УДК 519.8

Н.В. Семенова, Л.М. Колєчкіна,
А.М. Нагірна

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ КРИТЕРІЇВ НА КОМБІНАТОРНІЙ МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Вступ

У складних ситуаціях прийняття рішень вибір найкращої в деякому розумінні альтернативи з множини можливих альтернатив відбувається із врахуванням багатьох критеріїв. Різним аспектам теорії векторної оптимізації присвячені праці багатьох учених [1–8]. Зокрема, великий інтерес становлять задачі багатокритеріальної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв, оскільки вони моделюють відносні показники якості [9, 10]. Дослідження таких задач є актуальними, адже дробово-лінійні функції мають широкий діапазон застосувань у задачах оптимізації деяких відносних показників якості, таких, як собівартість, рентабельність, продуктивність, трудомісткість тощо. Моделі, що використовують такі критерії, відображають тенденції постійного зниження рівня собівартості з розрахунку на одиницю продукції і підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва.

Як відомо, задачі комбінаторної оптимізації, в тому числі багатокритеріальні, можуть бути зведені до задач цілочислового програмування, однак це не завжди виправдано, оскільки при цьому втрачається можливість врахування комбінаторних властивостей задачі, отже, доцільною є розробка нових підходів для розв'язування задач комбінаторного типу на основі дослідження властивостей їх допустимих областей.

Постановка задачі

У даній статті розглядаються багатокритеріальні задачі оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині розміщень. При цьому враховується, що опуклою оболонкою множини розміщень є загальний многогранник розміщень, множиною вершин якого є підмножина розміщень [11]. Властивості многогранника розміщень дають можливість звести розв'язування багатокритеріальної задачі на дискретній комбінаторній множині до задачі з неперервною допустимою множиною.

На підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними комбінаторними задачами і оптимізаційними задачами на неперервних допустимих множинах з'явилась можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язування векторних задач на комбінаторних множинах та розвивати нові оригінальні підходи, використовуючи властивості різних комбінаторних множин та їх опуклих оболонок [4–8].

Основні означення

Розглядаються задачі векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв такого вигляду:

$$Z(\Phi, A(B)) : \min\{\Phi(b) \mid b \in A(B)\},$$

які полягають у мінімізації векторного критерію $\Phi(b)$ на евклідовій множині розміщень. Тут $\Phi(b) = (\Phi_1(b), \ldots, \Phi_l(b))$ – векторний критерій, заданий на множині $A(B)$ розміщень, породжуваних деякою скінченною мультимножиною $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$.

Впорядковану n-вибірку $(n \le q)$ з елементів множини B називають n-розміщенням.

Розглянемо основні властивості множини розміщень $A(B)$ [11] як області допустимих розв'язків задачі $Z(\Phi, A(B))$. Кожен елемент множини $A(B)$ є упорядкованим набором n дійсних чисел. Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини B за неспаданням в такий спосіб: $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_q$. Тоді опуклою оболонкою загальної множини розміщень $A(B)$ є загальний многогранник розміщень $M = \operatorname{conv} A(B)$:

$$M = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{|\omega|} b_j \le \sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} b_{q-j+1} \quad \forall \omega \subset N_n = \{1, \ldots, n\} \right\},$$

$$\operatorname{vert} M \subset A(B).$$

При відображенні множини $A(B)$ в евклідів простір R^n сформулюємо задачу $Z(F, X)$

максимізації векторного критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $b \in A(B)$ поставимо у відповідність точку $x \in X$, таку, що $F(x) = F(b)$:

$$Z(F, X) : \min\{F(x) | x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$; $f_i : R^n \to R^1$;

$$f_i(x) = \frac{\langle c^i, x\rangle + c_0^i}{\langle d^i, x\rangle + d_0^i}, \quad i \in N_l = \{1, ..., l\}; \qquad (1)$$

$c^i \in R^n$; $d^i \in R^n$; $c_0^i \in R$; $d_0^i \in R$; X – непорожня множина в R^n, що визначається таким чином: $\operatorname{vert} M \subseteq X \subset M$, $M = \operatorname{conv} A(B)$.

