

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Загальна фізика
Механіка
Молекулярна фізика
Термодинаміка

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами: “Інженіринг інтелектуальних електротехнічних та
мехатронних комплексів”, “Технології та інжиніринг у зварюванні”, “Лазерна
техніка та комп’ютеризовані процеси фізико-технічної обробки матеріалів”
спеціальності “141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”,
“131 Прикладна механіка”

Укладачі:
Братусь Т.І., Строкач М.С.

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти:

Савченко Д.В. д-р. фіз.-мат. наук, доц.,
доцент каф. загальної фізики та моделювання фізичних процесів
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Юхимчук В.О. , д-р. фіз.-мат. наук, проф., зав. відділу оптики і спектроскопії
Інституту фізики напівпровідників ім. Лашкарьова В.Є. НАН України

Відповідальний редактор : Решетняк С.О., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06. 2022 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 3 від 16.06. 2022 р.)

Навчальний посібник “Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика. Термодинаміка” складено як конспект лекцій з прикладами типових задач. Розглянуті основні питання сучасної теорії механіки та молекулярно-кінетичної теорії. Навчальне видання сприятиме засвоєнню україномовної фізичної і технічної термінології та сформулює у студентів компетентності, необхідні для подальшого вивчення предметів, які пов’язані із практичним застосуванням законів механіки і термодинаміки. Призначений для студентів вищих учбових закладів, відповідає навчальній програмі дисципліни “Загальна фізика” для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою “Інжиніринг інтелектуальних електротехнічних та мехатронних комплексів” за спеціальністю “141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” та “Технології та інжиніринг у зварюванні”, “Лазерна техніка та комп’ютеризовані процеси фізико-технічної обробки матеріалів” за спеціальністю “131 Прикладна механіка”.

Реєстр. № НП 21/22- 925. Обсяг 5,9 авт. арк.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056 <https://kpi.ua>
Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №
5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ВСТУП

Фізика є універсальною базою техніки, оскільки на закони фізики спираються всі прикладні й технічні науки технологічного та проектно-конструкторського спрямування. Тому вивчення фізики є необхідним для подальшої якісної фахової підготовки спеціалістів.

Пропонований посібник з курсу загальної фізики призначений для студентів усіх спеціальностей. В курсі представлені такі розділи загальної фізики: механіка, молекулярна фізика і термодинаміка.

Навчальний матеріал, представлений в курсі, є адаптованим до рівня математичної підготовки студентів, яким фізику починають викладати з першого навчального семестру. Зокрема, в багатьох випадках, довелося відмовитися від строгих доведень і обмежитися тільки якісними міркуваннями та коментуванням змісту положень, що розглядаються. З тієї ж причини математичні викладки, що наводяться, по можливості виконуються детально й супроводжуються роз'ясненнями загального змісту відповідних математичних величин та операцій. Слід відзначити, що розуміння та засвоєння навчального матеріалу вимагає знання основних понять вищої математики: уміння брати похідні та інтеграли, аналізувати функції на екстремум, розв'язувати прості диференціальні рівняння. Треба також знати основні поняття векторної алгебри, дії з векторами, вміти знаходити проекції векторів і оперувати ними.

В результаті опрацювання лекційного матеріалу студенти повинні:

знати основні фізичні моделі та поняття фізики; параметри різних видів рухів; закони, що описують різні види рухів; закони збереження; закони термодинаміки, основні поняття сучасної молекулярно-кінетичної теорії.

вміти формулювати фізичні закони; виводити формули, що пов'язують основні фізичні величини при формулюванні основних фізичних законів; пояснювати природу фізичних явищ і процесів; розв'язувати фізичні задачі; використовувати знання фізики для аналізу явищ, що вивчаються в рамках фахово-орієнтовних дисциплін.

Скалярні та векторні величини

Фізичні величини, які використовують у фізиці для кількісної характеристики фізичних явищ та об'єктів, поділяються на два класи: скалярні та векторні величини.

Скалярними є величини, що визначаються лише числом. Наприклад: маса, довжина, площа, температура, тиск, тощо.

Векторні величини визначаються числом і напрямком у просторі. Наприклад: швидкість, прискорення, сила, напруженість електричного поля, індукція магнітного поля, тощо.

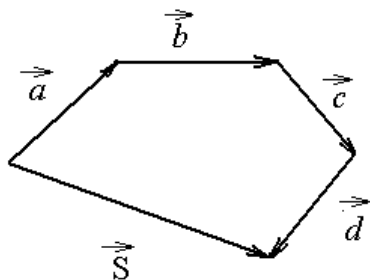
Вектори позначаються напівжирними буквами (***a, b, c, ..***) або буквами із стрілочкою згори.

Вектори та дії над ними

Вектором називається напрямлений відрізок. Початком вектору називається точкою його прикладення. Зображується вектор відрізком зі стрілкою, що розташована біля кінця вектору.

Сумою кількох векторів, називається, наприклад, вектор ***S***, який за величиною та напрямком дорівнює вектору, початком якого є початок вектору ***a*** (першого доданка), а кінець – кінцем вектору ***d*** (останнього доданка) (рис.

$$1.1): \mathbf{S} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$$



Під різницею векторів ***a*** і ***b*** розуміємо вектор

d = a - b, такий, що дорівнює сумі векторів ***a*** та ***(-b)***.

Добутком вектору ***a*** на скаляр ***k*** називається вектор ***d = k a***, який напрямлений так як і ***a***.

Рис. 1.1

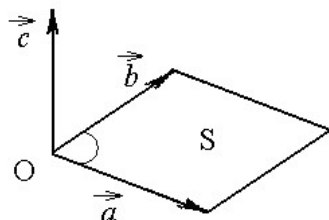
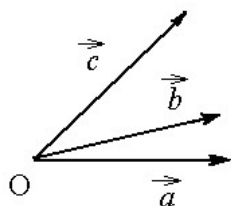
Скалярний і векторний добутки векторів

Скалярним добутком двох векторів та називається число, яке дорівнює добутку довжин даних векторів та косинусу кута між ними, тобто

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

Скалярний добуток має такі властивості : ***ab = ba***

Векторним добутком двох векторів ***a*** та ***b*** називають вектор ***c = [a, b]***, що задовольняє наступним умовам: 1) модуль вектору ***c*** чисельно дорівнює площі



паралелограма,
побудованого на векторах ***a***
і ***b***, тобто $|\mathbf{c}| = a b \sin \varphi$ 2)
Вектор ***c*** напрямлений
перпендикулярно до
площини цього
паралелограма (рис.1.2) ;

Рис.1.2

векторів задає додатню орієнтацію простору.

3) впорядкована трійка

1.Механіка

Фізика - наука про природу, що вивчає найбільш прості й загальні властивості матеріального світу. Через таку загальність фізика є універсальною базою всього природознавства та техніки й складається з багатьох окремих наук — класичної та квантової механіки, теорії відносності, електродинаміки, оптики, молекулярної фізики та інших.

Вивчення фізики починають із механіки – розділу, в якому розглядається механічний рух. Рух – це зміна положення тіл у просторі із плином часу. Тому закони механіки найбільш явно виражають просторово-часові співвідношення між фізичними об'єктами та подіями й через них – властивості самого простору та часу.

Основні закони фізики свого часу були встановлені на основі спостережень відповідних явищ та експериментів і тому, за невеликим винятком, мають обмежену сферу застосовності. Зокрема, закони *класичної механіки* поширюються тільки на повільні рухи частинок і тіл у макроскопічних областях простору. Швидкі рухи підпорядковані законам *спеціальної теорії відносності* (релятивістської механіки), а рухи частинок у мікроскопічних областях – законам *квантової механіки*. При цьому під повільними рухами розуміються рухи зі швидкостями, набагато меншими за швидкість світла $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а під швидкими — із швидкостями, що є сумірними із величиною c . Макроскопічна область простору — область, розміри якої набагато перевищують розміри атомів та молекул, а мікроскопічна — область порядку розмірів атома.

В класичній механіці ставляться і розв'язуються дві основні задачі:

1. Встановлення законів руху – співвідношень, які дозволяють визначати характер і характеристики руху будь-якого тіла чи системи тіл у залежності від його взаємодії з іншими тілами.

2. Знаходження таких загальних співвідношень між механічними характеристиками систем, які не залежать ані від складу та будови системи, ані від природи та характеру взаємодії між тілами системи.

Пошук загальних методів розв'язування першої задачі привело свого часу І. Ньютона до встановлення загальних законів руху (законів динаміки). Розв'язування ж другої задачі дозволило встановити закони збереження (імпульсу, енергії, моменту імпульсу).

Фізика є точною наукою — свої результати вона виражає не тільки словесно, а й за допомогою математичних співвідношень. Але властивості фізичних об'єктів і явищ є настільки багатограними, що жодна теорія не може відобразити їх у всій повноті. Тому замість реальних об'єктів наука оперує фізичними моделями – ідеалізованими об'єктами, які відтворюють лише суттєві для розгляданих явищ властивості та фактори. В механіці основними моделями є *матеріальна точка* та *абсолютно тверде тіло*.

Матеріальною точкою називають тіло, розміри та форма котрого в умовах задачі, що розглядається, є не істотними. Отже, матеріальною точкою може бути не лише маленька частинка, а й велике тіло, приміром, Земля при розгляді її взаємодії з іншими небесними тілами та руху в космічному просторі. Тому в даному посібнику скрізь, за винятком механіки твердого тіла, терміни “частинка”, “матеріальна точка”, та “тіло” не розрізняються.

Абсолютно твердим тілом називається тіло, взаємне розташування точок якого є незмінним, тобто — тіло, що не деформується. При розгляді законів руху всі тіла вважаються абсолютно твердими.

Положення тіла у просторі та його рух можна визначити тільки відносно якогось іншого тіла, яке називають тілом відліку. Задля можливості точного задання положення даного тіла відносно тіла відліку з останнім пов’язують ту чи іншу систему координат. Окрім того, для опису руху треба мати якийсь загально визнаний і узгоджений принцип фіксації моментів і вимірювання проміжків часу в усіх точках простору, або, як говорять, треба мати годинник. При цьому сукупність тіла відліку, пов’язаної з ним системи координат і нерухомого відносно неї годинника називають системою відліку.

Отже, положення та рух тіла є визначеним тільки відносно конкретної системи відліку. В той же час вибір системи відліку є довільним^[3] і визначається тільки зручністю опису руху в заданих конкретних умовах. Тому положення в просторі й рух тіл є відносним за самою природою.

1.1. Кінематика матеріальної точки

Рух матеріальної точки по кривій характеризується наступними величинами:

- а) пройденим шляхом s_{12} — це довжина траєкторії з початкової точки 1 до кінцевої точки 2 (рис.1.3);
- б) вектором переміщення $\mathbf{r}_{12}$ — це вектор, який проведено з початкової точки руху у кінцеву ;
- в) часом переміщення t_{12} .

Середня швидкість

Положення матеріальної точки у просторі можна задати за допомогою радіуса - вектора $\mathbf{r}$, який проведено з початку координат у дану точку (рис.1.3) . Тоді проекції радіуса - вектора на координатній вісі є координати точки, тобто $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

Дуже маленькі зміни величин ми будемо називати елементарними і позначати буквою Δ . Тоді Δt — елементарний проміжок часу , Δs — елементарний шлях , $\Delta \mathbf{r}$ — елементарне переміщення за час Δt (див. рис.1.3). Величина, яка

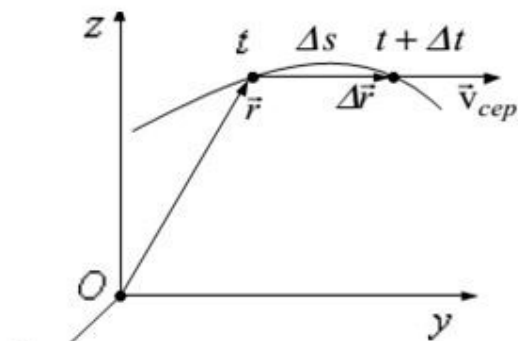
дорівнює відношенню елементарного переміщення до часу, за який воно було виконано, називається середньою швидкістю за час Δt :

$$v_{\text{ср.}} = \Delta r / \Delta t \quad (1.1).$$

Миттєва швидкість

Границя середньої швидкості при $\Delta t \rightarrow 0$, є миттєвою швидкістю. Ця границя є першою похідною від вектору переміщення за часом:

$$v = dr/dt \quad (1.2).$$



У проєкціях на осі координат маємо:

$$v_x = dr_x/dt, \quad v_y = dr_y/dt, \quad v_z = dr_z/dt$$

Тобто, щоб отримати проєкцію миттєвої швидкості на будь-яку вісь, потрібно координату точки вздовж цієї осі диференціювати за часом.

Рис.1.3

Модуль миттєвої швидкості дорівнює першій похідній від шляху за часом:

$$v = ds/dt \quad (1.3).$$

Для малих проміжків часу Δt модуль середньої швидкості визначається формулою: $v_{\text{ср.}} = \Delta s / \Delta t$ (1.4).

Шлях

Для розрахунку пройденого шляху між точками 1 і 2 розділимо весь шлях на елементарні ділянки такі малі, щоб швидкості на кожній елементарній ділянці шляху можна вважати сталими величинами v_i , різними для різних ділянок, де i – порядковий номер ділянки.

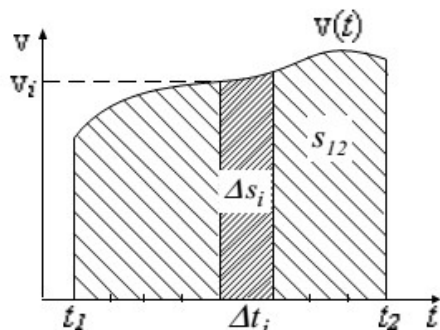


Рис.1.4

Згідно з формулою (1.4), для i -ої ділянки шляху: $v_i = \Delta s_i / \Delta t$. Звідки маємо: $\Delta s_i = v_i \Delta t$, а весь шлях від точки 1 до точки 2: $s_{12} = \sum v_i \Delta t$.

Процедура підсумовування нескінченно малих величин у математиці називається інтегруванням і позначається $s_{12} = \int_{t1}^{t2} v dt$

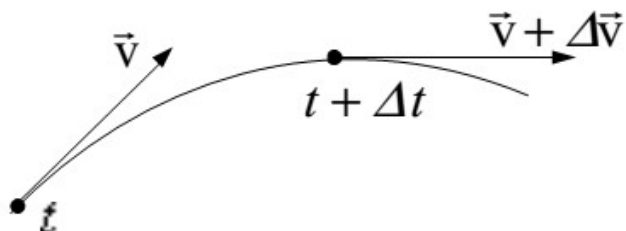
На координатній площині (v, t)

пройдений шлях дорівнює площі під графіком функції $v(t)$ (див рис.1.4).

Прискорення

Розглянемо матеріальну точку на траєкторії . Швидкість у момент

часу t позначимо v , а в момент $(t + \Delta t)$ – через $(v + \Delta v)$, де Δv – приріст вектору швидкості за час Δt (див. рис.1.5)



Середнє прискорення за час Δt :
 $a_{сеп.} = \Delta v / \Delta t$ (1.5).

Миттєве прискорення в момент часу t : $a = dv/dt$ (1.6),

Рис.1.5

тобто, воно дорівнює першій

похідній від швидкості за часом і характеризує зміну швидкості в одиницю часу .

В системі СІ прискорення вимірюється - $[м/ с^2]$.

Прискорення при криволінійному русі

У випадках криволінійного руху прискорення a зручно розкласти вектор на дві складові – тангенціальну a_τ і нормальну a_n (див. рис.1.6):

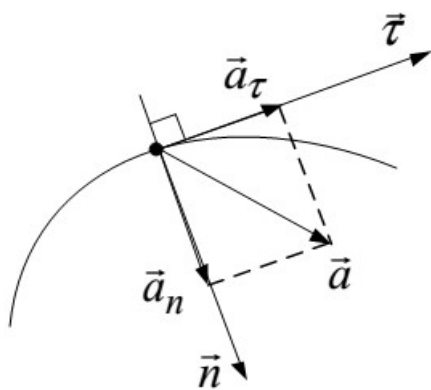


Рис.1.6

$$a = a_\tau + a_n \quad (1.7).$$

Тангенціальна складова направлена a_τ вздовж дотичної у бік руху тіла. Вона характеризує зміну швидкості за величиною і визначається формулою :

$$a_\tau = dv/dt .$$

Нормальна складова a_n напрямлена перпендикулярно до дотичної ,

характеризує зміну швидкості за

напрямом і визначається за формулою: $a_n = v^2/R$, де – R радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Тоді повне прискорення дорівнює : $a = (a_\tau^2 + a_n^2)^{1/2}$ (1.8).

1.2.Кінематика обертального руху.

Кутова швидкість

Поворот тіла можна зобразити напрямленим відрізком, який спрямований вздовж осі обертання, його довжина дорівнює величині повороту, а напрям пов'язаний з напрямом обертання за правилом правого гвинта (див. рис.1.7). Тільки дуже малі повороти задовольняють правилу

векторного додавання і отже є векторами.

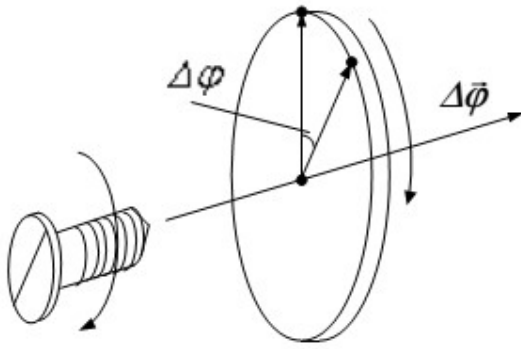


Рис.1.7

Якщо за елементарний проміжок часу Δt тіло здійснює елементарний поворот $\Delta \phi$, то середня кутова швидкість за час Δt визначається:

$$\omega_{\text{сер.}} = \Delta \phi / \Delta t \quad (1.9)$$

Миттєва кутова швидкість дорівнює:

$$\omega = d\phi / dt \quad (1.10)$$

Кутове прискорення

Якщо $\omega = \text{const}$, то це рівномірне обертання. Воно характеризується періодом T – часом повного оберту, частотою $\nu = 1/T$ – це кількість обертів в одиницю часу. Для рівномірного обертання кутова швидкість: $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Зміна кутової швидкості в одиницю часу характеризується кутовим прискоренням. Якщо за час Δt зміна кутової швидкості $\Delta \omega$, то середнє кутове прискорення за Δt :

$$\beta_{\text{сер.}} = \Delta \omega / \Delta t \quad (1.11)$$

Миттєве кутове прискорення, визначаємо за формулою: $\beta = d\omega / dt$

Вектор ω може змінюватись як за рахунок зміни швидкості обертання, так і за рахунок повороту осі обертання у просторі. Якщо напрям осі обертання у просторі залишається сталим, то модуль кутового прискорення: $\beta = d\omega / dt \quad (1.12)$.

Кутове прискорення вимірюється: $[\text{рад}/\text{с}^2]$

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами

Визначимо зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями. Для цього розглянемо матеріальну точку, яка рухається по колу і за час Δt виконує

поворот $\Delta\varphi$ (див. рис. 1.8), проходячи шлях Δs . При цьому $\Delta s = R \Delta\varphi$, а миттєва швидкість: $v = \omega R$ (1.13).

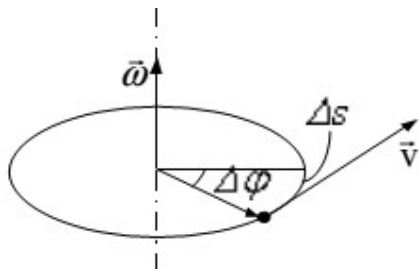


Рис.1.8

Диференціюємо формулу (1.13) за часом

$dv/dt = R (d\omega/dt)$, звідки маємо:

$$a_\tau = R \beta \quad (1.14).$$

Формули (1.13) і (1.14) дають зв'язок між лінійними і кутовими кінематичними величинами.

Використовуючи векторний добуток, формулі (1.13) можна надати векторний вигляд: $v = [\omega, R]$ (1.15).

Розглянемо приклади задач.

Задача 1.1.

Частинка рухається зі сталим прискоренням a . У початковий момент часу вона знаходилась у точці з радіус-вектором r_0 і мала швидкість v_0 . Написати вираз для:

- 1) приросту швидкості Δv частинки за час t ;
- 2) проєкції швидкості частинки на вісь y у момент часу t ;
- 3) переміщення частинки Δr за час t ;
- 4) приросту координати z за час t .

5) **Розв'язання.**

$$1) \Delta v = \int_0^t a dt = at. \quad 2) v = v_0 + at \Rightarrow v_y = v_{0y} + a_y t.$$

$$3) \Delta r = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad 4) \Delta z = v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Задача 1.2.

Точка рухається в площині xu за законом:

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t, \\ y = A(1 - \cos \omega t), \end{cases}$$

де A і ω – додатні константи. Знайти:

- а) шлях s , який проходить точка за час τ ;
- б) кут між швидкістю та прискоренням точки.

Розв'язання.

а) З означення швидкості та з умови задачі маємо:

$$ds = v dt,$$

$$v_x = \dot{x} = \omega A \cos \omega t,$$

$$v_y = \dot{y} = \omega A \sin \omega t.$$

Абсолютне значення швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\omega.$$

Інтегруючи диференціальну рівність

$$ds = v dt,$$

знаходимо:

$$s = \int_0^{\tau} v dt = \int_0^{\tau} \omega A dt = \omega A \tau.$$

б) Для визначення кута $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ врахуємо скалярний добуток

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = va \cos(\mathbf{v}, \mathbf{a}).$$

Вектори швидкості та прискорення можна записати за допомогою їх проекцій:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= i v_x + j v_y = i \dot{x} + j \dot{y} = i \omega A \cos \omega t + j \omega A \sin \omega t = \\ &= \omega A (i \cos \omega t + j \sin \omega t); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y = i \ddot{x} + j \ddot{y} = \omega^2 A (-i \cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (2)$$

Перемноживши скалярно (1) на (2), дістанемо

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = va \cos(\mathbf{v}, \mathbf{a}) = 0.$$

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{a}) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 1.3.

Рух матеріальної точки задається рівнянням

$$\mathbf{r}(t) = A(i \cos \omega t + j \sin \omega t), \quad (1)$$

де $A = 0,5$ м / с, $\omega = 5$ рад / с.

а) Визначте траєкторію точки та напрям її руху.

б) Визначте модуль швидкості та модуль прискорення точки.

Розв'язання.

З (1) маємо:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = A \sin \omega t. \end{cases} \quad (2)$$

Звідси:

$$x^2 + y^2 = A^2, \quad (3)$$

тобто частинка рухається по колу радіуса $R = A$. З (2) видно, що

$$\begin{cases} \omega t = 0, \\ x = A, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \omega t = \frac{\pi}{2}, \\ x = 0, \\ y = A. \end{cases}$$

Звідси випливає, що частинка рухається проти годинникової стрілки. В результаті диференціювання (2) маємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos \omega t.$$

Звідси

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= v^2 = \omega^2 A^2, \\ v &= \omega A = 2,5 \text{ м/с}, \\ a_n &= \omega^2 A = 12,5 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Задача 1.4.

Два тіла кинуто одночасно з однієї точки: одне – вертикально в гору, друге – під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту. Початкова швидкість кожного тіла $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Нехтуючи опором повітря, знайти відстань між тілами через $t = 1,7 \text{ с}$.

Розв'язання.

В момент t координати тіла, кинутого вертикально вгору, будуть:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Координати тіла, кинутого під кутом α до горизонту в той самий момент t будуть такими:

$$\begin{cases} x_2 = (v_0 \cos \alpha)t, \\ y_2 = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Відстань між тілами через час t :

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Підставивши сюди (1) і (2), отримаємо:

$$l = v_0 t \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 22 \text{ м}.$$

Задача 1.5.

Сталий за модулем вектор $\mathbf{a}$, рівномірно обертається проти годинникової стрілки в площині (x, y) , переходить за час t з положення, в якому він збігався з напрямком з віссю x , у положення, в якому він збігається з віссю y . Знайти середня значення вектора $\mathbf{a}$ за час $t = T/4$, і модуль цього середнього.

Розв'язання.

Розкладемо вектор $\mathbf{a}$ за оортами декартової системи координат:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

Тоді його середнє значення

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \langle x \rangle \mathbf{i} + \langle y \rangle \mathbf{j}.$$

Оскільки вектор $\mathbf{a}$ обертається рівномірно по колу, то

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t. \end{cases}$$

Частота обертання пов'язана з періодом T співвідношенням

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \langle x \rangle \mathbf{i} + \langle y \rangle \mathbf{j}.$$

Оскільки вектор $\mathbf{a}$ обертається рівномірно по колу, то

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t. \end{cases}$$

Частота обертання пов'язана з періодом T співвідношенням

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тоді середні значення компонент вектора $\mathbf{a}$ за час $t = T/4$ будуть такими:

$$\langle x \rangle = a \langle \cos \omega t \rangle = a \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \cos \omega t \, dt = \frac{4a}{T} \int_0^{T/4} \cos \frac{2\pi}{T} t \, dt = \frac{2a}{\pi},$$

$$\langle y \rangle = a \langle \sin \omega t \rangle = a \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \sin \omega t \, dt = \frac{4a}{T} \int_0^{T/4} \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt = \frac{2a}{\pi}.$$

Отже,

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{2a}{\pi} (\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

$$|\langle \mathbf{a} \rangle| = 2 \sqrt{2} \frac{a}{\pi}$$

Задача 1.6.

Ліфт почав підніматися зі сталим прискоренням $a = 1,00 \text{ м/с}^2$. Через час $t' = 1,00 \text{ с}$ після цього від стелі кабіни ліфта відділюється і став падати шуруп. Визначити:

а) час Δt падіння шурупа до удару об підлогу кабіни;

б) шлях S , пройдений шурупом за час Δt в системі відліку, зв'язаній із землею. Висота кабіни ліфта $h = 2,75 \text{ м}$.

Розв'язання.

а) Відносно ліфта прискорення шурупа:

$$g' = g + a,$$

тому:

$$h = g' \frac{(\Delta t)^2}{2} = \frac{(g + a)(\Delta t)^2}{2}.$$

Звідки:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g + a}} = 0,71 \text{ с.} \quad (1)$$

б) Початкова швидкість шурупа відносно землі – та сама, що і в ліфта, тобто:

$$v_0 = at.$$

Шуруп буде рухатися вгору відносно землі протягом часу

$$t' = \frac{v_0}{g} = \frac{at}{g}. \quad (2)$$

Відповідно, відносно землі шуруп пройде шлях у гору

$$S_1 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{a^2 t^2}{2g}. \quad (3)$$

Протягом решти часу, тобто $\Delta t - t'$, шуруп буде рухатися вниз і пройде шлях:

$$S_2 = \frac{g(\Delta t - t')^2}{2}. \quad (4)$$

Отже, за весь час шуруп відносно землі пройде шлях $S = S_1 + S_2$, або, взявши до уваги (1), (2) і (3), дістанемо:

$$S = \frac{a^2 t^2}{g} + \frac{hg}{g+a} - at \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 1,9 \text{ м.}$$

Задача 1.7.

Частинка рухається в додатному напрямку по осі x так, що її швидкість змінюється за законом $v = \alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. Маючи на увазі, що в момент часу $t = 0$ вона знаходиться у точці $x = 0$, знайти:

- а) залежність від часу швидкості та прискорення частинки;
- б) середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде перші s метрів шляху.

Розв'язання.

а) За умовою,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є:

$$2\sqrt{x} = at + \text{const}.$$

Згідно умові задачі, при $t = 0$ маємо $x = 0$, тож $\text{const} = 0$.

$$2\sqrt{x} = at \Rightarrow 4x = a^2 t^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 t^2}{4},$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a^2 t}{2},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{2}.$$

б) З $2\sqrt{x} = at$ отримуємо:

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{x}.$$

Для $x = s$ маємо:

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{s},$$

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{s}.$$

Задача 1.8.

Точка рухається по колу зі швидкістю $v = \alpha t$ де $\alpha = 0,50 \text{ м/с}^2$. Знайти її повне прискорення в момент, коли вона пройде $n = 0,1$ довжини кола після початку руху.

Розв'язання.

Повне прискорення:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2}{R}, \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \alpha, \\ a &= \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 t^2}{R}\right)^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тепер треба з (1) виключити t^2/R :

$$s = \int v dt = \alpha \int t dt = \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Але

$$s = n2\pi R.$$

З цих двох рівнянь маємо:

$$\frac{t^2}{R} = \frac{4\pi n}{\alpha}.$$

Підставивши цей вираз в (1), отримуємо:

$$a = \alpha \sqrt{1 + 16\pi^2 n^2} = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.9.

Куля радіуса $R = 10,0 \text{ см}$ котиться без ковзання по горизонтальній прямій так, що її центр рухається зі сталим прискоренням $a = 2,50 \text{ см/с}^2$. Через $t = 2,0 \text{ с}$ після початку руху його положення відповідає тому, що показано на рис. 1.9. Знайти:

- швидкості точок A і B ;
- прискорення точок A і O .

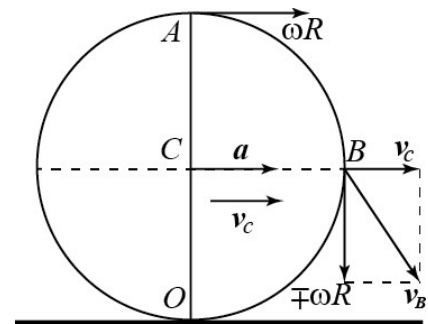


Рис. 1.9

Розв'язання.

