{kq} + \underset{\sim}{L}^c_{qk}); \quad [\underset{\sim}{d}^c] = 0.5([\underset{\sim}{L}^c] + [\underset{\sim}{L}^c]^T); \tag{7.29}$$

$$\underset{\sim}{d}^p_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^p_{kq} + \underset{\sim}{L}^p_{qk}); \quad [\underset{\sim}{d}^p] = 0.5([\underset{\sim}{L}^p] + [\underset{\sim}{L}^p]^T); \tag{7.30}$$

$$\underset{\sim}{d}^\theta_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^\theta_{kq} + \underset{\sim}{L}^\theta_{qk}); \quad [\underset{\sim}{d}^\theta] = 0.5([\underset{\sim}{L}^\theta] + [\underset{\sim}{L}^\theta]^T); \tag{7.31}$$

$$\bar{d}^e_{mn} = 0.5(\bar{L}^e_{mn} + \bar{L}^e_{nm}); \quad [\bar{d}^e] = 0.5([\bar{L}^e] + [\bar{L}^e]^T); \tag{7.32}$$

та *несиметричні*

$$\underset{\sim}{w}^c_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^c_{kq} - \underset{\sim}{L}^c_{qk}); \quad [\underset{\sim}{w}^c] = 0.5([\underset{\sim}{L}^c] - [\underset{\sim}{L}^c]^T); \tag{7.33}$$

$$\underset{\sim}{w}^p_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^p_{kq} - \underset{\sim}{L}^p_{qk}); \quad [\underset{\sim}{w}^p] = 0.5([\underset{\sim}{L}^p] - [\underset{\sim}{L}^p]^T); \tag{7.34}$$

$$\underset{\sim}{w}^\theta_{kq} = 0.5(\underset{\sim}{L}^\theta_{kq} - \underset{\sim}{L}^\theta_{qk}); \quad [\underset{\sim}{w}^\theta] = 0.5([\underset{\sim}{L}^\theta] - [\underset{\sim}{L}^\theta]^T); \tag{7.35}$$

$$\bar{w}^e_{mn} = 0.5(\bar{L}^e_{mn} - \bar{L}^e_{nm}); \quad [\bar{w}^e] = 0.5([\bar{L}^e] - [\bar{L}^e]^T) \tag{7.36}$$

частини.

Пояснимо, що, зокрема, матриця $[\underset{\sim}{d}^c]$ містить компоненти $\underset{\sim}{d}^c_{kq}$ модифікованого швидкісного тензора деформацій повзучості, а $[\underset{\sim}{w}^c]$ – його вихору $\underset{\sim}{w}^c_{kq}$. Модифікація полягає у тому, що простір, в якому визначаються ці матриці, є проміжним (*intermediate configuration*).

7.3. Потужність внутрішніх сил. Тензор напружень Менделя

Нагадаємо, що для встановлення загальних співвідношень деформівного матеріалу зазвичай застосовують закони термодинаміки, зокрема, другий закон у вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема (5.1). У підрозділі 5.2.2 було встановлено, що з тензором деформацій Гріна-Лагранжа спряжений за потужністю другий тензор напруження Піола-Кірхгофа (ТН2ПК) $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$, оскільки (див. (5.13)):

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = J[\sigma]:[d] = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 : [\dot{\in}], \tag{7.37}$$

де $J = \bar{\rho}_0 / \bar{\rho}$; $\bar{\rho}$ та $\bar{\rho}_0$ є відповідно поточною та початковою густиною матеріалу; знак : між матрицями вказує на операцію згортання, результат якої – число, тобто $[\sigma]:[d] = \sigma^{mn} d_{mn}$.

Із використанням виразу (5.12), а саме $[\dot{\in}] = [X]^T [d][X]$, а також формули (4.16), тобто $J[\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T$, спочатку запишемо, що:

$$[\underset{\sim}{\sigma}]_0 : [\dot{\in}] = [\dot{\in}] : [\underset{\sim}{\sigma}]_0 = ([X]^T [d][X]) : (J[X]^{-1} [\sigma][X]^{-T}). \tag{7.38}$$

Якщо у (7.38), а також у формулу (7.23) $[d] = ([L] + [L]^T)/2$, через вираз (7.22), тобто $[L] = [\dot{X}][X]^{-1}$, вставити вираз мультиплікаційного розкладу (7.12), а саме $[X] = [X^e][X^c][X^p][X^\theta]$, то, з урахуванням (7.25) – (7.36), можна отримати, що

$$\bar{\rho}_0 \dot{\psi}_M = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 : [\dot{\in}] = [\bar{S}] : [\bar{d}^e] + [\Xi] : ([\underset{\sim}{L}^c] + [\underset{\sim}{L}^p] + [\underset{\sim}{L}^\theta]), \tag{7.39}$$

де формулами

$$\boxed{[\bar{S}]=[X^e]^{-1}J[\sigma][X^e]^{-T}}\ ;\quad \boxed{[\Xi]=[X^e]^T[X^e][\bar{S}]=[X^e]^T J[\sigma][X^e]^{-T}} \qquad (7.40)$$

введено *симетричну матрицю приведених напружень* $[\bar{S}]$ та *несиметричну матрицю напружень* ***Менделя*** (Jean Mandel, 1907-1982 рр.).

Матрицю $[\Xi]$ можна завжди записати у вигляді $[\Xi]=[\Xi]_s+[\Xi]_w$, де симетрична $[\Xi]_s$ та антисиметрична $[\Xi]_w$ складові: $[\Xi]_s=([\Xi]+[\Xi]^T)/2$; $[\Xi]_w=([\Xi]-[\Xi]^T)/2$. Аналогічно можна представити матриці $[\underset{\sim}{L}^c]$, $[\underset{\sim}{L}^p]$ і $[\underset{\sim}{L}^\theta]$ як суми їх симетричних та несиметричних частин (див. (7.28) … (7.36)): $[\underset{\sim}{L}^c]=[\underset{\sim}{d}^c]+[\underset{\sim}{w}^c]$; $[\underset{\sim}{L}^p]=[\underset{\sim}{d}^p]+[\underset{\sim}{w}^p]$; $[\underset{\sim}{L}^\theta]=[\underset{\sim}{d}^\theta]+[\underset{\sim}{w}^\theta]$.

Тепер запишемо (7.39) як

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = J\cdot([\sigma]:[d])=[\bar{S}]:[\bar{d}^e]+[\Xi]:([\underset{\sim}{d}^c]+[\underset{\sim}{w}^c]+[\underset{\sim}{d}^p]+[\underset{\sim}{w}^p]+[\bar{d}^\theta]+[\bar{w}^\theta]). \qquad (7.41)$$

Вважається, що *симетрична частина* тензора Менделя створює потужність на модифікованому тензорі швидкості деформацій пластичності, повзучості та температурних, а *несиметрична* – на їхніх вихорах. Для ізотропного матеріалу $[\underset{\sim}{w}^\theta]=[0]$. Зазвичай вважається, що при повзучості кінематичного зміцнення матеріалу немає, тобто можна прийняти $[\Xi]_w:[\underset{\sim}{w}^c]=0$. Враховуючи ці обставини, вираз (7.41), який відповідає питомій потужності внутрішніх сил, змінюється на

$$\boxed{\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = J\cdot([\sigma]:[d])=[\bar{S}]:[\bar{d}^e]+[\Xi]_s:([\underset{\sim}{d}^c]+[\underset{\sim}{d}^p]+[\underset{\sim}{d}^\theta])+[\Xi]_w:[\underset{\sim}{w}^p]}\,. \qquad (7.42\text{-а})$$

В індексній формі запису:

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}_M = J\sigma^{mn}d_{mn}=\bar{S}^{mn}\bar{d}^e_{mn}+(\Xi^{mn})_s(\underset{\sim}{d}^c_{mn}+\underset{\sim}{d}^p_{mn}+\underset{\sim}{d}^\theta_{mn})+(\Xi^{mn})_w\underset{\sim}{w}^p_{mn}. \qquad (7.42\text{-б})$$

7.4. Загальні рівняння інкрементальних теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях

З виразу (7.42) для питомої потужності внутрішніх сил, шляхом застосування *нерівності Клаузіуса-Дюгема* (5.1) та *функціоналу з невідомими множниками* ***Лагранжа*** $\dot{\lambda}^p$ та $\dot{\lambda}^c$, який створюють, отримують, що:

$$\boxed{\underset{\sim}{d}^p_{mn}=\dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_s}}\ ;\quad \underset{\sim}{w}^p_{mn}=\dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_w}\ ;\quad \dot{\xi}_{mn}=\dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial\beta^{mn}}\ ;$$

$$\dot{\zeta}=\dot{\lambda}^p\frac{\partial g}{\partial k^p};\quad m,n=1,2,3; \qquad (7.43)$$

$$\boxed{\underset{\sim}{d}^c_{mn}=\dot{\lambda}^c\frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_s}}\ ;\quad \dot{\varsigma}=\dot{\lambda}^c\frac{\partial f}{\partial k^c};\quad m,n=1,2,3. \qquad (7.44)$$

Це є *рівняння інкрементальних асоційованих теорій термопластичності* (рівняння (7.43)) та *повзучості* (рівняння (7.44)) *при великих деформаціях*.

В них функціонал g обмежує опуклу область значень напружень, які матеріал може отримати при пластичному деформуванні. Він має за параметри величини $(\Xi^{mn})_s$, $(\Xi^{mn})_w$, β^{mn} та k^p, тобто

$$g = g((\Xi^{mn})_s, (\Xi^{mn})_w, \beta^{mn}, k^p)\,. \qquad (7.45)$$

А опуклий функціонал f контролює швидкість процесів повзучості. За параметри він має величини $(\Xi^{mn})_s$ та k^c, тобто

$$f = f((\Xi^{mn})_s, k^c)\,. \qquad (7.46)$$

Отримали характерний для асоційованих теорій пластичності та повзучості загальний вигляд записів законів, обґрунтованих для нескінченно малих деформацій. Винятком є тільки другий вираз у (7.43), оскільки при нескінченно малих деформаціях поворотом головних осей напружень нехтують. Але в металах з ізотропною орієнтацією зерен зазвичай вважається, що всі компоненти $\underset{\sim}{w}^p_{mn} = 0$, що призводить до рівності $\underset{\sim}{d}^p_{mn} = \underset{\sim}{L}^p_{mn}$ та відсутності потреби у застосуванні другого виразу (7.43).

Компоненти β^{mn} відповідають компонентам тензора "мікронапружень", що визначають "кінематичне" зміцнення, а параметр k^p характеризує ізотропне зміцнення матеріалу, що відбувається внаслідок накопичення пластичних деформацій (аналог параметра Одквіста); параметр k^c визначає ізотропне зміцнення матеріалу, що відбувається внаслідок накопичення деформацій повзучості (зазвичай припускається, що "кінематичне" зміцнення при накопиченні деформацій повзучості не виникає). Тому компоненти $\dot{\xi}_{mn}$ визначають швидкість процесу "*кінематичного*" зміцнення матеріалу, а $\dot{\zeta}$ та $\dot{\varsigma}$ – *ізотропного*.

Отже, вирази (7.43) – (7.46) є *теоретичним обґрунтуванням* застосування інкрементальних теорій пластичності та повзучості при *великих* деформаціях, які не протирічать *другому закону термодинаміки*.

Контрольні питання до розділу

1. На чому ґрунтується ідея модифікованих підпросторів? Як вони позначаються?
2. Яким є перший мультиплікативний розклад градієнта руху при великих деформаціях чотирьох типів?
3. Яким є порядок мультиплікативних розкладів при наявності деформацій чотирьох типів? Чому саме такий?
4. Вкажіть на деякі властивості матриць мультиплікативного розкладу градієнта руху.
5. Яким чином можна ввести тензори Гріна-Лагранжа різних типів деформацій?
6. Які швидкісні та просторові градієнти розглядаються в модифікованих підпросторах?
7. Яким чином записують потужність внутрішніх сил із застосуванням тензора напружень Менделя?
8. Охарактеризуйте загальні рівняння інкрементальних теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях, які задовольняють другому закону термодинаміки.

Розділ 8

РІВНЯННЯ РУХУ ТА ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

8.1. Рівняння руху

Рівняння руху (закон збереження імпульсу) можна отримати як слідство рівняння балансу. У векторній формі запису це є рівняння

$$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\hat{\vec{O}}=\bar{\rho}\ddot{\vec{u}}\,. \tag{8.1}$$

Для повної характеристики руху тіла рівняння руху доповнюють граничними умовами на поверхні S_U з кінематичними обмеженнями, та на поверхні S_P з розподіленим навантаженням:

$$\vec{u}\big|_{S_U}=\hat{\vec{q}}\,; \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{v}\big|_{S_P}=\hat{\vec{P}}\,. \tag{8.3}$$

Далі всюди "дах $\hat{\ }$" над величиною вказує на відомі значення.

В наведених рівняннях (8.1) … (8.3) припускається, що конфігурація є поточною. Можна перейти до початкової конфігурації. Іноді рівняння записують через швидкості зміни сил, переміщень та напружень. Але для побудови алгоритмів, що використовують метод скінченних елементів, рівняння руху окремих точок тіла фактично не використовуються, оскільки енергетичний баланс, як буде видно з наступного підрозділу, розглядається для всього тіла.

8.2. Принцип можливих переміщень

При побудові алгоритмів розв’язування крайових задач із врахуванням геометричної нелінійності будемо використовувати принцип можливих переміщень (див. підрозділ 12.5 книги [8]. Його часто пов’язують з Ж.Л. Лагранжем (1736-1813), який ввів поняття варіації). При цьому при застосуванні UL-формулювання крайової задачі (див. підрозділ 2.1) використовується ***поточна*** конфігурація, а при TL-формулюванні – ***початкова***.

8.2.1. Принцип можливих переміщень у поточній конфігурації

Саме в ***поточній*** конфігурації сформульовано принцип можливих переміщень, який застосовується при UL-формулюванні:

$$\boxed{\Psi(\delta)=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}\hat{\vec{O}}\cdot\delta\vec{u}\,d\Omega-\int\limits_{S_P}\hat{\vec{P}}\cdot\delta\vec{u}\,dS=0}\,, \tag{8.4-a}$$

де $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень Ейлера-Коші; $\hat{\vec{O}}$, $\hat{\vec{P}}$ – відомі вектори об'ємних (в Ω) і поверхневих (на S_P) навантажень; $\delta\vec{u}$ – варіації вектора переміщень, а варіація

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{u} + \vec{\nabla}\cdot\delta\vec{u}), \tag{8.5}$$

причому вектор-оператор $\vec{\nabla}$ теж діє в поточній конфігурації.

В індексній формі запису

$$\boxed{\delta\Psi = \int_{\Omega}\sigma^{mn}\delta\varepsilon_{mn}d\Omega - \int_{\Omega}\hat{O}^m\delta u^m d\Omega - \int_{S_P}\hat{p}^m\delta u^m dS = 0}\,. \tag{8.4-б}$$

8.2.2. Принцип можливих переміщень у початковій конфігурації

Розглянемо питання: як зміниться вираз (8.4) принципу можливих переміщень при перерахунку від поточної конфігурації до початкової, яка застосовується при TL-формулюванні. Нагадаємо, що початкову конфігурацію характеризують три вектори основного базису $\vec{e}_i$, координатні лінії a^i, елемент площі dS_0, елемент об'єму $d\Omega_0$.

8.2.2.1. Вираз для першого об'ємного інтеграла у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Розглянемо перший інтеграл з функціонала (8.4), перетворимо його на початкову конфігурацію. Для спрощення записів будемо використовувати матричні позначення, а в індексній формі запишемо лише результат.

Спочатку запишемо перший інтеграл з функціонала (8.4) із застосуванням (4.17) та (2.24) як $\int_{\Omega}[\sigma]:\delta[\varepsilon]d\Omega = \int_{\Omega_0}\left(\frac{1}{J}[X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):\delta[\varepsilon](Jd\Omega_0) = \int_{\Omega_0}\left([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):\delta[\varepsilon]d\Omega_0$, потім, помножуючи $\delta[\varepsilon]$ справа на вираз, який нічого не змінює, а саме на $[X][X]^{-1} = [I]$, отримаємо, що:

$$\int_{\Omega}[\sigma]:\delta[\varepsilon]d\Omega = \int_{\Omega_0}\left([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):\delta[\varepsilon]d\Omega_0 = \int_{\Omega_0}\left([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):\left(\delta[\varepsilon][X][X]^{-1}\right)d\Omega_0 =$$

$$= \int_{\Omega_0}\left(\delta[\varepsilon][X][X]^{-1}\right)^T\left([X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):[I]d\Omega_0 = \int_{\Omega_0}\left([X]^{-T}[X]^T\delta[\varepsilon]^T[X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T\right):[I]d\Omega_0 =$$

$$= \int_{\Omega_0}\left([X]^T\delta[\varepsilon][X][\underset{\sim}{\sigma}]_0\right):[I]d\Omega_0\,. \tag{8.6}$$

Тут були застосовані симетричність матриці $\delta[\varepsilon]$ та властивість згортки двох матриць $[A]:[B] = ([B]^T[A]):[I] = ([Z][B]^T[A][Z]^{-1}):[I]$, причому у даному випадку матриця $[Z] = [X]^{-T}$.

Визначимося з виразом $[X]^T\delta[\varepsilon][X]$ для (8.6). Оскільки є повна подібність в обчисленні часових похідних та отриманні варіацій, то можемо використати формулу (5.12), а саме $[\dot{\in}] = [X]^T[d][X]$, й записати, що

$$\delta[\in] = [X]^T\delta[\varepsilon][X], \tag{8.7}$$

де позначена матриця

$$\delta[\varepsilon] = 0.5(\delta[\upsilon]^T + \delta[\upsilon]), \tag{8.8}$$

основна матриця-складова якої

$$\delta[\upsilon] = \begin{bmatrix} \nabla_1(\delta u^1); & \nabla_2(\delta u^1); & \nabla_3(\delta u^1) \\ \nabla_1(\delta u^2); & \nabla_2(\delta u^2); & \nabla_3(\delta u^2) \\ \nabla_1(\delta u^3); & \nabla_2(\delta u^3); & \nabla_3(\delta u^3) \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

містить компоненти $\partial(\delta u^m)/\partial x^i = \delta(\nabla_i x^m)$, оскільки в поточній конфігурації $\partial x^m / \partial x^i = \partial(a^m + u^m)/\partial x^i = \partial u^m / \partial x^i$. Очевидно, що $(\delta[\upsilon])^T = \delta[\upsilon]^T$.

Із застосуванням (8.7) вираз (8.6)

$$\int_\Omega [\sigma]:\delta[\varepsilon]d\Omega = \int_{\Omega_0} \left(\delta[\in][\underset{\sim}{\sigma}]_0\right):[I]d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} [\underset{\sim}{\sigma}]_0 : \delta[\in]^T d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta[\in]:[\underset{\sim}{\sigma}]_0 d\Omega_0 . \tag{8.10-а}$$

В компонентній формі запису:

$$\boxed{\int_\Omega \sigma^{mn}\delta\varepsilon_{mn} d\Omega = \int_{\Omega_0} \delta \in_{mn} (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 d\Omega_0} . \tag{8.10-б}$$

Отримали запис першого інтеграла з (8.4) у початковій конфігурації.

8.2.2.2. Вираз для другого об’ємного інтеграла у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Отримаємо вираз для другого інтеграла з (8.4), а саме для $\int_\Omega \hat{\vec{O}} \cdot \delta\vec{u} d\Omega$, після перетворення у початкову конфігурацію. Компоненти δu^i вектора варіації переміщень $\delta\vec{u} = \delta u^i \vec{e}_i$ перетворювати не потрібно, оскільки вони визначаються щодо вихідної конфігурації. Вектор $\hat{\vec{O}}$ об’ємного навантаження запишемо як

$$\hat{\vec{O}} = \overline{\rho}\hat{\vec{F}}, \tag{8.11}$$

де $\overline{\rho}$ є питомою густиною матеріалу. Згідно зі слідством закону про збереження маси тіла (див. формулу (2.25)) $\int_\Omega \overline{\rho} d\Omega = \int_{\Omega_0} \overline{\rho}_0 d\Omega_0$. Тому

$$\int_\Omega \hat{\vec{O}} \cdot \delta\vec{u} d\Omega = \int_{\Omega_0} \overline{\rho}_0 \hat{\vec{F}} \cdot (\delta u^i \vec{e}_i) d\Omega_0 . \tag{8.12}$$

Залишилося виразити вектор питомої масової сили $\hat{\vec{F}}$ у початковій конфігурації. Можливі дві ситуації:

- сила $\hat{\vec{F}}$ є "мертвою", тобто не змінюється при наявності деформації в точці тіла, тому компоненти $(\hat{F}^i)_0$ у базисі $\vec{e}_i$ є незмінними, а $\hat{\vec{F}} = (\hat{F}^i)_0 \vec{e}_i$;
- сила $\hat{\vec{F}}$ "слідкує" за деформацією точки тіла (змінює своє положення та свою величину при наявності деформації), причому може бути відомою як $\hat{\vec{F}} = (\hat{F}^i)_0 \vec{e}_i$, або лише як $\hat{\vec{F}} = \hat{F}^j \vec{E}_j = \hat{F}^j(\delta^i_j + \nabla_j u^i)\vec{e}_i = \hat{F}^j X_{ij} \vec{e}_i$.