Задача $Z(F, X)$ може містити також лінійні обмеження, що утворюють многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду $D = \{x \in R^n | Tx \le d\}$, де $d \in R^m$; $T \in R^{m \times n}$. Таким чином, допустима множина матиме вигляд

$$\operatorname{vert} M \cap D \subseteq X \subset M \cap D.$$

Під розв'язанням задачі $Z(F, X)$ будемо розуміти знаходження елементів таких множин: $P(F, X)$ – ефективних (парето-оптимальних) розв'язків, $\operatorname{Sl}(F, X)$ – напівефективних (за Слейтером) розв'язків, $\operatorname{Sm}(F, X)$ – строго ефективних (за Смейлом) розв'язків.

Для будь-якого $x \in X$ справедливі співвідношення

$$x \in \operatorname{Sl}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) < F(x)\} = \varnothing, \qquad (2)$$

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{y \in X | F(y) \le F(x),\ F(y) \ne F(x)\} = \varnothing, \qquad (3)$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X | y \ne x,\ F(y) \le F(x)\} = \varnothing. \qquad (4)$$

З означень випливає, що

$$\operatorname{Sm}(F, X) \subset P(F, X) \subset \operatorname{Sl}(F, X). \qquad (5)$$

Оскільки допустима область X обмежена, то множина $P(F, X)$ непорожня і зовні стійка [1].

Властивості дробово-лінійних функцій

Дробово-лінійна функція не є ні вгнутою, ні опуклою. Однак поверхні рівня кожної з функцій $f_i(x)$, $i \in N_l$, тобто множини

$$L_b^i = \{x \in R^n | \langle c^i, x\rangle + c_0^i / \langle d^i, x\rangle + d_0^i = b\},\ i \in N_l,$$

є гіперплощинами.

В [12, 13] доведено, що будь-який локальний мінімум задачі дробово-лінійного програмування є в той же час глобальним, і якщо оптимальний розв'язок скінченний, то існує крайня точка многогранника $G = M \cap D$, яка є оптимальною. Це твердження виконується, якщо чисельник і знаменник дробово-лінійної функції не перетворюються одночасно в нуль для всіх $x \in X$. Нехай

$$\langle d^i, x\rangle + d_0^i > 0 \quad \forall x \in X, \forall i \in N_l. \qquad (6)$$

Оскільки така умова значно спрощує наступні доведення, то будемо вважати, що вона виконується.

Теорема 1. На будь-якому прямолінійному відрізку, що належить многограннику M, дробово-лінійна функція $f(x)$ змінюється монотонно.

Теорема 2. Дробово-лінійна функція $f(x)$ досягає мінімуму (максимуму) тільки у вершинах многогранника G. Якщо мінімум (максимум) досягається в кількох крайніх точках, то він досягається і на многограннику.

Спростимо вираз (1). Для цього збільшимо кількість компонент вектора x на одиницю

$$x = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \qquad (7)$$

і введемо додаткові обмеження $0 \le x_{n+1} \le 1$. Тепер функції вигляду (1) можна записати так:

$$f_i(x) = \langle c^i, x\rangle / \langle d^i, x\rangle,\ i \in N_l. \qquad (8)$$

Тут $c^i \in R^{n+1}$, $d^i \in R^{n+1}$ – розширені вектори (c^i, c_0^i), (d^i, d_0^i).

***Означення* 1**. Неперервна функція $f(x)$ є квазіопуклою функцією на опуклій множині G, якщо виконується будь-яка з таких еквівалентних умов:

а) множина $\{x \in R^{n+1} | f(x) \le q, x \in G\}$ опукла для всіх q;

б) $x_1, x_2 \in G$, $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1) \le f(x_1),\ 0 \le \lambda \le 1. \qquad (9)$$

***Означення* 2**. Функція $f(x)$ є строго квазіопуклою на множині G, якщо умова (9) виконується у вигляді строгої нерівності.

Теорема 3. Будь-який локальний мінімум строго квазіопуклої функції є глобальним.

Очевидно, що функція $f(x)$ є квазівгнутою на опуклій множині S, якщо функція $(-f(x))$ квазіопукла. Оскільки множина $\{x \in \in R^{n+1} \mid -\langle c^i, x\rangle / \langle d^i, x\rangle \le q, x \in S\}$ опукла для всіх значень q, то $f(x) = \langle c^i, x\rangle / \langle d^i, x\rangle$ є квазівгнутою функцією на множині G. Якщо зробити заміну $f_i(x)$ на $-f_i(x)$, то умову б) для неперервних квазівгнутих функцій можна записати в такому вигляді:

$$f_i(x_2) > f_i(x_1) \Rightarrow f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge f_i(x_1)$$

або

$$f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min[f_i(x_1), f_i(x_2)] \quad (10)$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in G$ і $0 \le \lambda \le 1$.