а) Миттєва вісь обертання проходить через точку О. Кутова швидкість точки С:

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{at}{R}.$$

Отже, швидкість точки А:

$$v_A = 2R\omega = \frac{at}{R} 2R = 2at = 10,0 \text{ см/с}.$$

Далі, згідно з рисунком:

$$v_B = \sqrt{v_C^2 + \omega^2 R^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^2 R^2} = \omega R \sqrt{2} = \frac{at}{2} R \sqrt{2} = at \sqrt{2} = 7 \text{ м/с}.$$

б) Знаходимо прискорення:

$$a_0 = \omega^2 R = \frac{a^2 t^2}{R^2} R = \frac{a^2 t^2}{R} = 2,5 \text{ см/с}^2.$$
$$a_A = \sqrt{\left(\frac{dv_A}{dt}\right)^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{(2a)^2 + \frac{a^4 t^4}{R^2}} = 2a \sqrt{1 + \left(\frac{at}{2R}\right)^2} = 5,6 \text{ см/с}^2.$$

Задача 1.10.

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова швидкість залежить від кута повороту φ за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де ω_0 і α – додатні сталі. В момент часу $t = 0$ кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу:

а) кута повороту;

б) кутової швидкості.

Розв'язання.

За означенням кутової швидкості,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi,$$
$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = dt.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int dt.$$

Це дає:

$$\ln(\omega_0 - \alpha\varphi) = -\alpha t + \text{const.}$$

Врахування початкових умов дає:

$$\ln \omega_0 = \text{const.}$$

Тому:

$$\ln \frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = -\alpha t.$$

| Отримуємо:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (1)$$

| Диференціювання (1) дає

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}.$$

1.3. Динаміка матеріальної точки

Закони Ньютона і принцип відносності Галілея лежать в основі класичної механіки.

Класична механіка – це механіка тіл великих мас, що рухаються з малими швидкостями, тобто $m_{\text{тіла}} \gg m_{\text{атома}}$, $v_{\text{тіла}} \ll c$, де c – швидкість світла у вакуумі ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}^2$).

Кінематика описує рух тіл, не з'ясовуючи. З яких причин цей рух відбувається. Динаміка вивчає рух тілу зв'язку з тими причинами (взаємодіями між тілами), які обумовлюють характер руху. Як правило, розв'язання задач динаміки, як і в кінематиці, зводиться до знаходження закону руху тіла, або величин, що з ним пов'язані, але самі рівняння руху вже визначаються з урахуванням того чи іншого вигляду сил, що діють в системі. Для характеристики взаємодій між тілами введено поняття сили.

Сила — це фізична векторна величина, що є мірою дії на деяке тіло інших тіл (або полів), яка може викликати прискорення і деформацію тіла.

Усі взаємодії в природі можна звести до чотирьох фундаментальних взаємодій:

1. Гравітаційні взаємодії.

Приклади сил гравітаційної взаємодії : сила всесвітнього тяжіння $F = G mM/R^2$, сила тяжіння $F = mg$.

2. Електромагнітні взаємодії

Приклади сил в механіці , які зводяться до електромагнітної взаємодії:

сила пружності $F_{\text{пр.}} = - kx$, сила тертя $F_{\text{тер.}} = \mu \cdot N$, реакція опори N , вага тіла $P = m(g + a)$.

При розв'язанні задач за наявності в системі сил *сухого тертя* (наприклад, ковзання бруска по площині) слід пам'ятати, що *сила тертя* F_T спрямована в напрямку, протилежному напрямку руху, а за абсолютним значенням пропорційна силі *нормального тиску* N , з якою одне тіло діє на інше(цю силу ще називають *силою реакції опори*):

$$F_T = \mu N,$$

тут μ – коефіцієнт тертя, який залежить від природи й стану поверхонь взаємодіючих тіл.

Якщо тіло рухається в рідкому або газоподібному середовищі, то на поверхню тіла з боку середовища крім сил в'язкого тертя діють сили нормального тиску, результуюча яких має складову, спрямовану проти руху тіла. Ця складова називається силою опору середовища. Сума цих двох сил будемо називати просто силою тертя. При малих швидкостях вона пропорційна першому степеню швидкості:

$$F_T = -k\mathbf{v},$$

а при великих – квадрату швидкості:

$$F_T = -k\mathbf{v}\mathbf{v}.$$

3. Сильні взаємодії (ядерні).

4. Слабкі взаємодії (взаємодії елементарних частинок)

1.4. Закони Ньютона

Основу динаміки складають три закони Ньютона, які є узагальненням результатів спостережень та спеціально поставлених експериментів і не виводяться з якихось більш простих принципів. Закони Ньютона мають велике практичне значення, оскільки на них ґрунтуються розрахунки різноманітних машин і механізмів, будівельних конструкцій, космічних апаратів, тощо.

Перший закон Ньютона (закон інерції). Усяке тіло знаходиться у стані спокою, чи рівномірного прямолінійного руху, поки (або якщо) дія з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан (тобто, якщо прискорення тіла дорівнює нулю).

Системи відліку (СВ), в яких виконується перший закон Ньютона, мають назву інерціальних, їх у природі необмежена кількість.

Будь-яка система, що рухається відносно інерціальної рівномірно і прямолінійно теж є інерціальною СВ.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки): прискорення будь-якого тіла прямо пропорційне результуючій силі, яка діє тіло, і обернено пропорційне його масі:

$$\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}_i / m \quad (1.16) \quad \text{або} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Величина $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ називається імпульсом матеріальної точки. Тоді рівняння другого закону Ньютона запишеться через імпульс у вигляді:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.17)$$

Третій закон (закон рівнодії). Усяка дія тіл носить характер взаємодії. Сили, з якими тіла діють одне на інше, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямком: $F_{12} = -F_{21}$ (1.18)

1.5. Перетворення Галілея. Принцип відносності.

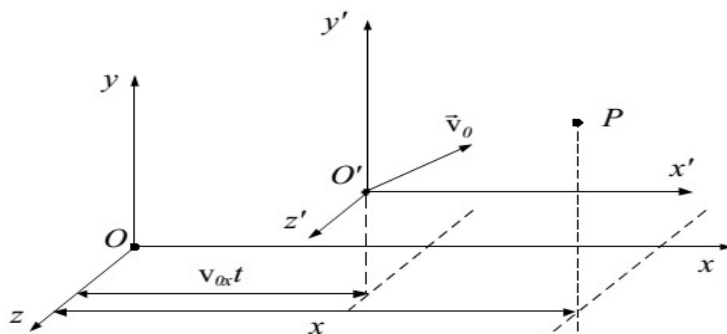


Рис.1.10

Положення в просторі та рух точки є відносними, тобто визначеними лише в обраній системі відліку. Відповідно, характеристики руху точки в двох різних системах відліку є не однакові. Розглянемо дві системи відліку, які рухаються одна

відносно одної зі сталою швидкістю v_0 (див. рис.1.10). Відлік часу почнемо з моменту, коли центри координат цих двох систем збігалися, тобто при $t = 0$, $O' = O$.

На рис.1.10 не штрихована система нерухома, а штрихова рухається із швидкістю v_0 . Координати точки P у цих двох системах зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t; \\ y = y' + v_{0y}t; \\ z = z' + v_{0z}t. \end{cases} \quad (1.19)$$

Співвідношення (2.4) називають перетвореннями Галілея для координат.

Співвідношення (2.4) є чинними лише для описаних систем відліку, що рухаються одна відносно одної прямолінійно, рівномірно та поступально і називаються інерціальними.

Диференціюємо формули (2.4) за часом. В результаті отримуємо перетворення

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v_{0x}; \\ v_y = v'_y + v_{0y}; \\ v_z = v'_z + v_{0z}. \end{cases}$$

для швидкостей:

$$\text{Або у векторному вигляді: } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (1.20)$$

Зауважимо, що формули (1.20), які називають ще законом додавання швидкостей, стосуються будь-яких систем відліку.

Диференціюємо формулу (1.20) за часом і отримаємо: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ (1.21).
Тобто прискорення будь-якого тіла у всіх системах відліку, що рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно, одне й те ж. Тому, якщо одна з систем інерціальна, то і інші також будуть інерціальними. Із (1.21) маємо: $m\mathbf{a} = m\mathbf{a}'$ (1.22).

Звідки випливає, що рівняння динаміки (другий закон Ньютона) не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Рівняння динаміки позавідносні (інваріантні) по відношенню до інерціальних систем відліку. Звідси і назва принципу – принцип відносності.

Центр інерції системи матеріальних точок

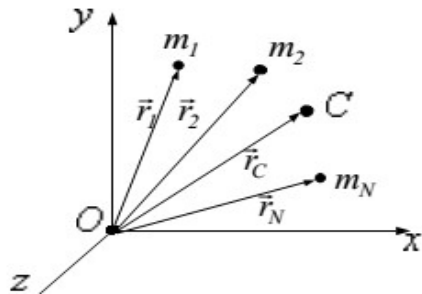


Рис.1.11

Положення у просторі кожної матеріальної точки m_i системи матеріальних точок задаємо за допомогою радіуса - вектора $\mathbf{r}_i$ (див.рис. 1.11)

Центр інерції системи матеріальних точок –

це точка С, положення якої визначається

радіусом - вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \quad (1.23)$$

Вектор $\mathbf{r}_c$ спрямований у деяку точку простору С всередині системи матеріальних точок, не збігаючись з радіусом – вектором жодної з них.

Визначаємо швидкість центра інерції :

$$\begin{aligned} \vec{v}_c &= \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\vec{r}_N}{dt} \right) = \frac{1}{m} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N) = \\ &= \frac{1}{m} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \frac{\vec{P}_{сист}}{m}, \end{aligned}$$

де $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ – маса системи.

З останньої формули отримуємо, що імпульс системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра інерції:

$$\vec{P}_{сист} = m \vec{v}_c. \quad (1.24)$$

Розглянемо систему яка складається з кількох тіл (наприклад, трьох). Сили, які діють на тіла системи, розіб'ємо на внутрішні і зовнішні.

Внутрішні – це сили, що діють між тілами системи; будемо позначати їх f_{ij} (i, j – номери тіл системи). Зовнішні - це сили, які діють з боку тіл, що не входять до даної системи; будемо позначати їх F_k .

1.6. Закон збереження імпульсу

Напишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла, розглянутої системи з трьох тіл (2.10):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Додаємо ці рівняння. Внутрішні сили взаємно компенсують одна одну, тому відповідні доданки знищуються, і в результаті отримуємо рівняння:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{P}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.26)$$

де $\vec{P}_{\text{сист.}}$ – повний імпульс системи тіл, $\vec{F}$ – векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему. Якщо зовнішні сили не діють на систему, то така

$$\frac{d\vec{P}_{\text{сист}}}{dt} = 0,$$

система називається замкненою. Для замкненої системи

$$\text{або } \vec{P}_{\text{сист.}} = \text{const} \quad (1.27)$$

Тобто, імпульс замкненої системи тіл з часом не змінюється. Це твердження і є законом збереження імпульсу.

Для замкненої системи: $\vec{P}_{\text{сист.}} = m\vec{v}_c = \text{const}$, де $\vec{v}_c$ – швидкість центра інерції.

$$\frac{d\vec{P}_{\text{сист}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\vec{a}_c = 0,$$

Звідки маємо:

де $\vec{a}_c$ – прискорення центра інерції. Тобто, для замкненої системи $\vec{a}_c = 0$. Таким чином, у замкненій системі тіл центр інерції системи або рухається рівномірно і прямолінійно, або залишається нерухомим (обидва ці стани об'єднуються умовою: $\vec{a}_c = 0$). Система відліку, в якій центр інерції

нерухомий називається системою центра інерції або c – системою. Така система відліку інерціальна.

1.7. Механічна робота

Дія сили на шляху s характеризується роботою, яка визначається

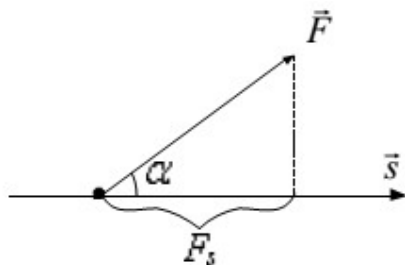


Рис.1.12

за формулою $A = F s \cos \alpha = F_s s$,

де $F_s = F \cos \alpha$ - проекція сили на напрям переміщення тіла.

Якщо ввести скалярний добуток двох векторів,

то отримаємо скалярну величину: $\vec{F} \vec{s} = F s \cos \alpha$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{s}$ (рис.1.12).

Тоді формулу для роботи можна переписати у векторному вигляді: $A = \vec{F} \vec{s}$.

Формулою можна користуватися тільки коли $F_s = F \cos \alpha$.

Зрозуміло, що сила, яка перпендикулярна переміщенню, роботи не виконує.

Якщо $F_s \neq \text{const}$, то для розрахунку роботи слід розбити весь шлях на елементарні ділянки Δs . Ці ділянки настільки малі, що силу можна вважати незмінною на кожній ділянці. Уся робота від початкової точки 1 до кінцевої

$$A_{12} = \int_1^2 F_s ds = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s},$$

точки 2 дорівнює:

Потужність - це фізична величина, яка характеризує роботу за одиницю часу.

Якщо за час Δt виконується робота ΔA , то середня потужність за час Δt :

$$N_{\text{сеп}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність у довільну момент часу t визначається за формулою:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}.$$

Використовуючи формулу для роботи отримуємо:

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

Таким чином, миттєва потужність дорівнює скалярному добутку сили на швидкість. У системі СІ потужність вимірюється у Ватах.

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.}$$

Консервативні та неконсервативні сили

Поле сил, робота яких не залежить від шляху, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла, має назву потенціального, а сили, які діють у цьому полі – консервативних.

Основна властивість потенціального поля сил: робота консервативних сил по замкненому шляху дорівнює нулю.

Покажемо, що це так. Для цього на замкненому шляху виділимо дві довільні точки 1 і 2, які розбивають весь шлях на дві ділянки I і II. Тоді повна робота по замкненому шляху A дорівнює: $A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}$.

При зміні напрямку руху робота змінює знак. Тому $(A_{21})_{II} = - (A_{12})_I$

і повна робота дорівнює нулю: $A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II} = (A_{12})_I - (A_{12})_I = 0$

Справедливе і обернене твердження: якщо робота по замкненому шляху дорівнює нулю, то поле сил – потенціальне.

Приклади силових полів:

1. Поле сил тертя. Робота сил тертя: $dA_{\text{тер}} = \vec{F}_{\text{тер}} \vec{v} dt = -F v dt < 0$,

тобто завжди від'ємна. Тому робота сил тертя по замкненому шляху ніколи не дорівнює нулю і отже сили тертя – неконсервативні сили.

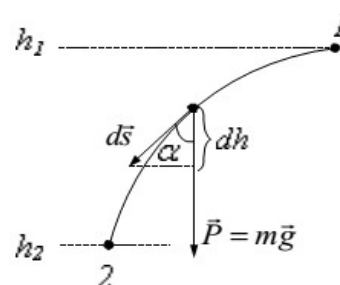
2. Поле сил тяжіння. Сила тяжіння $P = mg$, де g – прискорення вільного

падіння (рис.1.13). Робота при переміщенні тіла з висоти h_1 на висоту h_2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{P} d\vec{s} = \int_1^2 P \cos \alpha ds.$$

Врахуємо, що $ds \cos \alpha = -dh$,

де знак мінус обираємо, оскільки відлік висоти h – вгору. Рис.1.13



Тоді маємо:

$$A_{12} = -\int_1^2 P dh = -mg \int_1^2 dh = mg(h_1 - h_2).$$

Робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії і визначається тільки початковим і кінцевим положенням. Тому поле сил тяжіння - потенціальне, а сили тяжіння - консервативні.

1.8. Енергія

Енергія – це фізична величина, що характеризує здатність тіла виконувати механічну роботу.

Енергія тіла обумовлена двома причинами:

- а) рухом тіла з деякою швидкістю; пов'язана з цією причиною енергія має назву кінетичної енергії (тобто енергії руху);
- б) знаходженням тіла у потенціальному полі сил; пов'язана з цією причиною енергія має назву потенціальної енергії (тобто енергії взаємодії, енергії положення у потенціальному полі сил).

Повна механічна енергія системи тіл, між якими діють консервативні сили, складається із суми кінетичних енергій усіх тіл системи і потенціальної енергії взаємодії між тілами системи, як цілого.

Кінетична енергія

Розглянемо тіло, що рухається зі швидкістю v і на яке діє сила F .

Робота сили над тілом за час dt визначається: $dA = F v dt$

Із другого закону Ньютона: $F dt = m dv$

Таким чином, маємо: $dA = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$

Робота виконується за рахунок зміни величини, яка у формулі стоїть у дужках. Величина, яка визначає роботу, є енергія, тому ця енергія - енергія руху, тобто кінетична енергія: $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Робота при цьому дорівнює: $dA = dE_k$

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо: $A_{12} = E_{k2} - E_{k1}$

Тобто робота, яка виконується над тілом, дорівнює приросту його кінетичної енергії.

Потенціальна енергія

Розглянемо тіло, що знаходиться у потенціальному полі сил (див. рис. 1.14). Кожній точці поля у відповідність поставимо значення деякої функції $E_p(\mathbf{r})$ наступним чином.

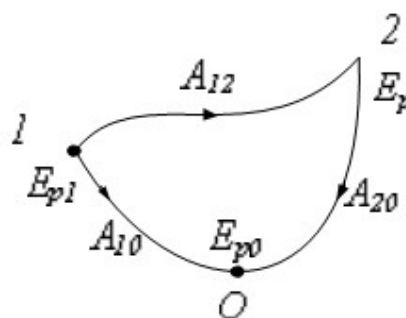


Рис. 1.14

У точці O даємо значення E_{p0} . Для точок 1 і 2 значення E_p визначимо так :

$$E_{p1} = E_{p0} + A_{10}^{KC} \quad E_{p2} = E_{p0} + A_{20}^{KC},$$

де A_{10}^{KC} і A_{20}^{KC} – робота консервативних сил потенціального поля по переміщенню тіла

відповідно з точок 1 і 2 у точку O . Таким чином зробимо для будь - якої точки простору розрахунок зміни потенціальної енергії тіла

$$E_{p1} - E_{p2} = (E_{p0} + A_{10}^{KC}) - (E_{p0} + A_{20}^{KC}) = A_{10}^{KC} - A_{20}^{KC} = A_{10}^{KC} + A_{02}^{KC}$$

Оскільки робота консервативних сил не залежить від форми шляху, то

$$A_{10}^{KC} + A_{20}^{KC} = A_{12}^{KC} \text{ і отже маємо: } A_{12}^{KC} = E_{p1} - E_{p2} \quad (1.28)$$

Таким чином за допомогою функції $E_p(\mathbf{r})$ можна визначити роботу, яка виконується над тілом силами потенціального поля. E_p називають потенціальною енергією.

Розглянемо приклади визначення потенціальної енергії.

1. Потенціальна енергія деформованої пружини

Визначимо роботу при пружних деформаціях. Сила пружності

$F_x = -kx$, де x – деформація пружини, k - коефіцієнт пружності.

$$A_{12} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2}.$$

Тоді робота:

а потенціальна енергія : $E_p = kx^2/2$.

2. Потенціальна енергія у полі сил тяжіння.

Робота у полі сил тяжіння, як вже визначено раніше, дорівнює :

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

Тоді потенціальна енергія у полі сил тяжіння : $E_p = mgh$.

Якщо кінетична енергія є характеристикою одного тіла, то потенціальна енергія – характеристика системи тіл.

1.9. Закон збереження повної механічної енергії

Розглянемо систему із N тіл, між якими діють як консервативні, так і неконсервативні сили.

Кожному взаємному розташуванню тіл можна приписати певне значення потенціальної енергії, а роботу консервативних сил по зміні конфігурації системи визначити за формулою: $A_{12}^{KC} = E_{P1} - E_{P2}$

Повна робота, яка виконується усіма силами (внутрішніми консервативними, внутрішніми неконсервативними і зовнішніми) над i -тим тілом йде на збільшення кінетичної енергії тіла.

$$(A_{12}^{KC})_i + (A_{12}^{HKC})_i + (A_{12}^{зовн})_i = (E_{K2})_i - (E_{K1})_i \quad (1.29)$$

Підсумуємо (2.13) по усім тілам системи і отримаємо:

$$A_{12}^{KC} + A_{12}^{HKC} + A_{12}^{зовн} = E_{K2} - E_{K1} \quad (1.30)$$

Врахуємо формули (2.13) і (2.15) та отримаємо:

$$(E_{K2} + E_{P2}) - (E_{K1} + E_{P1}) = A_{12}^{HKC} + A_{12}^{зовн}$$

$$\text{Звідки маємо:} \quad E_2 - E_1 = A_{12}^{HKC} + A_{12}^{зовн} \quad (1.31),$$

де E_1 – початкова повна механічна енергія системи;

E_2 – кінцева повна механічна енергія системи.

Якщо у системи тіл відсутні неконсервативні сили ($A_{12}^{HKC} = 0$) і система замкнена ($A_{12}^{зовн} = 0$), тоді маємо: $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$, тобто $E = \text{const}$.

Таким чином, у замкненій системі тіл, в якій діють тільки консервативні сили, повна механічна енергія системи є величиною сталою. Це і є закон збереження повної механічної енергії.

Робота при переміщенні тіла в потенціальному полі

Розглянемо роботу з переміщення тіла у потенціальному полі сил з положення 1 у положення 2 (рис. 2.6).

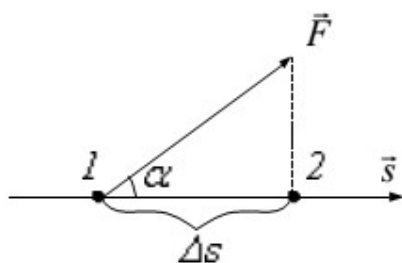


Рис.1.15

$$\Delta A = E_{P1} - E_{P2} = - (E_{P2} - E_{P1}) = - \Delta E_P \quad (1.32),$$

де ΔE_P - приріст потенціальної енергії.

$$\text{З іншого боку : } \Delta A = F_S \Delta s \quad (1.33)$$

З формул (1.32) і (1.33) отримуємо формулу для середнього значення сили на ділянці шляху Δs :

$$F_S = - \Delta E_P / \Delta s, \quad (1.34), \text{ де } F_S - \text{проекція сили на напрям переміщення } \Delta s.$$

Щоб отримати значення сили у даній точці потрібно взяти

$$\text{границю при } \Delta s \rightarrow 0: \quad F_S = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta E_P}{\Delta s} = - \frac{\partial E_P}{\partial s} \quad (1.35)$$

Зв'язок між потенціальною енергією і силою

Якщо у якості напрямку s взяти координатні осі, то для проекцій F отримуємо

$$F_x = - \frac{\partial E_P}{\partial x}; F_y = - \frac{\partial E_P}{\partial y}; F_z = - \frac{\partial E_P}{\partial z}.$$

$$\text{Сила через проекції визначається формулою : } F = x_0 F_x + y_0 F_y + z_0 F_z \quad (1.36),$$

де x_0, y_0, z_0 – орти (одиничні вектори) координатних осей.

$$\text{Тоді маємо: } F = - (x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}) E_P \quad (1.37)$$

Вираз в дужках у формулі (1.37) називається векторним оператором набла і позначається ∇ . $\nabla = x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}$

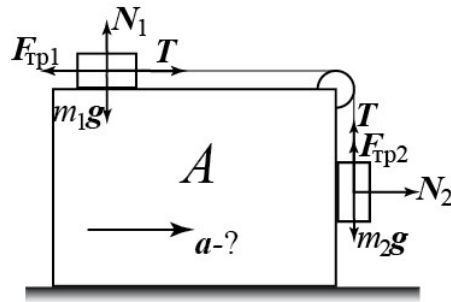
Якщо подіяти оператором набла на скалярну функцію, то отримуємо градієнт функції. Отже маємо: $F = - \nabla E_P$ (1.38)

Таким чином, сила, що діє в потенціальному силовому полі, дорівнює градієнту від потенціальної енергії, взятому з оберненим знаком.

Розглянемо приклади задач.

Задача 1.11.

З яким мінімальним прискоренням слід переміщати в горизонтальному напрямі брусок A (див. рис. 2.7), щоб тіла 1 і 2 не рухались відносно нього? Маси тіл однакові, коефіцієнт тертя між бруском і обома тілами дорівнює k . Маси блока й нитки нехтовно малі, тертя в блоці відсутнє.



Розв'язання.

Рівняння руху тіла m_1 :

Рис. 1.16

$$m_1 a = T + F_{\text{тр}} + N_1 + m_1 g,$$

де T – сила натягу нитки.

Проекція на горизонтальну вісь дає:

$$m_1 a = T - k m_1 g. \quad (1)$$

Оскільки тіло m_2 залишається в спокої відносно бруска A , то аналогічно отримуємо:

$$m_2 g = T + k m_2 g. \quad (2)$$

Зазначивши, що $m_1 = m_2 = m$, віднімемо (1) від (2):

$$mg - ma = kma + kmg,$$

$$(1 - k)mg = (1 + k)ma,$$

$$a = \frac{1 - k}{1 + k} g.$$

Задача 1.12.

Куля, пробивши дошку товщиною h , змінила свою швидкість від v_0 до v (рис. 2.8). Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості.

Розв'язання.

За умовою задачі маємо:

$$F_{\text{оп}} = -kv^2,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{\text{оп}}}{m} = -\frac{kv^2}{m},$$

звідки

$$dt = -\frac{m}{k} \frac{dv}{v^2}, \quad (1)$$

$$t = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

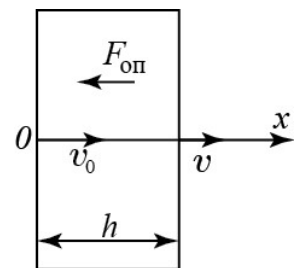


Рис. 1.17

Визначимо невідоме m/k . Швидкість кулі:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$dt = \frac{dx}{v}.$$

Підставляємо в (1):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{v} &= -\frac{m}{k} \frac{dv}{v^2}, \\ dx &= -\frac{m}{k} \frac{dv}{v}.\end{aligned}$$

Інтегруємо останній вираз від 0 до h :

$$\begin{aligned}h &= \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v}, \\ \frac{m}{k} &= \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v}}.\end{aligned}$$

Отже,

$$t = \frac{v_0 - v}{vv_0} \cdot \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v}}.$$

Задача 1.13.

Ланцюжок AB завдовжки l знаходиться в гладенькій трубці так, що частинка її довжини h вільно звисає, дотикаючись своїм кінцем B до поверхні стола (рис. 2.9а). В якийсь момент кінець A ланцюжка відпустили. З якою швидкістю він висковзне із трубки?

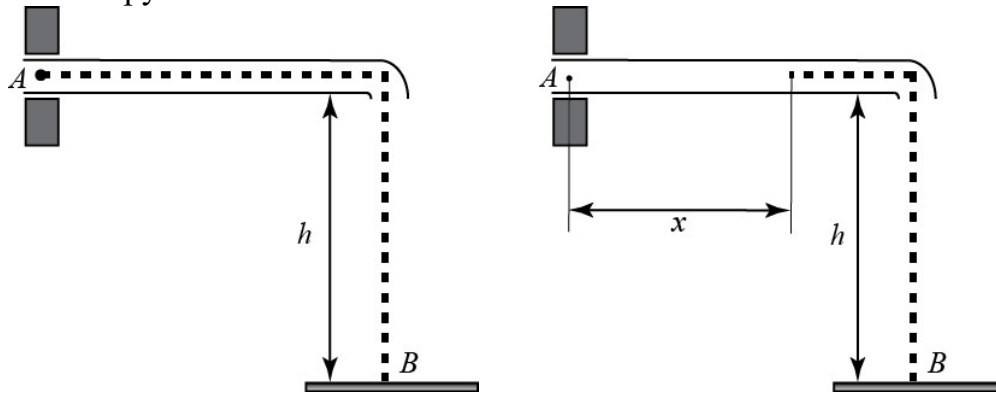


Рис.1.18

Розв'язання.

Діюча сила – сила тяжіння вертикальної частинки ланцюжка:

$$F = \frac{h}{l} mg. \quad (1)$$

Під дією цієї сили прискорюється маса

$$m_1 = \frac{l - x}{l} m, \quad (2)$$

де x – відстань верхнього кінця від точки A (рис. 2.5б). Згідно з другим законом Ньютона,

$$\frac{h}{l} mg = \frac{l - x}{l} m \ddot{x}.$$

Звідси

$$(l - x) \ddot{x} = gh. \quad (3)$$

Але

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Перепишемо (3) так:

$$v dv = \frac{gl}{l-x} dx.$$

Інтегруємо це рівняння в межах від $x = 0$ до $x = l - h$ та дістанемо:

$$v = \sqrt{2gh \ln \frac{l}{h}}.$$

Задача 1.14.

Невеличке тіло починає ковзати з вершини гладкої сфери радіуса R . Знайти швидкість тіла та кут φ між вертикаллю та радіус-вектором відносно центра сфери в момент відриву від неї.

Розв'язання.