Можна ввести однакове позначення:

$$(\hat{\vec{F}}^i)_0 = (\hat{F}^i)_0 \quad \text{та} \quad (\hat{\vec{F}}^i)_0 = \hat{F}^j X_{ij} \tag{8.13}$$

для вказаних випадків відповідно. Тоді із врахуванням (2.3), тобто $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$, вираз $\hat{\bar{F}} \cdot (\delta u^i \vec{e}_i) = (\hat{\bar{F}}^i)_0 \vec{e}_i \cdot (\delta u^i \vec{e}_i) = (\hat{\bar{F}}^i)_0 \delta u^i g_{ii}$. Позначимо $(\underset{\sim}{\hat{F}}{}^i)_0 = (\hat{\bar{F}}^i)_0 g_{ii}$ та

$$(\underset{\sim}{\hat{Q}}{}^i)_0 \delta u^i = \bar{\rho}_0 (\hat{\bar{F}}^i)_0 g_{ii} \delta u^i = \bar{\rho}_0 (\underset{\sim}{\hat{F}}{}^i)_0 \delta u^i ; \tag{8.14}$$

тоді формулу (8.13) остаточно запишемо як

$$\boxed{\int_{\Omega} \hat{\bar{O}} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\hat{Q}}{}^i)_0 \delta u^i d\Omega_0} \quad \text{або} \quad \boxed{\int_{\Omega} \hat{\bar{O}} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_{\Omega_0} \bar{\rho}_0 (\underset{\sim}{\hat{F}}{}^i)_0 \delta u^i d\Omega_0} . \tag{8.15}$$

8.2.2.3. Вираз для поверхневого інтеграла у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Розглянемо третій інтеграл з (8.4), а саме $\int_{S_P} \hat{\bar{P}} \cdot \delta \vec{u} dS$. Результуючий вектор поверхневого навантаження на елементарній площадці $\vec{P} dS$ запишемо у вигляді $\vec{P} dS = q \underset{\sim}{\vec{v}} dS$, де $q = q(\vec{x}, t)$ – розподілене навантаження в точці поверхні; $\underset{\sim}{\vec{v}} = \underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i$ – вектор нормалі до поверхні в тій же точці. Враховано, що саме контраваріантні вектори $\vec{E}^i$ нормальні до здеформованої поверхні, яку визначають два вектори $\vec{E}_j$ та $\vec{E}_k$ (тут $i \neq j \neq k \neq i;\ i, j, k = 1,2,3$). Тоді

$$\int_{S_P} \hat{\bar{P}} \cdot \delta \vec{u} dS = \int_{S_P} (\hat{q} \underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i) \cdot (\delta u^i \vec{e}_i) dS . \tag{8.16}$$

Компоненти δu^i вектора варіації переміщень $\delta \vec{u} = \delta u^i \vec{e}_i$ перетворювати немає необхідності, оскільки вони визначаються щодо вихідної (недеформованої) конфігурації. Представимо частину підінтегрального виразу, що залишилася, тобто $\hat{q} \underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i dS$, у вигляді

$$\hat{q} \underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i dS = (\hat{p}^j)_0 \vec{E}_j dS_0 , \tag{8.17}$$

де приведені компоненти вектора навантаження до поверхні одиничної площі *вихідної* (недеформованої) конфігурації, які ще необхідно знайти

$$(\hat{p}^j)_0 = \hat{P}^{ij} (v_i)_0 . \tag{8.18}$$

Компоненти $\underset{\sim}{v}_i$ у (8.17) визначені відносно $\vec{E}_i$, тобто:

$$\underset{\sim}{v}_i = (\delta_i^j + \nabla_i u^j) v_j = X_{ji} v_j ; \quad i, j = 1,2,3 . \tag{8.19}$$

де v_j є компонентами вектора нормалі до елементарної поверхні dS, визначені відносно $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$, а X_{ji} введено в (2.17). Отже, замість (8.17) запишемо:

$$\hat{q} X_{ji} v_j \vec{E}^i dS = (\hat{P}^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{E}_j dS_0 . \tag{8.20}$$

Згідно з формулою Нансона (2.20-а) $X_{ji} v_j dS = J (v_i)_0 (dS)_0$. Підставимо цей вираз у ліву частину формули (8.20). Після скорочення на dS_0 отримаємо:

$$\hat{q} J (v_i)_0 \vec{E}^i = (\hat{P}^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{E}_j . \tag{8.21}$$

Із врахуванням (8.18) цей вираз прийме вигляд

$$\hat{q} J (v_i)_0 \vec{E}^i = (\hat{p}^j)_0 \vec{E}_j . \tag{8.22}$$

Помножимо (8.22) у скалярний спосіб на $\vec{E}_k$. З огляду на те, що $\vec{E}^i \cdot \vec{E}_k = \delta_k^i$; $(\nu_i)_0 \delta_k^i = (\nu_k)_0$; $\vec{E}_j \cdot \vec{E}_k = C_{jk}$, одержимо спочатку, що

$$\widehat{q} J(\nu_k)_0 = (\widehat{p}^j)_0 C_{jk}, \tag{8.23}$$

а зі врахуванням $C^{jk} = (C_{jk})^{-1}$ та $C^{jk}(\nu_k)_0 = C^{ji}(\nu_i)_0$:

$$(\widehat{p}^j)_0 = \widehat{q} J C^{ji} (\nu_i)_0 . \tag{8.24}$$

Отже, замість (8.16), з врахуванням (2.20), (8.17) та (8.24), маємо вираз (ДСК)

$$\int_{S_P} \widehat{\vec{P}} \cdot \delta\vec{u} dS = \int_{(S_P)_0} \widehat{q} J C^{ji} (\nu_i)_0 \vec{E}_j \cdot (\delta u^i \vec{e}_i) dS_0 =$$

$$= \int_{(S_P)_0} \widehat{q} J \left(C^{ji} (\nu_i)_0 X_{mj} \vec{e}_m \right) \cdot (\delta u^m \vec{e}_m) dS_0 = \int_{(S_P)_0} \widehat{q} J C^{ji} (\nu_i)_0 X_{mj} \delta u^m dS_0 , \tag{8.25}$$

який обчислюється у *вихідній* (недеформованій) конфігурації. Позначимо:

$$\boxed{(\underset{\sim}{p}^m)_0 = \widehat{q} J C^{ji} (\nu_i)_0 X_{mj}} . \tag{8.26}$$

Остаточно:

$$\boxed{\int_{S_P} \widehat{\vec{P}} \cdot \delta\vec{u} dS = \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{\widehat{p}}^m)_0 \delta u^m dS_0} . \tag{8.27}$$

8.2.2.4. Вираз принципу можливих переміщень у TL-формулюванні

Якщо вирази (8.10-б), (8.15) та (8.27) підставити у (8.4), то отримаємо вираз принципу можливих переміщень при TL-формулюванні в компонентній формі:

$$\boxed{\delta \Psi = \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 \delta \underset{0}{\in}_{ij} \, d\Omega \; - \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\widehat{Q}}^i)_0 \delta u^i \underset{0}{d\Omega} \; - \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{\widehat{p}}^m)_0 \delta u^m dS_0 = 0} . \tag{8.28}$$

Цей функціонал в поєднанні з кінематичними ГУ на поверхні S_U

$$u^m \Big|_{S_U} = \widehat{q}^m \tag{8.29}$$

визначає незліченну множину можливих НДС. Дійсний НДС – один з віртуальних, але додатково задовольняє рівнянням зв'язків (8.5) і між напруженнями та деформаціями.

Контрольні питання до розділу

1. Про що йдеться у рівнянні руху? Якими умовами вони доповнюються?
2. Яка є особливість запису принципу можливих переміщень у поточній конфігурації?
3. Які є особливості запису принципу можливих переміщень у початковій конфігурації: перший інтеграл?
4. Які є особливості запису принципу можливих переміщень у початковій конфігурації: другий інтеграл?
5. Які є особливості запису принципу можливих переміщень у початковій конфігурації: третій інтеграл?

Розділ 9

СКІНЧЕННЕ-ЕЛЕМЕНТНІ АЛГОРИТМИ "ПОВНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ ЛАГРАНЖА" (TOTAL LAGRANGIAN – TL) ПРИ ГЕОМЕТРИЧНІЙ ТА ФІЗИЧНІЙ НЕЛІНІЙНОСТІ

Є декілька ітераційних алгоритмів (методів) розв'язування суттєво нелінійних крайових задач, досить добре вивчених. При постановці крайової задачі в переміщеннях із врахуванням необоротних деформацій, а також при урахуванні геометричної нелінійності, для отримання САР зазвичай застосовують *принцип можливих переміщень* або *метод зважених похибок наближення* (Петрова), а також *метод додаткових навантажень*. Для розв'язування породженої нелінійної САР зазвичай використовують *ітераційний метод Ньютона-Рафсона*.

У загальному випадку (**UL**-формулювання) весь процес навантаження тіла розбивають на ***етапи***, на ***кожному*** з яких розв'язується крайова задача. Результати поточного етапу є початковими умовами для наступного етапу. Доказана теорема, що при зменшенні кроку цих етапів (збільшенні їх кількості) наближений розв'язок прямує до точного. В окремому випадку розглядається лише один етап навантаження (це характерно для **TL**-формулювання).

Якщо можлива часткова або повна втрата стійкості тіла (конструкції), то розбивання процесу навантаження на етапи проводять із застосуванням одного з алгоритмів вибору "кроку навантаження" (це характерно для **UL**-формулювання).

9.1. Скінченне-елементне наближення крайових задач при TL-формулюванні

9.1.1. Скінченне-елементне наближення компонент великих деформацій

Розділимо компоненти *правого тензора деформацій* ***Гріна-Лагранжа*** на дві складові:

$$\in_{ij} = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij}\,, \tag{9.1}$$

де *лінійна* частина тензора деформацій

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(\nabla_i u^j + \nabla_j u^i)\,, \tag{9.2}$$

а η_{ij} – *нелінійна* частина, тобто

$$\eta_{ij} = 0.5\nabla_i u^m \nabla_j u^m\,. \tag{9.3}$$

Далі використовуємо тільки декартову систему координат (ДСК), в якій $u^i = u_i$, оператор $\nabla_i = \partial / \partial a^i$.

В ДСК

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial a^j} + \frac{\partial u^j}{\partial a^i}\right); \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u^m}{\partial a^i}\frac{\partial u^m}{\partial a^j}; \quad i, j, m = 1,2,3, \tag{9.4}$$

тобто у формулі (9.1) є п’ять складових. Позначимо (див. також пояснення для (2.18)):

$$b_{ij} = \partial u^i / \partial a^j \tag{9.5}$$

та введемо вектор

$$\{\theta\} = \{\{\theta_{a^1}\},\ \{\theta_{a^2}\},\ \{\theta_{a^3}\}\}^T, \quad \text{де} \quad \{\theta_{a^j}\} = \{b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}\}^T. \tag{9.6}$$

Тоді друге співвідношення (9.4) можна представити у вигляді

$$\{\eta\} = 0.5[A]\{\theta\}, \tag{9.7}$$

де матриця $[A]$ розмірністю 6×9 (тривимірний випадок) у ДСК має вигляд:

$$[A] = \begin{bmatrix} b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & b_{13}; & b_{23}; & b_{33} \\ b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & b_{12}; & b_{22}; & b_{32} \\ b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & 0; & 0; & 0; & b_{11}; & b_{21}; & b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\theta_{a^1}\}^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{a^2}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{a^3}\}^T \\ \{\theta_{a^2}\}^T; & \{\theta_{a^1}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{a^3}\}^T; & \{\theta_{a^2}\}^T \\ \{\theta_{a^3}\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{a^1}\}^T \end{bmatrix}, \tag{9.8}$$

а $\{0\} = \{0,0,0\}^T$ – нульовий вектор.

Вектори $\{\theta_{a^j}\}$ можна виразити через ***вузлові значення переміщень*** $\{q\}_e$ як

$$\{\theta_{a^j}\} = [Y_j]\{q\}_e, \tag{9.9}$$

де незалежна від переміщень матриця розмірністю $3\times 3M_e$

$$[Y_j] = \left[[p_{j1}],\ ...,[p_{jm}],\ ...,[p_{jM_e}]\right]; \quad [p_{jm}] = \begin{bmatrix} p_{jm}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{jm}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{jm} \end{bmatrix}, \tag{9.10}$$

а $p_{jm} = \partial\varphi_m^e / \partial a^j$. Тут φ_m^e – ***базисна функція*** *m–го вузла скінченного елемента за номером e*. Тоді з врахуванням (9.6)

$$\{\theta\} = [Y]\{q\}_e, \tag{9.11}$$

де матриця $[Y]$ розмірністю $9\times 3M_e$

$$[Y] = \begin{bmatrix} [Y_1] \\ [Y_2] \\ [Y_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[[p_{11}],\ ...,[p_{1m}],\ ...,[p_{1M_e}]\right] \\ \left[[p_{21}],\ ...,[p_{2m}],\ ...,[p_{2M_e}]\right] \\ \left[[p_{31}],\ ...,[p_{3m}],\ ...,[p_{3M_e}]\right] \end{bmatrix}. \tag{9.12}$$

Замість (9.7), з огляду на (9.11), можемо записати, що

$$\{\eta\} = 0.5[A]\{\theta\} = 0.5[A][Y]\{q\}_e = 0.5[\overline{B}]\{q\}_e, \tag{9.13}$$

де позначена матриця диференціювання нелінійних складових тензора деформацій (розмірністю $6 \times 3M_e$)

$$\boxed{[\bar{B}] = [A][Y]}. \tag{9.14}$$

Щодо лінійної частини $\{\varepsilon\}$, то у Доданку 1 показано, що її визначають формулою (Д1.5), а саме $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$.

Отже, повний матричний вираз для вектора великих деформацій:

$$\{\in\} = \{\varepsilon\} + \{\eta\} = \left([B] + 0.5[\bar{B}]\right)\{q\}_e, \tag{9.15}$$

причому матриця диференціювання лінійної частини тензора деформацій $[B]$ відповідає виразам Розділу Д1.3 з Додатку 1). Введемо позначення:

$$[\tilde{\tilde{B}}] = [B] + 0.5[\bar{B}]. \tag{9.16}$$

Тоді остаточно запишемо, що із врахуванням нелінійних членів

$$\boxed{\{\in\} = [\tilde{\tilde{B}}]\{q\}_e}. \tag{9.17}$$

Матриця $[\bar{B}]$ є лінійною функцією переміщень через матрицю $[A]$, тому що з (9.8) та з огляду на (9.10)

$$[A] = \begin{bmatrix} ([Y_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([Y_2]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & ([Y_3]\{q\}_e)^T \\ ([Y_2]\{q\}_e)^T; & ([Y_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([Y_3]\{q\}_e)^T; & ([Y_2]\{q\}_e)^T \\ ([Y_3]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & ([Y_1]\{q\}_e)^T \end{bmatrix}. \tag{9.18}$$

Тому, враховуючи (9.11), (9.14) та (9.18), можна отримати, що вектор приросту нелінійної складової деформацій

$$\{d\eta\} = d\{\eta\} = d\left(0.5[\bar{B}]\{q\}_e\right) = d\left(0.5[A]\{\theta\}\right) = 0.5\left(d[A]\{\theta\} + [A]d\{\theta\}\right) = [A]d\{\theta\} =$$
$$= [A][Y]\{dq\}_e = [\bar{B}]\{dq\}_e. \tag{9.19}$$

Отже, вектори приросту та *варіації деформацій*:

$$\{d \in\} = \left([B] + [\bar{B}]\right)\{dq\}_e = [\tilde{B}]\{dq\}_e; \quad \boxed{\{\delta \in\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e}, \tag{9.20}$$

де $\boxed{[\tilde{B}] = ([B] + [\bar{B}])}$ – повна матриця диференціювання для отримання вектора *приросту* деформацій, яка ***залежить від переміщень***. Ці загальні вирази зберігають свій вигляд і для інших координатних систем.

9.1.2. Скінченне-елементне наближення крайових задач при застосуванні принципу можливих переміщень

Для створення системи алгебраїчних рівнянь застосуємо принцип можливих переміщень, який у Розділі 8.2 записано у вигляді формули (8.28), а саме:

$$\delta\Psi = \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 \delta \in_{ij} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\widehat{Q}}^i)_0 \delta u^i d\Omega_0 - \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{\widehat{p}}^i)_0 \delta u^i dS_0 = 0. \tag{9.21}$$

Оскільки наближення буде шукатися на скінченно-елементній сітці, то замість (9.21) потрібно записувати рівняння

$$\delta\Psi_h = \left(\int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 \delta \in_{ij} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\widehat{Q}}^i)_0 \delta u^i d\Omega_0 - \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{\widehat{p}}^i)_0 \delta u^i dS_0 \right)_h = 0. \qquad (9.22)$$

Функціонал (9.22) в поєднанні з кінематичними ГУ на поверхні S_U

$$u^m\Big|_{S_U} = \widehat{q}^m, \text{ тобто } \delta u^m\Big|_{S_U} = \delta\widehat{q}^m \qquad (9.23)$$

визначає незліченну множину можливих НДС. Дійсний НДС – один з віртуальних, але додатково задовольняє рівнянням зв'язку між напруженнями та деформаціями.

Далі нижній індекс $_h$ (признак наближення на сітці), а також "дах $\widehat{\ }$" над величиною, який вказує на відомі значення, опускаємо з метою спрощення записів.

Для наближення майбутнього розв'язку застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ).

Введемо вектори: $\{\underset{\sim}{Q}\}_0 = \{\underset{\sim}{Q}^1, \underset{\sim}{Q}^2, \underset{\sim}{Q}^3\}_0^T$ – об'ємних та $\{\underset{\sim}{p}\}_0 = \{\underset{\sim}{p}^1, \underset{\sim}{p}^2, \underset{\sim}{p}^3\}_0^T$ – приведених поверхневих навантажень. Функціонал (9.22) із врахуванням введених раніше матричних позначень буде мати вигляд:

$$\delta\Psi = \int_{\Omega_0} \{\delta\in\}^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \{\delta u\}^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 - \int_{(S_P)_0} \{\delta u\}^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 = 0. \qquad (9.24)$$

Визначимо, що $\{\delta\in\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e$ (див. другий вираз у (9.20)) та $\{\delta\in\}^T = \left([\tilde{B}]\{\delta q\}_e\right)^T = \{\delta q\}_e^T[\tilde{B}]^T$; $\{\delta u\} = \delta\left([\phi]\{q\}_e\right) = [\phi]\{\delta q\}_e$ та $\{\delta u\}^T = \{\delta q\}_e^T[\phi]^T$. Функціонал (9.24) із врахуванням цих формул та можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ не перетинаються, записується у вигляді

$$\delta\Psi = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0 -$$

$$-\sum_e \int_{\Omega_0^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 - \sum_e \int_{(S_P^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 = 0, \qquad (9.25)$$

де знак $\sum\limits_e$ означає підсумовування ("збирання") по всіх СЕ тіла.

Оскільки вектори $\{\delta q\}_e^T$ не залежать від параметрів інтегрування, їх можна винести за межі інтегралів (як звичайні константи). З (9.25), згрупувавши інтеграли, отримаємо

$$\delta\Psi = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{\Omega_0^e} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^e} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 \right) = 0. \qquad (9.26)$$

Оскільки величини $\{\delta q\}_e^T$ – довільні, то з (9.26)

$$\sum_e \left(\int_{\Omega_0^e} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^e} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 \right) = \{0\}. \qquad (9.27)$$

Позначимо:

$$\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e \,; \;\; (\{P\}_0)_e = \int\limits_{\Omega_0^e} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 + \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 \,. \tag{9.28-а}$$

$$\boxed{\{R\}_0 = \sum_e (\{R\}_0)_e} \,; \;\; \boxed{(\{R\}_0)_e = \int\limits_{\Omega_0^e} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0} \,. \tag{9.29}$$

Вираз (9.27) прийме вигляд

$$\boxed{\sum_e \int\limits_{\Omega_0^e} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0 = \{P\}_0} \tag{9.30-а}$$

або

$$\boxed{\{R\}_0 = \{P\}_0} \,. \tag{9.30-б}$$

Якщо на поверхні задано декілька (позначимо їхню кількість як $N_{\bar{P}}$) зосереджених сил $\vec{\bar{P}}_i$; $i = 1,\dots,N_{\bar{P}}$ з компонентами $(\bar{P}^m)_i$ у вихідному базисі $\vec{e}_m$, то для СЕ з таким вузлом $\int\limits_{S_p^e} [\phi]^T \{p\} dS = \{\bar{P}\}$, оскільки у вузлах матриця $[\phi]$ має всі нульові значення, окрім одиниці в актуальному вузлі, а площа поверхні СЕ вироджується у точку. Тут введено вектор зосередженої сили $\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^1, \bar{P}^2, \bar{P}^3\}^T$. Тому вираз (9.28-а) модифікується:

$$\boxed{\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e} \,; \;\; \boxed{(\{P\}_0)_e = \int\limits_{\Omega_0^e} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 d\Omega_0 + \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 dS_0 + \sum_{i=1}^{N_{\bar{P}}} \{\bar{P}\}_i} \,. \tag{9.28-б}$$

9.2. Алгоритм методу Ньютона-Рафсона розв'язування крайової задачі із врахуванням геометричної нелінійності

Для розв'язування *нелінійних* САР доцільно використовувати *метод* ***Ньютона-Рафсона***, який забезпечує високу швидкість збіжності. Згідно з цим методом вважається, що на $(k+1)-$й ітерації вектор похибки наближення $\{\psi\}^{(k+1)}$ із задовільною точністю дорівнює нульовому вектору. Тоді розклад у ряд Тейлора

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\} \,; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\} \,; \quad k = 0,1,\dots \tag{9.31}$$

Вектор похибки наближення $\{\psi\}$ визначається як різниця між правою та лівою частинами САР. Тому з (9.30-б) вектор похибок

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)} \,; \quad k = 0,1,\dots \,. \tag{9.32}$$

Із врахуванням (9.32) вирази (9.31) запишемо у вигляді ітераційної (рекурентної) послідовності розв'язування СЛАР

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} = \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)} \,; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\} \,; \quad k = 0,1,\dots \tag{9.33}$$

Залишилося визначитися з матрицею $-\left(\dfrac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}$. Відповідно до (9.32), із врахуванням (9.29), для послідовності СЛАР (9.33), а також лінійності операторів взяття першої похідної, визначення додатків та інтегрування (тоді їх можна міняти місцями):

$$\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}=\left(\frac{\partial}{\partial\{q\}}\left(\{P\}_0-\{R\}_0\right)\right)^{(k)}\{dq\}=\left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}-$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial\{q\}}\sum_e\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}\{dq\}=\left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}-$$
$$-\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}\frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}\{dq\}-\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e}d\Omega_0\right)^{(k)}\{dq\}\,. \qquad (9.34)$$

Окремо розглянемо кожну матрицю із правої частині (9.34).