Для вгнутих і квазівгнутих функцій з точністю до зміни знаків зберігаються властивості опуклих і квазіопуклих функцій. Зокрема, будь-який локальний максимум вгнутої (строго квазівгнутої) функції є глобальним.

Особливості багатокритеріальної задачі з дробово-лінійними функціями критеріїв

Як відомо [9, 10], для розв'язування однокритеріальних задач з дробово-лінійною функцією цілі існує велика кількість методів, які умовно розділяються на методи лінеаризації, параметричні методи, модифікації симплекс-методів, серед яких відомими є метод Чарнса і Купера, алгоритм Гілморі і Гоморі та ін. Що стосується розробки методів для розв'язування задач багатокритеріального дробово-лінійного програмування, то успіхи тут досить скромні. Єдиний опублікований алгоритм наведено в праці Корнблута і Штойєра [2]. Цей алгоритм знаходить всі слабоефективні вершини за умови, що множина допустимих розв'язків обмежена. Алгоритм знаходить і ефективні ребра, що проходять через точки розриву, а потім відсічні площини, що теж проходять через точки розриву. Таким чином, у модифікованій задачі точки розриву стають вершинами. Проте такі методи не враховують наявність комбінаторних умов дискретної допустимої множини, а тому не придатні для розв'язування вказаних класів задач. Отже, слід з'ясувати, за яких умов можна використати такий алгоритм на випадок багатокритеріальних задач дробово-лінійної оптимізації, що мають за допустиму множину комбінаторну множину розміщень.

Розглянемо задачу $Z(F_1, X)$, в якій критерії $f_i(x)$, $i \in N_l$, задані таким чином:

перший – у вигляді

$$f_1(x) = (\langle c^1, x\rangle + c_0^1) / (\langle d^1, x\rangle + d_0^1);$$

всі інші – у вигляді

$$f_i(x) = \langle c^i, x\rangle + c_0^i,$$

тобто

$$\langle d^i, x\rangle + d_0^i = 1 \ \ \forall i \in N_l \backslash \{1\}.$$

Виконаємо заміну змінних: $y_0 = \langle d^1, x\rangle + + d_0^1$, $y_i = x_i y_0$, $y_0 > 0$, і розглянемо таку векторну задачу:

$$Z(F_2, Y): \min\{F_2(y, y_0) \mid y \in Y\},$$

де $F_2(y, y_0) = (f_1(y, y_0), ..., f_l(y, y_0))$; $f_i(y, y_0) = = \langle c^i, y\rangle + \langle c_0^i, y_0\rangle$, $i \in N_l$, $c^i \in R^k$, $c_0^i \in R$.

Теорема 4. Якщо $\langle d^1, x^0\rangle + d_0^1 > 0$ і x^0 є ефективним розв'язком задачі $Z(F, X)$, а (y^*, y_0^*) – ефективним розв'язком задачі багатокритеріального лінійного програмування $Z(F_2, Y)$, то (y^*, y_0^*) – ефективний розв'язок векторної задачі $Z(F_1, X)$.

Д о в е д е н н я. Припустимо від супротивного, що (y^*, y_0^*) не є ефективним розв'язком цієї задачі. Тоді $\exists x^0 : f_i(x^0) \le f_i(y^*/y_0^*)$, тобто $\exists r \in N_l$, таке, що виконуються нерівності $f_r(x^0) < f_r(y^*/y_0^*)$ і $f_i(x^0) \le f_i(y^*/y_0^*), i \in N_l \backslash \{r\}$. Якщо $r = 1$, то маємо

$$\frac{\langle c^1, x\rangle + c_0^1}{\langle d^1, x\rangle + d_0^1} < \frac{\langle c^1, (y^*/y_0^*)\rangle + c_0^1}{\langle d^1, (y^*/y_0^*)\rangle + d_0^1}, \quad (11)$$

де $\langle c^i, x\rangle + c_0^i \le \langle c^i, (y^*/y_0^*)\rangle + c_0^i$, $i \in N_l \backslash \{1\}$.