Рівняння руху тіла визначає другий закон Ньютона (рис. 2.10):

$$\begin{aligned} m\mathbf{g} + \mathbf{N} &= m\mathbf{a}, \\ a &= a_n + a_\tau. \end{aligned}$$

Розв'язання цього рівняння:

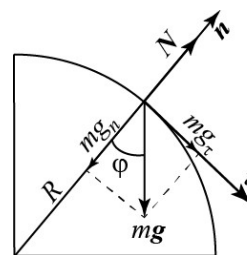


Рис.1.19

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi, \\ -m \frac{v^2}{R} = -mg \cos \varphi + N. \end{cases}$$

В момент відриву $N = 0$,

$$v^2 = R g \cos \varphi$$

(1)

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi.$$

Виключаємо час:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt}, \\ dx &= R d\varphi, \\ dt &= \frac{R d\varphi}{v}, \\ \frac{v dv}{R d\varphi} &= g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Після інтегрування отримуємо:

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Прирівнюючи (1) та (2), маємо: $\cos \varphi = \frac{2}{3}$,

$$\varphi = \arccos \frac{2}{3}.$$

Тоді

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Задача 1.15.

Невеличка муфточка масою $m = 0,15$ кг рухається по гладкому дроту, вигнутому в горизонтальній площині у вигляді дуги кола радіуса $R = 50$ см (рис. 2.11 – вигляд зверху). У точці 1, де швидкість муфточки $v_0 = 7,5$ см/с, на неї почала діяти стала горизонтальна сила F . Знайти швидкість муфточки в точці 2, якщо $F = 80$ Н.

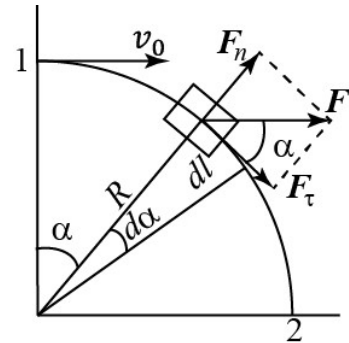


Рис.1.20

Розв'язання.

З рис. 2.5 очевидно, що

$$dl = R d\alpha.$$

Кінетична енергія муфточки в будь-якій точці складається з початкової кінетичної енергії та роботи сили F за час її дії під час руху муфточки до даної точки:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \int_1^2 F \cos \alpha dl = \frac{mv_0^2}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR \cos \alpha d\alpha = \frac{mv_0^2}{2} + FR.$$

Звідси знаходимо швидкість в точці 2:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2FR}{m}} = 16 \text{ м/с}.$$

Задача 1.16.

Уздовж похилої площини, що утворює з горизонтом кут α , підіймають тіло. Коефіцієнт тертя k . Під яким кутом β до похилої площини треба спрямувати силу, щоб вона була найменшою?

Розв'язання.

Умова рівноваги тіла, яка впливає з другого закону Ньютона:

$$\mathbf{F}_T + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

В проекціях (рис. 2.12):

$$\begin{cases} F_x - mg_x - F_T = 0, \\ N + F_y - mg_y = 0, \\ F \cos \beta = mg \sin \alpha + kN, \\ F \sin \beta = mg \cos \alpha - N, \\ F = \frac{mg(\sin \alpha + k \cos \alpha)}{k \sin \beta + \cos \beta}. \end{cases}$$

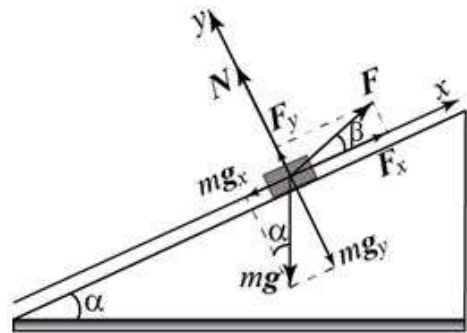


Рис.1.21

Сила F буде мінімальною, якщо знаменник максимальний. Умова екстремуму знаменника:

$$\begin{aligned}(k \sin \beta + \cos \beta)' &= 0, \\ k &= \operatorname{tg} \beta, \\ \beta &= \arctg k.\end{aligned}$$

Задача 1.17.

Невеличке тіло пустили знизу вгору по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 15^\circ$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо під час підйому тіла час t_1 виявився в $\eta = 2,0$ меншим від часу спуску.

Розв'язання.

На рис. 1.22 зображено рух тіла під час спуску (при підйомі сила тертя спрямована в протилежному напрямку).

З другого закону Ньютона маємо:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

або в вибраній системі відліку

$$F_x = ma_x.$$

Сила тертя

$$F_{\text{тр}} = kN.$$

Оскільки $N = mg \cos \alpha$, то прискорення тіла при підніманні і при спусканні будуть відповідно:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F_1}{m} = g(\sin \alpha + k \cos \alpha), \\ a_2 = \frac{F_2}{m} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha). \end{cases}$$

Оскільки

$$S = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

то

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta} = \frac{t_1}{t_2} &= \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha - k \cos \alpha}{\sin \alpha + k \cos \alpha}}, \\ k &= \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha = 0,16.\end{aligned}$$

Задача 1.18.

На гладенькому горизонтальному столі лежать два однакових бруски, з'єднані пружиною жорсткістю k і довжиною l_0 . На лівий брусок раптово почала діяти постійна сила $\mathbf{F}$, напрямлена вздовж пружини. Знайти мінімальну та максимальну відстань між брусками.

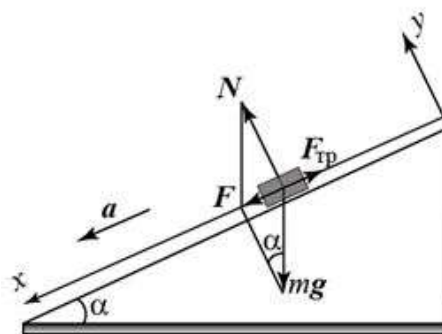


Рис.1.22

Розв'язання.

Робота сили F спрямована:

а) на деформацію пружини;

б) на створення кінетичної енергії обох брусків:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Коли пружина максимально деформована (стиснута), тоді обидва бруски мають однакові швидкості, тобто рухаються як одне ціле. Якщо деформація припиниться, то

$$Fx = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2. \quad (1)$$

Крайній брусок буде рухатися під дією пружної сили, тому можемо записати:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

звідки

$$kx^2 = mv^2. \quad (2)$$

З (1) та (2) отримуємо:

$$Fx = kx^2,$$

або

$$x(F - kx) = 0.$$

Це рівняння має два корені:

$$x = 0,$$

тобто $l - l_0 = 0$ або $l = l_0$;

$$x = \frac{F}{k},$$

тобто $l - l_0 = F/k$ або $l = l_0 + F/k$.

Бачимо, що

$$l_{\min} = l_0, \quad l_{\max} = l_0 + F/k.$$

1.10. Механіка твердого тіла

У механіці тверде тіло розглядається як система жорстко зв'язаних частинок (матеріальних точок), кожна з яких рухається разом із центром мас тіла і в той же час обертається навколо нього. Відповідно, в кінематиці рух описують як лінійними, так і кутовими величинами.

В динаміці твердого тіла теж, окрім "звичайних" характеристик (сила, маса, імпульс), використовують систему кутових динамічних величин, які називаються "моментами". А саме, стан руху характеризують моментом імпульсу, силову дію - моментом сили, а інертність - моментом інерції.

1.11. Момент сили

Розділяють моменти сил відносно точки і відносно осі.

1. Момент сил відносно точки.

Моментом сили $\vec{M}$ відносно точки O називається векторний добуток вектору $\vec{r}$, проведеного у точку прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$ (рис.1.23). Тобто

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1.39).$$

Модуль моменту сили відносно точки:

$$M = F \cdot r \sin \alpha = F \cdot l \quad (1.40),$$

де l - довжина перпендикуляра, який проведено з точки O на лінію дії сили, і називається плечем сили.

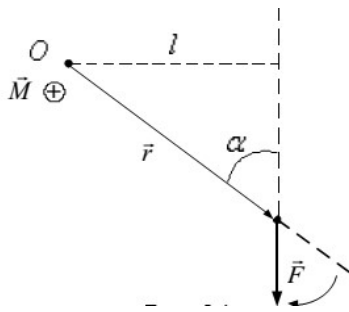


Рис.1.23

Згідно з визначенням векторного добутку на рис.1.23 вектор $\vec{M}$ направлений від нас перпендикулярно до площини малюнка і його позначено хрестиком у колі.

2. Момент сили відносно осі

Щоб визначити момент сили M_z відносно осі z , потрібно визначити його відносно будь-якої точки на даній осі і взяти складову вздовж цієї осі (див. рис. 3.2): $M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z \quad (1.41).$

Формулу (1.41) можна перетворити до виду:

$$M_z = [\vec{R}, \vec{F}_\tau]_z \quad (1.42),$$

де $\vec{R}$ – радіус - вектор точки у площині обертання,

$\vec{F}_\tau$ – тангенціальна складова сили $\vec{F}$, яка діє на тіло.

Модуль моменту сили відносно осі: $M_z = F_\tau \cdot R$,

тобто дорівнює добутку тангенціальної складової сили на радіус кола, по якому обертається матеріальна точка.

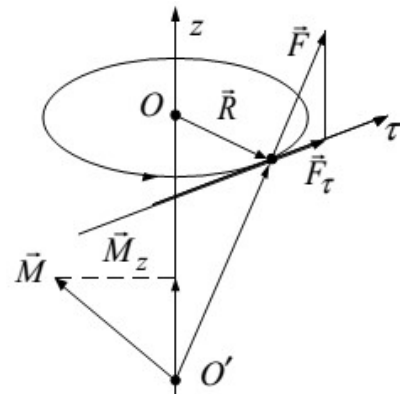


Рис.1.24

Сумарний момент внутрішніх сил завжди дорівнює нулю, так як за третім законом Ньютона $F_{12} = -F_{21}$ для будь-якої пари внутрішніх сил і $\Sigma M_{\text{внутр.сил}} = 0$.

1.12. Момент інерції матеріальної точки

Розіб'ємо тверде тіло на елементарні маси Δm_i , кожна з яких настільки мала, що її можна вважати матеріальною точкою (на рис.1.25 показана одна з них).

Напишемо рівняння другого закону Ньютона для

$$\text{елементарної маси } \Delta m_i: \quad \Delta m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad (1.43).$$

Проектуємо вектори у формулі (3.5) на напрям

вздовж дотичної. В результаті отримуємо:

$$\Delta m_i \mathbf{a}_{i\tau} = \mathbf{F}_{i\tau} \quad (1.44)$$

Помножимо (3.6) на r_i і врахуємо, що $a_{i\tau} = \beta r_i$.

$$\text{Тоді отримаємо: } (\Delta m_i r_i^2) \beta = F_{\tau i} r_i = M_{zi} \quad (1.45)$$

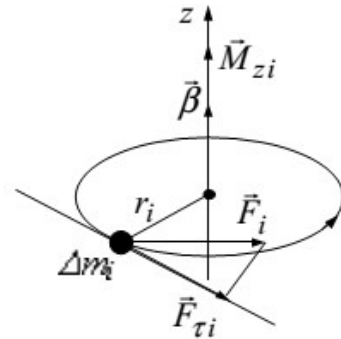


Рис.1.25

де M_{zi} момент сили $\mathbf{F}_i$ відносно осі z .

Так як β і M_{zi} мають однаковий напрям, то формулі (1.45) можна надати векторний вигляд: $(\Delta m_i r_i^2) \beta = M_{zi} \quad (1.46)$

Величина $I_{zi} = \Delta m_i r_i^2$ у формулі (3.8) має назву моменту інерції матеріальної точки відносно осі z .

Основне рівняння динаміки обертального руху твердих тіл

Результуючий момент M_{zi} , що діє на елементарну масу Δm_i (див.рис.1.25), розіб'ємо на момент внутрішніх сил і момент зовнішніх сил:

$$I_{zi} \beta = M_{zi}^{\text{зовн.}} + M_{zi}^{\text{внутр.}} \quad (1.47).$$

Формулу (1.47) підсумуємо за всіма елементарними масами, на які розбили тверде тіло: $\beta \Sigma I_{zi} = \Sigma M_{zi}^{\text{зовн.}} + \Sigma M_{zi}^{\text{внутр.}} \quad (1.48).$

Раніше було доведено, що $\Sigma M_{zi}^{\text{внутр.}} = 0$.

Введемо позначення:

$\Sigma I_{zi} = I_z$ – момент інерції твердого тіла відносно осі z ,

$\Sigma M_{zi}^{\text{зовн.}} = M_z$ – результуючий момент зовнішніх сил.

Тоді отримуємо основне рівняння динаміки обертального руху для твердого тіла: $I_z \beta = M_z$ (1.49).

1.13. Момент інерції твердого тіла

Момент інерції твердого тіла – це міра інертності тіла при обертальному русі, він дорівнює сумі моментів інерції елементарних мас, на які можна розбити тіло:

$$I_z = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm. \quad (1.50).$$

Розмірність моменту інерції: $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Перейдемо від інтегрування по масі до інтегрування по об'єму, врахувавши, що $dm = \rho \cdot dV$. Тоді формула (1.50) набуває вигляду:

$$I_z = \int \rho r^2 dV \quad (1.51).$$

Для однорідного тіла $\rho = \text{const}$ і тому:

$$I_z = \rho \int r^2 dV. \quad (1.52)$$

Як приклад, визначимо момент інерції циліндра.

Розіб'ємо весь об'єм циліндра на кільцеві шари товщиною dr і радіусу r (рис. 1.26). Об'єм одного такого кільцевого шару дорівнює: $dV = 2\pi r h dr$.

Підставляючи dV у формулу (1.52) отримуємо:

$$I_z = 2\pi \rho h \int r^3 dr. \quad (1.53)$$

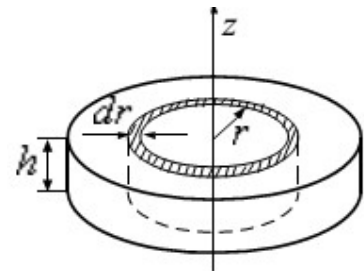


Рис.1.26

Інтегрування по об'єму звелось до інтегрування по радіусу з межами від 0 до R – радіусу циліндра.

В результаті отримуємо формулу:

$$I_z = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4. \quad (1.54)$$

Враховуючи, що маса циліндру $m = \pi R^2 h$, приходимо до кінцевого виразу для моменту інерції циліндру: $I_z = m R^2 / 2$ (1.55).

Формула (1.55) визначає момент інерції однорідного циліндра відносно його власної осі симетрії. Це головний момент інерції циліндра.

Моменти інерції різних тіл

Вісь, положення якої залишається незмінним в просторі при обертанні навколо неї тіла у відсутності зовнішніх сил, називається вільною віссю. Для тіла будь - якої форми та довільним розподілом маси існують три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через центр мас тіла і є вільними осями. Такі осі називають головними осями інерції. Моменти інерції, що визначені відносно головних осей, називають головними моментами інерції.

Наприклад: 1) момент інерції однорідної кулі, яка обертається навколо осі, що проходить через її центр, є головним моментом інерції і дорівнює

$$I_z = 2m R^2/5;$$

2) для однорідного стержня масою m і довжиною l , який обертається навколо осі, що проходить через його середину, момент інерції дорівнює $I_z = ml^2/12$. Це – головний момент інерції стержня.

1.14. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера: момент інерції тіла I відносно будь - якої

осі дорівнює сумі його моменту інерції I_c відносно осі, яка паралельна даній і проходить через центр інерції тіла, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (див. рис. 1.27).

$$I = I_c + ml^2 \quad (1.56).$$

Таким чином, теорема Штейнера визначає момент інерції тіла відносно довільної осі, яка не проходить через центр інерції тіла.

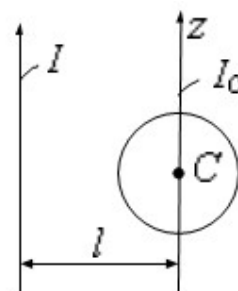


Рис.1.27

Наприклад, якщо куля на рис.1.27 має радіус R і масу m ,

то момент інерції відносно довільної осі на відстані l , дорівнює:

$$I = 2m R^2/5 + ml^2$$

1.15. Момент імпульсу матеріальної точки

Момент імпульсу L відносно точки дорівнює векторному добутку радіус - вектору r на вектор імпульсу $p = mv$ (рис.3.6):

$$L = [r, p] \quad (1.57)$$

Модуль моменту імпульсу: $L = p r \sin \alpha = p l \quad (1.58),$

де $l = r \sin \alpha$ – плече моменту імпульсу.

Момент імпульсу L_z відносно осі z визначається так:

$$L_z = [r, p]_z \quad (1.59),$$

де r – радіус - вектор точки, проведений із будь-якої точки, яка лежить на осі, крім центра обертання.

Визначимо зміну моменту імпульсу за часом і врахуємо, $dp/dt = F$, тоді маємо:

$$dL_z/dt = [r, F]_z = M_z \quad (1.60),$$

де M_z – результуючий момент сил, які діють на матеріальну точку.

1.16. Закон збереження моменту імпульсу

Розглянемо систему, що складається із N матеріальних точок. Для i -ої матеріальної точки системи з (3.22) виконується:

$$dL_i/dt = M_i^{\text{зовн.}} + M_i^{\text{внутр.}}, \text{ де } (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.61)$$

Ми розбили сили (i відповідно, моменти сил) на внутрішні та зовнішні. Формули(3.23) підсумуємо по всім матеріальним точкам системи.

$$d(\Sigma L_i)/dt = \Sigma M_i^{\text{зовн.}} + \Sigma M_i^{\text{внутр.}}$$

Для внутрішніх сил завжди $\Sigma M_i^{\text{внутр.}} = 0$.

Введемо $\Sigma L_i = L$ - повний момент імпульсу системи тоді, маємо:

$$dL/dt = M^{\text{зовн}} \quad (1.62).$$

Для замкненої системи $M^{\text{зовн}} = 0$ і, отже, $L = \text{const}$.

Таким чином, у замкненій системі матеріальних точок повний момент імпульсу є сталою величиною. Це і є закон збереження моменту імпульсу.

1.17. Момент імпульсу твердого тіла

Довільний рух твердого тіла можна розглядати як сукупність поступального та обертального рухів і описувати загальними рівняннями —

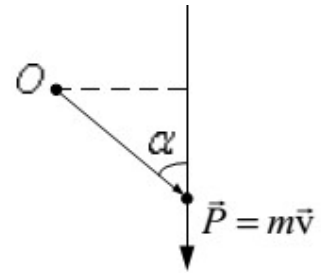


Рис.1.28

рівнянням руху певної жорстко зв'язаної з тілом точки, що визначає поступальну складову руху, та рівняння моментів відносно цієї точки, яке визначає обертальну складову руху тіла.

Розіб'ємо тверде тіло на елементарні маси Δm_i .

Для окремої маси Δm_i момент імпульсу (див.

рис.1.29): $\Delta L_i = m_i v_i r_i$.

Оскільки $v_i = \omega r_i$, то $\Delta L_i = m_i r_i^2 \omega$ (1.63).

Напрямки векторів ΔL_i та ω однакові, тому (1.25) можна перетворити у векторне рівняння:

$$\Delta L_i = m_i r_i^2 \omega$$

Момент імпульсу твердого тіла дорівнює:

$$L = \Sigma \Delta L_i = \omega \Sigma m_i r_i^2 \quad (3.64)$$

Оскільки $I = \Sigma m_i r_i^2$ – момент інерції тіла, то остаточно для моменту імпульсу твердого тіла маємо:

$$L = I \omega \quad (1.65)$$

Таким чином, момент імпульсу твердого тіла дорівнює добутку моменту інерції, взятого відносно тієї ж осі, на кутову швидкість.

1.18. Кінетична енергія твердого тіла

1. Кінетична енергія твердого тіла при обертанні навколо нерухомої осі

Нехай тверде тіло довільної форми обертається навколо нерухомої осі.

Розіб'ємо тверде тіло на окремі елементарні маси Δm_i .

Кінетична енергія для окремої елементарної маси Δm_i

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{I}{2} (\Delta m_i r_i^2) \omega^2,$$

Оскільки $v_i = \omega r_i$, то для всього твердого тіла :

$$E_k = \sum_{(i)} \Delta E_{ki} = \frac{I}{2} \omega^2 \sum_{(i)} \Delta m_i r_i^2.$$

Оскільки $I = \Sigma m_i r_i^2$ – момент інерції тіла, то кінцевий вираз:

$$E_k = I \omega^2 / 2 \quad (1.66)$$

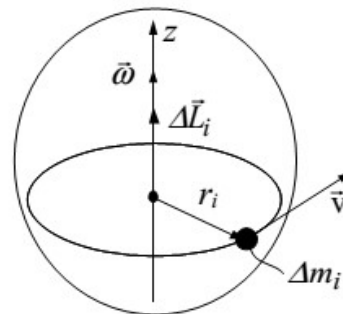


Рис.1.29

2. Кінетична енергія твердого тіла в загальному випадку

У загальному випадку рух – це накладання двох рухів: поступального зі швидкістю центра інерції v_c і обертального з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить через центр інерції тіла.

У цьому випадку формула для кінетичної енергії отримує такий простий вигляд:

$$E_k = mv_c^2/2 + I\omega^2/2 \quad (1.67).$$

Таким чином, кінетична енергія тіла у загальному випадку його руху складається з енергії поступального руху зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра інерції тіла, і енергії обертального руху навколо осі, яка проходить через центр інерції тіла.

1.19. Робота при обертанні твердого тіла

Як і раніше, розглянемо окрему елементарну масу Δm_i твердого тіла, F_i – зовнішня сила, яка діє на Δm_i (див. рис.1. 30).

За час dt тіло обертається на кут $d\varphi$ і елементарна

маса проходить шлях ds : $ds_i = r_i d\varphi$.

При цьому виконується робота:

$$dA_i = F_{\tau i} ds_i = F_{\tau i} r_i d\varphi = M_i d\varphi,$$

де $F_{\tau i}$ – тангенціальна складова сили F_i

M_i – момент сили F_i відносно осі обертання.

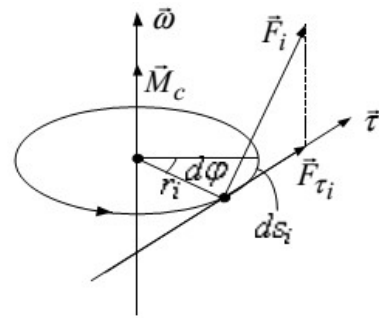


Рис.1.30

Робота над усім тілом за час dt : $dA = \sum dA_i = \sum M_i d\varphi = M d\varphi$ (3.30),

де M – результуючий момент сил, які діють на тіло.

Інтегруючи формулу (3.30), отримуємо: $A_{12} = M \Delta\varphi$ (1.68).

Таким чином, щоб визначити роботу при обертанні твердого тіла, потрібно результуючий момент сил, який діє на тверде тіло, інтегрувати по куту повороту від початкового кута φ_1 до кінцевого – φ_2

Розглянемо приклади задач.

Задача 1.19.

Однорідна куля масою $m = 5,00$ кг скочується без ковзання по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі через $t = 1,6$ с після початку руху.

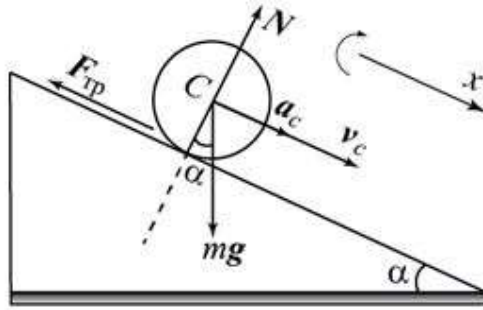


Рис.1.31

Для кулі

$$I_c = \frac{2mR^2}{5}. \quad (4)$$

З (1), (3) та (4) маємо:

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{5} a_c. \quad (5)$$

Підставивши (5) у (2), дістанемо:

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

Отже,

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} mg \sin \alpha.$$

Далі,

$$v_c = a_c t = \frac{5}{7} g t \sin \alpha, \\ \omega = \frac{v_c}{R} = a_c t = \frac{5 g t \sin \alpha}{7 R}.$$

Кінетична енергія:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{5gt \sin \alpha}{7} \right)^2 + \frac{mR^2}{5} \left(\frac{5gt \sin \alpha}{7R} \right)^2 = \frac{5}{14} mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2.$$

Задача 1.20.

Однорідний суцільний циліндр масою $m = 1,0$ кг висить у горизонтальному положенні на двох намотаних на нього невагомих нитках (див. рис.3.10). Циліндр опускається без поштовху. Визначити, якого натягу F зазнає під час опускання циліндра кожна з ниток, та за який час t циліндр опуститься на відстань $h = 50,0$ см.

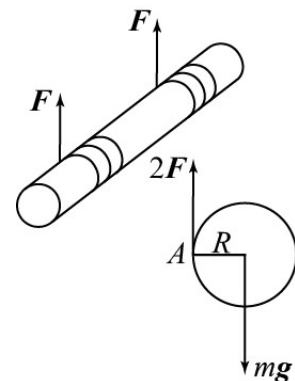


Рис.1.32

Розв'язання.

Рівняння сил:

$$\begin{aligned}mg - 2F &= ma, \\ F &= \frac{m}{2}(g - a).\end{aligned}\quad (1)$$

Рівняння моментів відносно осі A : $I\beta = R mg$
або, використовуючи теорему Штейнера, маємо

$$\begin{aligned}\left(mR^2 + \frac{mR^2}{2}\right)\frac{a}{R} &= R \cdot mg, \\ a &= \frac{2g}{3}.\end{aligned}\quad (2)$$

Підставляємо (2) в (1), тоді маємо:

$$F = \frac{m}{2}\left(g - \frac{2g}{3}\right) = \frac{mg}{6} = 1,64 \text{ Н.}$$

Циліндр опускається за законом:

$$h = \frac{at^2}{2},$$

отже,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{3h}{g}} = 0,39 \text{ с.}$$

Задача 1.21.

Дві невеличкі муфточки, маси яких відповідно $m_1 = 0,1$ кг і $m_2 = 0,2$ кг рухаються назустріч одна одній по гладкому горизонтальному дроту, зігнутому у вигляді кола, зі сталими нормальними прискореннями відповідно $a_1 = 3,0$ м/с² і $a_2 = 9,0$ м/с². Знайти нормальне прискорення складеної муфти, утвореної після зіткнення.

Розв'язання.

Оскільки зіткнення абсолютно непружне, то закон збереження імпульсу дає:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

Перепишемо це рівняння в проекціях на вісь координат, спрямовану уздовж напрямку руху першої муфточки безпосередньо перед зіткненням:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v,$$

де v – швидкість складеної муфти після зіткнення. Її нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad v = \sqrt{a_n R}.$$

Отримуємо:

$$m_1 \sqrt{a_1 R} - m_2 \sqrt{a_2 R} = (m_1 + m_2) \sqrt{a_n R},$$

звідки

$$a_n = \frac{(m_1 \sqrt{a_1} - m_2 \sqrt{a_2 R})^2}{(m_1 + m_2)^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.22.

Тонкий стальний ланцюжок з дуже дрібними ланками, який має довжину $l = 1,00 \text{ м}$ і масу $m = 10,0 \text{ г}$, лежить на горизонтальному столі (рис. 3.11). Ланцюжок витягнутий у пряму лінію, перпендикулярну до краю стола. Кінець ланцюжка звисає з краю стола. Коли довжина звисаючої частинки становить $\eta = 0,275$ довжини l , ланцюжок починає зісковзувати зі столу вниз.

Вважаючи ланцюжок однорідним за довжиною, знайти:

а) коефіцієнт тертя k між ланцюжком і столом;

б) роботу A сил тертя ланцюжка об стіл за час зісковзування;

в) швидкість v ланцюжка в кінці зісковзування.

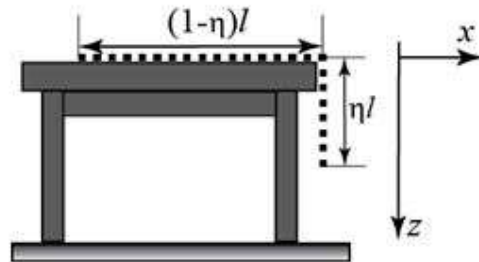


Рис. 1.33

Розв'язання.

а) зісковзування починається лише при

$$\eta mg = k(1 - \eta)mg,$$

звідки

$$k = \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (1)$$

б) Робота сил тертя при зісковзуванні ланцюжка на довжину dx :

$$dA = F_{\text{тр}}(-dx) = -k \left(\frac{x}{l} mg \right) dx = -\frac{kmg}{l} x dx,$$

де x – довжина горизонтальної частини ланцюжка.

$$A = -\frac{kmg}{l} \int_0^{(1-\eta)l} x dx = -\frac{kmg}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{(1-\eta)l} = -\frac{kmg}{2l} (1 - \eta)^2 l^2,$$

і врахувавши (1), дістанемо:

$$A = -\frac{1}{2} mgl\eta(1 - \eta) = -9,8 \text{ мДж}.$$

в) Сумарна робота сил тертя та тяжіння призводить до зміни кінетичної енергії ланцюжка від нуля до значення

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A.$$

Звідси знайдемо швидкість ланцюжка в кінці зісковзування:

$$v = \sqrt{\frac{2(A_{\text{тяж}} + A)}{m}}.$$

Знаходимо роботу сили тяжіння:

$$dA_{\text{тяж}} = \left(\frac{z}{l} mg\right) dz;$$

$$A_{\text{тяж}} = \frac{mg}{l} \int_{\eta l}^l z dz = \frac{mgl}{2} (1 - \eta^2).$$

Повна робота:

$$A_{\text{тяж}} + A = \frac{mgl}{2} (1 - \eta^2) - \frac{mgl\eta}{2} (1 - \eta) = \frac{mgl}{2} (1 - \eta).$$

Тепер знаходимо шукану швидкість:

$$v = \sqrt{\frac{gl}{1 - \eta}} = 2,67 \text{ м/с}.$$

Задача 1.13

Блок радіусом R може обертатися навколо своєї осі з тертям, що характеризується обертальним моментом $M_{\text{тр}}$, який не залежить від швидкості обертання блока. На блок намотана прикріплена до нього одним кінцем практично нерозтяжна нитка, до другого кінця якої підвішений тягар масою m (рис. 3.12). Тягар відпускають без поштовху, і він починає опускатися, розкручуючи блок. Знайти момент імпульсу $L_z(t)$ цієї системи тіл відносно осі блока через час t після початку її руху.