Не зважаючи на значні переміщення, повороти та деформації, зазвичай приймають, що

$$\left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}\approx\{0\}\,. \qquad (9.35)$$

Оскільки $[\tilde{B}]=[B]+[\bar{B}]$ (див. формулу (9.20) та пояснення до неї), а $\partial[B]/\partial\{q\}_e=[0]$, то, із врахуванням (9.14) і (9.3) ... (9.8), матриця другої складової з правої частини (9.34):

$$\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}\frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}=\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}\frac{\partial[\bar{B}]^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}=$$
$$=\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}\frac{\partial([A][Y])^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}=\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}[Y]^T\frac{\partial[A]^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}=$$
$$=\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}[Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y]d\Omega_0\right)^{(k)}, \qquad (9.36)$$

де враховані: симетрія матриці $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ з компонент вектору $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$; що $([A][Y])^T=[Y]^T[A]^T$, $\partial[Y]^T/\partial\{q\}_e=[0]$, а також, що матриця $\partial[A]^T/\partial\{q\}_e=[Y]$.

Введемо глобальну симетричну матрицю:

$$\boxed{[K_\sigma]_0=\sum_e([K_\sigma]_0)_e}\,,\ \text{де}\ \boxed{([K_\sigma]_0)_e=\int_{\Omega_0^e}[Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y]d\Omega_0}\,. \qquad (9.37)$$

Тоді остаточно для другої складової з правої частини (9.34) маємо

$$\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}\frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0\,d\Omega_0\right)^{(k)}=\sum_e\left(([K_\sigma]_0)_e\right)^{(k)}=[K_\sigma]_0^{(k)}\,. \qquad (9.38)$$

Розглянемо останній вираз із правої частини (9.34). Визначимо, що

$$\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e}=\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{\in\}}\frac{\partial\{\in\}}{\partial\{q\}_e}=[\underset{\sim}{D}]\frac{\partial\{\in\}}{\partial\{q\}_e}=[\underset{\sim}{D}][\tilde{B}], \tag{9.39}$$

оскільки згідно з (9.20)

$$\partial\{\in\}/\partial\{q\}_e=[\tilde{B}]. \tag{9.40}$$

Тому:

$$\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e}d\Omega_0\right)^{(k)}=\left(\sum_e\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T[\underset{\sim}{D}][\tilde{B}]d\Omega_0\right)^{(k)}. \tag{9.41}$$

Залишилося визначитися з виразом для матриці

$$\boxed{[\underset{\sim}{D}]=\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0/\partial\{\in\}}. \tag{9.42}$$

Варіантів таких виразів стільки, скільки є моделей матеріалів, тобто багато. Деякі з них розглянуто в Розділі 11.

Введемо матриці

$$\boxed{[\tilde{K}]_0=\sum_e([\tilde{K}]_0)_e};\quad \boxed{([\tilde{K}]_0)_e=\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T[\underset{\sim}{D}][\tilde{B}]d\Omega_0}. \tag{9.43}$$

Ліва частина першого виразу з (9.33) отримає вигляд:

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}=\left([K_\sigma]_0+[\tilde{K}]_0\right)^{(k)}\{dq\}=[\underset{\sim}{K}]_0^{(k)}\{dq\}, \tag{9.44}$$

де позначена *глобальна матриця жорсткості* тіла (її звуть "*дотичною*")

$$\boxed{[\underset{\sim}{K}]_0=[K_\sigma]_0+[\tilde{K}]_0}. \tag{9.45}$$

Вирази (9.33), тобто рівняння методу Ньютона-Рафсона, отримують вигляд:

$$[\underset{\sim}{K}]_0^{(k)}\{dq\}\approx\{P\}_0^{(k)}-\{R\}_0^{(k)};\quad \{q\}^{(k+1)}=\{q\}^{(k)}+\{dq\}. \tag{9.46-a}$$

Перший вираз (9.46-а) є лінійною системою алгебраїчних рівнянь для знаходження вектора $\{dq\}$ на $(k+1)$-й ітерації згідно з методом Ньютона-Рафсона. Вона зібрана на основі розв'язку, отриманого на попередній k-й ітерації: і симетрична матриця $[\underset{\sim}{K}]_0$ СЛАР, і вектор правої частини СЛАР.

На *нульовій* ітерації застосовується СЛАР, отримана для випадку *малих* деформацій. Щоб не "втратити" температурне навантаження, початкові напруження $\{\sigma_0\}$ та/або деформації $\{\varepsilon_0\}$ (якщо вони є), використовується *метод додаткових навантажень*. Вектор напружень $\{\sigma\}$ визначають застосуванням закону Гука $\{\sigma\}=[\mathrm{D}]\{\varepsilon^e\}+\{\sigma_0\}$, де з принципу суперпозиції малих деформацій $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon^e\}+\{\varepsilon^\theta\}+\{\varepsilon_0\}$ вектор пружних деформацій $\{\varepsilon^e\}=\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^\theta\}-\{\varepsilon_0\}$. Ще враховують вираз (Д1.5), а саме $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}_e$. Тоді $\{\sigma\}=[\mathrm{D}]([B]\{q\}_e-\{\varepsilon^\theta\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}$. Якщо цей вираз підставити у ліву частину формули (9.30-а), а саме $\sum_e\int_{\Omega_0^e}[\tilde{B}]^T\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 d\Omega_0=\{P\}_0$ замість $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$ з урахуванням, що для малих деформацій матриця диференціювання $[\tilde{B}]=[B]$, а на початкової ітерації всі $\{q\}_e = \{0\}$, то отримаємо, що рівняння рівноваги при $k = 0$ таке: $-\left(\sum_e \int_{\Omega_0^e} [B]^T ([\mathrm{D}](\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}) d\Omega_0 \right)^{(0)} = \{P\}_0^{(0)}$, початковий вектор похибок:

$$\boxed{\{\psi\}_0^{(0)} = \{P\}_0^{(0)} + \left(\sum_e \int_{\Omega_0^e} [B]^T ([\mathrm{D}](\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}) d\Omega_0 \right)^{(0)}}, \qquad (9.47)$$

а СЛАР (9.46-а) на нульовій ітерації вироджується у

$$[K]_0 \{dq\} \approx \{\psi\}_0^{(0)}; \quad \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{dq\}. \qquad (9.48\text{-а})$$

Реально розглядаються не нескінченно малі прирости, а такі, що мають кінцеві значення. Тому в (9.46-а) та (9.48-а) замість знаку диференціала d використовують знак приросту Δ:

$$\boxed{[\underline{K}]_0^{(k)} \{\Delta q\} \approx \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)}}; \quad \boxed{\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}}; \quad k = 1, 2, \ldots; \qquad (9.46\text{-б})$$

$$\boxed{[K]_0 \{\Delta q\} \approx \{\psi\}_0^{(0)}}; \quad \boxed{\{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{\Delta q\}}. \qquad (9.48\text{-б})$$

Для алгоритму Ньютона-Рафсона доведені теореми існування та одиничності розв’язку при умові не особливості матриці $[\underline{K}]_0^{(k)}$. Якщо в околі стаціонарної точки, що визначається вектором $\{q^*\}$, для будь-яких значень (k) та при $M > 0$ виконується умова збіжності Ліпшіца

$$\left\| [\underline{K}]_0^{(k+1)} - [\underline{K}]_0^{(k)} \right\| \le M \left\| \{q\}^{(k+1)} - \{q\}^{(k)} \right\|, \qquad (9.49)$$

то алгоритм має велику (квадратичну) швидкість збіжності.

У випадку геометричної нелінійності СЛАР (9.46-б) має нову матрицю на кожній ітерації. Можна використовувати вихідну матрицю $[K]_0$, тоді алгоритм зветься алгоритмом Ньютона-Рафсона з *початковими напруженнями* (Initial Stress); а також – матрицю з однієї з попередніх ітерацій $[\underline{K}]_0^{(m)}$, тоді алгоритм зветься *модифікованим* (Modified) алгоритмом Ньютона-Рафсона. При їхньому застосуванні зростає загальна кількість ітерацій, але може виявитися економія часу за рахунок скорочення кількості збирань матриці жорсткості та знаходження її оберненої матриці. Крім того, такі алгоритми не завжди приводять до збіжності розв’язку крайової задачі.

Примітка 9.1. Алгоритм (9.46-б) зветься алгоритмом *континуальної механіки зростаючого TL-формулювання* (**Continuum Mechanics Incremental Total Lagrangian Formulations**).

Нижче наведемо основні отримані вирази порівняно з випадком нескінченно малих деформацій (та поворотів).

Нескінченно малі деформації	**Великі деформації, TL**
$\{u\} = [\phi]\{q\}_e$	
$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$	$\{\in\} = \left([B] + 0.5[\overline{B}]\right)\{q\}_e = [\tilde{\overline{B}}]\{q\}_e$

$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta q\}_e$	$\{\delta \in\} = \left([B]+[\bar{B}]\right)\{\delta q\}_e = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e$
$\{O\} = \{O^1, O^2, O^3\}^T; \quad O^m = \rho_0 F^m$	$\{O\}_0 = \{(O^1)_0, (O^2)_0, (O^3)_0\}^T; \ (O^m)_0 = \rho_0(\underset{\sim}{F}^m)_0$
$\{p\} = \{p^1,\ p^2,\ p^3\}^T; \quad p^m$	$\{p\}_0 = \{(\underset{\sim}{p}^1)_0, (\underset{\sim}{p}^2)_0, (\underset{\sim}{p}^3)_0\}^T;$ $(\underset{\sim}{p}^m)_0 = qJC^{ji}(\nu_i)_0 X_{mj} g_{mm}$
$\{R\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T\{\sigma\}d\Omega$	$(\{R\}_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0(d\Omega)_0$
$\{P\}_e = \int\limits_{\Omega^e}[\phi]^T\{O\}d\Omega + \int\limits_{S_P^e}[\phi]^T\{p\}dS$	$(\{P\}_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0}[\phi]^T\{O\}_0(d\Omega)_0 + \int\limits_{(S_P^e)_0}[\phi]^T\{\underset{\sim}{p}\}_0(dS)_0$
$\{R\} = \sum\limits_e \{R\}_e; \quad \{P\} = \sum\limits_e \{P\}_e$	$\{R\}_0 = \sum\limits_e (\{R\}_0)_e; \quad \{P\}_0 = \sum\limits_e (\{P\}_0)_e$
$\{R\} = \{P\}$	$\{R\}_0 = \{P\}_0$
$\{\psi\} = \{P\} - \{R\}$	$\{\psi\}_0 = \{P\}_0 - \{R\}_0$
$-\left(\dfrac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} = \{P\}^{(k)} - \{R\}^{(k)}$	$-\left(\dfrac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} = \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)}$
$\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}$	
$-\left(\dfrac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \approx [K]^{(k)}$	$-\left(\dfrac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \approx [\underline{K}]_0^{(k)}$
$[K] = \sum\limits_e [K]_e$	$[\underline{K}]_0 = \sum\limits_e ([\underline{K}]_0)_e$
-	$([\underline{K}]_0)_e = ([K_\sigma]_0)_e + ([\tilde{K}]_0)_e$
-	$([K_\sigma]_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y](d\Omega)_0$
$[K]_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T[\underset{\sim}{D}][B]d\Omega$	$([\tilde{K}]_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T[\underset{\sim}{D}][\tilde{B}](d\Omega)_0$
$[\underset{\sim}{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{\varepsilon\}$	$[\underset{\sim}{D}] = \partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in\}$
$[K]^{(0)}\{\Delta q\} = \{\psi\}^{(0)}$	$[K]_0^{(0)}\{\Delta q\} = \{\psi\}_0^{(0)}$
$\{\psi\}^{(0)} = \{P\}^{(0)} +$ $+\left(\sum\limits_e \int\limits_{\Omega^e} [B]^T([\mathrm{D}](\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\})d\Omega\right)^{(0)}$	$\{\psi\}_0^{(0)} = \{P\}_0^{(0)} +$ $+\left(\sum\limits_e \int\limits_{(\Omega^e)_0} [B]^T([\mathrm{D}](\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\})(d\Omega)_0\right)^{(0)}$
$[K]^{(k)}\{\Delta q\} \approx \{P\}^{(k)} - \{R\}^{(k)}$	$[\underline{K}]_0^{(k)}\{\Delta q\} \approx \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)}$
$\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad k = 0,1,...$	

9.3. Алгоритм методу BFGS розв’язування САР для крайової задачі із врахуванням геометричної нелінійності

Метод BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) є одним з так званих квазі-Ньютонівських методів, або методів відновлення, лінійного пошуку (**line search**), α-прискорення.

Метод BFGS має три етапи (прийнято, що $[\underline{K}]_0^{(1)} = [\underline{K}]_0$):

Етап 1: знаходяться вектори:

$$\{\psi\}_0^{(k)} = \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)}; \quad k = 1, \ldots; \tag{9.50}$$

$$\{\Delta q\} = ([\underline{K}]_0^{(k)})^{-1} \{\psi\}_0^{(k)}; \quad k = 1, \ldots. \tag{9.51}$$

Останній визначає "напрямок" фактичного приросту вузлових переміщень.

Етап 2: обчислюється новий вектор вузлових переміщень

$$\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \alpha \cdot \{\Delta q\} \tag{9.52}$$

і відповідний йому вектор $\{\psi\}_0^{(k+1)} = \{P\}_0^{(k+1)} - \{R\}_0^{(k+1)}$. У (9.51) α – скалярний множник, який зазвичай обирається з діапазону $[0.05, 1]$ таким, щоб при призначеному допуску збіжності ε задовольнялася умова

$$\{\Delta q\}^T \cdot \{\psi\}_0^{(k+1)} \le \varepsilon \{\Delta q\}^T \cdot \{\psi\}_0^{(k)}. \tag{9.53}$$

Коли α обрано та обчислено $\{q\}^{(k+1)}$, формуються вектори

$$\{\delta\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k+1)} - \{q\}^{(k)} = \alpha \cdot \{\Delta q\}; \tag{9.54}$$

$$\{\gamma\}^{(k+1)} = \{\psi\}_0^{(k)} - \{\psi\}_0^{(k+1)}. \tag{9.55}$$

Етап 3: оновлюється матриця жорсткості:

$$([\underline{K}]_0^{(k+1)})^{-1} = ([A]^{(k+1)})^T ([\underline{K}]_0^{(k)})^{-1} [A]^{(k+1)}, \tag{9.56}$$

де застосовується матриця $[A]^{(k)}$ того ж розміру, як і $[\underline{K}]_0$, з компонентами

$$[A]^{(k)} = [I] + \{v\}^{(k)} (\{w\}^{(k)})^T. \tag{9.57}$$

Оновлена матриця $[\underline{K}]_0^{(k+1)}$ повинна задовольняти рівнянню

$$[\underline{K}]_0^{(k+1)} \{\delta\}^{(k+1)} = \{\gamma\}^{(k+1)}. \tag{9.58}$$

Вектори $\{v\}$ й $\{w\}$ для (9.57) обчислюються згідно з формулами

$$\{v\}^{(k+1)} = -\sqrt{\frac{(\{\delta\}^{(k+1)})^T \{\gamma\}^{(k+1)}}{(\{\delta\}^{(k+1)})^T [\underline{K}]_0^{(k)} \{\delta\}^{(k+1)}}} [\underline{K}]_0^{(k)} \{\delta\}^{(k+1)} - \{\gamma\}^{(k+1)}; \tag{9.59}$$

$$\{w\}^{(k+1)} = \frac{\{\delta\}^{(k+1)}}{(\{\delta\}^{(k+1)})^T \{\gamma\}^{(k+1)}}. \tag{9.60}$$

Вектор $[\underline{K}]_0^{(k)} \{\delta\}^{(k+1)}$ у (9.59) фактично дорівнює $\alpha \cdot \{\psi\}_0^{(k)}$, тому легко обчислюється.

Матриця $([\underline{K}]_0^{(k+1)})^{-1}$, що обчислена згідно з (9.56), є симетричною та визначеною як додатна. Тому число обумовленості матриці $\nu_{[\underline{K}]_0^{(k+1)}}$ (див. підрозділ 5.2 книги [8]) може бути обчислено як

$$\nu_{[\underline{K}]_0^{(k+1)}} = -\sqrt{\frac{(\{\delta\}^{(k+1)})^T \{\gamma\}^{(k+1)}}{(\{\delta\}^{(k+1)})^T [\underline{K}]_0^{(k)} \{\delta\}^{(k+1)}}}. \tag{9.61}$$

Якщо це число перевищить деяке задане значення, то це також можна вважати ознакою невдалого обрання параметра α.

Якщо всі перетворення САР звести у єдиний ланцюг, то вираз (9.51) може бути записаним як

$$\{\Delta q\} = ([I] + \{w\}^{(k)} (\{v\}^{(k)})^T \ldots ([I] + \{w\}^{(2)} (\{v\}^{(2)})^T ([\underline{K}]_0)^{-1} [A]^{(2)} \ldots [A]^{(k)} \{\psi\}_0^{(k)}. \tag{9.62}$$

Ця формула показує, що розв'язок можна знайти, не проводячи оновлення матриці жорсткості та не проводячи її нових перетворень. Крім того, метод може зменшувати кількість ітерацій, необхідних для отримання збіжності розв'язку із заданою точністю.

9.4. Визначення втрати стійкості пружним тілом

При розв'язуванні крайової задачі про втрату стійкості твердого *деформівного* тіла розрізняють *докритичний* та *суміжний* стани тіла.

Розв'язок для докритичного стану одержують звичайним чином. Для отримання розв'язку для суміжного стану можна застосувати САР (9.46-б).

Але невідомо, який приріст навантаження потрібно зробити, щоб навантаження досягло критичного значення. Зазвичай роблять у такий спосіб. Процес навантаження (від початкового стану до моменту втрати стійкості) вважається пропорційним, тоді критичне навантаження можна призначати по формулі $P_j^* = P_j + \Delta P_j = \beta P_j$, тобто величина довантаження $\Delta P_j = (\beta - 1) P_j$. Оскільки докритичний стан є урівноваженим, то, відповідно до формули (9.32), вектор похибок наближення $\{\psi\} = (\beta - 1)\{P\}$.

Оскільки матриця $[K_\sigma]_0$ відповідає рівню навантаження, а на момент втрати стійкості напруження зміняться в β разів, то й матрицю $[K_\sigma]_0$ потрібно змінити в β разів. Відомо, що втрата стійкості тіла може проходити по різних геометричних формах, для яких множник β повинен бути своїм, тобто таких значень буде багато (теоретично – нескінченність). З (9.32), з урахуванням позначень (9.37), (9.38) і (9.45), одержимо на момент втрати стійкості САУ:

$$\left([\tilde{K}]_0 + \beta_i [K_\sigma]_0\right)\{\Delta q\} = (\beta_i - 1)\{P\}_0^{(k)}; \quad i = 1, 2, \dots, \tag{9.63}$$

в якій у випадку малих деформацій матриця $[\tilde{K}]_0 = [K]_0$, тобто відповідає виразам (9.47).

Оскільки після втрати тілом стійкості немає єдиного геометричного стану тіла, то й немає єдиного розв'язку САР (9.63). Тобто матриця цієї САР у моменти втрати стійкості є виродженою, а її детермінант дорівнює нулю:

$$\det\left([\tilde{K}]_0 + \beta_i [K_\sigma]_0\right) = 0; \quad i = 1, 2, \dots . \tag{9.64}$$

Кожне отримане значення множника β_i буде вказувати ступінь недовантаження ($\beta_i > 1$) або перевантаження ($\beta_i < 1$) тіла відносно i-го стану втрати стійкості.

Рекомендується задавати докритичне навантаження таким, що наближується до критичного навантаження, щоб отримувати відповідне $\beta_i \approx 1$.

Отже, критичне навантаження визначається за формулою.

$$\boxed{P_j^* = \beta P_j}. \tag{9.65}$$

Зазвичай для *задачі пружної втрати стійкості тіла* приймаються такі припущення:

- відхилення геометрії тіла перед втратою стійкості – малі, тобто $[\tilde{K}]_0 = [K]_0$;
- реакція матеріалу на момент втрати стійкості – лінійна або нелінійна, але – пружна;
- поведінка тіла після того, як стійкість втрачена, не прогнозується.

Примітка 9.2. Коли приймається $[\tilde{K}]_0 = [K]_0$, то розрахункові критичні навантаження зазвичай є дещо завищеними відносно експериментальних, оскільки при втраті стійкості реальне деформування – значне, хоча й необов'язково з'являються необоротні деформації.

Примітка 9.3. Описаний вище підхід до визначення втрати стійкості пружним тілом називають *методом* ***Ейлера***. В ньому втрата стійкості геометричної форми тілі проходить за ***власною*** *формою* (формами) *коливань* ***усього*** тіла, з урахуванням навантаження.