Оскільки z і $\langle d^1, x\rangle + d_0^1$ мають однаковий знак, то знайдеться число θ, таке, що $\langle d^1, x\rangle + + d_0^1 = \theta z$. Розглянемо таку пару: $\bar{y} = \dfrac{x^0}{\theta}$, $\bar{y}_0 = \dfrac{1}{\theta}$, $\bar{y} \in R^n, \bar{y}_0 \in R$. Неважко перевірити, що $(\bar{y}, \bar{y}_0)$ – допустимий розв'язок задачі $Z(F_2, Y)$. Розділивши чисельник і знаменник лівої частини нерівності (11) на θ, отримаємо

$$(\langle c^1, \bar{y}\rangle + c_0^1 y_0)/z < (\langle c^1, y^*\rangle + c_0^1 y_0^*)/z,$$

що суперечить твердженню про ефективність розв'язку $(\bar{y}, \bar{y}_0)$. Випадок, коли $r \in N_l \setminus \{1\}$, доводиться аналогічно.

Дана теорема дає можливість отримати ефективні розв'язки задачі $Z(F_1, X)$ в результаті розв'язання багатокритеріальної лінійної задачі $Z(F_2, X)$ за умови, що знаменник першого критерію в ефективній точці є додатним. Якщо знаменник від'ємний, то, змінивши знаки (c^i, c_0^i) і (d^i, d_0^i) на протилежні,забезпечимо умови застосування теореми.

Після зведення задачі $Z(F, X)$ до векторної задачі $Z(F_2, Y)$ з лінійними критеріями можна використовувати достатні умови оптимальності зазначених видів ефективних розв'язків, справедливі $\forall\, y \in \operatorname{vert} M$, отримані в працях [3–5].

Розглянемо ряд теорем, які характеризують властивості розв'язків векторної комбінаторної задачі з дробово-лінійними функціями критеріїв.

Теорема 5. Справедливі співвідношення $\operatorname{Sl}(F, G) \cap \operatorname{vert} M \subset \operatorname{Sl}(F, X)$, $P(F, G) \cap \operatorname{vert} M \subset$ $\subset P(F, X)$, $\operatorname{Sm}(F, G) \cap \operatorname{vert} M \subset \operatorname{Sm}(F, X)$.

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert} M \cap D \subset G$, то $P(F, G) \cap \operatorname{vert} M \cap D \subset P(F, G \cap \operatorname{vert} M \cap D) \subseteq$ $\subseteq P(F, X)$.

Співвідношення $\operatorname{Sl}(F, X) \supseteq \operatorname{Sl}(F, \operatorname{vert} M \cap D) \supset$ $\supset \operatorname{Sl}(F, G) \cap \operatorname{vert} M \cap D$, $\operatorname{Sm}(F, X) \supseteq \operatorname{Sm}(F, D \cap$ $\cap \operatorname{vert} \Pi) \supset \operatorname{Sm}(F, G) \cap \operatorname{vert} \Pi$ доводяться аналогічно.

Теорема 6. Справедливі імплікації $\forall x \in$ $\in \operatorname{vert} M : x \in P(F, M) \cap D \Rightarrow x \in P(F, X)$, $x \in$ $\in \operatorname{Sl}(F, M) \cap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, X)$, $x \in \operatorname{Sm}(F, M) \cap$ $\cap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, X)$.

Доведення. Оскільки $G = M \cap D$, то справедливі імплікації

$$\forall x \in \operatorname{vert} M:$$

$$x \in P(F, M) \cap D \Rightarrow x \in P(F, M \cap D) =$$

$$= P(F, G) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sl}(F, M) \cap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sl}(F, X),$$

$$x \in \operatorname{Sm}(F, M) \cap D \Rightarrow x \in \operatorname{Sm}(F, X).$$

Теорема 7. Якщо множина G опукла, а всі функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, строго квазівгнуті, то виконується рівність

$$\operatorname{Sm}(F, G) = P(F, G) = \operatorname{Sl}(F, G). \qquad (12)$$

Доведення. Оскільки справедливе співвідношення (5), то доведемо включення $\operatorname{Sl}(F, G) \subset \operatorname{Sm}(F, G)$. Припустимо від супротивного, що $x \in \operatorname{Sl}(F, G)$, але $x \notin \operatorname{Sm}(F, G)$, тобто $\exists\, y \in G$: $y \neq x$ і $F(y) \leq F(x)$. Згідно зі строгою квазівгнутістю функцій $f_i(x)$, $i \in N_l$, критерію для будь-якої точки $z = \lambda x + (1-\lambda) y \in G$ виконуються нерівності $f_i(z) < f_i(x)$ $\forall i \in N_l$, а це суперечить тому, що $x \in \operatorname{Sl}(F, G)$.