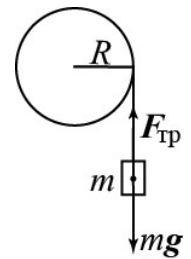


Рис. 1.34

Розв'язання.

Нехай p – імпульс, що набуло тіло за час t . Момент імпульсу, набутого за цей час:

$$L_z(t) = R \cdot p.$$

Приріст імпульсу дорівнює імпульсу сили за цей самий час:

$$dp = F dt,$$

$$p - p_0 = Ft,$$

$$p = (mg - F_{\text{тр}})t = \left(mg - \frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)t;$$

$$L_z(t) = R \left(mg - \frac{M_{\text{тр}}}{R}\right)t = (mgR - M_{\text{тр}})t.$$

Задача 1.14.

Однорідний суцільний циліндр масою m лежить на двох горизонтальних брусках. На циліндр намотана нитка, за звислий кінець якої тягнуть зі сталою вертикально напрямленою силою F (див. рис. 3.13). Знайти значення сили F , за якої циліндр буде котитися без ковзання, якщо коефіцієнт тертя дорівнює k .

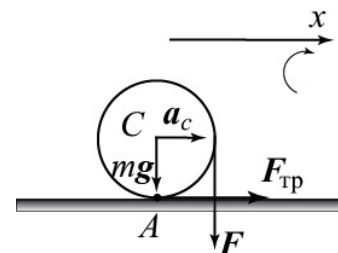


Рис. 1.35

Розв'язання.

Рівняння руху для центра мас:

$$ma_c = F_{\text{тр}} = k(mg + F).$$

Рівняння моментів відносно осі A :

$$I\beta = FR,$$

$$I = I_c + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Оскільки ковзання немає, то

$$\beta = \frac{a_c}{R},$$

$$I\beta = \frac{3}{2}mR^2 \cdot \frac{a_c}{R} = \frac{3}{2}mRa_c,$$

$$\frac{3}{2}mRa_c = FR,$$

$$ma_c = \frac{2F}{3}. \quad (2)$$

З (1) і (2) маємо:

$$k(mg + F) = \frac{2F}{3}.$$

Ковзання немає при

$$k \geq \frac{2F}{3(mg + F)}.$$

Звідси

$$3mgk + 3Fk \geq 2F,$$

$$3mgk \geq F(2 - 3k),$$

$$F \leq \frac{3mgk}{2 - 3k}.$$

Задача 1.15

Людина масою m_1 стоїть на краю однорідного диска масою m_2 і радіусом R , який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У певний момент людина почала рухатись до краю диска, зробила переміщення на кут φ' відносно диска і зупинилась. Нехтуючи розмірами людини, знайти кут, на який повернувся диск на момент зупинки людини.

Розв'язання.

Оскільки система замкнена, в ній зберігається момент імпульсу:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0, \quad (1)$$

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості людини і диска відносно Землі, I_1 та I_2 – їх моменти інерції відносно осі обертання. Але

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega'_1,$$

де ω'_1 – кутова швидкість людини відносно диска. Тому (1) перепишеться так:

$$I_1\omega_2 + I_1\omega'_1 + I_2\omega_2 = 0,$$

звідки

$$\omega_2 = -\frac{I_1 \omega'_1}{I_1 + I_2}.$$

Помноживши на час t до зупинки людини, отримуємо:

$$\varphi = -\frac{I_1 \varphi'}{I_1 + I_2}.$$

Оскільки

$$I_1 = m_1 R^2, \quad I_2 = \frac{m_2 R^2}{2},$$

то отримуємо:

$$\varphi = -\varphi' \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}.$$

Задача 1.16.

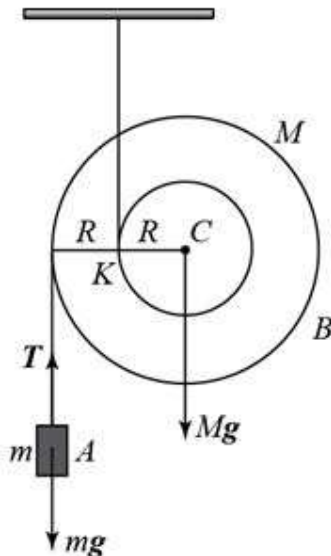


Рис.1.36

У системі, показаній на рис. 1.16, відомі маса m тягара A , маса M східчастого блока B , момент інерції останнього відносно його осі та радіуси східців блока R і $2R$. Маса ниток нехтовно мала. Знайти прискорення тягара A .

Розв'язання.

Відносно напрямку вектору a треба припустити, що його напрямлено донизу. Тоді для тягара A проекція рівняння руху

$$ma = mg - T. \quad (1)$$

Проекція рівняння моментів відносно K :

$$TR - MgR = (I + MR^2)\beta = (I + MR^2)\frac{a}{R}. \quad (2)$$

Комбінуючи (1) і (2), отримуємо:

$$a = \frac{g(m - M)}{M + m + I/R^2}.$$

Задача 1.17

Однорідна тонка квадратна пластина зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з одною з її сторін. У центрі пластинки по нормалі до неї пружно вдаряється кулька масою m , що летіла зі швидкістю v . Знайти:

- швидкість кульки v' після удару;
- горизонтальну складову результуючої сили, з якою вісь буде діяти на пластинку після удару.

Розв'язання.

Система «кулька-пластинка» незамкнена: крім сил, що врівноважують одна одну, в процесі удару виникає горизонтальна складова сили реакції

осі OO' (рис. 3.15). Під її дією пластинка отримує імпульс $\Delta p = m(v - v')$. Момент цього імпульсу відносно осі OO' :

$$\Delta p \cdot \frac{l}{2} = I\omega,$$

момент інерції пластинки відносно OO' :

$$I = \frac{1}{3}Ml^2,$$

звідки

$$\Delta p \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{3}Ml^2\omega,$$

а отже

$$v - v' = \frac{2M}{3m}l\omega. \quad (1)$$

За законом збереження енергії,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

$$v^2 - v'^2 = I\omega^2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega^2. \quad (2)$$

Ділимо (2) на (1) і отримуємо:

$$v + v' = \frac{l\omega}{2}. \quad (3)$$

Комбінуючи (1) і (3), дістаємо:

$$v = \frac{l\omega(3m + 4M)}{12m};$$

$$v' = \frac{l\omega(3m - 4M)}{12m}. \quad (4)$$

З (4) маємо:

$$\text{а) } v' = v \frac{3m - 4M}{3m + 4M}; \quad v' = v \frac{3m - 4M}{3m + 4M}.$$

б) Сила F , з якою діє вісь OO' на пластинку, дорівнює

$$F = M\omega^2 \frac{l}{2}.$$

Взявши ω з (4), отримуємо:

$$F = \frac{8Mv^2}{l\left(1 + \frac{4M}{3m}\right)^2}.$$

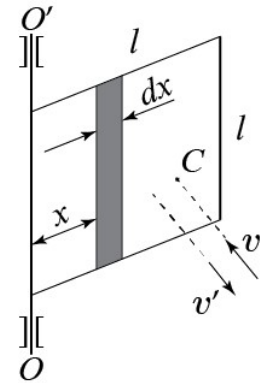


Рис. 1.37

2.Механічні коливання

Багато фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів (явищ) повторюються в часі, тобто відбуваються періодично. Прикладом таких періодичних явищ є рух маятника годинника, зміна заряду конденсатора коливального контуру, осциляції концентрацій складу під час хімічних реакцій, тощо. Подібні періодичні процеси називають коливальними або просто коливаннями.

Механічними коливаннями називають просторовий рух, під час якого відбувається часова повторюваність положення рухомого тіла.

Вільними є коливання, що спостерігаються в системі після припинення, як правило короткочасної, зовнішньої сили, яка збурюючи систему, виводить її з початкового стану спокою.

Гармонічними коливаннями називаються періодичні коливання фізичної величини (або будь-якої іншої) залежно від часу, які відбуваються згідно із законами синуса або косинуса.

Якщо в системі є тертя, вільні коливання починають згасати, тобто відбуваються певний обмежений час. Такі коливання називають згасаючими.

2.1. Вільні незгасаючі механічні коливання

Прикладом механічної коливальної системи є пружинний маятник. Пружна сила, яка зі сторони пружини діє на тіло, є внутрішньою силою коливальної системи. Величина і напрямок цієї сили залежать від стадії коливань, що безпосередньо характеризується миттєвим положенням прикріпленого до пружини тіла (рис.2.1) і напрямком його руху.

Вважаємо, що коливання пружинного маятника здійснюються без втручання зовнішніх сил. Також нехтуємо дією сили тертя.



Рис.2.1

За цих припущень тіло здійснює вільні незатухаючі коливання, які визначають як власні коливання.

При малих величинах зміщення внутрішня сила, під дією якої рухається тіло, є пружною. Вона, як відомо, пропорційна зміщенню і направлена протилежно до нього: $F_x = -kx$, де коефіцієнт k - жорсткість пружини.

Для описання руху пружинного маятника скористаємось другим законом Ньютона: $ma = F$, де m – маса точкового тіла, a – його прискорення. Напишемо це рівняння для проекцій: $ma_x = -kx$,

де a_x – проекція прискорення, яка є похідною другого порядку від

координати тіла $x = x(t)$, тобто від зміщення:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Рівняння руху набуває вигляду:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Це рівняння називають рівнянням руху одновимірного осцилятора. Поділимо

це рівняння на m і напишемо його у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.1)$$

де $\omega_0^2 = k/m$. Величину ω_0 називають власною частотою.

Отримане рівняння другого порядку називають диференціальним рівнянням вільних незгасаючих гармонічних коливань. Розв'язком цього рівняння є гармонічна функція: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

У випадку вільних незгасаючих коливань параметри A і φ_0 в ході коливального процесу не змінюються і залишаються сталими.

Модуль максимального зміщення A коливальної системи називають амплітудою. Миттєве значення координати під час коливального руху визначається аргументом гармонічної функції, який називають фазою: $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$, де φ_0 – початкова фаза.

Для характеристики періодичних процесів використовують поняття періоду, який, позначають T . Періодом коливань називають проміжок часу, за який здійснюється одне повне коливання. Тобто, період визначає найменший час, за який гармонічна функція «повертається» до свого будь-якого вихідного значення. Експериментально величину періоду можна знайти з відношення часу t до кількості n коливань, що відбулись за цей час: $T = t/n$. Для характеристики коливань використовують також поняття частоти, яка визначає кількість коливань, що відбуваються за одиницю часу:

$$f = 1/T. \text{ Період власних коливань: } T = 2\pi/\omega_0 \text{ або } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.2)$$

2.2. Енергія вільних незгасаючих коливань

При вивченні вільних незгасаючих коливань дією сили тертя нехтують, а отже для власних коливань має виконуватися закон збереження механічної енергії.

Потенціальна енергія коливальної системи визначається у власній системі координат, і для неї нульовим рівнем вибрано положення рівноваги. У випадку малих зміщень потенціальна енергія в положенні рівноваги може бути записана: $E_p = kx^2/2$, де k - коефіцієнт жорсткості коливальної системи, а x - зміщення. У разі коливань, які відбуваються у такому силовому полі, залежність потенціальної енергії від часу описується гармонічним законом і має вигляд: $E_n = k^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2$. Очевидно, що максимальне значення потенціальної енергії дорівнює $E_n^{max} = k^2 A^2 / 2$.

Під час коливань кінетична і потенціальна енергії окремо змінюються з часом. При найбільшому відхиленні від положення рівноваги, коли зміщення максимальне, а швидкість дорівнює нулю, коливальна система має тільки потенціальну енергію, величина якої дорівнює повній енергії системи.

Кінетична та повна енергія вільних незгасаючих коливань

Кінетична енергія коливальної системи: $E_{kin.} = mv^2/2$.

Для випадку гармонічних коливань швидкість описується виразом:

$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Отже, кінетична енергія змінюється з часом за законом: $E_{kin.} = m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2$.

Максимальне значення кінетичної енергії дорівнює: $E_{kin.} = m \omega_0^2 A^2 / 2$.

Обчислимо повну енергію коливань :

$$E = E_n + E_{kin.} = k^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2 + m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)/2.$$

При знаходженні суми врахуємо, що $\omega_0^2 = k/m$, тоді маємо:

$$E = k^2 A^2 / 2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = k^2 A^2 / 2$$

Таким чином, при вільних механічних незгасаючих коливаннях повна енергія залишається постійною. Цей результат є наслідком закону збереження механічної енергії, за яким при нехтуванні дією сили тертя сума кінетичної та потенціальної енергії повинна зберігатися.

2.3. Фізичний маятник

Фізичним маятником називається тіло довільної форми, яке може здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі.

На рис.2.2 вісь обертання фізичного маятника перпендикулярна до площини рисунку і

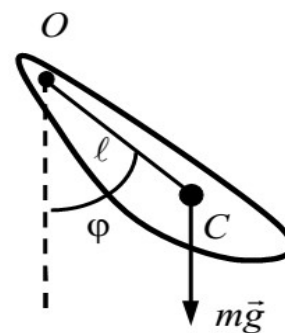


Рис.2.2

проходить через точку О. Центр мас тіла маятника (точка С на рис.2.2) не лежить на осі обертання, а в положенні рівноваги знаходиться нижче осі обертання. Положення тіла фізичного маятника під час коливального процесу характеризують кутом оберту φ , який визначають відносно положення рівноваги.

Рівняння обертального руху твердого тіла: $I \beta = M$ (2.3),

де β – кутове прискорення, I – момент інерції тіла, який визначений відносно осі обертання, M – момент сили, що також визначений відносно цієї ж осі. Момент сили створює сила тяжіння, її момент дорівнює: $M = -mg l \sin \varphi$, де знак мінус враховує, що момент сили тяжіння спричиняє рух, протилежний до початкового відхилення.

Якщо врахувати, що кутове прискорення визначається як похідна другого порядку від кута оберту φ , то рів.(3.33) набуває вигляду:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg l \sin \varphi .$$

У випадку малих коливань, коли $\varphi \rightarrow 0$, можна вважати $\sin \varphi \approx \varphi$. За такого наближення права частина рівняння обертального руху має вигляд:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg l \varphi$$

Вводячи позначення $\omega_0^2 = \frac{mg l}{I}$, отримаємо: $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$.

Отримане рівняння тотожне рівнянню механічних коливань, тому розв'язком отриманого рівняння також є гармонічна функція:

$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos (\omega_0 t + \alpha)$, де $\varphi_{\max}$ – амплітуда коливань, а α – їх початкова фаза.

Період коливань фізичного маятника визначається $T = 2\pi/\omega_0$, але кінцева

формула приймає інший вигляд:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg l}}$$

2.4. Математичний маятник

Якщо фізичне тіло має розміри, які значно менші l , то таке тіло можна вважати точковим. Забезпечити його обертання навколо горизонтальної осі можна, наприклад, коли тіло (це може бути кулька з малим радіусом, яку можна вважати точковим тілом) прикріплене до точки обертання за допомогою нерозтяжної нитки довжиною l . Така коливальна система

називається математичним маятником. Момент інерції точкового тіла відносно осі: $I = ml^2$. Використовуючи це співвідношення, знаходимо, що період коливань математичного маятника визначається за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Звідси вираз для власної частоти математичного маятника приймає

остаточний вигляд:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Приведена довжина - умовна характеристика фізичного маятника. Вона чисельно дорівнює довжині математичного маятника, період якого дорівнює періоду цього фізичного маятника. Приведена довжина обчислюється так:

$$l_{\text{пр.}} = I/md, \quad d - \text{відстань від точки підвісу до центру мас}$$

2.5. Загасаючі механічні коливання

Рівняння вільних загасаючих коливань

Незагасаючі вільні коливання є ідеалізацією. В реальній коливальній системі завжди присутні різноманітні сили тертя і опору, які призводять до втрат енергії коливань. Тому в дійсності вільні коливання є загасаючими – їхня амплітуда невпинно зменшується від початкового значення аж до нуля.

Розглянемо рівняння вільних загасаючих коливань. Нехай на тіло, крім квазіпружної сили $F = -kx$, діє сила опору, яка є пропорційною швидкості руху. Тоді рівняння руху приймає вигляд: $ma = -kx - rv$

Оскільки $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ і $v = \frac{dx}{dt}$, то:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}, \quad \text{де } r - \text{коефіцієнт опору.}$$

Звідки маємо:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введемо позначення коефіцієнта згасання:
$$\beta = \frac{r}{2m}$$

Тоді диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань набуде вигляду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

Розв'язок рівняння (2.4) має вигляд: $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$. (2.5)

В рів.(2.5) ω – циклічна частота, яка дорівнює: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Згасаючі коливання є неперіодичними коливаннями,

оскільки максимальне значення амплітуди у них не

повторюється. Період згасаючих коливань : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Знайдемо відношення значень амплітуди згасаючих

коливань в моменти часу t і T . $\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$.

натуральний логарифм відношення амплітуд, що відрізняються на період, називається логарифмічним декрементом згасання:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad \text{і} \quad \lambda = \beta T.$$

З'ясуємо фізичний зміст λ і β . Позначимо t - час, протягом якого амплітуда

зменшується в e разів. Тоді $\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta \tau} = e^1$ звідки $\beta \tau = 1$; $\beta = \frac{1}{\tau}$

Таким чином, коефіцієнт згасання β - це фізична величина, обернена до часу, протягом якого амплітуда зменшується у e разів; τ - час релаксації.

Якщо коефіцієнт згасання великий, то не тільки амплітуда швидко зменшується, але й помітно збільшується період коливань. Коли опір стає таким, що дорівнює критичному, то циклічна частота обертається в нуль і коливання припиняються. Такий процес називається аперіодичним. Відмінності полягають в наступному. При коливаннях тіло, що повертається в положення рівноваги, має запас кінетичної енергії. У випадку аперіодичного руху енергія тіла при поверненні в положення рівноваги виявляється витраченою на подолання сил опору і тертя. У реальних механічних

системах усі вільні коливання є згасаючими, тому для підтримки коливань необхідно систему періодично “підживлювати” енергією ззовні.

2.6. Вимушені механічні коливання

Розглянемо систему, на яку крім, пружної сили $(-kx)$ та сил опору

$(-rv)$, діє додаткова зовнішня періодична сила $F = F_0 \cos \omega t$

Коливання, які здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили, називаються вимушеними коливаннями.

Напишемо 2 закон Ньютона для вимушених коливань: $ma = -kx - rv + F$

Тоді диференціальне рівняння таких коливань:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань є неоднорідним. Загальний розв’язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв’язку неоднорідного рівняння і має

вигляд:

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Для даної коливальної системи амплітуда вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої періодичної сили і дорівнює:

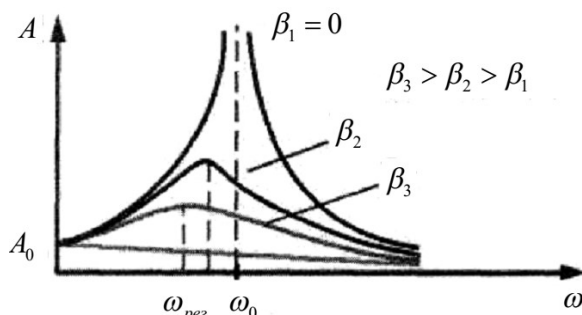


Рис.2.3

Явище різкого зростання амплітуди, коли частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи, називається резонансом. Резонансна частота :

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

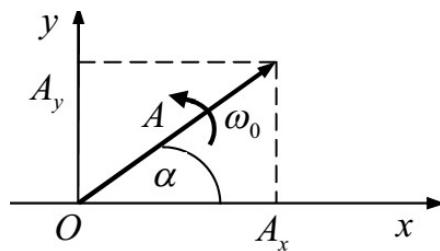
Залежність амплітуди від частоти при вимушених коливаннях наведена на рис. 2.3. Явище резонансу слід враховувати при конструювання різних машин і споруд.

2.7. Додавання гармонічних коливань

Метод векторних діаграм

Додавання гармонічних коливань – це знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система бере участь в кількох коливальних процесах. Розрізняють два граничних випадки: додавання коливань однакового напрямку і додавання взаємно перпендикулярних коливань.

При додаванні гармонічних коливань однакового напрямку широко використовується метод векторних діаграм. Методом векторних діаграм називається графічне зображення гармонічних коливань за допомогою вектору, довжина якого дорівнює амплітуді коливання (рис.2.4).



Якщо обертати цей вектор з кутовою швидкістю ω_0 , то координата проекції A_x буде змінюватися за законом: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Таким чином, проекція A_x кінця вектора на вісь x буде виконувати гармонічне коливання.

Рис.2.4

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$ і $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$

Обидва коливання зображуємо за допомогою векторів A_1 і A_2 (рис. 2.5).

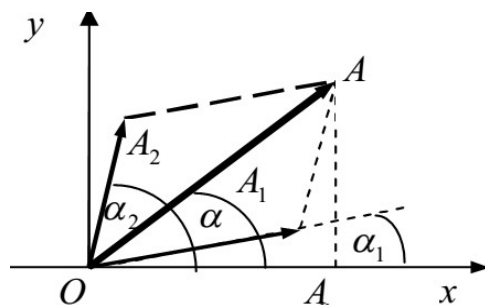


Рис.2.5

Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор A .

З рис. 2.5 бачимо, що за теоремою косинусів

амплітуда результуючих коливань дорівнює:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Початкову фазу результуючих коливань можна визначити із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Два коливальних процеси називаються когерентними коливаннями у випадку, коли вони відбуваються узгоджено, тобто так, що різниця їх фаз з

часом не змінюється. Таким чином, два гармонічних коливання – когерентні, коли їх циклічні частоти однакові.

Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Припустимо, що матеріальна точка M може виконувати коливання як вздовж осі x , так і вздовж перпендикулярної до неї осі y . Якщо збудити обидва коливання, то матеріальна точка буде рухатися за певною криволінійною траєкторією, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань. Виберемо початок відліку так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань: $x = A \cos \omega t, y = B \cos (\omega t + \alpha)$, де α - різниця фаз обох коливань.

Якщо позбавитись часу t , то рівняння результуючих коливань при додаванні взаємно перпендикулярних коливань має вигляд:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB} \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

Це рівняння еліпса, осі якого повернені відносно координатних осей x і y . Воно описує траєкторію точки M , яка виконує рух вздовж еліпса за час, що дорівнює періоду коливань. Такий рух точки називають еліптично поляризованими коливаннями.

Визначимо форму траєкторії точки M для деяких випадків.

1. Додавання коливань, різниця фаз між якими дорівнює $\alpha = \pi m$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В цьому випадку рівняння траєкторії:

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{Це рівняння прямої:} \quad y = \pm \frac{B}{A} x$$

Результуючі коливання є гармонічними коливаннями вздовж цієї прямої з амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$. В такому випадку точка M виконує лінійно поляризовані коливання.

2. Додавання коливань, різниця фаз між якими дорівнює:

$\alpha = (2m+1)\pi/2$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), тоді рівняння результуючих коливань набуде

$$\text{вигляду: } \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

Це рівняння еліпса, приведеного до координатних осей. У випадку, коли амплітуди однакові $B = A$, еліпс перетворюється в коло. Такі результуючі коливання точки M мають колову поляризацію.

Розглянемо приклади задач.

Задача 2.1

Однорідний стержень маси m і завдовжки l здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через його верхній кінець. Знайти середню за період коливання кінетичну енергію стержня, якщо в початковий момент його відхилили від вертикалі на кут θ_0 і надали йому кутову швидкість $\dot{\theta}_0$.

Розв'язання.

Оскільки з умовою коливання малі, то вони є гармонічними. А для гармонічних коливань середня за період кінетична (як і потенціальна) енергія дорівнює половині повної енергії коливання. Повна енергія складається з потенціальної в момент початкового відхилення та кінетичної, наданої стержневі в цей момент. Потенціальна енергія $E_n = mgh$, де h – висота підйому центра мас маятника (стержня) над точкою рівноваги O (див. рис.4.6).

З рисунку видно, що

$$h = a(1 - \cos \theta_0) = 2a \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right),$$

а оскільки коливання за умовою малі, то (при малих кутах відхилення) можна синус замінити даним кутом. Так що

$$h = 2a \frac{\theta_0^2}{4} = \frac{a\theta_0^2}{2}.$$

Оскільки стержень однорідний, то $a = l/2$, тому

$$E_n = mgh = \frac{mgl\theta_0^2}{4}.$$

Початкова кінетична енергія $E_k = \frac{I\dot{\theta}_0^2}{2}$. Момент інерції стержня відносно його кінця $I = \frac{1}{3}ml^2$, тому кінетична енергія $E_k = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_0^2$, а повна – $E = \frac{mgl\theta_0^2}{4} + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_0^2$.

Середня ж кінетична енергія за період коливання:

$$\langle E_k \rangle = \frac{mgl\theta_0^2}{8} + \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_0^2.$$

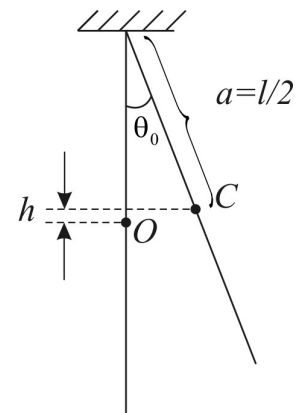


Рис 2.6

Задача 2.2.

Два кубики з масами m_1 і m_2 з'єднали невагомою пружиною з жорсткістю x і покласти на гладеньку горизонтальну площину. Потім кубики трохи зблизили і одночасно відпустили. Знайти власну частоту системи.

Розв'язання.

За третім законом Ньютона:

$$F_2 = -F_1 \quad (1)$$

За другим законом Ньютона:

$$F_1 = m_1 \ddot{r}_1, \quad F_2 = m_2 \ddot{r}_2, \quad (2)$$

Згідно з (1),

$$m_2 \ddot{r}_2 = -m_1 \ddot{r}_1.$$

Далі,

$$r_2 - r_1 = r \quad (\text{див. рис. 2.7})$$

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \ddot{r}, \text{ або (згідно з (2) і (1))}$$

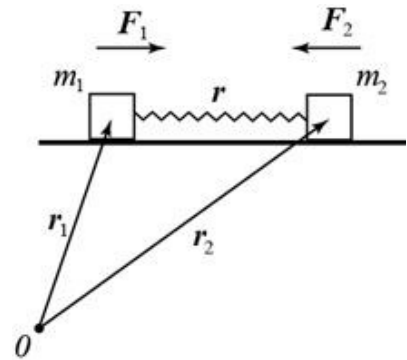


Рис.2.7

$$\ddot{r} = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \frac{F_2}{m_2} - \frac{F_1}{m_1} = F_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right)$$

Але $F_2 = -xr$, тому

$$\ddot{r} = -xr \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (3)$$

Позначимо $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$.

μ називається зведеною масою двох взаємодіючих частинок. Тепер (3) напишемо у вигляді:

$$\ddot{r} + \frac{x}{\mu} r = 0. \quad (4)$$

Остання формула є рівнянням гармонічного осцилятора. З (4) видно, що

$$\frac{x}{\mu} = \omega_0^2 \text{ або } \omega_0 = \sqrt{\frac{x}{\mu}}.$$

Задача 2.3

Точка здійснює згасаючі гармонічні коливання з частотою $\omega = 25 \text{ с}^{-1}$. Знайти коефіцієнт згасання β , якщо в початковий момент швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення з положення рівноваги в $\eta = 1,020$ рази менше від амплітуди?

Розв'язання.

Напишемо рівняння згасаючого коливання:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (1)$$

За початковою умовою,

$$|x(0)| = A_0 / \eta = A_0 |\cos \alpha|. \quad (2)$$

Диференціюємо (1) по t . Дістаємо швидкість частинки:

$$v(t) = -\beta x(t) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (3)$$

За умовою $v(0) = 0$, отже з (3) виходить:

$$0 = -\beta x(0) - \omega A_0 \sin \alpha,$$

звідки, оскільки $\beta > 0$,

$$\beta = \frac{\omega A_0 |\sin \alpha|}{x(0)}$$

або, враховуючи (2),

$$\beta = \omega \sqrt{\eta^2 - 1} = 5 \text{ c}^{-1}.$$

Задача 2.4.

Математичний маятник здійснює коливання в середовищі, для якого логарифмічний декремент згасання $\lambda_0 = 1,50$. Яким буде значення λ , якщо

опір середовища збільшити в $n = 2,00$ рази? У скільки разів слід збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливими?

Розв'язання.