Примітка 9.4. Для визначення ***локальної*** втрати стійкості при розвитку ***необоротних*** деформацій у тілі потрібно розв'язувати рівняння типу (9.32) для **UL**-формулювання, із застосуванням алгоритмів обмеження навантажень / переміщень (див. Розділ 10).

Контрольні питання до розділу

1. Які є особливості при скінченне-елементному наближення компонент великих деформацій Гріна-Лагранжа?
2. Скінченне-елементне наближення крайових задач при застосуванні принципу можливих переміщень
3. Алгоритм методу Ньютона-Рафсона розв'язування крайової задачі із врахуванням геометричної не лінійності: чим відрізняється від аналогічного, але при малих деформаціях?
4. Яка ідея алгоритму методу BFGS розв'язування САР для крайової задачі із врахуванням геометричної нелінійності?
5. Яка ідея визначення втрати стійкості пружним тілом?

Розділ 10

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНІ АЛГОРИТМИ "МОДИФІКОВАНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ ЛАГРАНЖА" (UPDATED LAGRANGE – UL) ПРИ ГЕОМЕТРИЧНІЙ ТА ФІЗИЧНІЙ НЕЛІНІЙНОСТІ

10.1. Особливості скінченно-елементного наближення крайових задач при UL-формулюванні

Як було вказано у підрозділі 2.1, **UL**-формулювання відрізняється від **TL**-формулювання тим, яка геометрія вибирається опорною: для **TL** – *початкова*, для **UL** – така, що *створена попереднім етапом навантаження*. Тому істотних змін при отриманні системи алгебраїчних рівнянь не буде.

Вводиться "внутрішній" час, весь етап навантаження автоматично поділяється на декілька проміжних етапів, тобто на "внутрішній" часовій осі вводяться часові шари. Нижні індексом $n = 0,1,\ldots$ будемо позначати номер такого *опорного* шару.

Оскільки деформації завжди обчислюються відносно початкового стану, то почнемо майже з кінця. Будемо вважати, що є розв'язок на $n-$му часовому шарі, розглядається наступний, $(n+1)-$й. Опорна геометрія: $(\Omega^e)_n$ та $(S_P^e)_n$. Напруження, об'ємні та поверхневі сили на опорній геометрії $n-$го часового шару позначимо як $\{\sigma\}_n$, $\{O\}_n$ та $\{\underset{\sim}{p}\}_n$ відповідно.

Рівняння (7.28-б), (7.29) та (7.30-а) змінюються на:

$$\{P\}_n = \sum_e (\{P\}_n)_e \,; \quad \boxed{(\{P\}_n)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_n} [\phi]^T \{O\}_n (d\Omega)_n + \int\limits_{(S_P^e)_n} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_n (dS)_n + \sum_{i=1}^{N_{\bar{P}}} (\{\bar{P}\}_i)_n} \,; \tag{10.1}$$

$$\{R\}_n = \sum_e (\{R\}_n)_e \,; \quad \boxed{(\{R\}_n)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_n} [\bar{\tilde{B}}]^T \{\sigma\}_n d\Omega_n} \,; \tag{10.2}$$

$$\boxed{\sum_e \int\limits_{(\Omega^e)_n} [\bar{\tilde{B}}]^T \{\sigma\}_n d\Omega_n = \{P\}_n} \,. \tag{10.3}$$

Замість (7.46-б) отримали таку систему рівнянь:

$$\left([\underline{K}]_n\right)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_n)^{(k)} - (\{R\}_n)^{(k)} \,; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\} \,. \tag{10.4}$$

Стартове рівняння (7.48-б) $[K]_0 \{\Delta q\} \approx \{\psi\}_0^{(0)}$ залишається, оскільки старт обох алгоритмів є однаковим: пружним та за рівняннями нескінченно малих деформацій.

Ще замість (9.42) будемо мати

$$[\tilde{D}] = [\tilde{D}]_n = \partial(\{\sigma\}_n) / \partial\{\in_A\} \quad \text{або} \quad [\tilde{D}] = [\tilde{D}]_n = \partial(\{\sigma\}_n) / \partial\{\in_H\}_L \,. \tag{10.5}$$

Визначення матриці $[\tilde{D}]$ проводиться аналогічно $[\underset{\sim}{D}]$, йдеться в Розділі 11.

Напруження $\{\sigma\}_n$ є напруженнями Ейлера-Коші з компонентами σ^{ij}, досягнутими на кінець попереднього ($n-$го) етапу навантаження.

Примітка 10.1. Алгоритм (10.4) зветься алгоритмом *континуальної механіки зростаючого UL-формулювання* (**Continuum Mechanics Incremental Updated Lagrangian Formulations**).

Примітка 10.2. У цьому Розділі розглянуто лише один з відомих варіантів рівнянь для UL-формулювання. Інші варіанти в цій книзі не розглядаються.

10.2. Визначення локальної втрати стійкості руху (деформування) при наявності фізичної та геометричної нелінійності (алгоритми обмеження навантажень/переміщень, сферичний критерій довжини дуги)

У нелінійному аналізі доволі часто потрібно в автоматичний спосіб зменшувати задане навантаження, щоб не втратити точність розв'язку, не пропустити суттєву нелінійність процесу деформування, наприклад, при нелінійно-пружній або непружній локальної втраті стійкості, при старті тріщини, при контактуванні тощо. Після проходження такої ділянки – знову в автоматичний спосіб збільшити навантаження до запланованого – реалізувати посткризовий стан.

Для керування навантаженням зазвичай вводиться скалярний множник $\eta \in [-1,1]$ при векторі навантажень $\{P\}_0$ (E. Riks), тобто застосовується навантаження $\eta\{P\}_0$. Тоді умова рівноваги (7.30-б) замінюється на (k – номер ітерації):

$$\eta\{P\}_n^{(k)} = \{R\}_n^{(k)}, \quad k = 0,1,\dots \,. \tag{10.6}$$

Оскільки алгоритми обмеження навантажень/переміщень зазвичай застосовують одночасно з методом Ньютона-Рафсона, то, як і в підрозділі 7.2, введемо вектор похибки наближення рівняння рівноваги (10.6) у вигляді

$$\{\psi\}_n^{(k)} = \eta^{(k)}\{P\}_n^{(k)} - \{R\}_n^{(k)}; \quad k = 0,1,\dots \,, \tag{10.7}$$

де вектор реакції на навантаження $\{R\}_n^{(k)} = \int\limits_{\Omega_n^e} [\tilde{B}]^T \{\tau\}_n^{(k)} d\Omega_n$ залежить від $\{q\}^{(k)}$, оскільки напруження залежать від переміщень $\{q\}^{(k)}$. Тобто $\{\psi\}_n^{(k)} = \{\psi\}_n^{(k)}(\{q\},\eta)$.

Згідно з методом Ньютона-Рафсона розглянемо перші члени розкладу $\{\psi\}^{(k+1)}$ у ряд, прирівняємо розклад нулю:

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} + \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\eta}\right)^{(k)} d\eta = 0 \,. \tag{10.8}$$

З (10.4) $\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)_n^{(k)} \{dq\} \approx -[\underline{K}]_n^{(k)}\{dq\}$, а з (10.7) $\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\lambda}\right)_n^{(k)} d\eta = \{P\}_n^{(k)} d\eta$. Із врахуванням (10.7) вираз (10.8) прийме вигляд

$$[\underline{K}]_n^{(k)}\{dq\}=\{\psi\}_n^{(k)}+\{P\}_n^{(k)}d\eta=(\eta^{(k)}+d\eta)\{P\}_n^{(k)}-\{R\}_n^{(k)}. \qquad (10.9)$$

Представимо $\{dq\}$ у вигляді

$$\{dq\}=\{d\bar{q}\}+\{d\bar{\bar{q}}\}d\eta\,, \qquad (10.10)$$

де складові $\{d\bar{q}\}$ та $\{d\bar{\bar{q}}\}$ відповідають рівнянням

$$[\underline{K}]_n^{(k)}\{d\bar{q}\}=\{\psi\}_n^{(k)}=\eta^{(k)}\{P\}_n^{(k)}-\{R\}_n^{(k)}\,; \qquad (10.11)$$

$$[\underline{K}]_0^{(k)}\{d\bar{\bar{q}}\}=\{P\}_0^{(k)}. \qquad (10.12)$$

Якщо (10.12) помножити на $d\eta$, а результат скласти з (10.11), то отримаємо, із врахуванням (10.10), вираз (10.9).

Оскільки в рівнянні (10.10) $\eta^{(k)}$, $\{d\bar{q}\}$ та $\{d\bar{\bar{q}}\}$ для $(k+1)$-й ітерації є відомими, то це є рівняння відносно ще невідомих двох складових: $\{dq\}$ та $d\eta$. Потрібно ще одне рівняння. Воно повинне відображати деякий критерій, що дозволяє визначитися з напрямком та законом зміни параметра η.

Були запропоновані різні критерії: E. Riks (лінійний), M.A. Crisfield (сферичний), інші, різні модифікації. Наведемо тільки один, а саме сферичний, як один із кращих. Докладно ці критерії описані, зокрема, у книгах [13, 14], Розділи 9 та 21 відповідно.

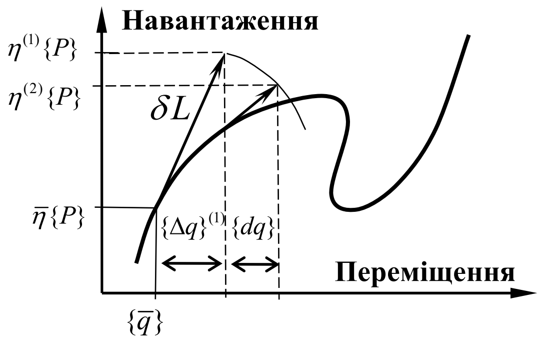


Рис.10.1. До критерію обмеження навантажень/переміщень

Приймемо, що є розв'язок $\{\bar{q}\}$ на попередньому етапі навантаження, коли навантаження дорівнювало $\bar{\eta}\{P\}_0$.

Якщо як δL позначити радіус околу біля точки, яка характеризує напружено-деформований стан на початок поточного етапу, і цей радіус визначає обмеження для прирощення навантажень, то отримаємо (див. рис.10.1) так званий ***сферичний критерій довжини дуги*** (*the Spherical Arc-length Criterion*):

$$\left(\eta-\bar{\eta}\right)^2\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)}+(\{q\}-\{\bar{q}\})^T(\{q\}-\{\bar{q}\})=(\delta L)^2, \qquad (10.13\text{-а})$$

де β – коефіцієнт нормалізації (щоб зробити однаковими розмірності). Повне навантаження (на рис.10.1 на нього вказує вектор) зменшується, причому траєкторію зменшення створює *той самий вектор* довжиною δL.

У виразі (10.13-а)

$$\eta=\eta^{(k+1)}=\bar{\eta}+\Delta\eta^{(k)}+d\eta\,;\quad \{q\}=\{q\}^{(k+1)}=\{\bar{q}\}+\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\}\,, \qquad (10.14)$$

тому він змінюється на

$$(\Delta\eta^{(k)}+d\eta)^2\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)}+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\})^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\})=(\delta L)^2. \qquad (10.13\text{-б})$$

Це й є другий вираз для визначення невідомих $\{dq\}$ та $d\eta$. Підставимо перше рівняння, а саме (10.10), у (10.13-б):

$$(\Delta\eta^{(k)}+d\eta)^2\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)}+$$
$$+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\bar{q}\}+\{d\bar{\bar{q}}\}d\eta)^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\bar{q}\}+\{d\bar{\bar{q}}\}d\eta)=(\delta L)^2. \qquad (10.13\text{-в})$$

Після групування членів при $(d\eta)^2$ та $d\eta$ отримаємо квадратичне рівняння відносно $d\eta$:

$$a\cdot(d\eta)^2+b\cdot d\eta+c=0, \tag{10.15}$$

де коефіцієнти

$$\begin{aligned}
&a=\{d\overline{\overline{q}}\}^T\{d\overline{\overline{q}}\}+\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)};\\
&b=2\Delta\eta^{(k)}\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)}+2(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})^T\{d\overline{\overline{q}}\};\\
&c=(\Delta\eta^{(k)})^2\beta^2(\{P\}_n^{(k)})^T\{P\}_n^{(k)}+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})-(\delta L)^2.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

Квадратичне рівняння має два розв'язки:

$$d\eta_{1,2}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a). \tag{10.17}$$

З них потрібно обрати той, для якого кут між векторами $\{q\}^{(k)}-\{\overline{q}\}$ та $\{q\}^{(k+1)}-\{\overline{q}\}$ є меншим, ніж 90 градусів, тобто:

$$\cos\theta=\frac{(\{q\}^{(k)}-\{\overline{q}\})^T(\{q\}^{(k+1)}-\{\overline{q}\})}{\delta L^2}>0. \tag{10.18-а}$$

Оскільки $\{q\}^{(k+1)}=\{q\}^{(k)}+\{dq\}$, а $\{q\}^{(k)}-\{\overline{q}\}=\{\Delta q\}^{(k)}$, то $\{q\}^{(k+1)}-\{\overline{q}\}=\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\}$. Тому умова (10.18-а) запишеться як

$$\cos\theta=\frac{(\{\Delta q\}^{(k)})^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\})}{\delta L^2}>0. \tag{10.18-б}$$

Якщо такого значення $d\eta$ не виявилося, то це означає, що навантаження $\eta^{(1)}\{P\}_n^{(1)}$ обрано невдало, необхідно зменшити $\eta^{(1)}=\overline{\eta}+\Delta\eta^{(1)}$.

Якщо виявилося, що

$$(\{q\}^{(k-1)}-\{q\}^{(k-2)})^T\{\Delta\overline{\overline{q}}\}<0, \tag{10.19}$$

тобто жорсткість тіла падає (***локальна втрата стійкості деформування***), то необхідно змінити знак при $\Delta\eta^{(k)}$ на протилежний (почати розвантаження). Як і раніше, нижній індекс n позначає номер кроку навантаження, а значення відповідають розв'язкам на вказаних етапах.

Ще необхідно стежити за тим, щоб було $\eta^{(k)}\le 1$. При $\lambda^{(k)}=1$ маємо звичайний ітераційний процес Ньютона-Рафсона.

Початкове значення δL можна обирати за формулою Рікса

$$\delta L^2=(\Delta\eta^{(1)})^2[\{\Delta\overline{\overline{q}}\}^T\{\Delta\overline{\overline{q}}\}+\beta^2(\{P\}_n^{(1)})^T\{P\}_n^{(1)}], \tag{10.20}$$

причому величина $\delta L^2=(\Delta\eta^{(1)})^2[\{\Delta\overline{\overline{q}}\}^T\{\Delta\overline{\overline{q}}\}+\beta^2(\{P\}_n^{(1)})^T\{P\}_n^{(1)}]$

$$\Delta\eta^{(1)}=1/m, \tag{10.21}$$

де m – кількість кроків, яку може змінювати (задавати) користувач.

На подальших етапах навантаження величина δL підбирається: зменшується при великої нелінійності (при значної кількості ітерацій на етапах), та навпаки. Ще враховується зміна жорсткості тіла. Попереднє (старе) значення δL_{old} масштабується:

$$\delta L_{new}=\mu\,\delta L_{old}. \tag{10.22}$$

Наприклад, коефіцієнт впливу кількості ітерацій рекомендується визначати за формулою

$$\mu_I = \sqrt{I_d / I_r}\ , \tag{10.23}$$

де I_d – бажана кількість ітерацій для збіжності; I_r – реальна (на попередньому етапі навантаження); а коефіцієнт впливу зміни жорсткості тіла – за формулою

$$\mu_K = \frac{K_{old}}{K_{new}} = \left| \frac{(\{q\}_n - \{q\}_{n-1})^T (\{R\}_{n-1} - \{R\}_{n-2})}{(\{q\}_{n-1} - \{q\}_{n-2})^T (\{R\}_n - \{R\}_{n-1})} \right|; \quad n = 2,3 \,.... \tag{10.24-а}$$

Цю формулу можна переписати у більш привабливішому вигляді:

$$\mu_K = \left| \frac{\Delta\eta_{n-1} / \delta L_{n-1}}{\Delta\eta_n / \delta L_n} \right| = \left| \frac{\Delta\eta_{n-1}\delta L_n}{\Delta\eta_n \delta L_{n-1}} \right|. \tag{10.24-б}$$

Якщо μ_I та μ_K одночасно перевищують одиницю, то з двох цих значень обирається мінімальне, тобто $\mu = \min\{\mu_I, \mu_K\}$; та навпаки, при менших за одиницю значеннях обирається максимальне, тобто $\mu = \max\{\mu_I, \mu_K\}$. Якщо ці умови не виконуються, то приймається $\mu = 1$. Крім того, масштабний коефіцієнт потрібно обмежувати деяким діапазоном, наприклад, $\mu \in [0.25, 4]$, а також слідкувати, щоб $\eta^{(k)} \le 1$. Якщо в розрахунках отримали $\eta^{(k)} > 1$, то необхідно відмовитися від процедури обмеження навантаження або зменшити δL. Якщо ітераційний процес не збігається, то необхідно значно зменшити δL, наприклад, у два або чотири рази.

Описаний алгоритм дозволяє моделювати, зокрема, ***локальну втрату геометричної стійкості форми*** тіла. При цьому навантаження, яке може сприймати тіло, може значно зменшитися на деякий час, а потім – збільшиться, як це зображено на рис.10.1.

Контрольні питання до розділу

1. Які є особливості скінченно-елементного наближення крайових задач при UL-формулюванні?
2. Який алгоритм застосовують для визначення локальної втрати стійкості руху (деформування) при наявності фізичної та геометричної не лінійності?
3. Як "працює" сферичний критерій довжини дуги?

Розділ 11

ВИЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ МАТРИЦЬ ТА ВЕКТОРІВ

В попередніх розділах були введені деякі матриці та вектори, для яких не були визначеними вирази обчислення їхніх компонент.

11.1. Визначення компонент матриці $[\underset{\sim}{D}]$

Для підрозділу 9.2 залишилося визначитися з матрицею

$$[\underset{\sim}{D}] = \partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in\}, \tag{11.1}$$

яка була введеними виразом (9.42). У цьому виразі $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$ є вектором напружень з компонентами другого тензора напружень Піола-Кірхгофа (ТН2ПК).

11.1.1. Деформації – тільки пружні

Згідно з (6.11) для випадку *гіперпружної* моделі матеріалу та при **TL**-формулюванні задачі маємо при $\{\in\} = \{\in^e\}$, що $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = [D]\{\in\}$, тому

$$[\underset{\sim}{D}] = \partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in\} = \partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in^e\} = [D], \tag{11.2}$$

де матриця модулів пружності $[D]$ у випадку пружної ізотропії відповідає виразу (Д1.15) з Додатку 1.

11.1.2. Термопружні деформації

Спочатку визначимо матрицю $[\underset{\sim}{D}]$ як

$$[\underset{\sim}{D}] = \frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{\in\}} = \frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{\in^e\}}\frac{\partial\{\in^e\}}{\partial\{\in\}} = [D]\frac{\partial\{\in^e\}}{\partial\{\in\}}, \tag{11.3}$$

де враховано $\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in^e\} = [D]$ з (11.2).

Згідно з (7.20) $[\in^e] = [\in] - [\in^\theta]$. При запису тензорів деформацій як вектори маємо, що $\{\in^e\} = \{\in\} - \{\in^\theta\}$. Температурні деформації завжди реалізуються незалежно від інших, тому

$$\partial\{\in^\theta\} / \partial\{\in\} = [0], \tag{11.4}$$

і для (11.3)

$$\frac{\partial\{\in^e\}}{\partial\{\in\}} = \frac{\partial\{\in\}}{\partial\{\in\}} = [I]_6, \tag{11.5}$$

де одинична матриця $[I]_6$ має розмірність 6х6.

Оскільки $[D][I]_6 = [D]$, то у випадку наявності тільки температурних і пружних деформацій отримали ту ж симетричну матрицю, що й у (11.2):

$$[\underset{\sim}{D}] = \partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 / \partial\{\in\} = [D]. \tag{11.6}$$

Зауважимо, що на старті алгоритму Ньютона-Рафсона матриця $[\underset{\sim}{D}]$ не застосовується (див. пояснення над формулою (9.47)).

11.1.3. Наявність всіх типів деформацій

Можна показати, що при застосуванні інкрементальних теорій пластичності та повзучості, які мають право використовуватися при наявності великих деформацій (див. формули (7.43) та (7.44), матриця $[\underset{\sim}{D}]$ буде мати таке наповнення (ізотропний матеріал):

$$[\underset{\sim}{D}] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a} & \underset{\sim}{b} & \underset{\sim}{b} & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\sim}{b} & \underset{\sim}{a} & \underset{\sim}{b} & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\sim}{b} & \underset{\sim}{b} & \underset{\sim}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\sim}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\sim}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\sim}{c} \end{bmatrix}, \tag{11.7}$$

де позначено компоненти

$$\underset{\sim}{a} = \frac{\beta + 2\gamma}{3}; \quad \underset{\sim}{b} = \frac{\beta - \gamma}{3}; \quad \underset{\sim}{c} = \frac{\gamma}{2}; \quad \beta = \frac{E(\theta)}{1 - 2\mu(\theta)}; \quad \gamma = \frac{2G(\theta)}{1 + 2G(\theta)(d\lambda^p + d\lambda^c)}. \tag{11.8}$$

В компоненті $\underset{\sim}{c}$ враховано, що у формулах Розділу 9 матриця диференціювання $[\tilde{B}]$ записана для кутової деформації $2\in_{ij}$, а не $\in_{ij}$ (для Розділу 10 – аналогічно).