Як відомо, дробово-лінійні функції є строго квазіопуклими на опуклій множині, тому для множини $\operatorname{Sl}(F, X)$ слабоефективних розв'язків задачі $Z(F, X)$ справедлива така теорема.

Теорема 8 [12]. Якщо функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерію є строго квазіопуклими і напівнеперервними знизу на лінійних відрізках X, то множина $\operatorname{Sl}(F, G)$ є об'єднанням ефективних множин $P(F, G)$ підзадач $Z_I(F, G)$, $I \subset N_l$, $I \neq \varnothing$, тобто

$$\operatorname{Sl}(F, G) = \cup \{P_I(F, G) : I \subset N_l, |I| \leq n+1\}.$$

Визначимо необхідні і достатні умови (ефективності) парето-оптимальності розв'язків задачі векторної оптимізації $Z(F, X)$. Для цього, скориставшись [13], введемо до розгляду лінійну задачу частково комбінаторної оптимізації

$$\min \{\langle g, y\rangle \,|\, -(P+Q)^T x + y + Q^T x^0 = 0,\ x \in X,$$

$$y \geq 0\}, \qquad (13)$$

де $P = (p_1, p_2, \ldots, p_l) \in R^{n \times l}$; $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_l) \in R^{n \times l}$; $p_i = (\langle d_i, x^0\rangle c_i - \langle c_i, x^0\rangle d_i) \in R^n$, $i \in N_l$; $q_i = (d_i^0 c_i -$ $- c_i^0 d_i) \in R^n$, $i \in N_l$, $y \in R^l$ та $g > 0$, $g \in R^l$.

Теорема 9. Точка $x^0 \in X$ є ефективним розв'язком векторної задачі $Z(F, X)$ на комбінаторній множині розміщень $A(B)$ тоді і тільки тоді, коли лінійна задача частково комбінаторної оптимізації вигляду (13) має оптимальний розв'язок (x^*, y^*) при $y^* = 0$.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай x^0 є ефективним розв'язком задачі $Z(F, X)$. Припустимо протилежне: (x^*, y^*) – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування (13) при $y^* \geq 0$. Тоді з допустимості (x^*, y^*) випливає, що

$$\frac{\langle c^r, x\rangle + c_0^r}{\langle d^r, x\rangle + d_0^r} < \frac{\langle c^r, x^0\rangle + c_0^r}{\langle d^r, x^0\rangle + d_0^r}, \qquad (14)$$

$$\frac{\langle c^i, x^*\rangle + c_0^i}{\langle d^i, x^*\rangle + d_0^i} \leq \frac{\langle c^i, x^0\rangle + c_0^i}{\langle d^i, x^0\rangle + d_0^i}, \; i \in N_l \setminus \{r\}. \quad (15)$$

Отже, $F(x^*) \leq F(x^0)$ і $F(x^*) \neq F(x^0)$, а це суперечить тому, що x^0 є ефективним розв'язком задачі $Z(F, X)$. Таким чином, маємо $y^* = 0$.

Д о с т а т н і с т ь. Припустимо від супротивного, що задача лінійного програмування (13) має оптимальний розв'язок (x^*, y^*) при $y^* = 0$, але x^0 не є ефективним розв'язком задачі $Z(F, X)$. Тоді $\exists\, x^1 \in X$, такий, що $f(x^1) \leq f(x^0)$, тобто $\exists\, r \in N_l$, таке, що виконуються нерівності (14) і (15). З цього випливає, що

$$[(\langle d^r, x^0\rangle (c^r)^T - \langle c^r, x^0\rangle (d^r)^T) + (d_0^r (c^r)^T -$$
$$- c_0^r (d^r)^T)]\, x^1 > (d_0^r (c^r)^T - c_0^r (d^r)^T)\, x^0$$

і

$$[(\langle d_i, x^0\rangle c_i^T - \langle c_i, x^0\rangle d_i^T) + (\beta_i c_i^T - \alpha_i d_i^T)]\, x^1 \geq$$
$$\geq (\beta_i c_i^T - \alpha_i d_i^T) x^0, \; i \in N_l \setminus \{r\},$$

