НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_____ О.І. Клесов
«08» червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Кумулянтний аналіз в задачах непараметричного оцінювання імпульсних перехідних функцій 2-вимірних лінійних однорідних систем»

Виконав:
студент ІІ курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Лощилін Владислав Олегович _____

Науковий керівник:
Доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
Блажієвська Ірина Петрівна
_____

Рецензент:
Кандидат фіз.-мат. наук,
Старший викладач кафедри кібербезпеки,
Сумського державного університету
Страх Олександр Петрович _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент_____

Київ – 2022

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

«03» лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Лощиліну Владиславу Олеговичу

1. Тема дисертації «Кумулянтний аналіз в задачах непараметричного оцінювання імпульсних перехідних функцій 2-вимірних лінійних однорідних систем», науковий керівник дисертації Блажієвська І.П., затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. № НС/372/2022.

2. Термін подання студентом дисертації 7 червня 2022 р.

3. Об’єктом дослідження є кумулянти старших порядків, моментні функції другого порядку (крос-корелограми) для сумісно стаціонарних процесів, діаграмна формула для гауссівських випадкових процесів, інтеграли з циклічним зачепленням ядер, 2-вимірні лінійні однорідні системи.

4. Предметом дослідження є умови асимптотичної нормальності дискретних крос-корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій 2-вимірних лінійних однорідних систем.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Ознайомитися з літературою та навести означення кумулянтів старших порядків, діаграмну формулу Леонова-Ширяєва-Брилліджера для гауссівських величин, інтегральні зображення кумулянтів від сумісно стаціонарних випадкових процесів, навести теорему характеризації нормального розподілу в термінах кумулянтів;

2) Ознайомитися з літературою щодо способів непараметричного оцінювання імпульсних перехідних функцій (ІПФ) 1-вимірних лінійних однорідних систем – для дискретних та інтегральних крос-корелограмних оцінок.

Ознайомитись зі схемою оцінювання ІПФ для неперервних крос-корелограмних оцінок в 2-вимірних лінійних однорідних системах. Навести означення 2-вимірної лінійної однорідної системи, накласти умови компактного носія на перетворення Фур'є ІПФ, побудувати дискретну крос-корелограму між вихідними сигналами (оцінку). Вхідний сигнал – вінерівський процес, визначений на всій осі;

3) Встановити властивості 1-го та 2-го моментів побудованої оцінки;

4) Знайти умови, за яких має місце асимптотична нормальність дискретних центрованих крос-корелограмних оцінок ІПФ в 2-вимірних лінійних однорідних системах. Використати центральну граничну теорему в термінах кумулянтів, застосувавши їх зображення через багатовимірні згорткові інтеграли із циклічним зачепленням ядер.

5) Навести приклади ІПФ та знайти класи задач, в яких результати є застосовними.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного матеріалу): 24 слайди.

7. Дата видачі завдання 05 лютого 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	05.02.22-13.02.22	виконано
2	Вивчення основних означень та тверджень	14.02.22-20.02.22	виконано
3	Розбір центральної граничної теореми (ЦГТ) в термінах кумулянтів, інтегральні зображення кумулянтів та умови їх збіжності до нуля	21.02.22-06.03.22	виконано
4	Ознайомлення з результатами дискретного та інтегрального оцінювання ІПФ для 1-вимірних лінійних однорідних систем. Розбір ЦГТ в термінах кумулянтів. Зробити висновки - ядра Діріхле та Фейєра, некомпактний/компактний носії щільностей вхідних сигналів	07.03.22-20.03.22	виконано

5	Ознайомлення з результатами інтегрального оцінювання ІПФ для 2-вимірних лінійних однорідних систем. Розбір ЦГТ в термінах кумулянтів. Зробити висновки – ядра Фейєра, некомпактний носій відомої ІПФ	21.03.22-03.04.22	виконано
6	Постановка задачі про дискретне оцінювання ІПФ для 2-вимірних лінійних однорідних систем. Робота з кумулянтами оцінки: моменти 1-го та 2-го порядків, доведення ЦГТ. Ключові моменти – ядра Діріхле, компактність носіїв відомої та невідомої ІПФ	04.04.22-08.05.22	виконано
7	Наведення прикладів та моделювання систем	09.05.22-16.05.22	виконано
8	Висновки	16.05.22-29.05.22	виконано
9	Оформлення результатів	30.05.22-06.06.22	виконано

Студент В. О. Лощилін

Науковий керівник І. П. Блажієвська

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 51 сторінка, 24 слайди презентації, 48 першоджерел.