Як відомо з теорії згасаючих коливань, логарифмічний декремент може бути виражений формулою:

$$\lambda = \beta T, \quad (1)$$

де β – коефіцієнт згасання, T – період коливання, який визначається формулою $\beta = \frac{r}{2m}$, де r – опір середовища. Отже можемо записати:

$$\lambda = \frac{r}{2m} T.$$

Відношення декрементів згасання того самого маятника в двох середовищах 2 і 1 таке:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{T_2}{T_1}. \quad (2)$$

Позначивши $r_2 / r_1 = n$, напишемо:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = n \frac{T_2}{T_1}. \quad (3)$$

З теорії згасаючого маятника відомо, що залежність його циклічної частоти ω від β виражається формулою:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad (4)$$

де ω_0 – частота незгасаючих вільних коливань (власна частота).

Узявши до уваги (1), останню рівність перепишемо так:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}, \text{ або, оскільки } \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}, \text{ нарешті,}$$
$$\frac{1}{T^2}(4\pi^2 + \lambda^2) = \omega_0^2. \quad (5)$$

Таким чином, ми бачимо, що вираз $\frac{1}{T^2}(4\pi^2 + \lambda^2)$ є інваріантною величиною, тобто такою, що не залежить від середовища. Тепер можемо записати:

$$\frac{1}{T_1^2}(4\pi^2 + \lambda_1^2) = \frac{1}{T_2^2}(4\pi^2 + \lambda_2^2),$$

звідки

$$\frac{T_2^1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 + \lambda_2^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2},$$

або, зважаючи на (2),

$$\frac{4\pi^2 + \lambda_2^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2} = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2},$$

звідки неважко дістати:

$$\text{а) } \lambda_2 = \frac{n\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2(n^2 - 1)/4\pi^2}} = 3,3.$$

б) Коливання стануть неможливими при $\lambda_2 = \infty$, або коли знаменник рівний нулю:

$$1 - \lambda_1^2(n^2 - 1)/4\pi^2 = 0,$$

звідки можна знайти

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2} = 4,3.$$

Задача 2.5

До невагомої пружинки підвісили тягарець, і вона розтягнулася на $\Delta x = 9,8 \text{ см}$. З яким періодом буде коливатися тягарець, якщо йому дати невеликий поштовх у вертикальному напрямі? Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 3,1$.

Розв'язання.

Як і в попередній задачі, скористаємося формулою

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

або

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (1)$$

З теорії знаємо, що $\beta = \frac{\lambda}{T}$. Крім того, знаємо, що $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, а $k\Delta x = mg$

. Тому $\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta x}$. Отже, $\omega_0^2 = \frac{g}{\Delta x}$. Тому можемо переписати:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{\Delta x} - \frac{\lambda^2}{T^2}, \text{ або } \frac{1}{T^2}(4\pi^2 + \lambda^2) = \frac{g}{\Delta x},$$

звідки

$$T = \sqrt{\frac{\Delta x}{g}(4\pi^2 + \lambda^2)} = 0,70 \text{ с}.$$

Задача 2.6

Знайти максимальне значення амплітуди зміщення осцилятора, який здійснює усталені коливання під дією змушуючої гармонічної сили з амплітудою $F_0 = 2,50 \text{ Н}$, якщо частота згасаючих коливань даного осцилятора $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ і коефіцієнт опору (коефіцієнт пропорційності між силою опору і швидкістю) $r = 0,50 \text{ кг/с}$.

Розв'язання.

Напишемо формулу для амплітуди зміщення:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (1)$$

де m – маса осцилюючої частинки, ω_0 – власна частота, β – коефіцієнт згасання. Згадаємо, що

$$\beta = \frac{r}{2m}.$$

Максимальне значення амплітуда досягає, коли виконується умова $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$, або, оскільки в наших задачах ми вважаємо коефіцієнт згасання малим: $\beta \ll \omega_0$, то умовою резонансу буде $\omega = \omega_0$ і формула (1) спроститься:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m2\beta\omega} = \frac{F_0}{m2\frac{r}{2m}\omega} = \frac{F_0}{r\omega} = 5,0 \text{ см}.$$

Задача 2.7

Знайти добротність осцилятора, в якого:

- амплітуда зміщення зменшується в $\eta = 2,0$ рази через кожних $n = 110$ періодів коливань;

б) власна частота $\omega_0 = 100 \text{ c}^{-1}$ і час релаксації $\tau = 60 \text{ c}$.

Розв'язання.

а) За визначенням декремент згасання

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{k+1}}.$$

Напишемо:

$$\ln \frac{A_0}{A_1} = \lambda, \ln \frac{A_1}{A_2} = \lambda, \dots, \ln \frac{A_n}{A_{k+1}} = \lambda,$$

$$\sum_{k=0}^n \ln \frac{A_n}{A_{k+1}} = n\lambda, \text{ або } \ln \frac{A_n}{A_0} = n\lambda,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{A_n}{A_0} = \frac{1}{n} \ln \eta,$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{n}{\ln \eta} = \frac{110}{\ln 2} = 500.$$

б) Наступна послідовність кроків, очевидно, зрозуміла без пояснень:

$$\lambda = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega} = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 \tau^2 - 1}},$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_0^2 \tau^2 - 1} = 3,0 \cdot 10^3.$$

3. Рух тіл в неінерціальних системах відліку

Сили інерції

На практиці рух тіл інколи доводиться розглядати і в неінерціальних системах відліку (НСВ) — системах відліку, які мають прискорення відносно інерціальних систем відліку (ІСВ). У такому разі закони Ньютона втрачають силу, але основні рівняння динаміки можна модифікувати так, аби вони зберігали чинність і в НСВ. Для цього в них, окрім сил взаємодії, треба включати й так звані сили інерції.

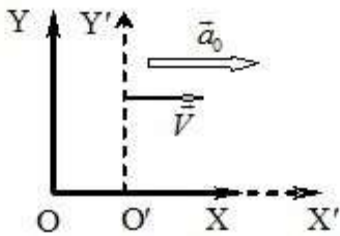


Рис.3.1

Сили, що зумовлені не взаємодією між тілами, а властивостями системи відліку, називаються силами інерції.

Розглянемо рух тіла в системі відліку $K'(X', O', Y')$ (рис.3.1), що рухається поступально з

прискоренням a_0 вздовж осі OX інерціальної системи відліку $K(X,O,Y)$. Якщо тіло рухається відносно K -системи зі швидкістю v , то за законом додавання швидкостей його швидкість в K' -системі:

$$V' = V - v \quad (3.1), \text{ де } v - \text{швидкість } K' - \text{системи відносно } K - \text{системи.}$$

Поступальна сила інерції

З (3.1) маємо за означенням прискорення в K' -системі: $a' = a - a_0$ (3.2),

де a' – прискорення тіла в НСВ (K'), a – його прискорення в ІСВ (K), і a_0 – прискорення K' -системи відліку відносно системи відліку K .

Помноживши вираз (3.2) на масу тіла m , одержимо:

$$ma' = ma - ma_0 \quad (3.3),$$

де величина $ma = F$ – то є “звичайна” сила, що діє на тіло в інерціальній системі відліку з боку інших тіл. Але прискорення тіла в НСВ (K') визначається не тільки цією силою, а й величиною $F_{in.} = -ma_0$, яка називається (поступальною) силою інерції. Ця сила зумовлена прискоренням рухом НСВ K' відносно інерціальної K -системи відліку, а не взаємодією даного тіла з якимось іншими тілами. Тому для сил інерції третій закон Ньютона не виконується.

Іншою особливістю є те, що сила інерції визначається добутком маси тіла не на його власне прискорення, а на прискорення системи відліку.

Прикладом такої НСВ K' є платформа каруселі, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо своєї осі, нерухомої в ІСВ K , зв'язаній із землею. Кожна точка, що перебуває в спокої відносно платформи (в K' -системі), відносно землі (в K -системі) має доцентрове прискорення, що залежить від швидкості обертання платформи та відстані точки від осі обертання. Тому прискорення тіла в ІСВ K (відносно землі) залежить не тільки від зміни швидкості тіла, а й від його положення в НСВ K' (відстані до осі обертання платформи). Тому в обертальних системах відліку існують два види сил інерції – відцентрова та коріолісова сили інерції.

Відцентрова сила

Розглянемо тіло, що перебуває в спокої відносно НСВ K' , яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі $O'O'$, нерухомої відносно ІСВ K (рис. 3.2а).

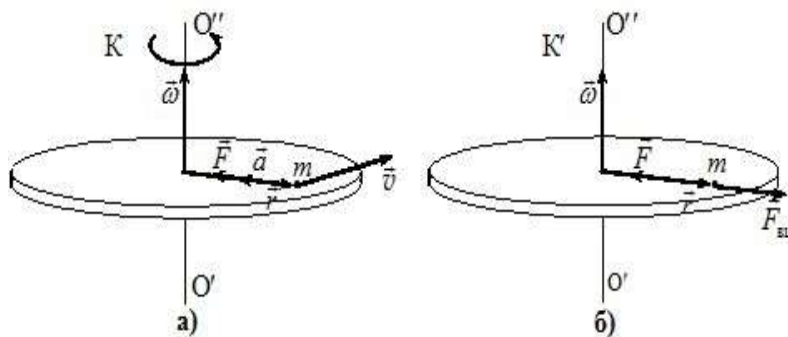


Рис.3.2

Нехай на поверхні диска лежить тіло, прикріплене до осі обертання ниткою довжини r . Тоді відносно системи відліку К воно рухається по колу радіуса r із нормальним

прискоренням $a = \omega^2 r$.

Це прискорення створюється силою натягу нитки F (рис. 5.2а), яка за другим законом Ньютона дорівнює $F = m\omega^2 r$. Але відносно диска тіло є нерухомим, отже в системі відліку К' його прискорення $a' = 0$. Згідно з (5.3), це означає, що в обертовій НСВ на тіло, крім сили взаємодії F , діє ще й рівна їй за модулем і протилежна за напрямом сила інерції $F_{in.} = m\omega^2 r$.

Ця сила напрямлена від осі (центра) обертання системи відліку К'(рис.5.2б) і називається відцентровою силою.

Сила Коріоліса

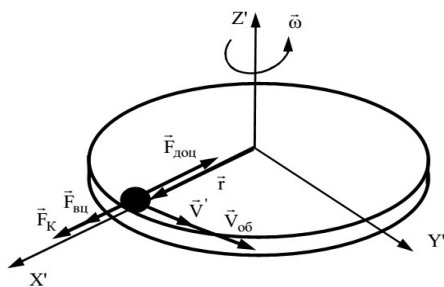


Рис.3.3

Нехай тепер точка m рухається відносно обертової системи відліку К' із швидкістю v' (рис. 3.3). Швидкість v тіла в нерухомій системі відліку К дорівнює сумі його швидкості v' відносно диску та швидкості обертального руху $v_{об.}$: $v = v' + v_{об.}$

Швидкість обертального руху визначається добутком кутової швидкості на радіус колової траєкторії тіла $v_{об.} = \omega r$.

З урахуванням цього співвідношення маємо:

$$v = v' + \omega r \quad (3.4).$$

Коли тіло рухається по колу, воно набуває доцентрового прискорення, що обумовлене дією сили пружності, з якою обід диску діє на тіло. Величина цієї сили має задовольняти 2 закону Ньютона: $F = mv^2/R$. Враховуючи (5.4), маємо: $mv^2/R = mv'^2/R + 2mv'\omega + m\omega^2 r$ (3.5). Перепишемо (3.5) так:

$$mv'^2/R = mv^2/R - 2mv'\omega - m\omega^2 r \quad (3.6).$$

В рівнянні (3.6) зліва стоїть доцентрове прискорення, яке має тіло в рухомій неінерціальній системі координат. При цьому записана рівність набуває змісту динамічного рівняння руху, якщо два останні доданки в правій частині вважати силами. $F = m\omega^2 r$ – це відцентрова сила інерції. Другий доданок також визначає силу інерції, яка, як видно, обумовлена присутністю руху тіла в неінерціальній системі і називається силою Коріоліса. Величина сили $F_k = -2mv'\omega$ залежить саме від швидкості тіла в системі відліку, що обертається, та від кутової швидкості самої системи. Знаки мінусів вказують, що обидві ці сили інерції направлені від осі диска (рис. 3.3).

В загальному випадку тривимірного руху, коли v' і ω мають довільні напрямки, сила Коріоліса визначається векторним добутком:

$$F_k = 2m[v', \omega] \quad (3.7).$$

Модуль сили Коріоліса $F_k = 2mv'\omega \sin \alpha$, де α - кут між векторами v' та ω . Сила Коріоліса не виконує роботи і не змінює кінетичної енергії тіла. Завдяки її дії змінюється лише напрямок руху тіла, при збереженні модуля швидкості.

4. Основні поняття релятивістської механіки

4.1. Постулати сучасної теорії відносності.

Ньютонівська механіка застосовується тільки для описання руху тіл із швидкостями, які набагато менше швидкості світла у вакуумі (c). Для описання рухів, що відбуваються із швидкостями близькими до швидкості світла c , Ейнштейн створив релятивістську механіку, яка відповідає вимогам спеціальної теорії відносності (СТВ). Ця теорія використовує два основних постулати: принцип відносності Ейнштейна і принцип незмінності швидкості світла.

1. Принцип відносності Ейнштейна: всі закони фізики в усіх інерційних системах відліку однакові. Іншими словами, рівняння, що описують закони природи, інваріантні до перетворень координат і часу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

2. Принцип незмінності швидкості світла: швидкість світла у вакуумі (c) однакова в усіх інерційних системах відліку і не залежить від швидкості руху джерел та приймачів світла (c -- інваріант).

Незмінність швидкості світла веде до того, що простір і час взаємно пов'язані, утворюючи єдиний простір - час. Цей зв'язок можна уявити як чотирьохвимірний простір, в якому по трьом осям відкладаються координати x ,

y , z , а по четвертій осі – ct , тобто величина пропорційна часу з розмірністю координат.

Кожна подія (наприклад, розпад деякої частинки) в такому просторі характеризується місцем (координати x , y , z) і часом t , коли вона відбулася. Тому події в чотирьохвимірному просторі відповідає точка з координатами x , y , z і ct . Таку точку називають світовою точкою.

В звичайному тривимірному просторі квадрат відстані між двома точками дорівнює: $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

Квадрат відстані між двома світовими точкам (цю відстань називають інтервал і позначають Δs) дорівнює: $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$.

В спеціальній теорії відносності особливу роль відіграють величини, які інваріантні по відношенню до перетворень координат і часу від однієї інерціальної СВ до іншої. Інтервал також є інваріантом.

4.2.Перетворення Лоренца

Відповідно до постулатів СТВ між координатами x , y , z та x' , y' , z' і часом t та t' у двох інерційних системах відліку існують співвідношення, які називаються перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, & y &= y', & z &= z', & t &= \frac{t' + xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, & y' &= y, & z' &= z, & t' &= \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{aligned}$$

(4.1)

де V – швидкість руху системи K' відносно лабораторної системи K . При цьому вважається, що напрямки координатних осей обох систем співпадають, а рух системи K' відносно системи K відбувається уздовж осі абсцис.

З перетворень Лоренца маємо перетворення швидкості:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + v'_x V/c^2}.$$

З перетворень Лоренца маємо релятивістський закон додавання швидкостей:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (4.2)$$

Якщо $u' = c$, $v = c$, то $u = c$. Якщо $u' \ll c$, $v \ll c$, то $u = u' + v$ -- відповідає класичній механіці.

Наслідки перетворень Лоренца

1. Відносність одночасності

Події, одночасні в одній інерційній системі відліку, не одночасні в інших інерційних системах, рухомих відносно першої. Розрізняють події просторово - часові і причинно - наслідкові. Якщо подія причинно - наслідкова, то неможлива система відліку, в якій наслідкова подія випередила б подію причинову.

2. Відносність проміжку часу.

Час, виміряний у системі відліку, де точки системи нерухомі, називається власним часом (t_0).

Час t у рухомій системі відліку дорівнює:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.3)$$

Маємо ефект релятивістського уповільнення часу в рухомій системі відліку.

Якщо $v \ll c$, то $t = t_0$ -- відповідає класичній механіці.

3. Відносність довжини (відстаней)

Довжина тіла в системі відліку, відносно якої воно перебуває в спокої, називається власною довжиною l_0 .

Довжина тіла l в системі відліку, відносно якої тіло рухається:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.4)$$

З (4.4) маємо Лоренцеве скорочення довжини -- зменшення довжини за напрямком руху тіла.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- кінематичний ефект.

При $v \ll c$ маємо $l = l_0$ -- відповідає класичній механіці.

4.3. Релятивістська динаміка

В класичній механіці імпульс визначається добутком маси тіла на його швидкість. Для імпульсу виконується закон збереження, за яким імпульс замкненої системи за будь-яких умов лишається незмінним. Закон збереження імпульсу виконується і в релятивістській механіці. Але імпульс більш складно, ніж вважалося, залежить від швидкості:

$p = m_r v$, де m_r -- релятивістська маса тіла, тоді

$$p = m_r v = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

де $m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ -- релятивістська маса, m -- маса (спокоею).

В такому контексті власну масу частинки m називають масою спокою. Поняття релятивістської маси, яке збереглося історично, є формальним і не має визначеного фізичного змісту.

Якщо $v \rightarrow c$, то $m \rightarrow m_0$ (маса спокою).

Жодна частинка (тіло) з масою спокою m_0 , відмінною від нуля, не може рухатися зі швидкістю, яка дорівнює чи перевищує швидкість світла у вакуумі (тільки менше c).

Другий закон Ньютона в імпульсній формі такий самий, як у класичній механіці. Релятивістське рівняння динаміки частинки:

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

де p -- релятивістський імпульс частинки.

У релятивістській фізиці енергія тіла складається із енергії спокою тіла і його кінетичної енергії. Повна і кінетична енергія релятивістської частинки:

$$E = m_r c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = mc^2 + T, \quad T = (m_r - m)c^2,$$

Величина $E_0 = mc^2$ називається енергією спокою тіла.

Енергія спокою тіла (власна енергія тіла) -- це його внутрішня енергія.

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad p^2 c^2 = T(T + 2mc^2)$$

При розгляданні зіткнень частинок корисно використовувати інваріантну величину:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4,$$

де E, p – повна енергія і імпульс системи до зіткнення, m – маса утвореної частинки (або системи).

Закон взаємозв'язку маси та енергії:

$$E = mc^2, \\ E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Зміні енергії тіла відповідає зміна маси тіла, і навпаки:

$$\Delta E = \Delta mc^2, \\ \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Всі задачі релятивістської механіки, як правило, поділяються на декілька категорій і мають відповідний шлях розв'язання. На відміну від ньютонівської механіки, в релятивістській механіці час вже не є абсолютним, а тече по-різному в різних системах відліку. В задачах, в яких треба знаходити положення тіл в різних системах відліку, слід використовувати перетворення Лоренца та формули для релятивістських ефектів. Частина задач цієї категорії спрямована на знаходження швидкостей тіл, тому в цих задачах можна користуватися формулами для перетворення швидкостей, які є наслідком перетворень Лоренца. При розв'язанні задач динаміки треба, по-перше, користуватися релятивістськими виразами для імпульсу та енергії, а, по-друге, – пам'ятати, що в релятивістській механіці повна енергія містить ще й енергію спокою.

Розглянемо приклади задач.

Задача 4.1.

Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0,50 \text{ c}$ і $v_2 = 0,75 \text{ c}$ відносно лабораторної системи відліку (рис. 4.1). Знайти:

а) швидкість, з якою зменшується відстань між частинками в лабораторній системі відліку;

б) відносну швидкість частинок.

Розв'язання.

а) В лабораторній системі відліку (К-системі) за час t переміщення першої та другої частинок буде відповідно

$$S_1 = S_{01} + v_1 t \quad \text{і} \quad S_2 = S_{02} - v_2 t,$$

де S_{01} і S_{02} – відстані між відповідними частинками та початком координат в момент часу $t = 0$.

Відстань між частинками

$$S_{12} = S_2 - S_1 = S_{02} - S_{01} - (v_2 + v_1)t.$$

Швидкість зміни цієї відстані:

$$\left| \frac{dS_{12}}{dt} \right| = v_2 + v_1 = 0,50 \text{ c} + 0,75 \text{ c} = 1,25 \text{ c}.$$

б) З першою частинкою зв'яжемо рухому систему відліку K' . Швидкість цієї системи $V = v_1$.

Застосуємо формулу додавання швидкостей в спеціальній теорії відносності:

$$v = \frac{V + v'}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \quad (1)$$

В даній задачі $V = v_1, v' = -v_2$.

Підставимо ці рівності в (1):

$$-v_2 = \frac{v_1 - v_2'}{1 - \frac{v_2'v_1}{c^2}}$$

Звідси дістаємо:

$$v_2' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_2v_1}{c^2}} = \frac{0,50 \text{ c} + 0,75 \text{ c}}{1 + \frac{0,50 * 0,75 \text{ c}^2}{c^2}} = 0,91 \text{ c}.$$

Задача 4.2

Стержень рухається в поздовжньому напрямі зі сталою швидкістю v відносно інерціальної K -системі відліку. За якого значення v довжина стержня в цій системі відліку буде на $\eta = 0,50 \%$ меншою за його власну довжину?

Розв'язання.

За умовою,

$$l_0 - l = \eta l_0,$$

отже,

$$l = (1 - \eta)l_0.$$

Але, завдяки лоренцеву скороченню довжини,

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

тому

$$(1 - \eta)l_0 = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$(1 - \eta)^2 = 1 - v^2/c^2,$$

$$v^2/c^2 = 1 - (1 - \eta)^2 = \eta(2 - \eta),$$

Звідки знаходимо швидкість:

$$v = c\sqrt{\eta(2 - \eta)} \approx 0,1 \text{ c}.$$

Задача 4.3

Знайти власну довжину l_0 стержня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $v = c/2$, довжина $l = 1,00$ м і кут між ним і напрямом руху $\theta = 45^\circ$.

Розв'язання.

На рис. 4.2 позначено l_0 – власну довжину стержня, θ_0 – кут нахилу стержня в системі, в якій він нерухомий. Очевидно, $a = a_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ або

$$l \cos \theta = l_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Крім того,

$$l \sin \theta = l_0 \sin \theta_0.$$

Отже,

$$\sin \theta_0 = \frac{l}{l_0} \sin \theta,$$

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2} \sin^2 \theta},$$

$$l \cos \theta = l_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2} \sin^2 \theta} = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (l_0^2 - l^2 \sin^2 \theta)},$$

$$l^2 \cos^2 \theta = (1 - v^2/c^2) l_0^2 - (1 - v^2/c^2) l^2 \sin^2 \theta,$$

$$\begin{aligned} l_0^2 &= l^2 \left(\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{1 - v^2/c^2} \right) = l^2 \frac{\sin^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 - v^2/c^2} = \\ &= \frac{l^2}{1 - v^2/c^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right), \end{aligned}$$

звідки власна довжина стержня

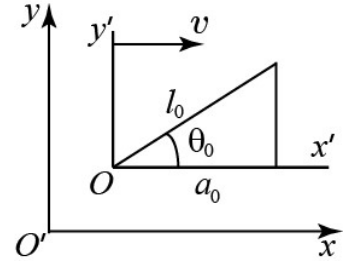


Рис. 4.2

$$l_0 = l \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}{1 - v^2/c^2}}.$$

Задача 4.4

З якою швидкістю v має летіти частинка відносно системи відліку K для того, щоб проміжок власного часу $\Delta\tau$ був у 10 разів меншим за проміжок часу Δt , що відлічений за годинником системи K ?

Розв'язання.

Відповідно до ефекту уповільнення часу,

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

За умовою задачі,

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{10},$$

тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= \sqrt{1 - v^2/c^2}, \\ 1 &= 100 - 100 v^2/c^2, \\ v^2/c^2 &= 0,99, \end{aligned}$$

тож шукана швидкість

$$v = c\sqrt{0,99} \approx 0,995 c.$$

Задача 4.5

Імпульс тіла масою m дорівнює $p = mc$. Визначити кінетичну енергію тіла.

Розв'язання.

Скористаємось формулою

$$p^2 c^2 = T(T + 2mc^2).$$

Підставимо в неї дане за умовою $p = mc$:

$$\begin{aligned} m^2 c^4 &= T^2 + 2mc^2 T, \\ T^2 + 2mc^2 T - m^2 c^4 &= 0, \\ T &= -mc^2 \pm \sqrt{m^2 c^4 + m^2 c^4}. \end{aligned}$$

Оскільки $T > 0$, то

$$T = -mc^2 + \sqrt{2m^2 c^4} = (\sqrt{2} - 1) mc^2.$$

Задача 4.6

За якої швидкості частинки v її кінетична енергія дорівнює енергії спокою?

Розв'язання.

За умовою,

$$mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = mc^2,$$

звідки

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2,$$

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - v^2/c^2 = \frac{1}{4},$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4},$$

тож швидкість частинки

$$v = c \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866 c.$$

Задача 4.7

Частинка масою m починає рухатись під дією сталої сили F . Знайти залежність від часу імпульсу p і швидкості v частинки.

Розв'язання.

Оскільки

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

то

$$p = \int_0^t F dt = Ft.$$

Далі,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

тому

$$v = \frac{p}{m} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{Ft}{m} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Знайдемо швидкість з цього рівняння. Після піднесення його в квадрат отримуємо:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{Ft}{m} \right)^2 - \left(\frac{Ft}{m} \right)^2 \frac{v^2}{c^2}, \\ v^2 \left(1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2} \right) &= \frac{F^2 t^2}{m^2}, \\ v^2 \frac{m^2 c^2 + F^2 t^2}{m^2 c^2} &= \frac{F^2 t^2}{m^2}, \end{aligned}$$

$$v = \frac{Ftc}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}},$$

або у векторному вигляді

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}tc}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}.$$

5. Молекулярна фізика і термодинаміка

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовин, виходячи із молекулярно - кінетичних уявлень :

- а) будь - яке тіло складається з великої кількості молекул ;
- б) молекули усякої речовини знаходяться у стані постійного теплового руху ;
- в) молекули взаємодіють між собою.

Молекулярно - кінетична теорія розглядає властивості речовин як сумарний результат дії молекул. При цьому вона користується статистичним методом, цікавлячись лише середніми величинами (середня швидкість молекул, середня енергія, тощо).

Термодинаміка вивчає властивості тіл і явищ природи не цікавлячись їхньою мікроскопічною структурою, але дозволяє зробити цілий ряд висновків відносно їх протікання.

В основі термодинаміки лежать три фундаментальні закони, які встановлені на підґрунті узагальнення великої кількості дослідних даних .

Стани і процеси

Системою будемо називати сукупність тіл, що розглядаються (у тому числі і молекули). Будь-яка система може знаходитись в різних станах. Величини, які характеризують стан системи, мають назву параметрів стану . Для газу параметрів стану 3: p – тиск , V – об'єм, T – абсолютна температура.

Не будь-який параметр стану має певне значення. Якщо один або кілька параметрів стану не визначені, то такий стан називається нерівноважним.

Рівноважний стан – це такий стан, при якому усі параметри системи мають певні значення, які залишаються незмінними при незмінних зовнішніх умовах .

Процес переходу системи з нерівноважного стану в рівноважний називається процесом релаксації. Час, що витрачається на такий перехід, називається часом релаксації.

Процес, який складається з неперервної послідовності рівноважних станів, називається рівноважним. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. Тільки рівноважні процеси на координатній площині можуть бути зображені відповідною кривою (див. рис.5.1). Рівноважний процес може бути проведений і в

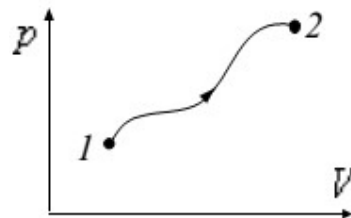


Рис.5.1

зворотному напрямку, причому система буде проходити через ті ж самі стани, що і в прямому ході, але в зворотній послідовності. Тому рівноважні процеси називають також оборотними.

Якщо система, проходячи різні стани, знову повертається в початковий стан, то такий процес називається циклічним.

Внутрішня енергія системи

Внутрішня енергія тіла – це кінетична енергія хаотичного руху молекул, потенціальна енергія їх взаємодії і внутрішньо молекулярна енергія.

Внутрішня енергія системи тіл дорівнює сумі внутрішніх енергій усіх тіл системи і потенціальній енергії взаємодії між тілами. Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що кожного разу, коли система опиняється у даному стані, її внутрішня енергія приймає тільки відповідне цьому стану значення.

При переході системи із одного стану в інший зміна внутрішньої енергії ΔU_{12} дорівнює різниці значень у цих станах, незалежно від шляху переходу (див. рис.5.2):

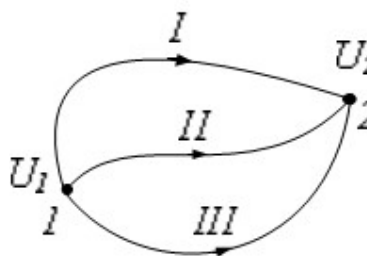


Рис.5.2

$$\Delta U_{12}^{(I)} = \Delta U_{12}^{(II)} = \Delta U_{12}^{(III)} = U_2 - U_1$$

5.1.Перший закон термодинаміки

Внутрішню енергію можна змінити двома процесами: виконанням

над системою роботи A' і наданням їй певної кількості тепла Q . Тоді приріст внутрішньої енергії: $U_2 - U_1 = Q + A'_{12}$ (5.1)

Якщо ввести $A_{12} = - A'_{12}$ – роботу системи над зовнішніми тілами, то формула (5.1) набуває вигляду: $Q = U_2 - U_1 + A_{12}$ (5.2).