або

$$(p_r + q_r)^T x^1 > q_r^T x^0 \;\text{ і }\; (p_i + q_i)^T x^1 \geq q_r^T x^0, \; i \in N_l.$$

Отже, маємо $(P+Q)^T x^1 \geq Q^T x^0$. Таким чином, встановлено, що існує $y^1 \geq 0$, такий, що виконується рівність

$$-(P+Q)^{\tau} x^1 + y^1 + Q^{\tau} x^0 = 0.$$

Оскільки $x^1 \in X$, то приходимо до того, що (x^1, y^1) – допустимий розв'язок для задачі (13) і $z = \langle g, y^1\rangle > 0$. Але це суперечить тому, що (x^*, y^*) з $y^* = 0$ є оптимальним розв'язком задачі (13).

На підставі доведених теорем, продовжуючи і розвиваючи дослідження праць [4–9], пропонується новий підхід до розв'язання задачі $Z(F, X)$, оснований на ідеях декомпозиції, релаксації, відсікаючих площин.

Для визначення максимальних значень критеріїв справедливе таке твердження.

Твердження. Якщо для коефіцієнтів цільової функції $f(x) = \dfrac{\langle c, x\rangle + c_0}{\langle d, x\rangle + d_0}$, де $c, d \in R^n$, $c_0, d_0 \in R$, задачі $\max\{f(x) | x \in \operatorname{vert} M\}$ виконуються умови $c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \ldots \leq c_{i_n}$, $i_n \in N_n$, $d_{j_1} \leq \leq d_{j_2} \leq \ldots \leq d_{j_n}$, $j_n \in N_n$, то $\max\{\langle c, x\rangle + c_0\}$ чисельника функції $f(x)$ на множині $A(B)$ розміщень досягається в точці $x_{i_j}^{\text{в}} = b_j \; \forall j \in N_n$, а $\min\{\langle d, x\rangle + d_0\}$ знаменника $f(x)$ – в точці $x^{\text{н}} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, де $x_{j_{s+1}}^{\text{н}} = b_{n-s} \;\; \forall s \in N_{n-1} \cup \{0\}$. Тоді відповідно верхня межа α функції $f(x)$ та нижня межа β визначаються так: $\alpha = = c_i(x^{\text{в}})/d_i(x^{\text{н}})$, $\beta = c_i(x^{\text{н}})/d_i(x^{\text{в}})$.

Справедливість даного твердження очевидна, оскільки найбільше значення суми попарних добутків досягається при зіставленні неспадної послідовності c_i і неспадної послідовності елементів множини розміщень, а найменше значення суми, відповідно, – при зіставленні неспадної послідовності d_i і незростаючої послідовності x_i.

Для розглянутого класу векторних задач на комбінаторній множині розміщень пропонується метод головного критерію. Він полягає в тому, що вхідна багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації за одним критерієм $f_r(x)$, $r \in N_l$, що є головним, за умови, що значення всіх інших критеріїв мають бути не менше деяких встановлених величин (граничних значень) t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$. Отже, маємо задачу

$$Z(f_r, X(t_i)) : \min\{f_r(x) | f_i(x) \leq t_i, i \in N_l \setminus \{r\},$$
$$x \in X\}.$$

Оптимальний розв'язок x^0 цієї задачі завжди є слабоефективним, а якщо він єдиний (з точністю до еквівалентності $\sim f$), то і ефективним. Якщо розв'язок x^0 ефективний, то він є єдиним (з точністю до еквівалентності $\sim f$) розв'язком задачі $Z(f_r, X(t_i))$ при будь-якому фіксованому $r \in N_l$ і $t_i = f_i(x^0)$, $i \in N_l \backslash \{r\}$. Вибір одного з критеріїв як головного ніяк не зменшує свободи вибору оптимального розв'язку. Для визначення граничних значень t_i, $i \in N_l \backslash \{r\}$, можна скористатися наведеним вище твердженням, що дає можливість для встановлення верхніх і нижніх меж значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множині розміщень. Пропонуються два підходи до розв'язання вхідної задачі $Z(F, X)$. Перший полягає в призначенні порогам t_i, $i \in N_l \backslash \{r\}$, мінімально можливих значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множині розміщень з наступним розширенням допустимої множини задачі $Z(f_r, X)$, якщо вхідна задача виявиться недопустимою, а у випадку її допустимості — знаходження ефективного або слабоефективного розв'язку. Другий підхід полягає в пошуку оптимального розв'язку задачі при призначенні максимальних значень критеріям $f_i(x)$, $i \in N_l$, з поступовим звуженням допустимої області за допомогою вибору значень порогів t_i, $i \in N_l \backslash \{r\}$, наступних, упорядкованих за спаданням за максимальними значеннями критеріїв. Процедура призначення серії граничних величин t_i обмежень і в першому, і в другому підході дуже проста, оскільки з використанням твердження, наведеного вище, вона зводиться після впорядкування коефіцієнтів критеріїв до обчислення скалярного добутку двох векторів, тобто до знаходження значень лінійних критеріїв.