Дослідження магістерської дисертації присвячені знаходженню умов асимптотичної нормальності для дискретної оцінки ІПФ в 2-вимірній лінійній однорідній системі. Використано класичні підходи - кумулянтні зображення статистик 2-го порядку від сумісно стаціонарних гауссівських процесів, комбінаторну діаграмну формулу Брилліджера, властивості багатовимірних згорткових інтегралів , залежних від параметрів, та кумулянтний аналізу розподілу.

Актуальність роботи. Розглянута в роботі задача є новою та використовує «свіжі» результати в рамках тематики непараметричного оцінювання ІПФ. Характер дисертації теоретичний; результати можуть бути адаптовані до різних класів систем - систем з багатьма виходами, білінійних систем з розщепленими ядрами, 2-вимірних систем зі зворотнім зв'язком та каскадного з'єднання 2 лінійних однорідних систем. Розгляд дискретної оцінки дозволяє виконувати якісне моделювання всіх результатів.

Метою даної роботи є застосування кумулянтного аналізу розподілу в задачі непараметричного оцінювання ІПФ в 2-вимірній лінійній однорідній системі. В якості оцінки розглядається дискретна крос-корелограма між вихідними гауссівськими стаціонарними процесами. . Шляхом об'єднання двох теорій - стохастичних інтегралів з ортогональними приростами та інтегралів з циклічним зачепленням ядер, а також унікальної апроксимації білого шуму, - вдалось звести умови на невідому ІПФ системи до мінімальних в серії аналогічних робіт.

Об'єктом дослідження є кумулянти старших порядків від дискретних крос-корелограм сумісно гауссівських стаціонарних процесів.

Предметом дослідження є умови асимптотичної нормальності дискретної оцінки невідомої ІПФ 2-вимірних лінійних однорідних систем.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, крос-корелограма, білий шум, гауссівський процес, інтеграли з циклічним зачепленням ядер, кумулянт старшого порядку, центральна гранична теорема, асимптотична нормальність.

ABSRACT

Master's thesis: 51 pages, 24 slides of presentation, 48 primary sources.

The research of this master's dissertation is devoted to finding the conditions of asymptotic normality for the discrete estimation of IRF`s in 2-dimensional linear time-invariant systems. Classical approaches are used - cumulant representations of 2nd order statistics from jointly stationary Gaussian processes, properties of multi-dimensional convolutional integrals, and the cumulant analysis of limiting distribution.

Relevance of the work. The problem is new and uses the fresh results from the range of all non-parametric IRF estimation problems. The dissertation has theoretical character; the results could be adopted to various "black-box" models described by single input-multiple output systems, bilinear systems with split kernels, single input-double output feedback systems and cascade connection of 2 single input-single output systems. Discrete-type estimators give the possibility to apply modelling of all results via R programming or Wolfram Mathematica.

The aim of this work is to apply the cumulant analysis of characterization of limiting distribution at the problem of nonparametric IRF estimation in single input-double output time-invariant systems. A discrete cross-correlogram between Gaussian stationary processes-outputs is considered as an estimator. By combining two theories - stochastic integrals with orthogonal increments and integrals with cyclic kernels, as well as a unique approximation of white noise – we reduce the conditions on unknown IRF to the minimal L_2 -integrability.

The object of the study are higher-order cumulants deriven by discrete cross-correlograms of joint Gaussian stationary processes-outputs.

The subject of the study is the conditions providing the asymptotic normality of discrete-type IRF estimation in 2-dimensional linear time-invariant systems.

Keywords: impulse response function, discrete-type cross-correlogram, white noise, Gaussian process, integrals involving cyclic products of kernels, high-order cumulants, central limit theorem, asymptotic normality.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 11

Вступ 12

РОЗДІЛ 1. Основні теорії, що застосовуються в роботі 19

1.1. Лінійна фільтрація білого шуму 19

1.2. Кумулянти та їх властивості. Слабка збіжність розподілів 22

1.3. Інтеграли з циклічним зачепленням ядер 26

РОЗДІЛ 2. Кумулянтний аналіз розподілу дискретної крос-корелограмної оцінки IRF лінійної однорідної SIDO-системи 27