Це і є перший закон термодинаміки, який говорить, що теплота, яку отримує система, іде на приріст її внутрішньої енергії і на роботу системи над зовнішніми тілами. Фізичний зміст першого закону термодинаміки полягає в тому, що він є законом збереження енергії у теплових процесах.

Для розрахунків величин A і Q доводиться розбивати процес на послідовність елементарних процесів. При нескінченно малих змінах параметрів системи перший закон термодинаміки запишеться у вигляді:

$$dQ = dU + dA \quad (5.3).$$

Робота системи при зміні об'єму

Роботу, яка виконується даним тілом над зовнішніми тілами можна виразити за допомогою тиску і зміни об'єму тіла.

Нехай система отримала приріст об'єму ΔV (див. рис.5.3). Розіб'ємо

ΔV на елементарні об'єми ΔV_i циліндричної форми. Робота при зміні елементарного об'єму ΔV_i дорівнює:

$$\Delta A_i = F_i \Delta S_i \Delta h_i = p \Delta V_i, \text{ де } p - \text{тиск у системі.}$$

Робота ΔA по зміні об'єму система ΔV дорівнює:

$$\Delta A = \Sigma \Delta A_i = p \Sigma \Delta V_i = p \Delta V.$$

Переходячи до нескінченно малих змін отримуємо:

$$dA = p dV. \text{ Тоді робота по зміні об'єму від } V_1 \text{ до } V_2$$

буде визначатися формулою:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (5.4)$$

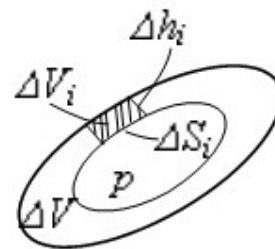


Рис.5.3

5.2. Елементарна кінетична теорія газів.

Ідеальний газ – це сукупність однакових молекул, які хаотично рухаються і практично не взаємодіють між собою. Такі гази як повітря, кисень, водень, азот, навіть при кімнатній температурі та атмосферному тиску близькі за своїми властивостями до ідеального газу.

Розглянемо зіткнення молекул зі стінками посудини (див. рис.5.4).

Кожний елемент поверхні ΔS безперервно отримує удари великої кількості молекул. Зміни імпульсу молекули при ударі

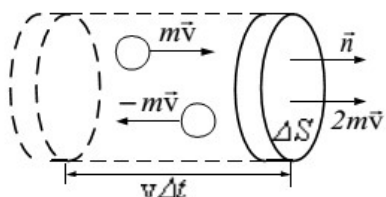


Рис.5.4

стінки посудини.

$$\Delta \vec{p}_{\text{мол}} = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}.$$

Стінка отримує імпульс $\Delta \vec{p} = 2m\vec{v}$ при ударі кожної молекули. Передача імпульсу молекулою при ударі зі стінкою і приводить до тиску газу на

Визначимо тиск газу. Оскільки простір тривимірний, то можна вважати, що у вибраному напрямку рухається $1/6$ усіх молекул, а швидкості молекул мають тільки середнє значення. Тоді за час Δt поверхні Δs досягнуть усі молекули, що знаходяться у циліндрі з висотою $v\Delta t$ (рис.7.4) і кількість зіткнень ΔN за цей час дорівнює:

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta s \Delta t, \quad \text{де } n - \text{число молекул у одиниці об'єму.}$$

Підсумковий імпульс ΔK , який передається поверхні Δs за Δt :

$$\Delta K = 2m v \Delta N = \frac{1}{3} n m v^2 \Delta s \Delta t.$$

Тоді тиск:
$$p = \frac{\Delta K}{\Delta t \Delta s} = \frac{1}{3} n m v^2.$$

Якщо ввести середню кінетичну енергію поступального руху молекули, то тиск
$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon \rangle \quad (5.5).$$

Помножимо (5.5) на об'єм моля V_m :

$$pV_m = \frac{2}{3} n V_m \langle \epsilon \rangle = \frac{2}{3} N_A \langle \epsilon \rangle, \quad (5.6),$$

де $N_A = n V_m$ - число Авогадро, тобто кількість молекул у одному молі.

5.3.Середня енергія поступального руху молекул

З рівняння стану для 1 моля ідеального газу (рівняння Клапейрона) $pV_m = RT$.

Порівнюючи це рівняння з (7.6) отримуємо: $\frac{2}{3} N_A < \epsilon > = RT$

Звідки середня енергія поступального руху молекул:

$$< \epsilon > = \frac{3}{2} kT \quad (5.7)$$

Але молекули виконують також коливальний і обертальний рухи. Обидва ці види рухів пов'язані з певним запасом енергії, визначити який можна, використовуючи положення про рівний розподіл енергії за ступенями вільності.

Підставляючи (5.7) у (5.5) одержуємо кінцеву формулу:

$$p = nkT, \quad (5.8) \quad \text{де } k = R / N_a - \text{ стала Больцмана.}$$

Таким чином, тиск газу визначається числом молекул у одиниці об'єму і температурою газу.

5.4. Ступені вільності механічної системи

Ступені вільності механічної системи – це незалежні величини, за допомогою яких можна задати положення системи у просторі та його можливі переміщення. Розглянемо приклади.

1. Матеріальна точка. Її положення у просторі однозначно визначається 3 координатами $\{x, y, z\}$, тобто має три ступеня вільності.

2. Тверде тіло. Щоб задати положення і орієнтацію твердого тіла у просторі потрібно задати три координати його центра інерції $\{x_c, y_c, z_c\}$ і три кути $\{\theta, \phi, \psi\}$, які визначають положення двох взаємно перпендикулярних осей, що проходять через центр інерції тіла (рис.5.5) і визначають орієнтацію тіла. Отже тверде тіло має

шість ступенів вільності, з яких три $\{x_c, y_c, z_c\}$ змінюються у процесі поступального руху і мають назву поступальних, а ще три $\{\theta, \phi, \psi\}$ змінюються при обертальному русі і називаються обертальними.

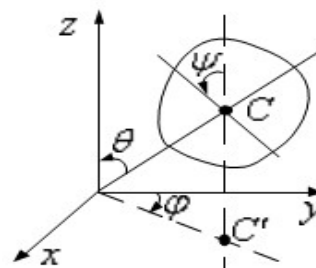


Рис.5.5

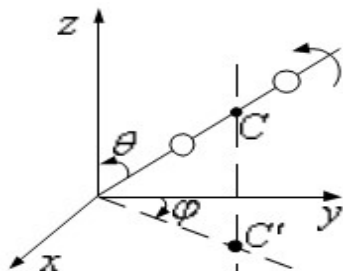
3. Двоатомна молекула з жорстким зв'язком між атомами має 5 ступенів вільності $\{x_c, y_c, z_c, \theta, \phi\}$. При обертанні навколо осі молекули її положення у просторі не змінюється і тому потрібно задавати тільки два кути θ і ϕ (див.

рис. 5.6). Це обертальні ступені вільності. Скільки б не було ступенів вільності у молекули поступальних ступенів вільності завжди три.

Жодна поступальна ступень вільності не має переваги перед іншою.

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Середня енергія поступального руху молекули:



Тоді на одну поступальну ступень вільності в середньому припадає енергія: $\frac{1}{2} kT$.

Крім поступального руху молекула ще обертається і в неї відбуваються коливання атомів. Жоден із видів рухів не має переваги над іншими.

Рис.5.6

На будь - який ступінь вільності в середньому припадає енергія: $\frac{1}{2} kT$

Це закон рівного розподілу енергії за ступенями вільності.

Тоді середня енергія теплового руху молекули визначається за формулою :

$$i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{обер.}} + 2n_{\text{кол.}} \quad (5.9),$$

де $n_{\text{пост}}$ кількість поступальних ступенів вільності, $n_{\text{обер}}$ - число обертальних ступенів вільності, $n_{\text{кол}}$ - число коливальних ступенів вільності.

Коливальні ступені вільності мають удвічі більшу енергетичну ємність, оскільки враховується кінетична енергія молекул і потенціальна енергія їх взаємодії, тому $n_{\text{кол}}$ входить до формули подвоєно.

При невисоких температурах (до кімнатних) коливальні ступені вільності не збуджені, тому $i = 3$ – для одноатомних молекул, $i = 5$ – для двоатомних молекул, $i = 6$ – для трьох і більше атомних молекул (тобто для них, як і для твердого тіла).

5.5.Внутрішня енергія і теплоємність ідеального газу

Внутрішня енергія ідеального газу складається із енергії теплового руху окремих молекул.

Для 1 моля ідеального газу внутрішня енергія:

$$U_M = N_A \langle \epsilon_{\text{мол}} \rangle = \frac{i}{2} (N_A k) T = \frac{i}{2} RT$$

Для довільної маси газу U_m потрібно помножити на число молей m/μ у даній

масі газу, тоді:
$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T. \quad (5.10)$$

Розглянемо види теплоємностей:

- 1) теплоємність тіла $C_T = dQ/dT$ (Дж/К) – для довільної маси m ;
- 2) молярна теплоємність C (Дж /К · моль) – для маси $m = \mu$;
- 3) питома теплоємність c (Дж /К · кг) – для маси $m = 1$ кг .

Із визначень теплоємностей випливає: $c = C_T/m = C/\mu$.

Величина теплоємності залежить від виду процесу. Для газів розрізняють молярну теплоємність при сталому об'ємі C_v і теплоємність при сталому тиску C_p .

Визначимо теплоємності при сталому об'ємі та сталому тиску

- 1) $V = \text{const}$ (ізохорний процес), тоді $dV = 0$ і $dA = p dV = 0$.

З першого закону термодинаміки для моля речовини: $dQ_M = dU_M$.

Тоді молярна теплоємність при сталому об'ємі:
$$C_v = \frac{dQ_v}{dt} = \frac{dU_v}{dT} = \frac{i}{2} R.$$

Тобто $C_v = \frac{i}{2} R$ - визначається тільки кількістю ступенів вільності.

- 2) $p = \text{const}$ (ізобарний процес); І закон для моля: $dQ_M = dU_M + p dV_M$

Тоді молярна теплоємність за сталому тиску:

$$C_p = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{dU_M}{dT} + p \left(\frac{dV_M}{dT} \right)_p = C_v + p \left(\frac{dV_m}{dT} \right)_p.$$

З рівняння Клайперона $V_M = \frac{RT}{p}$.

Тоді $\left(\frac{dV_M}{dT} \right)_p = \frac{R}{p}$ і маємо: $C_p = C_v + R$ (5.11). Це рівняння Майєра.

Дослід показує, що теплоємність залежить від температури.

З рівняння (5.11) маємо: $C_p = \frac{i+2}{2} R$.

Температурна залежність молярної теплоємності.

Температурна залежність C_v для водню наведена на рис.5.7.

В інтервалі температур ділянки 1 (рис. 5.7) молекули знаходяться у поступальному русі. З підвищенням температури все більша частина молекул втягується додатково у обертальний рух (ділянка 2),

а потім – у коливальний (ділянка 3). Тому кількість ступенів вільності молекул залежить від температури.

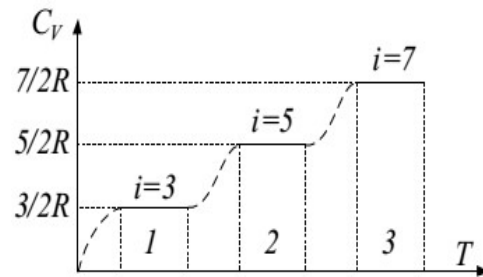


Рис.5.7

Пояснює такий хід теплоємності теорія квантової механіки, згідно якої енергія обертального і коливального видів руху виявляється квантованою. Це значить, що енергія коливань і обертання молекул може приймати не будь-які, а лише певні дискретні значення. Тому енергія, яка пов'язана з цими видами рухів, змінюється “стрибками”.

5.6. Адіабатний процес

Адіабатним називається процес, який протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем.

Внутрішня енергія ідеального газу:
$$U = \frac{m}{\mu} C_v T, \quad (5.12),$$

де $C_v = \frac{i}{2} R$ - молярна теплоємність при сталому об'ємі.

З (5.12) маємо
$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT.$$
 Тоді перший закон термодинаміки набуває

вигляду:
$$dQ = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV$$

Для адіабатного процесу $dQ = 0$, тому
$$dQ = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV = 0 \quad (5.13).$$

З рівняння Клайперона $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$, тоді з (5.13) маємо:

$$\frac{m}{\mu} C_v dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = 0$$

Розділяючи змінні, отримаємо: $\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0$,

Останній вираз можна записати: $d(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V) = 0$, звідки маємо:

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const} . \quad (5.14). \quad \text{Оскільки: } R = C_p - C_V,$$

то $\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$, де коефіцієнт $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$

Формула (5.14) отримає вигляд: $\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const} \quad (5.15).$

Виконуючи потенціювання у (5.15), отримаємо: $TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (5.16).$

Оскільки $T = \frac{\mu P V}{m R}$, то з (5.16) маємо:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (5.17)$$

Рівняння (5.17) має назву рівняння Пуассона.

Для ізотермічного процесу: $pV = \text{const}$.

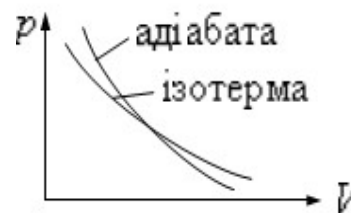


Рис.5.8

Оскільки $\gamma > 1$, то на координатній площині (p, V) адіабата проходить більш круто, ніж ізотерма (рис.5.8).

Швидкі процеси близькі до адіабатичних.

Розглянемо приклади задач.

Задача 5.1. У посудині, об'єм якої $V = 30$ л, міститься ідеальний газ при температурі 0°C . Після того, як частина газу була випущена назовні, тиск у посудині знизився на $\Delta p = 0,76$ атм без зміни температури. Знайти масу випущеного газу. Густина даного газу за нормальних умов $\rho_0 = 1,3$ г/л.

Розв'язання.

З рівняння стану ідеального газу випливає:

$$\left. \begin{aligned} p_0 V &= \frac{m}{M} R T_0, \\ (p_0 - \Delta p) V &= \frac{m - \Delta m}{M} R T_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_0 - \Delta p}{p_0} = \frac{m - \Delta m}{m} \Rightarrow \Delta m = \frac{m \Delta p}{p_0},$$

але $m = \rho_0 V$, тому

$$\Delta m = \frac{\rho_0 V \Delta p}{p_0} = 30,4 \text{ г} = 30,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

Задача 5.2. Густина повітря при температурі 0°C і тиску 760 мм. рт. ст. дорівнює $0,001293 \text{ г/см}^3$. Визначити масу одного літра повітря при температурі $27,3^\circ\text{C}$ і тиску 750 мм. рт. ст.

Розв'язання.

З рівняння стану ідеального газу маємо для нормальних умов:

$$\rho_0 = \frac{p_0 m}{R T_0}, \quad (1)$$

для умови задачі:

$$\rho = \frac{p m}{R T}. \quad (2)$$

З (1) і (2) випливає:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T},$$

$$m = \rho V = \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} V = 1,16 \text{ г} = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Задача 5.3. Посудина об'ємом $V = 20 \text{ л}$. містить суміш водню та гелію при температурі $t = 20^\circ\text{C}$ і тиску $p = 2,00 \text{ атм}$. Маса суміші $m = 5,0 \text{ г}$. Знайти відношення маси водню до маси гелію у даній суміші.

Розв'язання.

Комбінуючи закон Дальтона для тиску суміші газів $p = \sum_n p_n$ з

рівнянням стану ідеальних газів, дістаємо:

$$\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} = \frac{pV}{RT}. \quad (1)$$

Прийmemo, що m_1 – маса водню, m_2 – маса гелію. Оскільки $m = m_1 + m_2$, то (1) можна записати у двох варіантах:

$$\frac{m_1}{M_1} + \frac{m - m_1}{M_2} = \frac{pV}{RT}, \quad (2)$$

$$\frac{m - m_2}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} = \frac{pV}{RT}. \quad (3)$$

З (2) випливає:

$$m_1 = \frac{-pV/RT + m/M_2}{1/M_2 - 1/M_1}, \quad (4)$$

З (3) випливає:

$$m_2 = \frac{pV/RT + m/M_1}{1/M_2 - 1/M_1}. \quad (5)$$

З (4) та (5) дістаємо:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - a/M_2}{a/M_1 - 1}, \quad (6)$$

$$\text{де } a \equiv \frac{mRT}{pV}.$$

Підставимо у (6) числові дані, дістанемо:

$$m_1/m_2 = 0,50.$$

Задача 5.4. Поршнеvim повітряним насосом відкачують посудину об'ємом V . За один цикл (хід поршня) насос захоплює об'єм ΔV . Через скільки

циклів тиск у посудині зменшиться у η разів? Процес вважати ізотермічним, а газ – ідеальним.

Розв'язання.

Нехай початковий тиск у камері насоса – p_1 , а об'єм камери V . При розширенні газу до об'єму $V + \Delta V$, тиск зменшується до p_2 . За законом Бойля - Маріотта для ізотермічного процесу:

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V) \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V}{V + \Delta V}.$$

Друге розширення починається з тиску p_2 і об'єму V , тому:

$$p_2 V = p_3 (V + \Delta V) \Rightarrow p_3 = p_2 \frac{V}{V + \Delta V} = p_2 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^2,$$

Після n -го циклу:

$$p_n = p_1 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n$$
$$\eta = \frac{p_1}{p_n} = \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right)^n; \Rightarrow n = \frac{\ln \eta}{\ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)}.$$

Задача 5.5. Швидкість відкачки обертового масляного насоса $k = 150$ см³/с. Скільки потрібно буде часу, щоб колбу об'ємом $V = 5$ л відкачати від нормального атмосферного тиску до тиску в $1 \cdot 10^{-3}$ мм. рт. ст.?

Розв'язання.

Будемо вважати процес ізотермічним. Тоді:

$$d(pV) = 0, \quad p dV + V dp = 0; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}.$$

За умовою, $dV = k dt$, тому

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kdt}{V}, \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{k}{V} \int_0^t dt, \text{ або}$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{k}{V} t, \quad t = \frac{V}{k} \ln \frac{p}{p_0}, \quad t = 370 \text{ с.}$$

Задача 5.6. Якому тискові необхідно піддати вуглекислий газ при температурі $T = 300 \text{ К}$, щоб його густина стала рівною $\rho = 500 \text{ г/л}$? Розрахунок провести як для ідеального газу, так і для ван-дер-ваальсового.

Розв'язання.

1) Ідеальний газ.

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} = 280 \text{ атм.}$$

2) Ван-дер-ваальсов газ.

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}. \quad (1)$$

Помножимо чисельник і знаменник першого доданку на ρ , а другого на ρ^2 , і зауваживши, що $pV_M = M$, з (1) дістанемо:

$$p = \frac{\rho RT}{M - b\rho} - \frac{p^2 a}{M^2}. \quad (2)$$

З таблиць обираємо для CO_2 : $M = 44 \text{ г/моль}$, $a = 0,367 (\text{Па} \cdot \text{м}^2)/\text{моль}$,
 $b = 43 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$.

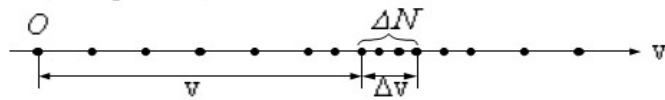
З виразів (1) та (2) знаходимо $p = 80 \text{ атм}$

5.7. Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвела)

Молекули газу рухаються із самими різними швидкостями, при цьому величина і напрям швидкості кожної молекули безперервно змінюються через

зіткнення. Можливі значення швидкості молекул, які містяться у межах від 0 до ∞ , не рівномірні. Дуже великі і дуже малі порівняно з середніми швидкості малоімовірні.

Будемо відмічати значення швидкостей молекул точками на осі швидкостей v



(рис. 5.9). Швидкості молекул розподілені на осі нерівномірно,

Рис.5.9

вони групуються переважно

навколо найбільш імовірного значення. Якщо N – загальна кількість молекул газу, то введемо ΔN – кількість точок, які потрапляють в інтервал швидкостей

Δv . Тоді густина точок на осі швидкостей:

$$p(v) = \frac{\Delta N}{\Delta v}, \quad (5.18).$$

З врахуванням (5.18) однаковою для різних порцій газу буде величина:

$$f(v) = \frac{p(v)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v} \quad (5.19).$$

Функція $f(v)$ характеризує розподіл молекул за значеннями швидкостей і має назву функції розподілу.

Величина $f(v)\Delta v = \frac{\Delta N_v}{N}$ дає імовірність того, що швидкість молекули має значення в інтервалі $[v, v + \Delta v]$.

Сама функція $f(v)$ визначає густину імовірності, тобто, імовірність того, що швидкість молекули лежить в одиничному інтервалі швидкостей навколо значення v .

Функція розподілу $f(v)$ за значеннями

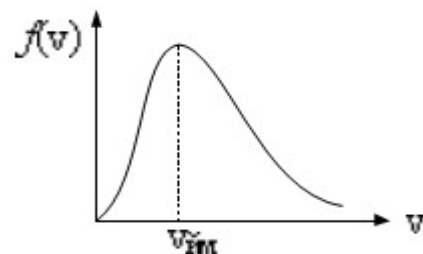


Рис.5.10

швидкостей була визначена Максвелом і має вигляд: $f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$, (5.20),

де $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$ - коефіцієнт пропорційності.

Графік функції $f(v)$ наведено на рис.5.10. Визначимо швидкість, яка відповідає максимуму функції розподілу $f(v)$. Ця швидкість $v_{\text{ім}}$ називається найбільш імовірною швидкістю.

Для цього функцію $f(v)$ потрібно дослідити на екстремум.

$$\frac{df}{dv} = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) v = 0.$$

Звідки найбільш ймовірна швидкість: $v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. (5.21)

Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостям, можна знайти середнє значення швидкості молекул:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (5.22)$$

Порівнюючи (5.21) і (5.22), бачимо, що середня швидкість молекул у $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ разів більша, ніж найбільша імовірна.

Середню квадратичну швидкість поступального руху молекул ідеального газу

отримаємо з визначення кінетичної енергії $E_k = \frac{mv^2}{2}$, та формули зв'язку

кінетичної енергії і температури: $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT$.

Якщо $\frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2}$, то $v^2 = 3kT/m_0$ і $v_{с.кв.} = (3kT/m_0)^{1/2}$ - середня квадратична швидкість поступального руху молекул. Тут k — стала Больцмана, T — абсолютна температура, m_0 — маса молекули.

Щоб знайти масу молекули, слід масу моля (молярну масу M) поділити на число молекул в молі (число Авогадро N_A): $m_0 = M/ N_A$

Якщо врахувати, що універсальна газова стала $R = k \cdot N_A$, то середню квадратичну швидкість можна записати так: $v_{с.кв.} = (3RT/M)^{1/2}$ (5.23).

5.8. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

Атмосферний тиск на будь-якій висоті обумовлений вагою вищих шарів газу. Атмосферний тиск біля поверхні Землі зменшується з висотою згідно барометричної формули:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \quad (5.24).$$

З формули (5.24) бачимо, що тиск зменшується висотою тим швидше, чим важче газ і чим нижча температура (див. рис.5.11).

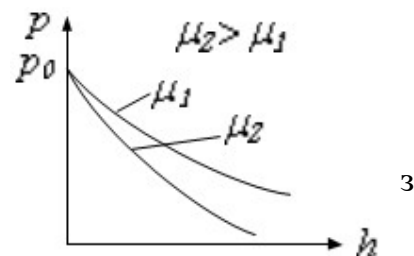


Рис.5.11

Тиск газу визначається за формулою $p = nkT$ і, якщо температура ще не залежить від висоти, то барометрична формула отримує вигляд:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (5.25),$$

де n — кількість молекул в одиниці об'єму на висоті h ,

n_0 — на висоті $h = 0$. Величина $\mu/R = m/k$, де m — маса молекули, k — стала

Больцмана. Формулу (5.25) можна записати у вигляді: $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ (5.26).

Формула (5.26) описує розподіл молекул з висотою. Зі зниженням температури кількість частинок на висотах, які відмінні від нуля, зменшується і перетворюється в нуль при $T = 0$ К.

Враховуючи, що $E_p = mgh$ – потенціальна енергія частинки, формула (5.26)

записується у вигляді: $n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}$. (5.27).

Формула (5.27) дає розподіл частинок за потенціальною енергією –

розподіл Больцмана. Частинки розподіляються з більшою густиною там, де менша їх потенціальна енергія.

Цей розподіл справедливий у будь-якому потенціальному силовому полі для великої сукупності однакових частинок, які знаходяться в стані хаотичного теплового руху.

5.9. Середня довжина вільного пробігу молекул

Мінімальна відстань d , на яку наближаються при зіткненні центри двох молекул, називається ефективним діаметром молекули (рис.5.12).

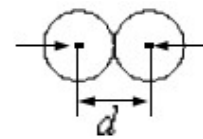


Рис.5.12

Величина $\sigma = \pi d^2$ називається ефективним перерізом молекули.

Ефективний діаметр зменшується із збільшенням температури. Молекули газу рухаються хаотично, від зіткнення до зіткнення вільно, тобто рівномірно й прямолінійно рух.

Шлях, який проходить молекула від одного зіткнення до наступного, називається довжиною вільного пробігу. Це випадкова величина, тому мова може йти тільки про її середнє значення. Середня довжина вільного пробігу λ

дорівнює: $\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\nu}$ (5.28), де $\langle v \rangle$ – середня швидкість теплового руху молекул, ν – середнє число зіткнень за 1 с.

Для того, щоб визначити v припустимо, що всі молекули газу крім даної зупинилися (заморожені) на своїх місцях, і рухається лише одна молекула. На рис.5.13 послідовні положення рухомої молекули позначені пустими кругами, а нерухомі молекули – заштрихованими. Рухома молекула за 1с

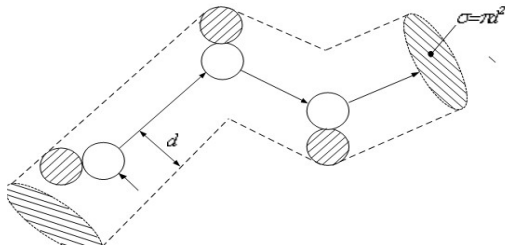


Рис.5.13

співударяється із всіма замороженими молекулами, центри яких потрапляють всередину ломаного циліндра радіусу d ,
 $v = \pi d^2 \langle v \rangle n$ разів,

де n – кількість молекул в одиниці об'єму,
 d – ефективний діаметр молекули.

В дійсності кількість зіткнень визнається не швидкістю молекул відносно стінок посудини, а відносною швидкістю руху молекул, тому:

$$v = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (5.29)$$

Підставляючи (5.29) в (5.28) отримаємо:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (5.30)$$

5.10. Явища переносу

Явища переносу – це явища, які виникають при відхиленні газу від стану рівноваги. До них відносяться: внутрішнє тертя, теплопровідність і дифузія.

Розглянемо явище внутрішнього тертя. Якщо швидкість u впорядкованого руху у потоці газу змінюється від шару до шару, то між шарами виникає сила внутрішнього тертя, яка визначається за формулою: $F = \eta \frac{du}{dz} S$ (5.31),

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя, $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості, який характеризує зміну швидкостей шарів у напрямку, перпендикулярному до напрямку їхнього руху, S – площа поверхні шарів газу. За фізичним змістом, коефіцієнт внутрішнього тертя чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя,

яка діє на шар рідини одиночної площі при одиничному градієнту швидкості.

Явище внутрішнього тертя (в'язкість)

Розглянемо, як молекулярно-кінетична теорія газів пояснює явище внутрішнього тертя. Для цього розглянемо два сусідніх шари у потоку газу. Позначимо K_1 і K_2 – імпульси шарів (рис.5.14). Вони не залишаються сталими внаслідок теплового руху молекул газу.

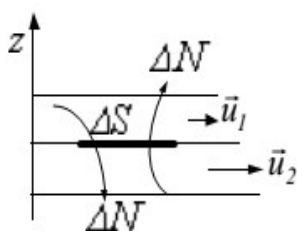


Рис.5.14

Визначаємо площадку площею ΔS на межі між шарами (рис.5.14). Кількість молекул, які внаслідок теплового руху за час Δt переходять через площину ΔS із одного шару в інший дорівнює:

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta S \Delta t$$

В результаті імпульс більш швидкого шару зменшується, а імпульс більш повільного – зростає. З першого шару за час Δt виходить імпульс:

$$\Delta K'_1 = \Delta N m u_1, \text{ де } m - \text{маса молекули, а привноситься: } \Delta K''_1 = \Delta N m u_2$$

Зміни імпульсу першого шару:

$$\Delta K_1 = \Delta K''_1 - \Delta K'_1 = \Delta N m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1) \Delta S \Delta t$$

На перший шар з боку другого діє сила:

$$F_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n m \langle v \rangle (u_2 - u_1) \Delta S \quad (5.32)$$

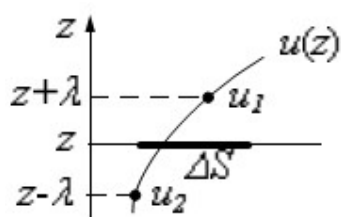


Рис.5.15

На другий шар з боку першого діє $F_2 = -F_1$.