Функціонали $d\lambda^p$ та $d\lambda^c$ є тими самими, швидкості яких фігурують у формулах (7.43) та (7.44). Алгоритми їхнього визначення будуть приведені в наступному Розділі. Можна перевірити, що при $d\lambda^p = d\lambda^c = 0$ значення компонент матриць (11.7) та (Д1.15) з Додатку 1 співпадають.

Такий алгоритм призначення компонент матриці $[\underset{\sim}{D}]$ автори назвали алгоритмом ***ефективної функції напружень*** (Effective Stress Function – ESF).

11.2. Визначення компонент вектора поверхневого навантаження

Формула (8.24), а саме $(\underset{\sim}{p}^m)_0 = qJC^{ji}(\nu_i)_0 X_{mj} g_{mm}$, обчислює компоненти вектора приведеного поверхневого навантаження $\{\tilde{p}_\nu\}$, де q – величина тиску в точці поверхні СЕ. Тут компоненти C^{ji} матриці $[C]^{-1}$ обчислюються як

$$C^{jk} = (C_{jk})^{-1} = \chi^{jk} / J^2, \tag{11.9}$$

де χ^{jk} – компоненти "приєднаної" матриці:

$$\begin{aligned} &\chi^{11} = C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}; \quad \chi^{12} = -C_{21}C_{33} + C_{23}C_{31}; \\ &\chi^{13} = C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31}; \quad \chi^{21} = -C_{12}C_{33} + C_{13}C_{32}; \\ &\chi^{22} = C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}; \quad \chi^{23} = -C_{11}C_{32} + C_{12}C_{31}; \\ &\chi^{31} = C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}; \quad \chi^{32} = -C_{11}C_{23} + C_{13}C_{21}; \\ &\chi^{33} = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}, \end{aligned} \tag{11.10}$$

а величина

$$J^2 = C_{11}\chi^{11} + C_{12}\chi^{12} + C_{13}\chi^{13}. \qquad (11.11)$$

Згідно з (2.6) та (2.17), у декартовій системі координат (ДСК) компоненти $g_{jk} = \delta_{jk}$, $X_{ik} = \delta_{ik} + \partial u_i / \partial a^k$, $u_n = u^n$. Тому для (11.10) та (11.11) компоненти

$$C_{jk} = X_{ji}X_{ik} = \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial a^k} + \frac{\partial u_k}{\partial a^j} + \frac{\partial u_n}{\partial a^j}\frac{\partial u_n}{\partial a^k}. \qquad (11.12)$$

Позначимо компоненти вектора переміщень $u_1 = U$, $u_2 = V$ та $u_3 = W$. Вектор переміщень в будь-якій точці СЕ обчислюється з вузлових переміщень $\{q\}_e$ із застосуванням матриці базисних функцій $[\phi]$ за виразом (Д1.3) з Додатку 1:

$$\{u\} = \{U, V, W\}^T = [\phi]\{q\}_e. \qquad (11.13)$$

Тепер вектор приведеного поверхневого навантаження $\{\tilde{p}_v\}$ у ДСК в розгорнутому матричному вигляді представимо як

$$\{\tilde{p}_v\} = qJ\begin{Bmatrix} \left((v_1)_0 C^{11} + (v_2)_0 C^{12} + (v_3)_0 C^{13}\right)\left(1 + \dfrac{\partial U}{\partial a^1} + \dfrac{\partial V}{\partial a^1} + \dfrac{\partial W}{\partial a^1}\right) \\ \left((v_1)_0 C^{21} + (v_2)_0 C^{22} + (v_3)_0 C^{23}\right)\left(1 + \dfrac{\partial U}{\partial a^2} + \dfrac{\partial V}{\partial a^2} + \dfrac{\partial W}{\partial a^2}\right) \\ \left((v_1)_0 C^{31} + (v_2)_0 C^{32} + (v_3)_0 C^{33}\right)\left(1 + \dfrac{\partial U}{\partial a^3} + \dfrac{\partial V}{\partial a^3} + \dfrac{\partial W}{\partial a^3}\right) \end{Bmatrix}. \qquad (11.14)$$

11.3. Визначення компонент матриці $[K_\sigma]_0 = [Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y]$

Підінтегральна матриця $[K_\sigma]_0 = [Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y]$, яка з'явилася у виразі (9.37), а саме для обчислення матриці геометричної жорсткості для СЕ $([K_\sigma]_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [Y]^T[\underset{\sim}{\sigma}]_0[Y](d\Omega)_0$, з урахуванням виразів (9.10) та (9.12), буде мати такі компоненти, пов'язані з вузлами n та m:

$$[K_\sigma]_{mn} = \begin{bmatrix} p_{1m}\alpha_{1n} + p_{2m}\alpha_{2n} + p_{3m}\alpha_{3n}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{1m}\alpha_{1n} + p_{2m}\alpha_{2n} + p_{3m}\alpha_{3n}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{1m}\alpha_{1n} + p_{2m}\alpha_{2n} + p_{3m}\alpha_{3n} \end{bmatrix}, \qquad (11.15)$$

де позначені вирази: $p_{im} = \partial\varphi_m^e(r_j) / \partial a^i$, $\alpha_{1n} = (\underset{\sim}{\sigma}_1)_0 p_{1n} + (\underset{\sim}{\sigma}_4)_0 p_{2n} + (\underset{\sim}{\sigma}_6)_0 p_{3n}$; $a_{2n} = (\underset{\sim}{\sigma}_4)_0 p_{1n} + (\underset{\sim}{\sigma}_2)_0 p_{2n} + (\underset{\sim}{\sigma}_5)_0 p_{3n}$; $\alpha_{3n} = (\underset{\sim}{\sigma}_6)_0 p_{1n} + (\underset{\sim}{\sigma}_5)_0 p_{2n} + (\underset{\sim}{\sigma}_3)_0 p_{3n}$.

11.4. Визначення компонент матриці $[\tilde{B}]$

Матриця $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$ (див. вираз (9.20)). Згідно з (Д1.12) з Додатку 1, блок матриці $[B]$, пов'язаний з вузлом СЕ із внутрішнім номером m, має вигляд (тривимірний випадок):

$$[B]_m = \begin{bmatrix} p_{1m}\ ; & 0\ ; & 0 \\ 0\ ; & p_{2m}\ ; & 0 \\ 0\ ; & 0\ ; & p_{3m} \\ p_{2m}\ ; & p_{1m}\ ; & 0 \\ 0\ ; & p_{3m}\ ; & p_{2m} \\ p_{3m}\ ; & 0\ ; & p_{1m} \end{bmatrix}, \tag{11.16}$$

де як і для (11.15) компоненти $p_{im} = \partial\varphi_m^e(r_j)/\partial a^i$.

Згідно з (9.14), матриця $[\bar{B}] = [A][Y]$, де матриці $[A]$ та $[Y]$ даються виразами (9.8) та (9.12) відповідно.

Матриця $[\bar{B}]$ – блочна, кількість блоків відповідає кількості вузлів у СЕ. Ще матриця $[\bar{B}]$ залежить від типу глобальних координат. Для декартової системи координат блок матриці $[\bar{B}]$ має вигляд:

$$[\bar{B}]_m = \begin{bmatrix} b_{11}p_{1m}\ ; & b_{21}p_{1m}\ ; & b_{31}p_{1m} \\ b_{11}p_{2m}\ ; & b_{21}p_{2m}\ ; & b_{31}p_{2m} \\ b_{11}p_{3m}\ ; & b_{21}p_{3m}\ ; & b_{31}p_{3m} \\ b_{12}p_{1m} + b_{11}p_{2m}\ ; & b_{22}p_{1m} + b_{21}p_{2m}\ ; & b_{32}p_{1m} + b_{31}p_{2m} \\ b_{13}p_{2m} + b_{12}p_{3m}\ ; & b_{23}p_{2m} + b_{22}p_{3m}\ ; & b_{33}p_{2m} + b_{32}p_{3m} \\ b_{11}p_{3m} + b_{13}p_{1m}\ ; & b_{21}p_{3m} + b_{23}p_{1m}\ ; & b_{31}p_{3m} + b_{33}p_{1m} \end{bmatrix}, \tag{11.17}$$

де позначено: $b_{ij} = \partial u_i / \partial a^j$.

Матриця $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$ теж блочна (M_e – кількість вузлів у СЕ):

$$[\tilde{B}] = \left[[\tilde{B}]_1,\ [\tilde{B}]_2,\ \ldots,\ [\tilde{B}]_{M_e} \right], \tag{11.18}$$

її характерний блок, пов'язаний з вузлом СЕ із внутрішнім номером m, з урахуванням виразів (11.16) і (11.17), має таке наповнення:

$$[\tilde{B}]_m = \begin{bmatrix} (1+b_{11})p_{1m}\ ; & b_{21}p_{1m}\ ; & b_{31}p_{1m} \\ b_{11}p_{2m}\ ; & (1+b_{21})p_{2m}\ ; & b_{31}p_{2m} \\ b_{11}p_{3m}\ ; & b_{21}p_{3m}\ ; & (1+b_{31})p_{3m} \\ b_{12}p_{1m} + (1+b_{11})p_{2m}\ ; & (1+b_{22})p_{1m} + b_{21}p_{2m}\ ; & b_{32}p_{1m} + b_{31}p_{2m} \\ b_{13}p_{2m} + b_{12}p_{3m}\ ; & b_{23}p_{2m} + (1+b_{22})p_{3m}\ ; & (1+b_{33})p_{2m} + b_{32}p_{3m} \\ (1+b_{11})p_{3m} + b_{13}p_{1m}\ ; & b_{21}p_{3m} + b_{23}p_{1m}\ ; & b_{31}p_{3m} + (1+b_{33})p_{1m} \end{bmatrix}. \tag{11.19}$$

Контрольні питання до розділу

1. Для чого призначена матриці $[\underset{\sim}{D}]$? Яким чином вона пов'язана з матрицею модулів пружності $[D]$?
2. Яка головна дія при визначенні компонент вектора поверхневого навантаження?
3. Яка властивість матриць використовується при визначенні компонент матриці $[K_\sigma]_0 = [Y]^T [\underset{\sim}{\sigma}]_0 [Y]$?

Розділ 12

АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В АКТУАЛЬНИХ ТОЧКАХ ТІЛА ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ВЕЛИКИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ РІЗНОГО ТИПУ

12.1. Базові співвідношення між приростами необоротних деформацій та напруженнями

В Розділі 7 розглянуто обґрунтування загальних рівнянь інкрементальних теорій пластичності та повзучості при великих деформаціях. В цьому Розділі розглядається загальний алгоритм розрахунку напружень в актуальній точці СЕ при наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичності та повзучості.

Нагадаємо, що, згідно з допустимими з точки зору другого закону термодинаміки співвідношеннями (7.43) та (7.44), а саме

$$\underset{\sim}{d}{}^{p}_{mn} = \dot{\lambda}^{p} \frac{\partial g}{\partial (\Xi^{mn})_{s}}; \quad \underset{\sim}{w}{}^{p}_{mn} = \dot{\lambda}^{p} \frac{\partial g}{\partial (\Xi^{mn})_{w}}; \quad m,n = 1,2,3; \qquad (12.1\text{-a})$$

$$\underset{\sim}{d}{}^{c}_{mn} = \dot{\lambda}^{c} \frac{\partial f}{\partial (\Xi^{mn})_{s}}; \quad m,n = 1,2,3, \qquad (12.2\text{-a})$$

компоненти матриць приведених швидкостей необоротних деформацій $[\underset{\sim}{L}{}^{p}] = [\underset{\sim}{d}{}^{p}] + [\underset{\sim}{w}{}^{p}]$ та $[\underset{\sim}{L}{}^{c}] = [\underset{\sim}{d}{}^{c}] + [\underset{\sim}{w}{}^{c}]$ пов'язані з напруженнями Менделя Ξ^{mn}, де $(\Xi^{mn})_{s} = 0.5(\Xi^{mn} + (\Xi^{mn})^{T})$, а $(\Xi^{mn})_{w} = 0.5(\Xi^{mn} - (\Xi^{mn})^{T})$.

Щодо практичного застосування цих допустимих співвідношень спочатку зазначимо, що при переході до нескінченно малих деформацій

$$\underset{\sim}{d}{}^{p}_{mn} dt \to d\varepsilon^{p}_{mn} = de^{p}_{mn}; \quad \underset{\sim}{d}{}^{c}_{mn} dt \to d\varepsilon^{c}_{mn} = de^{c}_{mn}; \quad (\Xi^{mn})_{s} \to \sigma^{mn}, \qquad (12.3)$$

а всі компоненти $\underset{\sim}{w}{}^{p}_{mn} \to 0$ й $(\Xi^{mn})_{w} \to 0$. Тут рівності прирощень тензора та девіатора нескінченно малих пластичних деформацій $d\varepsilon^{p}_{mn} = de^{p}_{mn}$, а також деформацій повзучості $d\varepsilon^{c}_{mn} = de^{c}_{mn}$ постулюють незмінність об'єму за рахунок необоротних деформацій, а σ^{mn} є компонентами тензора напружень Ейлера-Коші.

Крім того, з урахуванням незмінності об'єму від необоротних деформацій постулюються зв'язки прирощень необоротних деформацій не з тензорами напружень, а з їхніми девіаторами (важливо, що при цьому *головні осі напружень та прирощень необоротних деформацій – ті ж самі*); для ізотропних матеріалів з ізотропним зміцненням це вирази (*головні осі співпадають*):

$$de^{p}_{mn} = d\lambda^{p} S_{mn}; \quad de^{c}_{mn} = d\lambda^{c} S_{mn}. \qquad (12.4)$$

Тому й з напружень у виразах (12.1) і (12.2) потрібно видалити гідростатичну складову. Але тензор Менделя є несиметричним, а такого поняття (та відповідної формули), як девіатор несиметричного тензора – немає.

Позначимо *умовну* "гідростатичну" частину *несиметричного* тензора напружень Менделя як Ξ_V^{mn} (в матричній формі запису $[\Xi_V]$) й *умовний* "девіатор" напружень Менделя

$$\Theta^{mn} = \Xi^{mn} - \Xi_V^{mn}; \quad [\Theta] = [\Xi] - [\Xi_V]. \qquad (12.5)$$

Функціонали g й f у виразах (12.1-а) і (12.2-а), як це прийнято для ізотропного матеріалу з ізотропним зміцненням, будемо вважати квадратичними відносно Θ^{mn}. Тоді замість (12.1-а) й (12.2-а) маємо:

$$\underset{\sim}{d}{}_{mn}^{p} = \dot{\lambda}^{p} \cdot (\Theta^{mn})_s; \quad \underset{\sim}{w}{}_{mn}^{p} = \dot{\lambda}^{p} \cdot (\Theta^{mn})_w; \qquad (12.1\text{-б})$$

$$\underset{\sim}{d}{}_{mn}^{c} = \dot{\lambda}^{c} \cdot (\Theta^{mn})_s. \qquad (12.2\text{-б})$$

Нагадаємо, що $\underset{\sim}{L}{}_{mn}^{p} = \underset{\sim}{d}{}_{mn}^{p} + \underset{\sim}{w}{}_{mn}^{p}$ та $\underset{\sim}{L}{}_{mn}^{c} = \underset{\sim}{d}{}_{mn}^{c}$, оскільки для повзучості вважають, що всі компоненти $\underset{\sim}{w}{}_{mn}^{c} = 0$. Ще відзначимо, що $\dot{\lambda}^p dt = d\lambda^p$, $\dot{\lambda}^c dt = d\lambda^c$ й $(\Theta^{mn})_s + (\Theta^{mn})_w = \Theta^{mn}$. Тому замість (12.1-б) і (12.2-б) маємо (в різних формах запису)

$$\underset{\sim}{L}{}_{mn}^{p} dt = d\lambda^p \cdot \Theta^{mn}; \quad [\underset{\sim}{L}{}^{p}]dt = d\lambda^p [\Theta]; \qquad (12.6)$$

$$\underset{\sim}{L}{}_{mn}^{c} dt = \underset{\sim}{d}{}_{mn}^{c} dt = d\lambda^c \cdot (\Theta^{mn})_s; \quad [\underset{\sim}{L}{}^{c}]dt = [\underset{\sim}{d}{}^{c}]dt = d\lambda^c [\Theta]_s. \qquad (12.7)$$

Ще нагадаємо, що при формулюванні ***Total Lagrangian*** потрібно застосовувати енергетично спряжений з тензором деформацій Гріна-Лагранжа $\in_{mn}$ другий тензор напружень Піола-Кірхгофа (***ТН2ПК***) відносно початкової конфігурації, тобто $(\underset{\sim}{\sigma}{}^{mn})_0$, а не тензор напружень Менделя. Тому потрібно переходити до формул з *симетричним* ТН2ПК. А при формулюванні ***Update Lagrangian*** потрібно застосовувати енергетично спряжені з тензором напружень ***Ейлера-Коші*** (або ***Кірхгофа***) тензор деформацій ***Альмансі*** або ***Генкі***.

Оскільки між різними мірами тензорів напружень є однозначні взаємно обернені зв'язки, то це зробити можна простими перерахунками, як буде показано нижче.

Спочатку розглянемо ***TL-формулювання***. Введемо гідростатичну складову $(\underset{\sim}{\sigma}{}_V)_0$ та девіатор ТН2ПК $(\underset{\sim}{S}{}^{mn})_0$:

$$(\underset{\sim}{\sigma}{}_V)_0 = \delta_{ij} (\underset{\sim}{\sigma}{}^{ij})_0 / 3; \quad (\underset{\sim}{S}{}^{mn})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}{}^{mn})_0 - \delta^{mn} (\underset{\sim}{\sigma}{}_V)_0. \qquad (12.8)$$

З їхнім використанням введемо матриці гідростатичних (середніх) напружень та девіатора ТН2ПК:

$$[\underset{\sim}{\sigma}{}_V]_0 = (\underset{\sim}{\sigma}{}_V)_0 [I]; \quad [\underset{\sim}{S}]_0 = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 - [\underset{\sim}{\sigma}{}_V]_0 = [\underset{\sim}{\sigma}]_0 - (\underset{\sim}{\sigma}{}_V)_0 [I]. \qquad (12.9)$$

З формул (7.40), а саме $[\overline{S}] = [X^e]^{-1}[\tau][X^e]^{-T}$, $[\Xi] = [C^e][\overline{S}]$, де $[C^e] = [X^e]^T [X^e]$, а також з формули $[\tau] = J[\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T$, маємо матрицю з компонентами тензора напружень Менделя

$$[\Xi] = [X^e]^T [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0 [X]^T [X^e]^{-T}. \qquad (12.10)$$

З (12.9) і (12.10) матриця з компонентами "девіатора" напружень Менделя

$$[\Theta] = [X^e]^T[X][\underset{\sim}{S}]_0[X]^T[X^e]^{-T}. \qquad (12.11)$$

Підставимо (12.11) у (12.6) та (12.7):

$$[\underset{\sim}{L}^p]dt = d\lambda^p[X^e]^T[X][\underset{\sim}{S}]_0[X]^T[X^e]^{-T}; \qquad (12.12)$$

$$[\underset{\sim}{d}^c]dt = d\lambda^c\left([X^e]^T[X][\underset{\sim}{S}]_0[X]^T[X^e]^{-T}\right)_s. \qquad (12.13)$$

Ці вирази запишемо відносно $[\underset{\sim}{S}]_0$, тобто у вигляді, подібному (12.4) у правих частинах. Для цього помножимо вирази зліва на $[X]^{-1}[X^e]^{-T}$ та справа на $[X^e]^T[X]^{-T}$, результати позначимо як

$$[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^p] = [X]^{-1}[X^e]^{-T}([\underset{\sim}{L}^p]dt)[X^e]^T[X]^{-T} = d\lambda^p[\underset{\sim}{S}]_0; \qquad (12.14)$$

$$[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^c] = \left([X]^{-1}[X^e]^{-T}([\underset{\sim}{d}^c]dt)[X^e]^T[X]^{-T}\right)_s = d\lambda^c[\underset{\sim}{S}]_0. \qquad (12.15)$$

Оскільки компоненти матриць $[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^p]$ та $[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^c]$ пропорційні компонентам *симетричної* матриці $[\underset{\sim}{S}]_0$ з компонентами девіатора ТН2ПК, то вони можуть містити тільки компоненти *симетричного* тензораприрощень необоротних деформацій, можливо – масштабованих відносно $[d\,\breve{\in}^p]$ та $[d\,\breve{\in}^c]$. Але тут останнє не важливе, оскільки, по-перше, в формулах є невідомі функціонали (скаляри) масштабування $d\lambda^p$ та $d\lambda^c$ відповідно, а, по-друге, ці вирази використаємо лише для встановлення факту співвісності $[d\,\breve{\in}^p]$ та $[d\,\breve{\in}^c]$ з $[\underset{\sim}{S}]_0$. Тобто можна прийняти, що $[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^p] = [d\,\breve{\in}^p]$ та $[d\,\underset{\approx}{\breve{\in}}^c] = [d\,\breve{\in}^c]$. Тоді з (12.14) і (12.15) маємо, що (в різних формах запису)

$$[d\,\breve{\in}^p] = d\lambda^p[\underset{\sim}{S}]_0; \quad \{d\,\breve{\in}^p\} = d\lambda^p\{\underset{\sim}{S}\}_0; \qquad (12.16\text{-а})$$

$$[d\,\breve{\in}^c] = d\lambda^c[\underset{\sim}{S}]_0; \quad \{d\,\breve{\in}^c\} = d\lambda^c\{\underset{\sim}{S}\}_0. \qquad (12.16\text{-б})$$

Отже, обов'язковість дотримання залежностей (12.1-а) та (12.2-а) призводить до обов'язковості (12.16-а) та (12.16-ба), які подібні залежностям *других* законів теорій пластичності та повзучості (12.4) для моделей малих необоротних деформацій в ізотропному матеріалі.