Загальна ідея запропонованого методу розв'язання задачі $Z(F, X)$ полягає в послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв'язків.

Алгоритм

1. Зводимо багатокритеріальну задачу $Z(F, X)$ до однокритеріальної задачі $Z(f_r, Y(t_i))$, вибираючи головний критерій. Покладемо $\nu = 0$.

2. Вибираємо обмеження початкової системи, що визначає область $G^\nu \subset G$, розв'язуємо задачу $Z(f, G^\nu)$ за допомогою симплекс-методу і знаходимо оптимальний розв'язок задачі y^ν.

3. Якщо отриманий оптимальний розв'язок є точкою множини розміщень, тобто вершиною многогранника розміщень, то в знайденій точці y^ν перевіряємо виконання обмежень, які не були враховані. Очевидно, ними можуть бути лише ті обмеження, що описують опуклу многогранну множину *D*, або обмеження-пороги (якщо використовується перший підхід). Якщо розв'язок y^ν не задовольняє ці обмеження, то варто додати до обмежень допустимої області задачі $Z(f_r, G^\nu(t_i))$ найбільш порушене з обмежень многогранної множини *D* або збільшити пороги (у випадку першого підходу). Якщо розв'язок y^ν задовольняє зазначені обмеження, то він є ефективним розв'язком задачі $Z(f, G^\nu)$, а отже, і задачі $Z(F_2, Y)$.

4. Якщо отриманий розв'язок y^ν не є точкою множини розміщень, то будуємо відсікання, що проходить через суміжні вершини і вершину, що відсікає ту, яка не є допустимою (точкою розміщень). Додаємо це відсікання до обмежень задачі $Z(f, G^\nu)$.

5. Порівнюємо значення $f(y^\nu)$ із значенням цільової функції, знайденим на попередньому кроці. Якщо воно зменшується, то відкидаємо неактивні обмеження в точці y^ν. Якщо значення $f(y^\nu)$ не змінюється, то ніякі обмеження не відкидаємо. Із зміненою допустимою областю задачі $Z(f, G^\nu)$ переходимо до п. 2 для розв'язання цієї задачі.

Та обставина, що жодне з обмежень не відкидається, якщо функція $f(y^\nu)$ дорівнює попередньому значенню, гарантує, що розв'язується тільки скінченна кількість задач виду $Z(f, G^\nu)$.

Висновки

Математична модель багатокритеріальної задачі із врахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків і дробово-лінійними цільовими функціями може бути застосована при розв'язуванні практичних задач економіки, техніки, народного господарства. Встановлено взаємозв'язок між багатокритеріальною задачею на комбінаторній множині розміщень та багатокритеріальною задачею на неперервній допустимій множині. Це дає можливість використати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач і на цій основі розвивати нові ефективні методи, застосовуючи властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок. На основі доведених теорем, продовжуючи дослідження і розвиваючи результати праць [1—9], ми запропонували підхід до розв'язування задачі $Z(F,X)$, що полягає у зведенні пошуку розв'язків вхідної задачі до розв'язання серії скалярних (однокритеріальних) задач, перевірці оптимальності одержаних розв'язків. Методи розв'язання однокритеріальних задач основані на ідеях декомпозиції, релаксації, відсікних площин Келлі.

Додаток

Для ілюстрації запропонованого підходу розв'яжемо таку задачу: знайти максимум векторного критерію $F(x)=(f_1(x),f_2(x))$, функції якого $f_1(x)=\dfrac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}$, $f_2(x)=-x_1+x_2$ визначені на допустимій множині розміщень, породжуваних деякою мультимножиною $G=\{3,5,8,12\}$, що є множиною, за обмежень $3x_1+2x_2\geq 24$. Многогранник M розміщень задається системою лінійних нерівностей $M=\{3\leq x_1\leq 12,\ 3\leq x_2\leq 12,\ 8\leq x_1+x_2\leq 20\}$.