Швидкість впорядкованого руху не змінюється стрибком від одного шару до другого, а є безперервною функцією поперечної координати z (рис.5.15). Можна вважати, що молекули переносять

через площину ΔS імпульси, які вони мали у точці останнього зіткнення на відстані довжини вільного пробігу λ від площини ΔS , тобто: $u_2 = u(z + \lambda)$; $u_1 = u(z - \lambda)$.

Враховуючи те, що λ - маленька величина, вираз для швидкості можна представити у вигляді розкладу в ряд з обмеженням двох перших членів

ряду: $u(z \pm \lambda) = u(z) \pm \frac{du}{dz} \lambda$. Тоді $u_2 - u_1 = 2\lambda \frac{du}{dz}$. (5.33)

Підставляючи (5.33) у (5.32), отримуємо для сили внутрішнього тертя

формулу: $F = \left(\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda \right) \frac{du}{dz} \Delta S$ (5.34). Порівняння теоретичної формули

(5.34) з дослідною (5.31) показує, що вони повністю однакові, а для коефіцієнта внутрішнього тертя (коефіцієнта в'язкості)

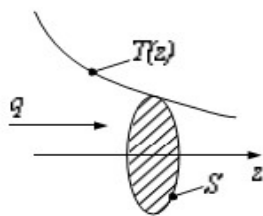
молекулярно-кінетична теорія дає вираз: $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda$ (5.35)

Теплопровідність газів

Якщо в будь-якому середовищі вздовж деякого напрямку z (рис.5.16)

температура не залишається сталою, то вздовж цього напрямку

встановлюється потік тепла:



$q = -k \frac{dT}{dz} S$ (5.36), де $q = \frac{dQ}{dt}$ - потік тепла, тобто кількість тепла, що переноситься через площину S в одиницю часу і вимірюється в системі СІ у Вт; $\frac{dT}{dz}$ - градієнт температури,

Рис. 5.16 який характеризує швидкість зміни температури вздовж координати z . Знак мінус у формулі (5.36) говорить про те, що потік тепла завжди тече в бік зменшення температури. Потік тепла q – алгебраїчна величина: при $q > 0$ потік вздовж осі z , при $q < 0$ – у бік, протилежний до осі z . Середня енергія теплового руху молекул пропорційна температурі:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Розглянемо явище теплопровідності з точки зору молекулярно-кінетичної теорії. Кількість молекул ΔN , які перетинають площадку S вздовж осі z (рис.5.16) за час Δt однакова, а їхня енергія різна, оскільки різна температура ліворуч і праворуч площадки S . Потік тепла буде дорівнювати:

$$q = \frac{\Delta N}{\Delta t} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) , \text{ де } \varepsilon_1 - \text{енергія молекули на відстані } \lambda \text{ з боку більшої}$$

температури від площадки S , а ε_2 – теж саме з іншого боку. Повторюючи всі викладки попереднього розділу, отримуємо формулу

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S \quad (5.37), \text{ яку називають } \underline{\text{закон Фур'є}}, \text{ а для } \underline{\text{коефіцієнта}}$$

теплопровідності маємо: $\kappa = \eta c_V$,

де c_V – питома теплоємність газу при старому об'ємі, η – коефіцієнт

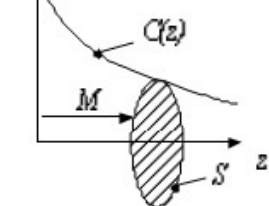
внутрішнього тертя, який дорівнює $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda$

Таким чином, переміщуючись внаслідок теплового руху з одних місць в інші, молекули переносять накопичену ними енергію. Цей процес і обумовлює теплопровідність .

Дифузія в газах

Якщо концентрація c газу в різних точках простору неоднакова, то внаслідок теплового руху молекул буде проходити процес вирівнювання концентрації, який супроводжується переносом маси. За напрямком зменшення

концентрації встановлюється потік маси: $\mu = -D \frac{dc}{dz} S$ (5.38),



де $\mu = \frac{dM}{dt}$ – потік маси газу, тобто кількість маси, яка

переноситься через площадку S за одиницю часу; $\frac{dc}{dz}$ –

градієнт концентрації, який характеризує швидкість зміни концентрації вздовж осі z (рис.5.17).

Рис.5.17

Вираз (5.38) – закон Фіка для дифузії в газах.

Для коефіцієнта дифузії D маємо формулу:

$D = \eta / \rho$, де ρ – густина газу, η – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Коефіцієнти дифузії для різних газів задані в таблицях.

Розглянемо приклади задач.

Задача 5.7. В посудині об'ємом $V = 5,0$ л знаходиться азот масою $m = 1,40$ г при температурі $T = 1800$ К. Знайти тиск газу, якщо при цій температурі $\eta = 30\%$ молекул дисоційовані на атоми.

Розв'язання.

В посудині маємо суміш двох компонентів:

1) газу молекул N_2 з масою $(1-\eta)m$ та молярною масою

$$M_1 = 28 \text{ г/моль};$$

2) газу атомів з масою ηm та атомною масою $M_2 = \frac{1}{2} M_1$.

За законом Дальтона, тиск суміші p дорівнює сумі парціальних тисків $p = p_1 + p_2$, тоді, за законом Менделєєва - Клайперона, можна записати:

$$p = \left[\frac{(1-\eta)m}{M} \frac{RT}{V} + \frac{2\eta m}{M} \right] \frac{RT}{V} = \frac{(1+\eta)mRT}{MV} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,9 \text{ атм.}$$

Задача 5.8. Посудина з газом жорстких двохатомних молекул рухається зі швидкістю $v = 20$ м/с. Молярна маса газу $M = 32$ г/моль. Знайти приріст температури газу після раптової зупинки посудини.

Розв'язання.

До системи, що складається з однакових частинок – молекул газу, – застосуємо теорему Кеніга, приймаючи, що всі молекули мають середню квадратичну швидкість. Отже маємо:

$$\frac{\sum m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{\sum m \langle v_1 \rangle^2}{2} + \frac{(\sum m) v^2}{2}, \quad (1)$$

де m – маса молекули.

За теоремою про рівнорозподіл енергії молекул за ступенями вільності:

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{i}{2} kT.$$

Помноживши (2) на число Авогадро, отримаємо:

$$\frac{M \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{i}{2} RT, \quad (3)$$

де $M = \sum m$ – маса моля газу.

Тоді (1) перепишеться так:

$$\frac{i}{2} RT_2 = \frac{i}{2} RT_1 + \frac{M v^2}{2}, \text{ або}$$

$$\frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{M v^2}{2} \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{M v^2}{iR}, \text{ де } i = 5.$$

Підставивши числові значення, дістанемо:

$$\Delta T = 0,31 \text{ К.}$$

Задача 5.9. Визначити температуру газу, для якого:

а) середня квадратична швидкість молекул водню більша від їх найбільш імовірної швидкості на $\Delta v = 400 \text{ м/с}$;

б) функція розподілу молекул кисню за швидкостями $F(v)$ буде мати максимум при швидкості 420 м/с.

Розв'язання.

а) За умовою задачі маємо

$$\sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} + \Delta v,$$

звідки:

$$\sqrt{\frac{kT}{m}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \Delta v,$$

звідси

$$T = \frac{m}{k} \frac{(\Delta v)^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{M}{R} \frac{(\Delta v)^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = 380 \text{ К.}$$

б) При сталій температурі $F(v) = \text{const} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$,

З умови максимуму $F'(v) = 0$:

$$2v - \frac{2v \cdot m \cdot v^2}{2kT} = 0,$$

маємо:

$$2v \left(1 - \frac{mv^2}{2kT} \right) = 0 \Rightarrow T = \frac{mv^2}{2k} = \frac{Mv^2}{2R} = 340 \text{ К.}$$

Задача 5.10. У довгій вертикальній посудині міститься газ, який складається з двох сортів молекул з масами m_1 та m_2 , причому $m_2 > m_1$. Концентрації цих молекул біля дна посудини дорівнюють відповідно n_1 та n_2 , причому $n_2 > n_1$. Вважаючи, що по всій висоті підтримується одна і та ж

температура T і прискорення вільного падіння дорівнює g , знайти висоту h , на якій концентрації цих сортів молекул будуть однакові.

Розв'язання.

За формулою Больцмана, концентрації обох сортів молекул на висоті h :

$$n_1(h) = n_{01} \exp\left(-\frac{m_1 gh}{kT}\right),$$

$$n_2(h) = n_{02} \exp\left(-\frac{m_2 gh}{kT}\right),$$

але, за умовою, $n_2(h) = n_1(h)$, тому:

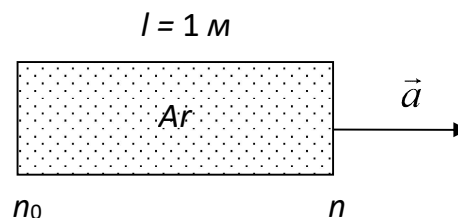
$$n_{01} \exp\left(-\frac{m_1 gh}{kT}\right) = n_{02} \exp\left(-\frac{m_2 gh}{kT}\right) \Rightarrow \frac{n_{02}}{n_{01}} = \exp\left(\frac{gh}{kT}(m_2 - m_1)\right), \text{ тоді}$$

$$\ln \frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{(m_2 - m_1)gh}{kT} \Rightarrow h = \frac{kT \ln \frac{n_{02}}{n_{01}}}{(m_2 - m_1)g}$$

Задача 5.11. Закриту з обох кінців горизонтальну трубку довжиною $l = 100$ см переміщують зі сталим прискоренням a , напрямленим уздовж її осі. Всередині трубки міститься аргон при температурі $T = 330$ К. За якого значення a концентрації аргону поблизу кінців трубки будуть відрізнятися одна від одної на $\eta = 1,0\%$?

Розв'язання.

Газ буде знаходитись в полі сил інерції, напрямлених проти напрямку прискорення: $\vec{F} = -m\vec{a}$. За формулою Больцмана:



$$n(l) = n_0 \exp\left(-\frac{mal}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{Mal}{RT}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{n_0}{n} = \exp\left(\frac{Mal}{RT}\right) \Rightarrow \ln \frac{n_0}{n} = \frac{Mal}{RT},$$

або

$$\frac{n_0}{n} = 1 + \eta, \quad \ln(1 + \eta) \cong \eta, \quad \eta = \frac{Mal}{RT};$$

$$a = \frac{\eta RT}{Ml} = 684 \text{ м/с}^2 = 70 \text{ г}.$$

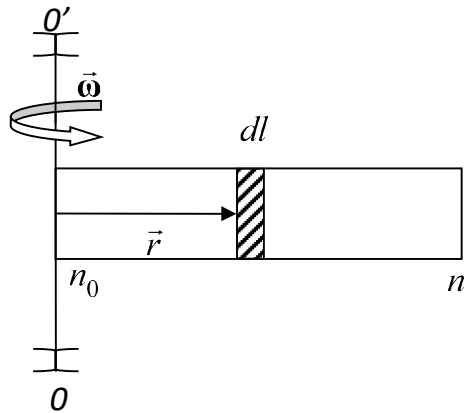
Задача 5.12. Горизонтально розташовану трубку з закритими кінцями обертають зі сталою кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через один з її кінців. У трубці знаходиться вуглекислий газ при температурі $T = 300$ К. Довжина трубки $l = 100$ см. Знайти значення ω , при якому відношення концентрацій молекул біля протилежних кінців трубки $\eta = 2,0$.

Розв'язання.

На молекули в трубці діють відцентрові сили інерції, внаслідок чого концентрація молекул у вільному кінці трубки буде більшою, ніж біля осі. За умовою задачі, $\frac{n}{n_0} = \eta$, де n_0 – концентрація молекул біля осі обертання. Формула Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right).$$

Для потенціальної енергії частинки маємо:



$$dU = -Fdr = -m\omega^2 r dr \Rightarrow U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

тому $n = n_0 \exp\left(\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}\right),$

але $n = \eta n_0$, отже

$$\eta = \exp\left(\frac{ml^2\omega^2}{2kT}\right),$$

$$\ln \eta = \frac{ml^2\omega^2}{2kT} = \frac{Ml^2\omega^2}{2RT},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2RT \ln \eta}{Ml^2}} = 280 \text{ рад/с}.$$

Задача 5.13. Азот знаходиться за нормальних умов. Знайти:

- а) середнє число зіткнень, яких зазнає кожна молекула за одну секунду;
- б) число всіх зіткнень між молекулами в 1 см³ щосекунди.

Розв'язання.

$$\text{а) } \nu = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle, \quad (1)$$

$$\text{де } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

За нормальних умов $n_0 = \frac{p_0}{kT}$. Нормальний тиск $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па,

тому $n = \frac{p_0}{kT}$. Ефективний діаметр молекули азоту $d = 0,37 \cdot 10^{-9}$ м. З (1)

дістанемо:

$$\nu = 0,74 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

б) Число зіткнень молекул в одиниці об'єму:

$$\nu^* = \frac{n}{2} \nu = \frac{\pi}{\sqrt{2}} d^2 n^2 \langle \nu \rangle = 1,0 \cdot 10^{29} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-3}.$$

Задача 5.14. Як залежить середня довжина вільного пробігу та число зіткнень в одиницю часу в таких процесах:

а) ізохорному; б) ізобарному.

Розв'язання.

а) Ізохорний процес.

$$1) \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \text{ тобто } \lambda \sim \frac{1}{n}, \text{ але } n = \frac{p}{kT}, \text{ тому}$$

$$\lambda \sim \frac{T}{p}, \text{ а } pV = \nu RT \Rightarrow \frac{T}{p} \sim V, \text{ } n \sim V, \text{ і } \lambda \sim \frac{1}{V},$$

а оскільки процес ізохорний, то $\lambda = \text{const}$.

$$2) \nu \sim n \langle \nu \rangle = n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \sqrt{T}; \quad \nu \sim \sqrt{T}.$$

б) Ізобарний процес.

$$1) \text{ Як показано вище, } \lambda \sim \frac{T}{p}, \text{ тому при } p = \text{const} \text{ маємо } \lambda \sim T.$$

$$2) \nu \sim n \langle \nu \rangle = \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \frac{p}{\sqrt{T}}, \text{ при } p = \text{const}, \quad \nu \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Задача 5.15. Два однакових паралельних диски, осі яких збігаються, розташовані на відстані h один від одного. Радіус кожного диска дорівнює a , причому $a \gg h$. Один диск обертається з невеликою кутовою швидкістю ω , другий диск нерухомий. Знайти момент сил тертя, що діє на нерухомий диск, якщо в'язкість газу між дисками дорівнює η .

Розв'язання.

Розглянемо дископодібний шар газу, що знаходиться між дисками. Сила тертя, прикладена до елемента поверхні $2\pi r dr$ цього шару з боку сусіднього шару:

$$dF = \eta \frac{du}{dh} dS = \eta \frac{u}{h} 2\pi r dr.$$

Момент цієї сили відносно осі обертання:

$$dN = dFr = \eta \frac{u}{h} 2\pi r^2 dr,$$

а оскільки $u = \omega r$, то $dN = \eta \frac{\omega}{h} 2\pi r^3 dr$. Інтегруючи цей вираз від 0 до a ,

$$\text{дістанемо: } N = \frac{\pi \eta \omega a^4}{2h}.$$

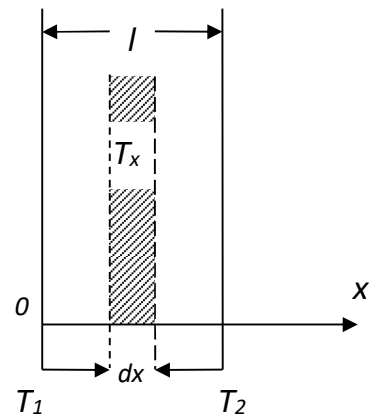
Задача 5.16. Знайти розподіл температур у речовині, що міститься між двома великими паралельними пластинами, якщо останні підтримують при температурах T_1 та T_2 , відстань між ними дорівнює l , і теплопровідність речовини $\chi \approx \sqrt{T}$.

Розв'язання.

За умовою задачі: $\chi = k\sqrt{T}$, де k – стала. Тоді густина потоку тепла ($T_2 > T_1$)

$$w = k\sqrt{T} \frac{dT}{dx}, \text{ звідки:}$$

$$\left. \begin{aligned} wx &= \frac{2}{3}k \left(T_x^{3/2} - T_1^{3/2} \right) \\ wl &= \frac{2}{3}k \left(T_2^{3/2} - T_1^{3/2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$T(x) = T_1 \left\{ 1 + \frac{\chi}{l} \left[(T_2/T_1)^{3/2} - 1 \right] \right\}^{3/2}.$$

5.11. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса.

Модель ідеального газу, яка використовується в молекулярно-кінетичній теорії газів, дає змогу описувати поведінку розріджених газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. Виводячи рівняння стану ідеального газу, нехтують при цьому розмірами молекул і їх взаємодію одна з одною.

Підвищення тиску приводить до зменшення середньої відстані між молекулами, і тому потрібно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними. Розглядаючи реальні гази – як гази, властивості яких залежать від взаємодії молекул, треба враховувати сили міжмолекулярної взаємодії. Механізм співударення молекул реальних газів не містить прямого пружного удару, як це приймалось при розгляді молекул ідеального газу. Взаємодія реальних молекул відбувається на відстані, і молекули не наближаються до дотику. Отже, для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул та їх взаємодію одна з одною, тому модель ідеального газу і рівняння Клапейрона-Менделєєва, яке описує ідеальний газ, для реальних газів непридатне.

Вирішення даної проблеми запропонував у 1873 році голландський фізик Ван-дер-Ваальс (1837-1923), який ввів рівняння стану, що назване його іменем. Газ Ван-дер-Ваальса – це така модель реального газу, в якій молекули розглядаються як тверді кульки певного об'єму (діаметром d), між якими діють сили взаємного притягання. Наявність власного розміру кульок зумовлює те, що в даній моделі враховано і сили відштовхування між молекулами реального газу.

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об'єм інших молекул, зводиться до того, що фактично вільний об'єм, в якому можуть рухатись молекули реального газу, буде не V_μ , а $(V_\mu - b)$,

де b - об'єм, що „заборонений” для руху молекул. Рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу має вигляд:

$$(p + a/V_\mu^2)(V_\mu - b) = RT \quad (5.39)$$

Рівняння стану реального газу відрізняється від рівняння Клапейрона-Менделєєва введенням двох поправок.

1. Врахування розмірів молекул та сил відштовхування між ними

Поправка b – поправка Ван-дер-Ваальса на власний об'єм молекул (чисельно дорівнює чотирьом об'ємам всіх молекул в даному об'ємі газу): $b = 4V_0 N$, $[b] = \text{м}^3/\text{моль}$.

2. Врахування сил притягання між молекулами.

Вводиться поправка на додатковий внутрішній тиск, який зумовлений притяганням молекул: $\Delta p = a/V^2$, $[a] = (\text{Па м}^6)/\text{моль}^2 = (\text{Н м}^4)/\text{моль}^2$

де a – коефіцієнт Ван – дер - Ваальса, який залежить від хімічної природи газу.

На практиці параметри a та b визначають для кожного газу експериментально (див. таблиці).

Теорія Ван – дер - Ваальса добре описує стан та поведінку реальних газів, що підтверджується експериментальними дослідженнями, проте вона не застосовна для дуже стиснутих газів.

У випадку реального газу внутрішня енергія є сумою кінетичної енергії хаотичного руху молекул і потенціальної енергії взаємодії між ними:

$$U = K + \Pi. \text{ Якщо } d\Pi = p dV = (a/V^2) dV, \text{ то } \Pi = - a/V + \text{const.}$$

Якщо значення об'єму прямує до безмежності, то константа інтегрування прямує до нуля і для внутрішньої енергії одного моля реального газу маємо:

$$U = C_V T - a/V.$$

Отже внутрішня енергія реального газу U залежить не лише від температури, а й від об'єму. (Величина C_v для всіх реальних газів, крім водню, за температур до 1500°C така сама, як для ідеального газу).

5.12. Закони термодинаміки

Основу термодинаміки утворюють два закони.

Перший закон встановлює кількісні співвідношення, які мають місце при перетворенні енергії з одних видів у інші і є законом збереження енергії в теплових процесах. Другий закон термодинаміки визначає умови, за яких можливі ці перетворення енергії.

У термодинаміці велику роль відіграють поняття рівноважного стану і оборотного процесу. Оборотним називається процес, який можна провести в зворотному напрямку так, що система проходить через ті ж самі стани, що і при прямому ході, але у зворотній послідовності. Після повернення системи у початковий стан в оточуючих систему тілах не повинно залишатися будь-яких змін.

Оборотні процеси мають таку властивість: якщо при прямому ході на деякий елементарній ділянці система отримує тепло dQ і виконує роботу dA , то при зворотному ході на цій ділянці система віддає тепло $dQ' = dQ$ і над нею виконується робота $dA' = dA$.

5.13. Теплова машина

Будь-який тепловий двигун являє собою систему, яка виконує деякий круговий процес, в ході циклу робоча речовина спочатку розширюється, а потім стискається. Щоб робота за цикл була більше нуля (додатна), цикл повинен бути прямим, тобто за годинниковою стрілкою.



Рис.5.18

Для цього тиск в процесі розширення повинен бути більшим, ніж при стисканні, тому робочій речовині в ході розширення потрібно надавати тепло, а в ході стискання – віднімати тепло. При цьому на координатній площині (p, V) крива розширення буде вище кривої стискання (рис.5.18).

Тому будь - який тепловий двигун складається з трьох структурних елементів: робочого тіла, нагрівача і охолоджувача.

При виконання кругового процесу робочій речовині при розширенні надається тепло: $Q_1 = U_2 - U_1 + A_{12}$ (5.40),

а при стисканні відбирається тепло: $-Q_2 = U_2 - U_1 + A_{21}$ (5.41)

Додаючи формули (10.1) і (10.2), отримуємо: $Q_1 - Q_2 = A_{12} + A_{21} = A$,

де A – повна робота за цикл.

Не все отримане тепло можна використати для виконання корисної роботи.

Частина тепла також повинна бути повернена в зовнішнє середовище.

Коефіцієнт корисної дії теплової машини: $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ (5.42)

З точки зору роботи вічних двигунів I закон термодинаміки має формулювання: неможливий вічний двигун I роду, тобто такий періодично працюючий двигун, який виконує роботу в більшому об'ємі ніж отримана кількість теплоти.

Якщо здійснити цикл теплової машини в зворотному напрямку (рис.5.18), то отримаємо цикл холодильної машини.

Холодильна машина — пристрій, що служить для відводу теплоти від охолоджуваного тіла при температурі нижчій, ніж температура навколишнього середовища. Холодильні машини працюють за принципом теплового насоса — віднімають теплоту від охолоджуваного тіла (з витратою енергії механічної, теплової і т. д.) і передають її охолоджуваному середовищу (зазвичай воді або навколишньому повітрю), що має більш високу температуру, ніж охолоджуване

тіло. Для відводу теплоти над холодильною машиною за цикл повинна виконуватись робота зовнішніми силами.

Ефективність роботи холодильної машини характеризують її холодильним коефіцієнтом:

$$\varepsilon = Q_2' / A' = Q_2' / (Q_1' - Q_2') \quad (5.43),$$

де A' - робота, що виконується над машиною за цикл, Q_2' - кількість теплоти, яка відбирається за цикл від охолоджуваного тіла з температурою T_2 , Q_1' - кількість теплоти, що передається за цикл тілу з більш високою температурою T_1 .

5.14. Другий закон термодинаміки

Існує коротке формулювання II закону: неможливий самодовільний перехід тепла від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого (Клаузіус).

Коректне формулювання (за Кельвіном): неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких був би перехід тепла від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого.

Такий перехід тепла неможливий, якщо він є єдиним і кінцевим результатом процесу. Якщо він не є єдиним і кінцевим результатом процесу, то він можливий, наприклад, у холодильнику, де тепло переходить від менш нагрітих тіл у камері до більш нагрітих тіл оточуючого середовища. Але цей перехід тепла не є єдиним і кінцевим результатом процесу, при цьому ще виконується робота.

З точки зору роботи вічних двигунів II закон термодинаміки має формулювання: неможливий вічний двигун II роду, тобто такий періодично працюючий двигун, який отримує теплоту і повністю перетворює її в роботу. Такий перехід виконується при ізотермічному процесі, але при цьому є зміни об'єму і тиску в системі.

5.15. Цикл Карно

З'ясуємо, який оборотний цикл може виконувати система, яка здатна вступати в оборотний теплообмін з двома тепловими резервуарами зі сталою температурою T_1 і T_2 , відповідно (рис.5.19).

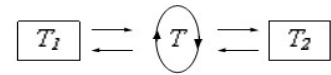


Рис.5.19

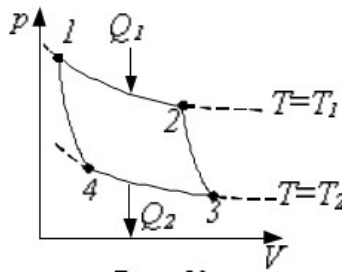


Рис.5.20

Тепловим резервуаром називають тіло з дуже великою теплоємністю, для якого отримання теплоти або її віддача не змінює його температуру. Як це впливає з другого закону термодинаміки, єдиним оборотним процесом, який супроводжується теплообміном з тепловим резервуаром зі сталою температурою, є ізотермічний процес, що протікає при температурі резервуара. Отже, оборотний цикл повинен складатися з двох ізотерм при температурах $T = T_1$ і $T = T_2$ і двох адіабат (процесів без теплообміну 2-3 і 4-1). Такий цикл був введений французьким інженером Карно і має назву його імені (рис.5.20).

При ізотермічному процесі $1 \rightarrow 2$ $U = \text{const}$ і $dU = 0$, а робота дорівнює:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Тому для ізотермічних процесів $1 \rightarrow 2$ (при $T = T_1$) і $3 \rightarrow 4$ (при $T = T_2$) з першого закону термодинаміки маємо:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad \text{та} \quad Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Для адіабатичних процесів $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ і тому для процесів $4 \rightarrow 1$ і $1 \rightarrow 2$

отримуємо: $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$, $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$. Звідки $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. (5.44).

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Тоді ККД циклу:

$$(5.45).$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5.46)$$

З врахуванням (10.5) маємо ККД циклу Карно:

Тобто, ККД циклу Карно визначається тільки температурами нагрівача и охолоджувача. Цей висновок відомий як теорема Карно: ККД усіх оборотних машин, які працюють в ідентичних умовах (тобто при однакових температурах нагрівача і охолоджувача) однакові.

5.16. Нерівність Клаузіуса

Справедливе твердження: ККД необоротної машини завжди менше ніж ККД оборотної, яка працює в тих же умовах. Це впливає того, що повна робота при необоротному циклі завжди менша ніж при оборотному. Крім того у необоротних машинах виконується некорисна робота проти сил тертя.

Це твердження можна записати у вигляді нерівності:
$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5.47).$$

Знак рівності відповідає оборотній, а нерівності – необоротній тепловій машині. Співвідношення (10.8) справедливе також для будь - якій системи тіл, яка виконує оборотний чи необоротний цикл.

З формули(5.47) отримуємо послідовно:
$$\frac{Q_2'}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}; \frac{Q_2'}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} \leq 0 \quad (5.48)$$

У формулах (5.48) Q_1 - кількість теплоти, яку отримує система від тіла з температурою T_1 , Q_2' - тепло, яке віддає система. Тоді - $Q_2' = Q_2$ і формули

(10.9) можна переписати у вигляді:
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (5.49)$$

Формула(5.49) і є нерівністю Клаузіуса.

Величина Q/T має назву зведеної кількості теплоти. З формули (5.49) випливає, що сума зведених кількостей теплоти, яку отримує система за цикл, дорівнює нулю, якщо цикл оборотний, і менша нуля, якщо цикл необоротний.

Якщо система вступає в теплообмін не з двома, а з N тілами, то нерівність

Клаузіуса набуває вигляду: $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$, (5.50),

де Q_i - кількість теплоти, отриманої від тіла з температурою T_i .

Якщо при передачі системі тепла температура тіла безперервно змінюється, то необхідно цикл розбити на елементарні процеси і тоді нерівність Клаузіуса

приймає вигляд: $\oint \frac{dQ}{T_i} \leq 0$, (5.51), де інтеграл береться за циклом.

Формула (5.51) є самою загальною формою запису нерівності Клаузіуса.

Розглянемо приклади задач.

Задача 5.17. Показати, що внутрішня енергія U повітря в кімнаті не залежить від температури, якщо зовнішній тиск p сталий. Обчислити U , якщо p дорівнює нормальному атмосферному тискові в об'ємі кімнати $V = 40 \text{ м}^3$.

Розв'язання.

Перший спосіб:

Енергія одиниці маси повітря $u = C_v T$, де C_v – питома теплоємність.

Енергія одиниці об'єму – $u_1 = \rho \cdot u$, де ρ – густина повітря. З рівняння

стану ідеального газу, випливає $\rho = \frac{Mp}{RT}$,

де – M молярна маса, тому:

$$u_1 = \frac{Mp}{RT} C_v T = \frac{Mp C_v}{R},$$

а енергія в об'ємі кімнати V :

$$U = u_1 V = \frac{Mp V C_v}{R}.$$

За сталого тиску U від T не залежить. Для обчислення енергій U зручно використати формулу:

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1},$$

Коефіцієнт Пуассона для повітря $\gamma = 1,4$. Підставляючи у останню формулу числові значення, дістанемо $U = 10$ МДж.