Усі подальші дії з находження напружень є повним аналогом дій, що використовуються для знаходження компонент тензора напружень у випадку нескінченно малих деформацій.

Після знаходження компонент ТН2ПК $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ залишається обчислити компоненти тензорів напружень Ейлера-Коші та деформацій Альмансі (або Генкі):

$$[\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T / J. \qquad (12.17)$$

$$[\in]_A = 0.5([I] - [X]^{-T}[X]^{-1}) \quad \text{або} \quad ([\in]_H)_R = [W_R]^T[\Delta]_H[W_R]. \qquad (12.18)$$

При ***UL-формулюванні*** до компонент тензора напружень Ейлера-Коші потрібно перейти відразу. Замість (12.8) – (12.16) маємо відповідно:

$$\sigma_V = \delta_{ij}\sigma^{ij}/3; \quad S^{mn} = \sigma^{mn} - \delta^{mn}\sigma_V. \qquad (12.19)$$

$$[\sigma_V] = \sigma_V[I]; \quad [S] = [\sigma] - [\sigma_V] = [\sigma] - \sigma_V[I]. \qquad (12.20)$$

$$[\Xi] = J[X^e]^T[\sigma][X^e]^{-T}. \qquad (12.21)$$

$$[\Theta] = J[X^e]^T[S][X^e]^{-T}. \qquad (12.22)$$

$$[\underset{\sim}{L}^p]dt = d\lambda^p [X^e]^T [S][X^e]^{-T}; \tag{12.23}$$

$$[\underset{\sim}{d}^c]dt = d\lambda^c \left([X^e]^T [S][X^e]^{-T}\right)_s. \tag{12.24}$$

$$[d\,\tilde{\tilde{\in}}^p] = [X^e]^{-T}([\underset{\sim}{L}^p]dt)[X^e]^T = d\lambda^p [S]; \tag{12.25-а}$$

$$[d\,\tilde{\tilde{\in}}^c] = \left([X^e]^{-T}([\underset{\sim}{d}^c]dt)[X^e]^T\right)_s = d\lambda^c [S]. \tag{12.26-а}$$

Для компонент *тензора деформацій* ***Альмансі***

$$[d\,\breve{\in}^p]_A = d\lambda^p [S]; \quad \{d\,\breve{\in}^p\}_A = d\lambda^p \{S\}; \tag{12.27-а}$$

$$[d\,\in^c]_A = d\lambda^c [S]; \quad \{d\,\in^c\}_A = d\lambda^c \{S\}. \tag{12.27-б}$$

або для компонент *правого тензора деформацій* ***Генкі***

$$[d\,\breve{\in}^p{}_R]_H = d\lambda^p [S]; \tag{12.28-а}$$

$$[d\,\breve{\in}^c{}_R]_H = d\lambda^c [S]. \tag{12.28-б}$$

З формул типу (12.16), (12.27) або (12.28) отримують вирази для $d\lambda^p$ та $d\lambda^c$, потрібні для обчислення компонент матриці (11.7):

$$d\lambda^p = 3d\,\breve{\in}_u^p\,/(2\sigma_u); \quad d\lambda^c = 3d\,\breve{\in}_u^c\,/(2\sigma_u). \tag{12.29}$$

Тут у чисельниках стоять інтенсивності приростів пластичних деформацій та деформацій повзучості, наприклад: $d\,\breve{\in}_u^p = \sqrt{2(d\,\breve{\in}_{ij}^p)_A (d\,\breve{\in}_{ij}^p)_A / 3}$ й $d\,\breve{\in}_u^c = \sqrt{2(d\,\breve{\in}_{ij}^c)_A (d\,\breve{\in}_{ij}^c)_A / 3}$, а у знаменниках – інтенсивності напружень, наприклад $\sigma_u = \sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2}$.

При ***UL-формулюванні*** є додаткова проблема. Як відомо, UL-формулювання застосовують при складних процесах деформування, коли його історія має значення для НДС. При цьому зазвичай елементарні об'єми матеріалу окрім власно деформацій отримують жорсткі повороти, тобто для визначення приростів деформацій потрібно проводити полярну декомпозицію матриці приростів градієнта руху Гріна (див. п.2.3.3 та п.5.2.2) з метою урахування цих поворотів.

Створено доволі значну кількість алгоритмів відповідних дій.

Зокрема, в 1984 р. ***T.J.R. Hughes*** запропонував алгоритм для знаходження приростів повних деформацій $\{\Delta\varepsilon\}^{n+1}$, який добре себе зарекомендував та застосовується, наприклад, у ANSYS. Згідно з ним, фактично реалізовується вагова схема інтегрування у часі з ваговим коефіцієнтом $\omega = 0.5$.

Спочатку, на $(n+1)-$му часовому кроці, після отримання $(\{q\}^{n+1})^{(k)}$, тобто розв'язку САР на $k-$ій ітерації, формуються вектори приростів переміщень та "проміжних" переміщень й координат вузлів СЕ сітки:

$$\{\Delta q\} = (\{q\}^{n+1})^{(k)} - \{q\}^n; \quad (\{q\}^{n+1/2})^{(k)} = \{q\}^n + \{\Delta q\}/2; \tag{12.30}$$

$$(\{a\}^{n+1/2})^{(k)} = \{a\}^n + \{\Delta q\}/2. \tag{12.31}$$

Потім запускається цикл по СЕ. У ньому зі вказаних векторів робляться вибірки вузлових значень "проміжних" координат вузлів $\{a\}_e^{n+1/2}$, а також векторів $\{q\}_e^n$, $\{q\}_e^{n+1/2}$ й $\{\Delta q\}_e$ (для скорочення запису прибрано номер ітерації

k). Спираючись на ці значення, в кожній актуальній точці цього СЕ обчислюються компоненти матриці базисних функцій $[\phi]^{n+1/2}$ та матриці диференціювання $[B]^{n+1/2}$ (див. Додаток 1), а також компоненти векторів "проміжних" переміщень та прирощень деформацій:

$$\{u\}^{n+1/2}=[\phi]^{n+1/2}\{q\}_e^{n+1/2};\quad \{\Delta\tilde{\varepsilon}\}^{n+1}=[B]^{n+1/2}\{\Delta q\}_e. \tag{12.32}$$

Ще підраховуються компоненти матриці $[X]^{n+1/2}$, а саме

$$X_{ij}^{n+1/2}=\delta_{ij}+\partial u_i^{n+1/2}/\partial a_j^{n+1/2}, \tag{12.33}$$

потім проводиться полярна декомпозиція

$$[X]^{n+1/2}=[R]^{n+1/2}[U]^{n+1/2} \tag{12.34}$$

та знаходяться компоненти прирощень деформацій "з видаленим поворотом"

$$\{\Delta\varepsilon\}^{n+1}=([R]^{n+1/2})^T\{\Delta\tilde{\varepsilon}\}^{n+1}[R]^{n+1/2}. \tag{12.35}$$

Саме компоненти цього вектора містять частини прирощень всіх типів деформацій: пружних, температурних, пластичності та/або повзучості.

Однією з альтернатив описаного алгоритму є неявна схема (***Weber G.G.*** та інші, 1990 р.), яка застосовується, наприклад, у ABAQUS.

У кожній актуальній точці чергового СЕ обчислюються компоненти матриці

$$[\Delta]^{n+1}=[X]^{n+1}([X]^n)^{-1}. \tag{12.36}$$

Оскільки детермінанти обох матриць більше за нуль, то для $[\Delta]^{n+1}$ існує її полярна декомпозиція

$$[\Delta]^{n+1}=[\Delta R]^{n+1}[\Delta U]^{n+1}, \tag{12.37}$$

тому з матриці $[\Delta C]^{n+1}=([\Delta X]^{n+1})^T[\Delta X]^{n+1}$ можна знайти матриці її власних значень $[\lambda]$ та власних векторів $[W_R]$ (див. (2.28-б)):

$$[\Delta C]^{n+1}[W_R]=[\lambda][W_R]. \tag{12.38}$$

Згідно з (3.27) прирости головних логарифмічних деформацій (в тріаді Ейлера):

$$(\Delta \underline{\in}_i)_H=(\Delta\underline{\Delta}_{ii})_H=\ln\sqrt{\lambda_i};\quad i=1,2,3. \tag{12.39}$$

а компоненти тензора приростів логарифмічних деформацій, зібрані у матрицю, відповідно до (3.26-а):

$$(([\Delta\in]_H)_R)^{n+1}=[W_R][\Delta\underline{\Delta}]_H[W_R]^T. \tag{12.40}$$

Нагадаємо, що згідно з п.5.2.2. з деяким *наближенням* спряження за потужністю призначають за тензором ***Нолла T*** та *правим тензором логарифмічних деформацій* ***Генкі*** $\in_H$ з компонентами $((\in_{ij})_H)_R$.

12.2. Числовий приклад (тестова задача) про термопружно-пластичне деформування. TL-формулювання

Розглянемо тестову задачу про визначення характеристик напружено-деформованого стану заневоленого між жорсткими стінками стрижня довжиною L та довільного перерізу, який з початкової температури θ_0

рівномірно прогрітий до температури θ. Ідеально-пластичний матеріал стрижня має модуль Юнга E, коефіцієнт Пуассона μ, коефіцієнт температурного подовження $\bar{\alpha}_\theta$ та межу плинності σ_T. Вихідні дані поміщено в Таблицю 12.1.

Таблиця 12.1. Вихідні дані

L, мм	θ_0, К	θ, К	E, МПа	μ	$\bar{\alpha}_\theta$, 1/К	σ_T, МПа
100	0	1000	$2 \cdot 10^5$	0.25	10^{-5}	500

З точки зору опору матеріалів (нескінченно малі деформації) температурне подовження стрижня мало б бути $\Delta L^\theta = \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0) \cdot L = 1$ мм. Жорсткі стінки не дають це зробити, тому виникає осьова сила N, що стискає стрижень. Він "скорочується" на $\Delta L^N = -\Delta L^\theta = -\bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0) \cdot L$. Якщо б матеріал був пружним, то мали б осьове напруження $\sigma^{11} = -2000$ МПа. Але матеріал – ідеально-пластичний, напружений стан – однорідний та одновісний, тому рівень осьового напруження дорівнює значенню межі плинності матеріалу, а всі інші напруження відсутні, тобто ми знаємо всі напруження: $\sigma^{11} = -\underset{\sim}{\sigma}_T = -500$ МПа; $\sigma^{22} = \sigma^{33} = 0$. А також ми знаємо і пружні деформації: $\varepsilon_{11}^e = \sigma^{11} / E = -500/(2 \cdot 10^5) = -0.0025$; $\varepsilon_{22}^e = \varepsilon_{33}^e = -\mu\varepsilon_{11}^e = -0.25 \cdot (-0.0025) = 0.000625$. Оскільки загальна осьова деформація $\varepsilon_{11} = 0$, то пластична осьова деформація складає величину $\varepsilon_{11}^p = -(\varepsilon_{11}^\theta + \varepsilon_{11}^e) = -\bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0) + \underset{\sim}{\sigma}_T / E = -0.01005 + 0.0025 = -0.00755$. Поперечні термопружні деформації $\varepsilon_{22}^\theta + \varepsilon_{22}^e = \varepsilon_{22}^\theta - \mu\varepsilon_{11}^e = \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0) + \mu\sigma_T / E$. За рахунок пластичних деформацій об'єм металу не змінюється, тому поперечні пластичні деформації $\varepsilon_{22}^p = \varepsilon_{33}^p = -\varepsilon_{11}^p / 2 = 0.003775$. Отже, поперечні деформації $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22}^\theta + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^p = 0.01 + 0.000625 + 0.003775 = 0.0144$. Враховано, що всі компоненти температурних деформацій $\varepsilon_{11}^\theta = \varepsilon_{22}^\theta = \varepsilon_{33}^\theta = \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0)$, а кутових деформацій та дотичних напружень немає.

Застосуємо мультиплікативний розклад (МР).

Згідно з (7.5), $[X^\theta] = \vartheta[I]$, де $\vartheta = \vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0)$.

В МСЕ обчислення компонент матриці $[X]$ передує обчисленню компонент всіх інших матриць. В нашому прикладі матеріал – ідеально-пластичний, напружений стан – однорідний та одновісний, тому ми знаємо всі напруження та, приблизно, деформації. У нашому прикладі для формули (7.12), тобто $[X] = [X^e][X^p][X^\theta]$, в матриці $[X]$ повинно бути $X_{11} = 1$, всі $X_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Щодо $X_{22} = X_{33}$ (описують зміни розмірів стрижня в поперечних напрямках), то їхні значення можемо оцінити наближено як $X_{22} = X_{33} \approx 1 + \in_{22}^\theta + \in_{22}^e + \in_{22}^p$. Аналогічно можемо наближено оцінити $X_{11}^e \approx 1 + \varepsilon_{11}^e$, $X_{11}^p \approx 1 + \varepsilon_{11}^p$, $X_{22}^e = X_{33}^e \approx 1 + \varepsilon_{22}^e$ та $X_{22}^p = X_{33}^p \approx 1 + \varepsilon_{22}^p$. Отримані розрахункові дані поміщено в таблиці 12.2 і 12.3.

Таблиця 12.2. Розрахункові дані. Матриці з компонентами градієнтів деформацій

Метод	$[X]$	$[X^{\theta}]$	$[X^{p}]$	$[X^{e}]$
МР	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.014400 & 0 \\ 0 & 0 & 1.014400 \end{bmatrix}$	$1.01\cdot[I]$	$\begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon \end{bmatrix}$
МСЕ + МР	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.014347077 & 0 \\ 0 & 0 & 1.014347077 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \bar\eta & 0 \\ 0 & 0 & \bar\eta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \bar\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \bar\upsilon \end{bmatrix}$

де $\kappa \approx 0.992450$, $\eta \approx 1.003775$, $\alpha \approx 0.997631$, $\upsilon \approx 1.000579$, $\bar\kappa = 0.992571172$, $\bar\eta \approx 1.003693716$, $\bar\alpha \approx 0.997509335$, $\bar\upsilon \approx 1.000608075$.

Ще задачу розв’язали авторською програмою ОКА-3D, в якій використаний метод скінченних елементів (МСЕ), мультиплікативний розклад та запис третього закону термопластичності через параметр Одквіста χ. Застосували гексагональні ізопараметричні СЕ другого порядку наближення (Parabolic Solid Hex20). При цьому для набуття встановленої точності в 0.01% по квадратичній нормі зміни деформацій знадобилося п’ять ітерацій. Отримали результати, близькі до результатів МР на основі малих деформацій (див. табл.12.2 та табл.12.3). Додамо, що в МСЕ обчислювати компоненти $[X^{p}]$, $[X^{e}]$ та $[\in^{e}]$ не потрібно, тому останні обчислили додатково: спочатку знайшли компоненти $[\in^{p}]$, потім, згідно з виразом (7.17), тобто $[\in^{p}] = 0.5([X^{p\theta}]^{T}[X^{p\theta}] - [C^{\theta}]) = 0.5([C^{p\theta}] - [C^{\theta}])$, визначилися з $[C^{p\theta}]$ та $[X^{p\theta}]$, після чого знайшли $[X^{e}] = [X][X^{p\theta}]^{-1}$. Ще використовували формули (7.19) та (7.20) при відсутності деформацій повзучості, тобто $[\in^{e}] = 0.5([C] - [C^{p\theta}])$ й $[\in] = 0.5([C] - [I])$. Для МСЕ+МР довжину виписаних в матрицях чисел обмежили 9 вірними знаками після розділового знаку.

Таблиця 12.3. Розрахункові дані. Матриці з компонентами тензорів деформацій

Метод	$[\in^{\theta}]$	$[\in^{e}]$	$[\in^{p}]$
МР	$\in^{\theta}_{11}\cdot[I]$	$\begin{bmatrix} -0.00250 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000625 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.007550 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003775 \end{bmatrix}$
МСЕ + МР		$\begin{bmatrix} -0.002500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000625000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000625000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.007550000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003775000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003775000 \end{bmatrix}$

У таблиці $\in^{\theta}_{11} = \in^{\theta}_{22} = \in^{\theta}_{33} = 0.01005$.

Для обох випадків отримали $(\underset{\sim}{\sigma}^{11})_0 = -500$ МПа, всі інші напруження або точно дорівнювали нулю (МР), або майже дорівнювали нулю (МСЕ + МР). Згідно з (12.17), напруження Ейлера-Коші $\sigma^{11} \approx 485.96$ МПа.

Дані таблиці 12.3 показують, що значення всіх деформацій, обчислені як для малих деформацій, так і великих, співпадають. Це має таке логічне пояснення. Температурні деформації – однакові та не залежать від інших. Пружні деформації залежать лише від незмінних $\underset{\sim}{\sigma}_T$ через $\tilde{E}$ та $\tilde{\mu}$ (закон Гука), тому їх значення теж співпадають. Значення повних повздовжніх деформацій співпадають. Тому й величини повздовжніх пластичних деформацій теж повинні співпадати. Оскільки поперечні деформації пов'язані з повздовжніми коефіцієнтом Пуассона (пружні) та законом пружної зміни об'єму (пластичні), то й їх значення теж співпадають. Такі властивості даної тестової задачі.

Примітка 12.1. Якщо межа плинності задана через напруження Ейлера-Коші σ_T, то потрібно її перераховувати у $\underset{\sim}{\sigma}_T$. Для цього достатньо створити матрицю $[\sigma]$ з нулями, окрім $\sigma^{11} = \sigma_T$, застосувати формулу $[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}[\sigma][X]^{-T}$ і обчислити інтенсивність напруження $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$. Це й буде величина $\underset{\sim}{\sigma}_T$. Щодо матриці $[X]$, то її компоненти повинні відповідати експерименту з визначенням σ_T, тобто містити тільки пружні градієнти, які відповідають ситуації розтягу зразка. Тому $X_{11} = 1 + \sigma_T / E$, $X_{22} = X_{33} = 1 - \mu\sigma_T / E$, а всі недіагональні компоненти матриці $[X]$ дорівнюють нулю. Після видалення "пустих" операцій обчислення $[\underset{\sim}{\sigma}]_0 = J[X]^{-1}[\sigma][X]^{-T}$ остаточно отримали, що $\underset{\sim}{\sigma}_T = \sigma_T X_{22}^2 / X_{11}$. Для нашого числового прикладу, щоб мати $\underset{\sim}{\sigma}_T = 500$ МПа, потрібно задати $\sigma_T = 501.877$ МПа, тобто різниця між ними не перевищила 0.4%, що явно менше погрішності експериментального визначення межі плинності реальних матеріалів.

Контрольні питання до розділу

1. На чому базуються базові співвідношення між приростами необоротних деформацій та напруженнями?
2. До яких мір напружень потрібно переходити від напружень Менделя при TL– та UL–формулюванні?
3. Чи достатньо знати компоненти прирощень повних деформацій для находження компонент тензора напружень?

Додаток І

МАТРИЦІ ГЕОМЕТРИЧНО-ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ДЛЯ АЛГОРИТМІВ РОЗРАХУНКІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ ТІЛА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Д1.1 Матричний запис тензорних і векторних величин у МСЕ

При викладенні алгоритмів МСЕ для задачі про НДС тіла дуже зручно користуватися матричним записом тензорних та векторних величин. Фігурними дужками оформлюються матриці-стовпці (їх називають векторами), а всі інші – прямокутними дужками (їх називають матрицями). Скалярні величини позначаються у звичайний спосіб. Дії з матрицями теж звичайні: алгебраїчне додавання, перемноження, знаходження норм, транспонування, обернення тощо.

Приймемо, що формулювання крайової задачі проведено в переміщеннях $u^i = u^i(\vec{a}, t)$. Далі використовуємо тільки декартову систему координат (ДСК), в якій $u^i = u_i$, тобто не має значення, де розташовані індекси: зверху чи знизу.

З компонент вектору переміщень $u_i = u_i(\vec{a}, t)$; $i = 1,2,3$ при $\vec{a} \in \Omega^e$ вводяться вектори (матриці-стовпці) переміщень

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T . \tag{Д1.1}$$

Нагадаємо, що згідно з ідеологією МСЕ наближення будь-якої функції f у скінченному елементі проводиться за апроксимаційною формулою

$$f = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \, f_m , \tag{Д1.2}$$

де φ_m^e – базисні функції вузлів у СЕ (є функціями координат); f_m – відомі вузлові значення функції f; M_e – кількість вузлів у СЕ.

Тому формула для обчислення вектора $\{u\}$ в будь-якій точці СЕ через відомий вектор $\{q\}_e$ переміщень вузлів СЕ має вигляд

$$\{u\} = [\phi]\{q\}_e , \tag{Д1.3}$$

де вектор переміщень вузлів СЕ

$$\{q\}_e = \{(q_1)_1, (q_2)_1, (q_3)_1, \ldots, (q_1)_{M_e}, (q_2)_{M_e}, (q_3)_{M_e}\}^T = \{q_1, q_2, \ldots, q_{3M_e}\}^T , \tag{Д1.4}$$

в якому q_k, $k = 1,2,\ldots,3M_e$ – ті самі вузлові переміщення, але з *наскрізною* у СЕ нумерацією. Цей вектор є результатом вибирання необхідних значень з глобального вектора переміщень у вузлах всього тіла $\{q\}$. Матриця $[\phi]$ зветься *матрицею базисних функцій*.