Р о з в' я з а н н я. *З а д а ч а* 1. Розглянемо задачу: $\max f_1=\dfrac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}$ за обмежень $x\in M$, $-x_1+x_2\geq t_{\max}$, $3x_1+2x_2\geq 24$.

П е р ш и й п і д х і д. Розглянемо точку $\max\,(x_1=3,\ x_2=12)$, $t_{\max}=9$. Отже, розв'язуємо задачу:

$$\max f_1=\frac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}$$

за обмежень $x\in M$, $-x_1+x_2\geq 9$, $3x_1+2x_2\geq 24$. Отримали її оптимальний розв'язок: $(x_1,x_2)=(3,12)$, $f_1(x_1,x_2)=5/9$, $f_2(x_1,x_2)=9$, $F(x^*)=\begin{pmatrix}5/9\\9\end{pmatrix}$.

Д р у г и й п і д х і д. Знайдемо $\min\{-x_1+x_2\,|\,x\in M\}$, $(x_1,x_2)=(12,3)$, $t_{\min}=-9$. Розглянемо задачу: $\max f_1=\dfrac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}$ за обмежень $x\in M$, $-x_1+x_2\geq -9$, $3x_1+2x_2\geq 24$. Її оптимальний розв'язок: $x_1=3$, $x_2=12$, $f_1(x_1,x_2)=5/9$, $f_2(x_1,x_2)=9$, $F(x^*)=\begin{pmatrix}5/9\\9\end{pmatrix}$.

З а д а ч а 2. Розглянемо задачу: $\max f_2=-x_1+x_2$ за обмежень $x\in M$, $\dfrac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}\geq t_{\min}$, $3x_1+2x_2\geq 24$. Оскільки $t_{\min}=\dfrac{5}{17}$ в точці $x_1=12$, $x_2=8$, то отримаємо обмеження $\dfrac{x_1+x_2}{5x_1+x_2}\geq\dfrac{5}{17}$. Очевидно, що знаменник $5x_1+x_2$ буде більшим за 0. Зробивши перетворення, отримаємо обмеження $-2x_1+3x_2\geq 0$. Розв'язавши цю задачу, знайдемо розв'язок $x_1^*=3$, $x_2^*=12$, $f_1(x_1^*,x_2^*)=5/9$, $f_2(x_1^*,x_2^*)=9$, $F(x_1^*,x_2^*)=\begin{pmatrix}5/9\\9\end{pmatrix}$. Отже, в обох випадках одержали один і той же ефективний розв'язок.

Н.В. Семенова, Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагирна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ КРИТЕРИЕВ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Рассматривается многокритериальная задача комбинаторной оптимизации с дробно-линейными функциями критериев, заданная на множестве размещений. Предлагается подход к ее решению, обосновываются свойства области допустимых решений задачи и их использование при разработке метода.

N.V. Semenova, L.M. Kolechkina, A.M. Nagirna

SOLVING THE PROBLEM OF VECTOR OPTIMIZATION WITH LINEAR FRACTIONAL FUNCTIONS ON THE COMBINATORIAL SET OF ALLOCATIONS

The paper deals with multicriterion problem of combinatorial optimization with linear fractional functions of criteria set on plurality of allocations. We suggest the approach to its solution. Moreover, we specify the characteristics of the area of feasible solutions and their utilization for developing the method.

1. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
3. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
4. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
5. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н.* Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 26–41.
6. *Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M.* Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Inform. Theories and Appl. – 2008. – **15**. – P. 240–245.
7. *Семенова Н.* Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Inform. Theories and Knowledge. – 2008. – **2.** – P. 187–195 (Intern. Book Series "Information science and computing", N 7).
8. *Колечкина Л.* Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Ibid. – P. 180–186.
9. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
10. *Шор Н.З., Соломон Д.И.* Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 204 с.
11. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
12. *Malivert C., Boissard N.* Structure of efficient sets for strictly quasi convex objectives // J. of Convex Analysis. – 1994. – **1**, N 2. – P. 143–150.
13. *Gulati T.R., Islam M.A.* Efficiency in linear fractional vector maximization problem with nonlinear constraints // Optimization. – 1989. – **20**, N 4. – P. 477–482.
14. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем. – М.: Мир, 1975. – 432 с.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
18 грудня 2008 року