Другий спосіб:

Енергія повітря в кімнаті $U = N \langle \varepsilon \rangle$, де $\langle \varepsilon \rangle$ - середня енергія теплового руху молекул, N – число молекул у кімнаті, $N = nV$, де n – концентрація молекул. Згідно з кінетичною теорією газів: $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$, де i – число ступенів вільності.

Отже $U = nV \langle \varepsilon \rangle$, а оскільки з рівняння стану $n = \frac{p}{kT}$, то

$$U = \frac{p}{kT} V \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} pV,$$

тобто не залежить від T . Для молекул повітря $i = 5$, тому

$$U = \frac{5}{2} pV = \frac{5}{2} \cdot 10^5 \cdot 40 = 10 \text{ МДж.}$$

Задача 5.18. Два теплоізольованих балони 1 і 2 наповнені повітрям і з'єднані короткою трубкою з краном. Відомі об'єми балонів, а також тиск і температура повітря в них: (V_1, p_1, T_1) та (V_2, p_2, T_2) . Знайти температуру і тиск повітря, які встановляться після відкриття крану.

Розв'язання.

Нехай m_1 і m_2 - маси 1-го та 2-го газів, їх температури до з'єднання T_1 та T_2 . З рівняння теплового балансу

$Cm_1(T_1 - T) = Cm_2(T - T_2)$ дістанемо:

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}.$$

Користуючись виразами, отриманими з рівняння стану:

$$m_1 = \frac{p_1 V_1 M}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{p_2 V_2 M}{RT_2},$$

шляхом елементарних перетворень дістанемо:

$$T = \frac{(p_1 V_1 + p_2 V_2) T_1 T_2}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}.$$

Скориставшись знову рівнянням стану газу, дістанемо:

$$p = \frac{(m_1 + m_2) RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

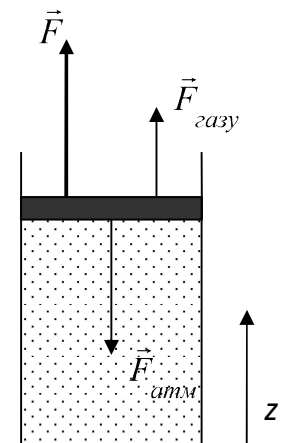
Задача 5.19. У вертикальному циліндрі під невагомим поршнем знаходиться один моль деякого ідеального газу при температурі T . Простір над поршнем сполучається з атмосферою. Яку роботу необхідно виконати, щоб, вільно підіймаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм газу під ним в n разів? Тертям знехтувати.

Розв'язання.

Векторна сума всіх сил, які діють на поршень, дорівнює нулю: $\sum \vec{F} = 0$, або в проекціях на вісь z :

$$F = F_{атм} - F_{газу}.$$

Елементарна робота цих сил:



$$Fdx = F_{атм} dx - F_{газу} dx.$$

Далі, помноживши цю рівність на площу поршня S та інтегруючи від V_1 до V_2 , дістаємо:

$$\begin{aligned} A &= p(V_2 - V_1) - \int_{V_1}^{V_2} p_{газу} d(Sdx) = \\ &= p(V_2 - V_1) - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = p(V_2 - V_1) - RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

Оскільки, за умовою, $V_2 = nV_1$, то

$$A = pV_1(n-1) - RT \ln n = RT(n-1-\ln n).$$

Задача 5.20. Деяку кількість одноатомного ідеального газу стискають адіабатично доти, поки тиск не перевищить початковий тиск у 10 разів. Потім газ розширяється ізотермічно до початкового об'єму. У скільки разів кінцевий тиск p_2 газу перевищує початковий тиск p_1 ?

Розв'язання.

По адіабаті:

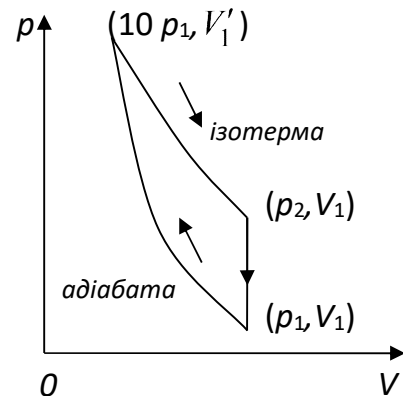
$$p_1 V_1^\gamma = 10 p_1 (V_1')^\gamma \Rightarrow \frac{V_1'}{V_1} = 10^{-\frac{1}{\gamma}},$$

По ізотермі:

$$10 p_1 V_1' = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 10 \frac{V_1'}{V_1},$$

тоді $\frac{p_2}{p_1} = 10^{1-\frac{1}{\gamma}}.$

Для одноатомного газу:



$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{3}{5} = 0,4,$$

$$\text{тому маємо } \frac{p_2}{p_1} = 10^{0,4} = 2,51.$$

Задача 5.21. Об'єм моля ідеального газу з показником адіабати γ змінюють за законом $V = a/T$, де a – стала. Знайти кількість тепла, отриманого газом у цьому процесі, якщо його температура зазнає приросту ΔT .

Розв'язання.

За 1 законом термодинаміки: $Q = \Delta U + A$,

$$U = \frac{RV}{\gamma - 1} = \frac{pa}{(\gamma - 1)T} = \frac{RT}{\gamma - 1}, \quad p = \frac{RT^2}{a}.$$

$$A = \int p dV = \int_{T_1}^{T_2} \frac{pa}{(\gamma - 1)T} \left(-\frac{a}{T^2} \right) dT = -R(T_2 - T_1) = -R\Delta T,$$

$$\Delta U = \frac{R\Delta T}{\gamma - 1},$$

$$Q = \frac{R\Delta T}{\gamma - 1} - R\Delta T = R\Delta T \left(\frac{2 - \gamma}{\gamma - 1} \right).$$

Задача 5.22. Ідеальний газ з показником адіабати γ розширили за законом $p = \alpha V$, де α – стала. Початковий об'єм газу V_0 . В результаті розширення об'єм збільшився в η разів. Знайти:

- приріст внутрішньої енергії газу;
- роботу, виконану газом;
- молярну теплоємність газу в цьому процесі.

Розв'язання.

$$\text{a) } U = \frac{pV}{\gamma-1} = \frac{\alpha V^2}{\gamma-1}; \quad U_0 = \frac{\alpha V_0^2}{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\Delta U = U - U_0 = \frac{\alpha}{\gamma-1} (V^2 - V_0^2) = \frac{\alpha V_0^2}{\gamma-1} (\eta^2 - 1)$$

$$\text{б) } A = \int_{V_0}^V p dV = \int_{V_0}^V \alpha V dV = \frac{\alpha}{2} (V^2 - V_0^2) = \frac{\alpha V_0^2}{2} (\eta^2 - 1)$$

$$\text{в) } C = C_v + \frac{dA}{dT}; \text{ але } \frac{dA}{dT} = p \frac{dV}{dT} = \frac{\alpha V dV}{dT} \Rightarrow$$

$$pV = RT \Rightarrow \alpha V^2 = RT \Rightarrow 2\alpha V dV = R dT \Rightarrow \frac{\alpha V dV}{dT} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Отже, } C = C_v + \frac{R}{2}.$$

Задача 5.23. Один моль ідеального газу, теплоємність якого при $p = \text{const}$ є C_p , виконує процес $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$ (p_0 і α – сталі). Знайти:

$$\text{a) } C = C(V);$$

б) надане газу тепло при його розширенні від V_1 до V_2 .

Розв'язання.

$$\text{a) } C = C_v + p \frac{dV}{dT} = \frac{R}{\gamma-1} + \left(p_0 + \frac{\alpha}{V} \right) \frac{dV}{dT}, \quad (1)$$

$$pV = RT \Rightarrow V \left(p_0 + \frac{\alpha}{V} \right) = RT \Rightarrow p_0 V + \alpha = RT \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{R}{p_0},$$

Підставляючи останній вираз в (1), дістанемо:

$$C = \frac{R}{\gamma-1} + \left(p_0 + \frac{\alpha}{V} \right) \frac{R}{p_0} = \frac{R}{\gamma-1} + \left(R + \frac{\alpha R}{p_0 V} \right) = R \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{\alpha}{p_0 V} \right).$$

б) Диференціюємо рівняння стану:

$pdV + Vdp = RdT$, або, оскільки,

$$p = p_0 + \frac{\alpha}{V} \Rightarrow dp = -\frac{\alpha}{V^2} dV,$$

$$\left(p_0 + \frac{\alpha}{V}\right)dV - V \frac{\alpha}{V^2} dV = p_0 dV = RdT;$$

$$dA = pdV = \left(p_0 + \frac{\alpha}{V}\right)dV = p_0 dV + \alpha \frac{dV}{V};$$

$$A = p_0 \Delta V + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad \Delta U = \frac{p_0 \Delta V}{\gamma - 1};$$

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + A = \frac{p_0 \Delta V}{\gamma - 1} + p_0 \Delta V + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1} = p_0 \Delta V \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 \Delta V + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1} = p_0 (V_2 - V_1) \frac{C_P / C_V}{C_P / C_V - 1} + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{C_P}{R} p_0 (V_2 - V_1) + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

Задача 5.24. У теплової машини, що працює за циклом Карно, температура нагрівача в $n = 1,60$ разів більша від температури холодильника. За один цикл машина виконає роботу $A = 12,0$ кДж. Яка робота витрачається на один цикл ізотермічного стискання робочої речовини?

Розв'язання.

Теплова машина Карно оборотна. Тому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = n,$$

отже $Q_1 = nQ_2$, і тоді

$$A = Q_1 - Q_2 = (n - 1)Q_2 \Rightarrow Q_2 = \frac{A}{n - 1} = 20 \text{ кДж. } A_2 = Q_2 = 20 \text{ кДж.}$$

Задача 5.25. Водень виконує цикл Карно. Знайти ККД циклу, якщо при адіабатичному розширенні: а) об'єм газу збільшується в $n = 2,0$ рази; б) тиск зменшується в $n = 2,0$ рази.

Розв'язання.

а) напишемо рівняння Пуассона в змінних (V, T) :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1},$$

а оскільки, за умовою, об'єм збільшується в n разів, то

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n^{\gamma-1}}, \text{ тоді}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}} = 1 - n^{1-\gamma} = 0,25.$$

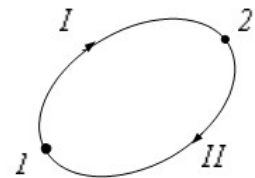
б) напишемо рівняння Пуассона в змінних (T, p) :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - n^{\frac{1}{\gamma}-1} = 0,18.$$

5.17 Функція стану. Ентропія

Суму зведених кількостей теплоти можна утворити не тільки для циклу, але й для будь-якого не кругового процесу. Візьмемо оборотний цикл і виділимо на ньому два довільних стани 1 і 2 (рис.5.21).



Для циклу, згідно з нерівністю Клаузіуса: $\sum_{\text{цикл}} \frac{\Delta Q}{T} = 0, \quad (5.52)$ Рис.5.21

Суму (5.52) можна розбити на дві суми по ділянкам I і II.

$$\sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1(II)} \frac{\Delta Q}{T} = 0. \quad (5.53)$$

Якщо змінити напрям переходу, то через оборотність процесу, сума змінює

знак, тобто: $\sum_{2 \rightarrow 1(II)} \frac{\Delta Q}{T} = - \sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T}$. Тоді формула (5.53) переписується у вигляді:

$$\sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} - \sum_{1 \rightarrow 2(II)} \frac{\Delta Q}{T} = 0. \quad \text{Звідки маємо } \sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2(II)} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (5.54)$$

Формула (5.54) отримана для будь - якого оборотного переходу $1 \rightarrow 2$ і говорить про те, що сума зведених кількостей тепла, яку отримує система при оборотному переході з одного стану в інший, не залежить від шляху, за яким виконується перехід, а залежить тільки від початкового і кінцевого станів системи. Це вірно для будь - якої функції стану, тобто величини, яка однозначно визначається станом системи.

$$\text{Для функції стану } \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta f(\text{стану}) = f(2) - f(1), \quad (5.55)$$

тобто сума приростів функції стану не залежить від шляху переходу від першого стану до другого і дорівнює різниці її значень в кінцевому і початковому стані.

Отже, при оборотному процесі зведена кількість теплоти $\Delta Q/T$ є приростом деякої функції стану, яка називається ентропією і позначається літерою S .

Приріст ентропії ΔS дорівнює зведеній кількості теплоти:

$$\left(\frac{\Delta Q}{T} \right)_{\text{обор}} = \Delta S \quad (5.56)$$

Таким чином ентропія - це функція стану, приріст якої при оборотному процесі дорівнює отриманій кількості теплоти, поділеної на температуру, при якій система отримує тепло.

При оборотному процесі : $\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S = S_2 - S_1$.

Більш точно: $\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1$

Розглянемо цикл, який складається із оборотного (2→1) II та необоротного (1→2) I переходів (рис. 4). Оскільки цикл в цілому необоротний ,

то $\sum_{(\text{цикл})} \frac{\Delta Q}{T} < 0$, або, розбиваючи на дві переходи маємо:

$$\sum_{(1 \rightarrow 2)} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{(2 \rightarrow 1)} \frac{\Delta Q}{T} < 0 \quad (5.57).$$

Оскільки перехід 2→1 за визначенням є оборотним, то $\sum_{(2 \rightarrow 1)} \frac{\Delta Q}{T} = S_1 - S_2$, а формулу (5.57) можна записати:

$$S_2 - S_1 > \sum \frac{\Delta Q}{T} \quad \text{— для необоротного переходу .}$$

Об'єднуючи оборотні та необоротні переходи, маємо: $S_2 - S_1 \geq \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} \quad (5.58)$

де знак рівності беруть для оборотних переходів, а знак «більше» — для

необоротних. Формулу (5.58) можна переписати так: $\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T}$,

або у диференціальному вигляді: $dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (5.59).$

Якщо система ізольована ($dQ = 0$), то $dS \geq 0$. $(5.60).$

Тобто, ентропія ізольованої системи може тільки збільшуватися, якщо процеси у системі необоротні, або залишатися сталою, якщо процеси оборотні. Останнє твердження і є законом збереження ентропії (II закон термодинаміки).

Фізичний зміст ентропії розкрив Больцман, який довів, що $S = k \ln W$, (5.61)

де k – стала Больцмана, W – термодинамічна ймовірність системи, яка характеризує кількість різних способів, якими можна здійснили даний стан системи.

Ентропія – функція стану системи і адитивна величина. Таким чином ентропія – міра хаосу (невпорядкованості) у системі. Чим більша ентропія системи, тим менше в неї впорядкованості.

Рівноважний стан системи - це стан з найбільшою термодинамічною імовірністю. Тому якщо система ізольована і в ній відбувається необоротний процес, то ентропія системи буде тільки зростати, оскільки всі процеси в системі ведуть її до рівноважного стану. Це закон зростання ентропії.

5.18. Третій закон термодинаміки

Аналізуючи експериментальні результати поведінки речовини при низьких температурах, В. Нернст сформулював третій закон термодинаміки: при наближенні температури до абсолютного нуля ентропія будь-якої рівноважної системи при ізотермічних процесах перестає залежати від параметрів стану системи і при $T \rightarrow 0$ набуває ту ж саму для всіх систем величину, що дорівнює нулю. М. Планк припустив, що поблизу абсолютного нуля має місце не тільки незмінність ентропії в довільному ізотермічному процесі, а що і сама ентропія перетворюється на нуль при абсолютному нулі температур, тобто :

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0 \quad (5.62) \quad (\text{Теорема Нернста}).$$

М. Планк поширив це твердження з випадку конденсованих систем, які розглядав Нернст, на довільні системи. З третього закону термодинаміки випливає недосяжність абсолютного нуля температур.

Положення про недосяжність абсолютного нуля температур випливає з того, що всі фізичні методи отримання наднизьких температур базуються на адіабатичних процесах, які ведуть до охолодження системи. Але при наближенні до абсолютного нуля температур відмінність між адіабатичними та

ізотермічними процесами зменшується, і при наближенні до абсолютного нуля зовсім зникає. Таким чином, при наближенні до абсолютного нуля ефект адіабатичного охолодження все зменшується, аж поки зовсім не зникає. Отже можна тільки асимптотично наближатись до абсолютного нуля, ніколи його не досягаючи.

Іноді третій закон термодинаміки формують як принцип недосяжності абсолютного нуля.

З третього закону термодинаміки випливає, що при наближенні до абсолютного нуля температур теплоємності всіх тіл прямують до нуля.

Розглянемо приклади задач.

Задача 5.26. Вивести формулу для ентропії ідеального газу як функції T і p .

Розв'язання.

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T},$$

Для ідеального газу

$$U = \frac{\nu RT}{\gamma - 1},$$

тому

$$\frac{dU}{T} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}, \quad (1)$$

Щоб виразити $\frac{pdV}{T}$ через T і p , скористаємось рівнянням стану газу

$pV = \nu RT$, з якого:

$$pdV + Vdp = \nu RT, \quad pdV = \nu RT - Vdp,$$

$$\frac{pdV}{T} = \nu RT \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp = \nu R \frac{dT}{T} - \frac{\nu R}{p} dp = \nu R \left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right),$$

$$dS = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dT}{T} - \nu R \frac{dp}{p} = \nu R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right),$$

отже

$$S = \nu R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T - \ln p \right) + \nu S_0,$$

де νS_0 – адитивна стала, яка не залежить від T і p .

Задача 5.27. Ентропія $m_1 = 1$ г азоту при температурі 25°C та тиску $1.00 \cdot 10^5$ Па дорівнює $S_1 = 6,84$ Дж/К. Визначити ентропію $m_2 = 2$ г азоту при температурі 100°C і тиску $2,00 \cdot 10^5$ Па.

Розв'язання.

Скористаємось результатом задачі 5.26. Для m_1 :

$$\nu_1 S_0 = S_1 - \nu_1 R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T_1 - \ln p_1 \right),$$

де S_0 не залежить від T і p .

Підставивши дані задачі, дістанемо:

$$\nu_1 S_0 = 4,32 \text{ Дж/К},$$

а оскільки

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{1}{28}, \text{ то}$$

$$S_0 = 120,37 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}.$$

Для m_2 :

$$S_2 = \nu_2 R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T_2 - \ln p_2 \right) + \nu_2 S_0.$$

Після підстановки числових значень, дістанемо:

$$S_2 = 13,73 \text{ Дж/К.}$$

Задача 5.28. Деякий ідеальний газ виконує при температурі $T = 300 \text{ К}$ оборотний ізотермічний процес, у ході якого над газом виконується робота $A' = -900 \text{ Дж}$. Знайти приріст ентропії ΔS і приріст вільної енергії ΔF газу.

Розв'язання.

Оскільки процес оборотний, то робота газу $A = -A'$, а для ізотермічного процесу $\Delta U = 0$, тому:

$$\Delta S = \frac{A}{T} = -\frac{A'}{T} = \frac{900}{300} = 3 \text{ Дж/К.}$$

При оборотному ізотермічному процесі $A = -\Delta F$, а оскільки $A = -A'$, то $\Delta F = A' = -900 \text{ Дж}$.

Задача 5.29. Процес розширення двох молів аргону відбувається так, що тиск газу збільшується прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу при збільшенні його об'єму в $\alpha = 2,0$ рази.

Розв'язання.

$$dS = \frac{\gamma R dT}{(\gamma - 1)T} + \frac{p}{T} dV,$$

але, оскільки $p = \frac{\nu R T}{V}$, то $\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V}$, тому:

$$dS = \nu R \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) \text{ і } \Delta S = \nu R \left(\frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right),$$

З рівняння стану $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$, і з умови задачі $p = cV$ отримуємо:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \alpha^2 \text{ (бо за умовою задачі } \frac{V_2}{V_1} = \alpha),$$

$\ln(T_2/T_1) = 2 \ln \alpha$. Тоді:

$$\Delta S = \nu R \ln \alpha \left(\frac{2}{\gamma - 1} + 1 \right) = \nu R \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln \alpha.$$

За умовою задачі, $\nu = 2$ і $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$ для аргону. Отже,

$$\Delta S = 46 \text{ Дж/К.}$$

Задача 5.30. Деяка термодинамічна система перейшла зі стану 1 у стан 2. Статистична вага другого стану перевищує статистичну вагу першого стану у $\eta = 2$ рази. Чому дорівнює приріст ентропії системи ΔS_{12} ?

Розв'язання.

Зв'язок між статистичною вагою Ω та ентропією задається формулою Больцмана:

$$S = k \ln \Omega,$$

де k – стала Больцмана. Тому:

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = k \ln \eta = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 2 = 0,96 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Задача 5.31. Ентропія $m_1 = 1$ г азоту при температурі 25°C та тиску $1,00 \cdot 10^5$ Па дорівнює $S_1 = 6,84$ Дж/К. Визначити ентропію $m_2 = 2$ г азоту при температурі 100°C і тиску $2,00 \cdot 10^5$ Па.

Розв'язання.

Скористаємось результатом задачі 5.26. Для m_1 :

$$\nu_1 S_0 = S_1 - \nu_1 R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T_1 - \ln p_1 \right),$$

де S_0 не залежить від T і p .

Підставивши дані задачі, дістанемо:

$$\nu_1 S_0 = 4,32 \text{ Дж/К},$$

а оскільки

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{1}{28}, \text{ то}$$

$$S_0 = 120,37 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}.$$

Для m_2 :

$$S_2 = \nu_2 R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T_2 - \ln p_2 \right) + \nu_2 S_0.$$

Після підстановки числових значень, дістанемо:

$$S_2 = 13,73 \text{ Дж/К}.$$

Задача 5.32. Воду масою $m = 1,00$ кг нагріли від температури $t_1 = 10^\circ \text{C}$ до $t_2 = 100^\circ \text{C}$, при якій вона вся перетворилася в пару. Знайти приріст ентропії системи.

Розв'язання.

Приріст ентропії при нагріванні води:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mC dT}{T} = mC \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Приріст ентропії внаслідок повного випаровування $\Delta S_2 = qm/T_2$,

де q – питома теплота випаровування. Для води $q = 2,25 \cdot 10^6$ Дж/кг.

$$\Delta S = mC \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{qm}{T_2} = m \left[C \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{q}{T_2} \right] = 7,2 \text{ кДж/К.}$$

5.19. Термодинамічні потенціали

Термодинамічні потенціали (термодинамічні функції) - функції стану системи, спад яких в рівноважних процесах, що протікають при сталих значеннях відповідних незалежних параметрів, дорівнює корисній зовнішній роботі або кількості теплоти.

1. Внутрішня енергія U .

Визначається відповідно за першим законом термодинаміки, як різниця між кількістю теплоти, що отримала система, і роботою, яку виконує система над зовнішніми тілами: $U = Q - A$.

Напишемо диференціал U : $dU = dQ - PdV = TdS - PdV$, звідки маємо

$$U = U(S, V), \quad \text{де } S - \text{ентропія, } V - \text{об'єм.}$$

2. Ентальпія (теплова функція) - H .

$$H = U + PV, \quad \text{де } P - \text{тиск, а } V - \text{об'єм.}$$

Оскільки в ізобарному процесі робота дорівнює $P\Delta V$, то приріст ентальпії в квазістатичному ізобарному процесі дорівнює кількості теплоти, отриманої системою: $\Delta H = Q$. Тоді $C_p = \frac{dH}{dT}$. $H = H(S, P)$.

3. Вільна енергія F - функція стану системи.

$$F = U - TS \quad (5.63).$$

Вона являє собою ту частинку внутрішньої енергії, яка перетворюється у зовнішню роботу при оборотних ізотермічних процесах.

Обчислимо роботу, що виконується при оборотному ізотермічному процесі.

З першого закону термодинаміки: $dA = dQ - dU$.

При оборотному процесі $dQ = TdS$. Тому:

$$dA = TdS - dU = d(TS) - dU \quad (5.64).$$

В (5.64) температуру T введено під знак диференціалу, оскільки процес ізотермічний. Формулі (5.64) надаємо вигляд:

$$dA = -d(U - TS) \quad (5.65).$$

Тобто робота виконується за рахунок зменшення величини, яка стоїть в (5.65) у дужках. Ця величина і є вільною енергією F . $F = F(T, V)$.

4. Потенціал Гіббса - G .

$$G = H - TS = F + PV = U + PV - TS$$

У деяких випадках доводиться розрізняти повну і корисну роботу. Остання являє собою роботу системи над зовнішніми тілами, виключаючи середовище, в яке вона занурена. Максимальна корисна робота системи дорівнює:

$$A_{\max} = -\Delta G.$$

Напишемо диференціал G : $dG = dH - d(TS) = VdP - SdT$, тоді зрозуміло, що потенціал Гіббса є функцією температури і тиску.

$$G = G(T, P)$$

Величина: $T \cdot S = U - F$ має назву зв'язаної енергії системи.

Таким чином ентропія разом з температурою визначає зв'язану енергію системи.

Інтегруємо формулу (5.65) та отримуємо при $T = \text{const}$:

$$(A_{12})_{\text{ізотер.}} = F_1 - F_2 \quad (5.66).$$

Для адіабатичного процесу $dQ = 0$, $dS = 0$, тому при $S = \text{const}$ маємо:

$$(A_{12})_{\text{адіабат.}} = U_1 - U_2 \quad (5.67).$$

Тобто при ізотермічних процесах роль внутрішньої енергії переходить до вільної енергії системи.

Один з основних методів сучасної термодинаміки є метод термодинамічних потенціалів. Цей метод виник, багато в чому, завдяки використанню потенціалів в класичній механіці, де його зміна пов'язувалося з виробленою роботою, а сам потенціал є енергетичною характеристикою термодинамічної системи. Історично склалося так, що введені спочатку термодинамічні потенціали також мали розмірність енергії, що і визначило їх назву.

Згадана група включає наступні величини:

внутрішня енергія;

вільна енергія або потенціал Гельмгольца;

термодинамічний потенціал Гіббса; ентальпія.

Потенційність внутрішньої енергії була показано в попередній темі. З неї впливає потенційність інших величин.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1 - К.: Техніка, 1999.
2. Савельев І.В. Курс общей физики. - Т.1 - М.: Наука, 1989.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. - Т.1. - М.: В. ш., 1989.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. - М.: Наука, 1979.
5. Методичні вказівки до вивчення дисципліни „Молекулярна фізика” для студентів фізико-математичного факультету НТУУ „КПІ” / Уклад.: В.К. Ковальов, С.О. Решетняк, П.О. Юрачківський. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 59 с.
6. Навчальний посібник “Фізика. Механіка. Розв’язання задач” для студентів фізико-математичного факультету НТУУ „КПІ” / Уклад.: В.К. Ковальов, С.О. Решетняк, П.О. Юрачківський. – К.: НТУУ «КПІ», 91 с.

7. Загальний курс фізики. Збірник задач. За редакцією проф. І.П. Гаркуші.- К.: Техніка, 2003.

8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988.

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Механіка	5
1.1. Кінематика матеріальної точки	6
1.2. Кінематика обертального руху	9
Приклади задач	10
1.3. Динаміка матеріальної точки	17
1.4. Закони Ньютона	18
1.5. Перетворення Галілея. Принцип відносності	19
1.6. Закон збереження імпульсу	21
1.7. Механічна робота	22
1.8. Енергія	24
1.9. Закон збереження механічної енергії	26
Приклади задач	28
1.10. Механіка твердого тіла	33
1.11. Момент сили	34
1.12. Момент інерції матеріальної точки	35
1.13. Момент інерції твердого тіла	36
1.14. Теорема Штейнера	37
1.15. Момент імпульсу матеріальної точки	37
1.16. Закон збереження моменту імпульсу	38
1.17. Момент імпульсу твердого тіла	38
1.18. Кінетична енергія твердого тіла	39
1.19. Робота при обертанні твердого тіла	40
Приклади задач	41
2. Механічні коливання	48
2.1. Вільні незгасаючі механічні коливання	48
2.2. Енергія вільних незгасаючих коливань	50
2.3. Фізичний маятник	50
2.4. Математичний маятник	51
2.5. Загасаючі механічні коливання	52
2.6. Вимушені механічні коливання	54
2.7. Додавання гармонічних коливань. Метод векторних діаграм	55
Приклади задач	57

3.Рух тіл в неінерціальних системах відліку. Сили інерції	62
4.Основні поняття релятивістської механіки	65
4.1.Постулати сучасної теорії відносності	65
4.2.Перетворення Лоренца	66
4.3.Релятивістська динаміка	68
Приклади задач	70
5.Молекулярна фізика і термодинаміка	74
5.1.Перший закон термодинаміки	75
5.2.Елементарна кінетична теорія газів	76
5.3.Середня енергія поступального руху молекул	77
5.4.Ступені вільності механічної системи	78
5.5.Внутрішня енергія і теплоємність ідеального газу	79
5.6.Адіабатний процес	81
Приклади задач	82
5.7.Розподіл молекул за швидкостями	86
5.8. Барометрична формула. Розподіл Больцмана	89
5.9.Середня довжина вільного пробігу молекул	90
5.10. Явища переносу	90
Приклади задач	95
5.11.Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса	103
5.12.Закони термодинаміки	105
5.13.Теплова машина	105
5.14.Другий закон термодинаміки	107
5.15.Цикл Карно	108
5.16.Нерівність Клаузіуса	109
Приклади задач	110
5.17.Функція стану. Ентропія	117
5.18.Третій закон термодинаміки	120
Приклади задач	121
5.19.Термодинамічні потенціали	126
Список рекомендованої літератури	128