Лінійні співвідношення між переміщеннями та нескінченно малими деформаціями, тобто $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial a^j + \partial u_j / \partial a^i) / 2$, записуються у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e . \qquad (Д1.5)$$

Тут вектор повних деформацій $\{\varepsilon\}$ традиційно має таке заповнення:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T , \qquad (Д1.6-а)$$

тобто має компоненти $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$, а матриця $[B]$ є *матрицею диференціювання* компонент переміщень по глобальним координатам.

Ще буде застосовуватися вектор деформацій з дещо іншим наповненням

$$\{\breve{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}\}^T . \qquad (Д1.6-б)$$

Вектор напружень традиційно має таке заповнення:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}^T . \qquad (Д1.7)$$

Д1.2 Заповнення матриці базисних функцій

Визначимо розмірність матриці $[\phi]$ для (Д1.3). Розмірність вектора $\{q\}_e$ дорівнює $LM_e \times 1$, де L – розмірність задачі (одно-, дво– або тривимірна). Розмірність вектора $\{u\}$ дорівнює $L \times 1$. Тому розмірність матриці базисних функцій $[\phi]$ дорівнює $L \times LM_e$.

Вираз (Д1.1) у тривимірному випадку записують таким чином:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \varphi_1^e; & 0; & 0; \\ 0; & \varphi_1^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_1^e; \end{bmatrix} \ \cdots \ \begin{bmatrix} \varphi_m^e; & 0; & 0; \\ 0; & \varphi_m^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_m^e; \end{bmatrix} \ \cdots \ \begin{bmatrix} \varphi_{M_e}^e; & 0; & 0 \\ 0; & \varphi_{M_e}^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_{M_e}^e \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left\{ \{q_1; q_2; q_3;\}_1 \ \ \cdots \ \ \{q_1; q_2; q_3;\}_m \ \ \cdots \ \ \{q_1; q_2; q_3\}_{M_e} \right\}_e^T =$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_1)_m ; \quad \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_2)_m ; \quad \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_3)_m \right\}^T , \qquad (Д1.8)$$

де M_e – кількість вузлів у СЕ. Тобто нулі матриці "нейтралізують лишні значення", залишаючи тільки потрібні, згідно з апроксимаційною формулою (Д1.2), яка відображає основну ідею МСЕ.

Отже, матриця $[\phi]$ – блочна, кількість блоків дорівнює кількості вузлів у СЕ:

$$[\phi] = \left[[\phi]_1, \ [\phi]_2, \ \ldots, \ [\phi]_{M_e} \right] . \qquad (Д1.9)$$

Для тривимірних, двовимірних і одновимірних задач відповідно вузлові блоки мають вигляд

$$[\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e; & 0; & 0 \\ 0; & \varphi_m^e; & 0 \\ 0; & 0; & \varphi_m^e \end{bmatrix}; \quad [\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e; & 0 \\ 0; & \varphi_m^e \end{bmatrix}; \quad [\phi]_m = \varphi_m^e . \qquad (Д1.10)$$

Кожний з блоків містить лише одне значуще ненульове число, яке відповідає φ_m^e. Тому з метою скорочення часу перемноження векторів з матрицею $[\phi]$ зазвичай програмують *результати* такого перемноження.

Призначають координати s_j потрібної точки СЕ, обчислюють всі $\varphi_m^e(s_j)$, а потім – вектор $\{u\}$ в даній точці СЕ.

Д1.3 Заповнення матриці диференціювання

У формулі (Д1.5), а саме $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}_e$, розмірність вектора $\{\varepsilon\}$ позначимо як $K\times 1$ (про значення K – нижче). Тому розмірність матриці диференціювання $[B]$ дорівнює $K\times LM_e$. Очевидно, що для тривимірної крайової задачі з лінійними геометричними рівняннями типу (Д1.5) $K=6$.

Матриця $[B]$ теж блочна, кількість блоків дорівнює кількості вузлів у СЕ:

$$[B]=\Big[[B]_1,\ [B]_2,\ ...,\ [B]_{M_e}\Big]. \qquad (Д1.11)$$

Ще матриця $[B]$ залежить від типу глобальних координат. Для геометрично-лінійної задачі та декартової системи координат (ДСК) блок матриці $[B]$ має вигляд:

$$([B]_m)_{ДСК}=\begin{bmatrix} p_{1m}\ ; & 0\ ; & 0 \\ 0\ ; & p_{2m}\ ; & 0 \\ 0\ ; & 0\ ; & p_{3m} \\ p_{2m}\ ; & p_{1m}\ ; & 0 \\ 0\ ; & p_{3m}\ ; & p_{2m} \\ p_{3m}\ ; & 0\ ; & p_{1m} \end{bmatrix}, \qquad (Д1.12)$$

де позначені величини

$$p_{im}=\partial\varphi_m(s_j)/\partial a^i . \qquad (Д1.13)$$

Щоб переконатися в правильності структури цих формул, достатньо звернутися до геометричних рівнянь для ДСК. Дійсно, вираз (Д1.5) у тривимірному випадку з лінійними геометричними рівняннями $\varepsilon_{ij}=(\partial u_i/\partial a^j+\partial u_j/\partial a^i)/2$ в декартовій системі координат записується таким чином:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\end{Bmatrix}=\left[\begin{bmatrix} p_{11}; & 0; & 0; \\ 0; & p_{21}; & 0; \\ 0; & 0; & p_{31}; \\ p_{21}; & p_{11}; & 0; \\ 0; & p_{31}; & p_{21}; \\ p_{31}; & 0; & p_{11}; \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} p_{1m}; & 0; & 0; \\ 0; & p_{2m}; & 0; \\ 0; & 0; & p_{3m}; \\ p_{2m}; & p_{1m}; & 0; \\ 0; & p_{3m}; & p_{2m}; \\ p_{3m}; & 0; & p_{1m}; \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} p_{1M_e}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{2M_e}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{3M_e} \\ p_{2M_e}; & p_{1M_e}; & 0 \\ 0; & p_{3M_e}; & p_{2M_e} \\ p_{3M_e}; & 0; & p_{1M_e} \end{bmatrix}\right]\times$$

$$\times\Big\{\{q_1;\,q_2;\,q_3;\}_1\ \ \ldots\ \ \{q_1;\,q_2;\,q_3;\}_m\ \ \ldots\ \ \{q_1;\,q_2;\,q_3\}_{M_e}\Big\}_e^T=$$

$$=\left\{\sum_{m=1}^{M_e}p_{1m}\cdot(q_1)_m;\ \ \sum_{m=1}^{M_e}p_{2m}\cdot(q_2)_m;\ \ \sum_{m=1}^{M_e}p_{3m}\cdot(q_3)_m;\right.$$

$$\sum_{m=1}^{M_e}\left(p_{2m}\cdot(q_1)_m+p_{1m}\cdot(q_2)_m\right);\ \sum_{m=1}^{M_e}\left(p_{3m}\cdot(q_2)_m+p_{2m}\cdot(q_3)_m\right);\ \sum_{m=1}^{M_e}\left(p_{3m}\cdot(q_1)_m+p_{1m}\cdot(q_3)_m\right)\Bigg\}^T. \quad (Д1.14)$$

Тобто, як і в попередньому підрозділі, нулі матриці "нейтралізують зайві значення", залишаючи тільки потрібні, згідно з апроксимаційною формулою (Д1.2), яка відображає основну ідею МСЕ.

Деякі інші ситуації відображені в таблиці Д1.1.

Таблиця Д1.1. Заповнення матриць $[B]_m$ та $[D]$ **для двовимірних і осесиметричних крайових задач**

Тип задачі, координатна система	$\{\varepsilon\}$	$[B]_m$	$[D]$	K
ПДС*: ДСК (x,y), Полярна (r,ϑ)	$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}p_{1m}; & 0\\ 0; & p_{2m}\\ p_{2m}; & p_{1m}\end{bmatrix}$	$2G\cdot\begin{bmatrix}a; & b; & 0\\ b; & a; & 0\\ 0; & 0; & c\end{bmatrix}$	3
ПНС**, ДСК (x,y), Полярна (r,ϑ)	$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}p_{1m}; & 0\\ 0; & p_{2m}\\ p_{2m}; & p_{1m}\end{bmatrix}$	$2G\cdot\begin{bmatrix}\breve{a}; & \breve{b}; & 0\\ \breve{b}; & \breve{a}; & 0\\ 0; & 0; & c\end{bmatrix}$	3
Осесиметрична, ЦСК	$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{zr}\end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}p_{1m}; & 0\\ \varphi_m^e/\rho; & 0\\ 0; & p_{3m}\\ p_{3m}; & p_{1m}\end{bmatrix}$	$2G\cdot\begin{bmatrix}a; & b; & b; & 0\\ b; & a; & b; & 0\\ b; & b; & a; & 0\\ 0; & 0; & 0; & c\end{bmatrix}$	4
$^{*)}\sigma_z=2Gb(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$; $^{**)}\varepsilon_z=-\breve{b}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$. Для полярної: $\tilde{p}_{2m}=p_{2m}/\rho$ замість p_{2m}.				
$a=(1-\mu)/(1-2\mu)$; $b=\mu/(1-2\mu)$; $\breve{a}=1/(1-\mu)$; $\breve{b}=\mu/(1-\mu)$; $c=0.5$				

У таблиці також показано заповнення матриць модулів пружності $[D]$, яка відповідає закону Гука $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon^e\}$. Бажано, щоб ця матриця в МСЕ була *симетричною*. Для цього достатньо, щоб у випадку плоского деформованого стану (ПДС) і плоского напруженого стану (ПНС) вона відображала не всі рівняння закону Гука, а тільки для тих напружень та варіацій деформацій, що дають вклад у внутрішню енергію здеформованого тіла (якщо компоненти добутку $\sigma^{mn}\delta\varepsilon_{mn}\neq 0$ при конкретних m та n, див. функціонал (5.4-б)). Ті рівняння, яких не вистачає, у таблиці позначено зірочками. За необхідності ці рівняння застосовуються за наведеними формулами поза матричного співвідношення $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon^e\}$.

У відповідності до структури заповнення векторів $\{\sigma\}$ та $\{\varepsilon^e\}$, у *тривимірному* випадку матриця модулів пружності $[D]$ для ізотропного матеріалу буде мати вигляд

$$[D]=[D(\theta)]=2G(\theta)\cdot\begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0\\ b & a & b & 0 & 0 & 0\\ b & b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad (Д1.15\text{-а})$$

де $2G(\theta)=E/(1+\mu)$; $a=(1-\mu)/(1-2\mu)$; $b=\mu/(1-2\mu)$; $c=0.5$; $E=E(\theta)$ – модуль Юнга; $\mu=\mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона; θ – температура. Враховано, що модулі пружності багатьох матеріалів мають доволі значну залежність від температури.

Якщо замість $\{\varepsilon^e\}$ використовувати $\{\breve{\varepsilon}^e\}$ (див. (Д1.6-б)), то замість (Д1.15-а) будемо мати

$$[\tilde{D}]=[\tilde{D}(\theta)]=2G(\theta)\cdot\begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0\\ b & a & b & 0 & 0 & 0\\ b & b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}, \qquad (Д1.15\text{-б})$$

де $\tilde{c}=1$.

Примітка Д1.1. Оскільки в задачах про згін стержнів, пластин і оболонок застосовуються особливі рівняння та моделі, то ці випадки в таблиці Д1.1 не відображено.

Визначимо *частинні похідні* базисних функцій за глобальними координатами p_{im}, з яких складаються блоки матриці $[B]_m$.

Оскільки в *параметричних* СЕ базисні функції виражено через локальні координати, то:

$$p_{im}=\frac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial a^i}=\frac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial a^i}+\frac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial a^i}+\frac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_3}\frac{\partial s_3}{\partial a^i}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_k}\frac{\partial s_k}{\partial a^i}. \qquad (Д1.16)$$

Але тут невідомими є похідні $\partial s_k/\partial a^i$. Щоб їх визначити, спочатку вираз (Д1.16) записують у розгорнутому *матричному* вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial a^2}\\ \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial a^3} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial s_1}{\partial a^1} ; & \dfrac{\partial s_2}{\partial a^1} ; & \dfrac{\partial s_3}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial s_1}{\partial a^2} ; & \dfrac{\partial s_2}{\partial a^2} ; & \dfrac{\partial s_3}{\partial a^2}\\ \dfrac{\partial s_1}{\partial a^3} ; & \dfrac{\partial s_2}{\partial a^3} ; & \dfrac{\partial s_3}{\partial x^3} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_2}\\ \dfrac{\partial\varphi_m(s_j)}{\partial s_3} \end{Bmatrix}, \qquad (Д1.17)$$

після цього – в узагальненому

$$\{p\}=\left([J]^T\right)^{-1}\{b\}, \qquad (Д1.18)$$

де невироджена матриця Якобі $[J]$ в ізопараметричному СЕ має компоненти

$$J_{ik} = \frac{\partial a^i}{\partial s_k} = \frac{\partial}{\partial s_k}\left[\sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m(s_j)\cdot(a^i)_m\right] = \sum_{m=1}^{M_e}\left(\frac{\partial \varphi_m(s_j)}{\partial s_k}\cdot(a^i)_m\right). \qquad (Д1.19)$$

Вирази для похідних $\dfrac{\partial \varphi_m(s_j)}{\partial s_k}$ легко виводяться (в явному вигляді) з виразів для базисних функцій СЕ $\varphi_m(s_j)$. Компоненти χ_{ij} матриці $\left([J]^T\right)^{-1}$ після цього обчислюються за формулами ($d = \det[J]$ – детермінант матриці Якобі):

$$\chi_{11} = \left(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}\right)/d; \quad \chi_{12} = \left(-J_{21}J_{33} + J_{23}J_{31}\right)/d;$$
$$\chi_{13} = \left(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}\right)/d; \quad \chi_{21} = \left(-J_{12}J_{33} + J_{13}J_{32}\right)/d;$$
$$\chi_{22} = \left(J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}\right)/d; \quad \chi_{23} = \left(-J_{11}J_{32} + J_{12}J_{31}\right)/d;$$
$$\chi_{31} = \left(J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}\right)/d; \quad \chi_{32} = \left(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21}\right)/d;$$
$$\chi_{33} = \left(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}\right)/d. \qquad (Д1.20)$$

У двовимірному випадку:

$$\chi_{11} = J_{22}/d; \quad \chi_{12} = -J_{21}/d; \quad \chi_{21} = -J_{12}/d; \quad \chi_{22} = J_{11}/d, \qquad (Д1.21)$$

а в одновимірному $\chi_{11} = 1/J_{11}$.

При оберненні матриці Якобі необхідно стежити, щоб вона не була виродженою ($d \le 0$). Це може трапитися при значному викривленні форми СЕ в результаті його деформування.

У випадку застосування симплексної моделі СЕ (див. Розділ 20.2 книги [8]) компонентами матриці $[B]$ будуть постійні коефіцієнти з базисних функцій: $p_{1m} = \beta_m / 6\Delta^e$; $p_{2m} = \gamma_m / 6\Delta^e$; $p_{3m} = \lambda_m / 6\Delta^e$ при $m = 1,2,3,4$ – для тривимірного; $p_{1m} = \beta_m / 2\Delta^e$; $p_{2m} = \gamma_m / 2\Delta^e$ при $m = 1,2,3$ – для двовимірного; $p_{11} = -(1/s)$; $p_{21} = 1/s = -p_{11}$ – для одновимірного.

Додаток 2

ПІДІНТЕГРАЛЬНІ ФУНКЦІЇ В СЕ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

У МСЕ підінтегральні функцій – це компоненти матриць і векторів, отримані операціями з матрицями, векторами та скалярами.

Глобальна матриця жорсткості САР будується в результаті збирання матриць жорсткості СЕ, одержаних інтегруванням по об'єму СЕ (див., наприклад, формулу (6.43)). В ній під інтегралом стоять компоненти матриці $[K^e]_0 = [\tilde{B}]^T[\underset{\sim}{D}][\tilde{B}]$ розмірністю $LM_e \times LM_e$, де L – розмірність задачі (одно-, дво- або тривимірна). Якщо деформації вважаються малими, то вираз змінюється на $[K^e] = [B]^T[D][B]$.

В тривимірному випадку використовується повні співвідношення для тензора деформацій $\varepsilon_{ij} = 0.5(\partial u_j / \partial x^i + \partial u_i / \partial x^j)$ або $\in_{ij} = 0.5(X_{mi}X_{mj} - \delta_{ij})$. Інша ситуація для одно- та двовимірних СЕ, оскільки вони зазвичай моделюють об'єкти з використанням додаткових моделей, які враховують специфіку одно- та двовимірних об'єктів.

Д2.1. Тривимірні СЕ

Якщо матеріал – ізотропний (матриця модулів пружності $[D]$ відповідає виразу (Д1.15)), то типова підматриця $[K^e]$, пов'язана з вузлами номер m та n, остаточно має такі компоненти:

$$[K^e]_{mn} = 2G(\theta)\cdot\begin{bmatrix} ap_{1m}p_{1n} + c(p_{2m}p_{2n} + p_{3m}p_{3n})\;; & bp_{1m}p_{2n} + cp_{2m}p_{1n}\;; & bp_{1m}p_{3n} + cp_{3m}p_{1n} \\ bp_{2m}p_{1n} + cp_{1m}p_{2n}\;; & ap_{2m}p_{2n} + c(p_{1m}p_{1n} + p_{3m}p_{3n})\;; & bp_{2m}p_{3n} + cp_{3m}p_{2n} \\ bp_{3m}p_{1n} + cp_{1m}p_{3n}\;; & bp_{3m}p_{2n} + cp_{2m}p_{3n}\;; & ap_{3m}p_{3n} + c(p_{2m}p_{2n} + p_{1m}p_{1n}) \end{bmatrix}, \qquad (Д2.1)$$

де $G(\theta)$ – модуль зсуву; $a = (1-\mu)/(1-2\mu)$; $b = \mu/(1-2\mu)$; $\mu = \mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона; $c = 0.5$.

Для циліндричній системі координат (ЦСК) в (Д2.1) замість p_{2m} використовується $\tilde{p}_{2m}$; крім того, додаються компоненти:

$$[\tilde{K}^e]_{mn_{ЦСК}} = 2G(\theta)\cdot\begin{bmatrix} bp_{1m}\Psi_n + \Psi_m(bp_{1n} + a\Psi_n)\;; & a\Psi_m\tilde{p}_{2n} - c\tilde{p}_{2m}\Psi_n\;; & b\Psi_m p_{3n} \\ a\tilde{p}_{2m}\Psi_n - c\Psi_m\tilde{p}_{2n}\;; & c(-p_{1m}\Psi_n - \Psi_m p_{1n} + \Psi_m\Psi_n)\;; & 0 \\ bp_{3m}\Psi_n\;; & 0\;; & 0 \end{bmatrix}, \qquad (Д2.2)$$

де $\widetilde{p}_{2m} = p_{2m} / \rho$, а $\Psi_m = \varphi_m^e / \rho$.

Оскільки матриця $[D]$ – симетрична, то і конгруентна їй матриця $[K^e]$ теж симетрична, що зумовлює і симетричність глобальної матриці САР.

Існує декілька прикладів підінтегральних векторів. Всі вони мають розмірність $LM_e \times 1$. Характерні вектори: $\{P^e\} = [\phi]^T \{\widehat{O}\}$, $\{p^e\} = [\varphi]^T \{\widehat{p}\}$, $\{\Delta R^e\}_\theta = [B]^T [D] \{\varepsilon^\theta\}$.

Так, наприклад, типовий підвектор вектора $\{\Delta R^e\}_\theta$ в тривимірній ДСК при матриці модулів пружності $[D]$, яка відповідає (Д1.15), має остаточний вигляд

$$\{\Delta R_m^e\}_\theta = 2G(\theta) \cdot (a + 2b)\overline{\alpha}_\theta \Delta \widehat{\theta} \begin{Bmatrix} p_{1m} \\ p_{2m} \\ p_{3m} \end{Bmatrix}. \qquad (Д2.3)$$

Тут загалом є 8 арифметичних операцій: 7 множення і одна операція додавання, в той час як в повному варіанті їх 105, тобто значно більше.

Д2.2. Двовимірні СЕ

Застосовують декілька різновидів двовимірних СЕ: панель зсуву (Shear Panel), мембранний (Membrane), тільки згинальний (Bending Only), пластина (Plate), шарувата пластина або композит (Laminate), плоска деформація (Plane Strain), осесиметрична оболонка (Axisymmetric Shell). З них у табл.Д2.1 розглянуто СЕ, що моделює плоску деформацію (Plane Strain), а також зсувні (Shear Panel) та мембранні (Membrane) деформації/напруження як окремі випадки плоского напруженого стану.

Двовимірний трикутний або чотирикутний СЕ типу пластина (Plate) повинен моделювати всі типи деформацій: як в площині СЕ (зсувні, мембранні); так й згинальні. Обов’язковий параметр, який потрібно вводити, – товщина СЕ. Кожен вузол СЕ типу Plate має по шість ступенів свободи, тому, наприклад, у чотирикутному СЕ з 4-ма вузлами (СЕ першого порядку наближення) вектор вузлових "переміщень"

$$\{q\}_e = \left\{ \{q_1; q_2; q_3; \vartheta_1; \vartheta_2; \vartheta_3\}_1;\ \ldots; \{q_1; q_2; q_3; \vartheta_1; \vartheta_2; \vartheta_3\}_4 \right\}_e^T = \left\{ q_1; q_2; \ldots\ q_{24} \right\}_e^T, \qquad (Д2.4)$$

причому в останньому векторі q_m, $m = 1, 2, ..., 24$ – ті самі вузлові переміщення та повороти, але з наскрізною у СЕ нумерацією.

Загальної теорії СЕ типу Plate не існує, оскільки немає загальної теорії пластин та оболонок. Є моделі СЕ, що відповідають окремим випадкам. Більш того, майже до всіх відомих моделей СЕ типів Plate та Shell є претензії: несумісність, залежність розв’язків від жорстких зміщень/поворотів, інші. Додамо, що альтернативою моделей конструкцій із СЕ типів Plate та Shell є моделі з тривимірними СЕ. Зокрема, лише один на всю товщину гексагональний СЕ 1-го порядку наближення фактично відповідає моделі оболонки типу Кірхгофа-Лява, оскільки дає лінійний характер зміни переміщень по товщині (в напрямку нормалі до середньої поверхні оболонки).

Для поглибленого вивчення проблем СЕ типів Plate та Shell можна рекомендувати книгу [5].

Д2.3. Одновимірні СЕ

Є декілька різновидів одновимірних СЕ: стрижень (Rod, Tube), криволінійний стрижень (Curved Tube), балка (Bar, Beam), криволінійна балка (Curved Beam), жорсткий зв'язок (Link), пружно-демпфуючий стрижень (Spring/Damper, DOF Spring), зазор (Gap). Кожен вузол таких СЕ має по шість ступенів свободи. В таблиці Д1.1 ці СЕ не розглянуто.

Одновимірний СЕ типу Beam (або Bar) повинен одночасно моделювати розтяг-стиск, кручення й згин. Обов'язкові параметри, що потрібно вводити – геометричні характеристики перетину стрижня або балки, що моделюється. Але загальна теорія СЕ типу Beam відсутня. Розроблено не менш десяти моделей СЕ типу Bar та Beam, зокрема й такі, що враховують депланацію перетину. Цьому питанню можна присвятити книгу чималого об'єму.

У випадку складної геометрії балки та властивостей її матеріалу часто використовують такий підхід: проводять апроксимацію елементу балки тривимірними СЕ у вигляді пентаедра та/або гексаедра, витягнутими вздовж балки (тобто перетин балки апроксимується незначною кількістю трикутних та/або чотирикутних поверхонь основ тривимірних СЕ). Потім проводиться "конденсування" внутрішніх ступенів свобод, тобто застосування суперелементної техніки. Це дозволяє врахувати не тільки складну форму перетину, а й неоднорідність матеріалу (шаруватість, металеву арматуру в бетоні, інше), а також не застосовувати додаткові припущення про поведінку балочного СЕ. Але часто балки мають відносно просту геометрію перетину, однорідний матеріал та невеликі пружні деформації. Для них розроблено спрощені моделі СЕ.

Додаток 3

ІНТЕГРУВАННЯ ТА ДЕЯКІ ІНШІ РОЗРАХУНКИ У СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТАХ

Ідеологія МСЕ призводить до необхідності обчислювати об'ємні та поверхневі інтеграли. Для деяких типів СЕ це вдається зробити *аналітично* (точно), зокрема, для симплексних СЕ. Але в більшості випадків точне інтегрування є неможливим. Застосовують *чисельне* інтегрування. Цій проблемі був присвячений Розділ 10 книги [8]. Перевагу віддають застосуванню квадратур Гаусса-Лежандра, тобто методу з підвищеною точністю інтегрування.

Д3.1. Точне інтегрування у СЕ

У випадку застосування симплексної моделі СЕ (див. Розділ 20.2 книги [8]) компоненти матриці диференціювання $[B]$ будуть постійними величинами. Якщо й інші компоненти підінтегрального виразу не будуть залежати від координат, то їх можна винести за межі інтеграла. Тоді, наприклад, інтеграл для матриці жорсткості СЕ буде обчисленим як

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega = [B]^T [D][B] \int_{\Omega^e} d\Omega = [B]^T [D][B] \cdot \Omega^e . \qquad (Д3.1)$$

В залежності від розмірності симплексного СЕ, його об'єм Ω^e буде дорівнювати (величини t, s, A в кожному СЕ можуть мати оригінальні значення):

- Δ^e – згідно з формулою (20.23) книги [8]) у тривимірному випадку;
- $\Delta^e t$, де Δ^e відповідає формулі (20.17) книги [8]; t – товщина двовимірного СЕ;
- sA, де s є довжиною СЕ згідно з формулою (20.10) книги [8]; A – площа перетину одновимірного СЕ.

Д3.2. Чисельне інтегрування у СЕ

Перехід від інтеграла до алгебраїчного виразу в методі чисельного інтегрування Гаусса-Лежандра відбувається у два етапи: спочатку проводиться відображення підінтегрального виразу на локальні координати, після цього використовується одна з квадратурних формул Гаусса-Лежандра.

Отже, будь-який об'ємний інтеграл в СЕ можна записати як

$$\int_{\Omega^e} f(x^1, x^2, x^3) d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r_1, r_2, r_3) \det[J] dr_1 dr_2 dr_3 \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k} c_i\, c_j\, c_k\, f(r_1^{(i)},\, r_2^{(j)}, r_3^{(k)})\, \det[J]^{(i,j,k)}\,. \qquad (\text{Д3.2})$$

В циліндричній системі координат ще необхідно помножити $\det[J]^{(i,j,k)}$ на поточний радіус $\rho^{(i,j,k)}$.

Інтеграл по поверхні (при значенні локальної координати $s_3 = \mp 1$):

$$\int_{S^e} f(x^1, x^2, x^3)dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r_1, r_2, \mp 1)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\cdot dr_1\, dr_2 \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j} c_i\, c_j\, f(r_1^{(i)}, r_2^{(j)}, \mp 1)\sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}^{\,(i,j)}\,, \qquad (\text{Д3.3})$$

де компоненти метричного тензора

$$(g_{ij})_{ДСК} = \sum_{m=1}^{3} J_{im}J_{jm}\,; \quad (g_{ij})_{ЦСК} = J_{i1}J_{j1} + \rho J_{i2}J_{j2} + J_{i3}J_{j3}\,. \qquad (\text{Д3.4})$$

Для інших поверхонь необхідно відповідно змінити місцями індекси.

У формулах (Д3.2) і (Д3.3) N_j – кількість точок інтегрування на відрізках $-1 \le r_j \le 1$. Можна застосувати одну, дві, три і більше точок. При одній точці інтегрування $r^{(1)} = 0$ і $c_1 = 2$; при двох: $r^{(2)} = -r^{(1)} = \sqrt{1/3}$ і $c_1 = c_2 = 1$; при трьох: $r^{(3)} = -r^{(1)} = \sqrt{3/5}$, $r^{(2)} = 0$ і $c_1 = c_3 = 5/9$, $c_2 = 8/9$ (див. Розділ 10.5.2, табл.10.4 книги [8]).

Чим більше точок інтегрування, тим вище точність наближення інтеграла. Але при цьому зростають витрати часу на обчислення. Доказано, що при інтегруванні за формулою (Д3.2) мінімально достатня кількість точок інтегрування є такою, коли об’єм обчислюється точно, тобто $\int_{\Omega^e} d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det[J]dr_1dr_2dr_3 = \; = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k} c_i\, c_j\, c_k\, \det[J]^{(i,j,k)}$. В ізопараметричних СЕ першого порядку наближення мінімально достатньо однієї точки інтегрування по локальній координаті, в СЕ другого порядку наближення – двох. Але в практичних розрахунках рекомендують використовувати на одну точку більше, оскільки підінтегральні функції обчислюються наближено.

Наприклад, у тривимірному ізопараметричному СЕ серендипового сімейства 2-го порядку наближення (має 20 вузлів) об’ємні інтеграли зазвичай обчислюються за схемою $2\times2\times2$, а поверхневі – 3×3. Але виявилося, що навіть при застосуванні схеми $2\times2\times2$ прямі методи розв’язування СЛАР можуть виявити майже нуль на діагоналі, тобто матриця СЛАР буде признана виродженою. Оскільки метод спряжених градієнтів успішно розв’язує таку СЛАР, то йдеться про фактичну погану обумовленість матриці цієї СЛАР. Ітераційні методи в меншій мірі накопичують похибки обчислень, ніж прямі, тому перші розв’язують таку СЛАР, а другі – не завжди. Вихід є: застосовувати схему $3\times3\times3$.

Отже, щоб зібрати систему алгебраїчних рівнянь, потрібно провести інтегрування у всіх СЕ, після чого додати отримані значення до глобальної системи. Це величезний обсяг обчислювальної роботі. Покажемо характерну схему інтегрування та збирання матриці жорсткості СЕ:

Початок циклу по СЕ
  Початок циклу по точках інтегрування вздовж s_1
    Початок циклу по точках інтегрування вздовж s_2
      Початок циклу по точках інтегрування вздовж s_3
      Для вибраної в такий спосіб точки СЕ:
        Обчислення компонент матриці $[D]$;
        Початок циклу по вузлах СЕ m
          – обчислення компонент матриці $[B]_m$;
          Початок циклу по вузлах СЕ n
            – обчислення компонент матриці $[B]_n$;
            – перемноження матриць: $[B]_m^T[D][B]_n$;
            – обчислення вкладу в значення інтеграла.
          Кінець циклу по вузлах СЕ n
        Кінець циклу по вузлах СЕ m
      Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_3
    Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_2
  Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_1
  Додавання компонент матриці СЕ до компонент глобальної матриці
Кінець циклу по СЕ

Оскільки матриці, що беруть участь в підінтегральних виразах, заповнені слабко і частіше величинами, що повторюються, то проводиться багато дій з множенням на нуль або просто таких, що повторюються. Крім того, їх глибоко вкладено в декілька циклів, тобто вони повторюються багаторазово. Можна отримати суттєвий виграш у часі (в десятки та сотні разів), якщо програмувати не матрично-векторні перемноження, а результати цих дій.

Д3.3. Обчислення величин, похідних від компонент тензора напружень

Нагадаємо, що після отримання розв'язку глобальної системи алгебраїчних рівнянь отримується вектор вузлових переміщень $\{q\}$. Потім в кожній актуальній точці СЕ застосовуються формули (Д1.5) – знаходиться вектор деформацій. Потім застосовуються фізичні рівняння та знаходиться вектор напружень. Це вектор введений виразом (Д1.7), а саме як

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}^T . \qquad \text{(Д3.5)}$$

Для аналізу напружено-деформованого стану тіла з точки зору оцінки його міцності використовують декілька величин, похідних від компонент тензора напружень. Випишемо ці формули. Інтенсивність напружень:

$$\sigma_u = \sqrt{0.5\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]+3\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2\right)}\,. \qquad (Д3.6)$$

Об'ємне (середнє, октаедричне) напруження:

$$\sigma_V = (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3\,. \qquad (Д3.7)$$

Перші три компоненти вектора девіатора напружень

$$S_1=\sigma_{11}-\sigma_V\,;\quad S_2=\sigma_{22}-\sigma_V\,;\quad S_3=\sigma_{33}-\sigma_V\,. \qquad (Д3.8)$$

Третій інваріант девіатора напружень:

$$I_3(D_\sigma)=S_1S_2S_3-S_1\tau_{23}^2-S_2\tau_{31}^2-S_3\tau_{12}^2+2\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}\,. \qquad (Д3.9)$$

Головні напруження $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$:

$$\begin{gathered}\sigma_1=\sigma_V+(2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma)\,;\\ \sigma_2=\sigma_V+(2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma+4\pi/3)\,;\\ \sigma_3=\sigma_V+(2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma+2\pi/3)\,,\end{gathered} \qquad (Д3.10)$$

де кут виду напруженого стану

$$\psi_\sigma = arc\cos(q)/3\,. \qquad (Д3.11)$$

а для обчислення величини q застосовується така процедура: якщо $\sigma_u<\delta$, де δ є малим числом, наприклад, $\delta=10^{-10}$, то $q=1$. Інакше застосовується стандартний вираз:

$$q=27I_3(D_\sigma)/(2\sigma_u^3)\,. \qquad (Д3.12)$$

Якщо в результаті обчислень одержали $q>1$, то призначається $q=1$, а якщо $q<-1$, то приймається $q=-1$. Тим самим забезпечується умова $|q|\le 1$, необхідна для вірного обчислення $arc\cos(q)$.

Параметр Надаї-Лоде для тензора напружень:

$$\chi_\sigma = 2(\sigma_2-\sigma_3)/q-1\,, \qquad (Д3.13)$$

але при $q\approx 0$ призначається якесь велике значення для χ_σ, наприклад $\chi_\sigma=10^{20}$.

Максимальні дотичні напруження:

$$\tau_{\max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2\,. \qquad (Д3.14)$$

Параметр жорсткості напруженого стану:

$$k_\sigma = 3\sigma_V/\sigma_u\,, \qquad (Д3.15)$$

але при $\sigma_u\approx 0$ призначається якесь велике значення для k_σ, наприклад $k_\sigma=10^{20}$.

Ще є сенс дуже малі значення компонент вектора напружень прирівнювати нулю, у якості критерію їх малості застосовуючи, наприклад, величину $\delta=\sigma_u/1000$, тобто точність у 0.1% порівняно з інтенсивністю напружень.

Д3.4. "Лінеаризація" компонент тензора напружень

В деяких галузях промисловості, при оцінці міцності елементів устаткування застосовують значення "лінеаризованих" компонент тензора напружень (див. рис.Д3.1): "мембранних" (медіанних, середніх) σ^m, "згінних" (лінійних) σ^b та "пікових" (нелінійних) σ^p. Ці значення обчислюють не в точці, а для деякого шляху від точки до точки в перетині. Зазвичай це робиться для тонкостінних елементів устаткування при наявності тиску як основного фактора навантажень. Значення "лінеаризованих" компонент напружень обчислюються за формулами (для кожної компоненти):

$$\sigma^m = \frac{1}{t}\int_{-t/2}^{t/2}\sigma ds\,;\quad \sigma^b = \sigma_1^b \cdot (2s/t)\text{, де }\ \sigma_1^b = \frac{6}{t^2}\int_{-t/2}^{t/2}\sigma s ds\,;\quad \sigma^p = \sigma - (\sigma^m + \sigma^b)\,. \quad (Д3.16)$$

Тут σ – актуальна компонента тензора напруження; t – товщина перетину (довжина шляху лінеаризації). Перші дві формули є слідством з формул опору матеріалів: $\sigma^m = P/A$ та $\sigma_1^b = \sigma_{\max} = M/W$, причому для прямокутного перетину одиничної товщини ($b=1$) площа перетину $A = bt = t$; а момент опору перетину $W = bt^2/6 = t^2/6$.

Силові фактори $P = \int_{-t/2}^{t/2}\sigma ds$ та $M = \int_{-t/2}^{t/2}\sigma s ds$.

Оскільки інтегрування можна провести тільки чисельно, то обчислення σ^m робиться з використанням загальної формули трапецій (10.27) з книги [8], яка має 3-й порядок точності, що задовольняє. Формула буде мати наступний вигляд:

$$\sigma^m \approx \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_n}{2} + \sum_{k=2}^{n-1}\sigma_k\right), \quad (Д3.17)$$

де: σ_1 та σ_n – значення напружень в точках початку та кінця шляху відповідно; n – кількість точок на шляху (зазвичай використовують непарну кількість з декількох десятків точок).

Оскільки в другому інтегралі (Д3.16) підінтегральна функція має не менш як квадратичну залежність від параметра інтегрування, то його чисельне інтегрування проводиться за загальною формулою Сімпсона (10.29) з книги [8], яка має 5-й порядок точності (обов'язкова непарна кількість точок на шляху). Отже, згінні (лінійні) σ^b напруження в точці початку шляху розраховуються як:

$$\sigma_1^b \approx \frac{2}{(n-1)t}\left[\sigma_1 s_1 + 4(\sigma_2 s_2 + \sigma_4 s_4 + ...) + 2(\sigma_3 s_3 + \sigma_5 s_5 + ...) + \sigma_n s_n\right]. \quad (Д3.18)$$

В цій формулі координати точок по шляху s_k відраховуються від його центра. В точці кінця шляху напруження згину має протилежний знак: $\sigma_n^b = -\sigma_1^b$.

Значення "пікових" напружень розраховуються як різність між повними напруженнями та сумою мембранних та згінних напружень (див. останню формулу (Д3.16)).

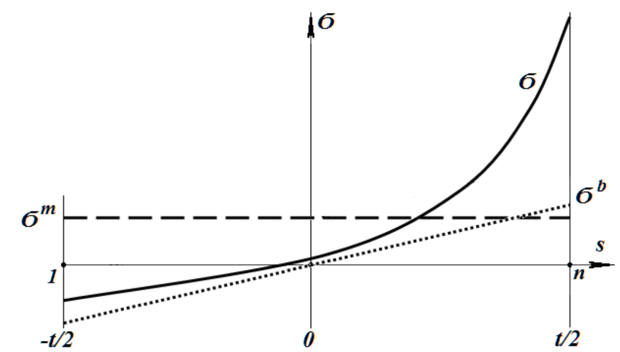


Рис.Д3.1. Схема "лінеаризації" компонент тензора напружень

Д3.5. Про врахування умов повної циклічної симетрії крайової задачі

Є клас крайових задач, що мають повну циклічну симетрію. Під повною циклічною симетрією розуміють сукупність геометричної і силової циклічної симетрій задачі.

Циклічною симетрією (циклічністю) називається циклічна повторюваність вздовж однієї з глобальних координат. Наприклад, зубчасте колесо і диск турбіни мають *геометричну осьову* (поворотну) циклічність: їх геометрія повторюється через кутову координату $\vartheta = 2\pi / Z$, де Z – кількість зубів колеса або лопаток на диску турбіни. Але на всьому зубчастому колесі в конкретний момент навантажено один чи два зуба, тобто немає осьової циклічності навантаження, а значить і немає повної осьової циклічної симетрії задачі. Всі лопатки диска турбіни, навпаки, знаходяться під впливом *теоретично* рівного термосилового навантаження, тому є також і *термосилова* циклічність, а це означає, що є і *повна осьова циклічна симетрія* задачі (на практиці повної ідентичності немає. Зокрема, в авіаційних двигунах допускаються розбіжності у власних частотах коливань лопаток до 5%, у стаціонарних турбінах – навіть до 20%. Більш того, виявлено, що при повній ідентичності сусідніх лопаток значно зростає ймовірність флатера (резонансних автоколивань), обумовлених аеродинамічним збудженням).

Якщо задача характеризується наявністю повної циклічної симетрії, то природно її використати. Для цього одна циклічно симетрична частина тіла "вирізається" з двох сторін поверхнями, рівняння яких співпадають з точністю до кроку циклу. Це може бути площина, криволінійна поверхня або сукупність площин і (або) криволінійних поверхонь. Для усіх пар точок цих поверхонь, що відрізняються тільки однією координатою на величину кроку циклічної симетрії (назвемо їх "парою циклічної симетрії"), характерна рівність будь-яких можливих фізичних величин: температур, переміщень, деформацій, напружень тощо. Цей факт необхідно врахувати в граничних умовах, що вводяться в СЛАР тіла. При побудові геометричної скінченно-елементної моделі тіла з повною циклічною симетрією слід "вирізати" циклічно симетричну частину тіла поверхнями з зазначеною вище властивістю циклічності, після цього створити скінченно-елементну сітку тіла так, щоб на цих поверхнях були тільки вузлові "пари циклічної симетрії" скінченно-елементної сітки, координати яких відрізнялися б лише на крок циклічної симетрії (в прикладі з диском турбіни – лише за кутовою координатою на кут ϑ).

При моделюванні крайової задачі теплопровідності методом скінченних елементів (МСЕ) природно прирівняти вузлові значення температур в кожній вузловій "парі циклічної симетрії". При моделюванні крайової задачі про визначення НДС тіла МСЕ в переміщеннях природно прирівняти переміщення (або їхні прирощення) в кожній вузловій "парі циклічної симетрії". В обох випадках розмір одержуваної СЛАР зменшиться за рахунок цього прирівнювання.

Список літератури

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. В.В. Кобелева и А.П. Сейраняна под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.
3. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 261 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
5. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.П. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
6. Новожилов В.В. Теория упругости. – М.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
7. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Пер. с англ. А.М. Васильева; Под ред. Э.И. Григолюка – М.: Мир, 1976. – 464 с.
8. Рудаков К.М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: Навч. посібник. – К.: НТУУ "КПІ", 2007. – 379 с.
9. Рудаков, К.М. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 5. Термопружність / К.М. Рудаков, А.І. Яковлєв // Вісн. Нац. техн. ун-та України "Київ. політехн. ін-т": серія "Машинобудування", 2015. – №1(73). – С. 43–51.
10. Рудаков, К.М. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 6. Термопружно-пластичний аналіз, формулювання Total Lagrangian / К.М. Рудаков // Вісн. Нац. техн. ун-та України "Київ. політехн. ін-т": серія "Машинобудування", 2015. – №3(75). – С. 14–24.
11. Рудаков, К.М. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 7. Чотири типи деформацій, формулювання Total Lagrangian / К.М. Рудаков // Вісн. Нац. техн. ун-та України "Київ. політехн. ін-т": серія "Машинобудування", 2016. – №1(76). – С. 95–106.
12. Bathe Klaus-Jürgen. Finite Element Procedures. Second Edition – Prentice Hall, 2014. – 1043 p.
13. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1. Essentials. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 345 p.
14. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2. Advanced Topic. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 494 p.
15. Doltsinis I. Large Deformation Processes of Solids: From Fundamentals to Numerical Simulation and Engineering Applications. – Southampton, Boston: WITpress, 2004. – 475 p.
16. Ogden R.W. Non-Linear Elastic Deformations. – Mineola, New-York: Dover Publications, 1997. – 532 p.

Іменний покажчик

Предметний покажчик

Термін: №№ сторінок

Термін: №№ сторінок