2.1. Основні означення та попередні відомості 27

2.2. Границя коваріаційної функції процесу $\hat{Z}_{N,\Delta}$ 31

2.3. Слабка асимптотична нормальність процесу $\hat{Z}_{N,\Delta}$ 34

2.4. Приклад імпульсної перехідної функції 42

ВИСНОВКИ 44

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 47

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}$	простір дійсних чисел
$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{R}^m$	простір дійсних векторів розмірності m, зі стандартною нормою та скалярним добутком
$\mathbb{I}_A$	індикатор множини $A \subset \mathbb{R}^m$
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	основний повний ймовірнісний простір
E	квантор існування, «існує»
cov	коваріація
cum	кумулянт (семіінваріант)
$L_p(\mathbb{R}), p \in [1, \infty)$,	простір комплекснозначних функцій $\phi = (\phi(x), x \in \mathbb{R})$ інтегрованих у p-му степені по мірі Лебега, з нормою $\|\phi\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(x)\|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$
$L_\infty(\mathbb{R})$	простір комплекснозначних обмежених функцій $\phi = (\phi(x), x \in \mathbb{R})$, з нормою $\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in R} \|\phi(x)\|$
$\xi_n \Rightarrow \xi$	збіжність скінченновимірних розподілів ξ_n до відповідних розподілів ξ при заданому характері $n \to \infty$

Вступ

Ідентифікація та оцінювання параметрів систем різної природи – для параметричних або непараметричний підходів – часто засновані на моделях «чорної скриньки». Вхід до чорної скриньки може бути простим або багатовимірним, чистим або зашумленим, і те ж саме може бути з відгуком системи. Різноманітність теоретичних та прикладних задач породжує велику кількість моделей для розгляду. Ці моделі виникають у ряді інженерних та наукових дисциплін (Bendat and Piersol 1980), (Engberg та Larsen 1995), теорії контролю ((Söderström and Stoica 1988), комунікації та діагностики мереж (Demir та Sangiovanni-Vintcentelli 1998), обробки сигналів (Gao et al. 2014), (Ogunfumni 2007), психології, біології та медицині (Marmarelis and Marmarelis 1978).

Слідуючи за Гіхманом і Скороходом (Gikhman and Skorokhod, Chapter 5), ми використовуємо лінійне перетворення стохастичних процесів для статистичного аналізу моделей типу «чорних скриньок». Цей підхід призводить до лінійних інваріантних у часі (LTI) систем зі стаціонарними відгуками. Важлива особливість будь-якої лінійної системи полягає в тому, що вона однозначно ідентифікується за допомогою своєї імпульсної перехідної функції (ІПФ).

Розглянемо модель з одним входом і подвійним виходом (SIDO), яка описується лінійною однорідною системою, чия ІПФ має дві дійсні компоненти $\{H, g\} \subset L_2(R)$. Якщо на вхід системи подається стандартний процес Вінера W на $\mathbb{R}$, то відгуками системи будуть наступні інтеграли:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s)dW(s); \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)dW(s), \quad t \in \mathbb{R}$$

Останні стохастичні інтеграли належать до класу процесів дробового шуму Вінера (Buldygin and Kozachenko 2000, Chapter 5), і включають розв’язки багатьох стохастичних диференціальних рівнянь за фіксованого вибору ядер

H і g, як показано в (Lindgren 2006, Section 4.4) і (Anh, Leonenko, and Sakhno 2007).

В роботі припускається, що ІПФ H невідома, тоді як g відома; ставиться задача – оцінити H за спостереженнями за відгуками X і Y. Різні детерміновані та статистичні підходи можна застосувати до цієї задачі. В монографії (Wiener 1958) розглядалось «поліноміальне» представлення для систем з гауссівським білим шумом та обговорено аналіз–синтез цих систем. Оскільки лінійні перетворення білого шуму зберігають гауссовість, то результати вписуються в добре розвинуту теорію гауссівських процесів. Norbert Wiener і Kiyoshi Ito хотіли перенести теорію на нелінійні системи, розглянувши нелінійні перетворення гауссівських процесів, вимагаючи, щоб вихідні процеси нелінійних фільтрів зберігали властивість скінченої дисперсії-коваріації, яка є однією з характерних ознак гауссівських процесів. Це розширення тепер відоме як «хаос Вінера», а відповідні стохастичні інтеграли як «стохастичні інтеграли Вінера-Іто», див. (Peccati and Taqqu 2011, Chapter 5) та (Øksendal 2000). Лі та Шетцен оцінили ядра поліноміального розкладу Вольтерра-Вінера шляхом взаємної кореляції вхідних та вихідних процесів (Lee and Schetzen 1965). Зазначимо, що крос-кореляціний аналіз особливо часто зустрічається у біологічних, медичних, механічних, електричних полях та обробці сигналів, див. (Marmarelis and Marmarelis 1978, Chapter 4), (Engberg and Larsen 1995, Chapter 9), (Camps-Valls, RojoAlvarez, and Martinez-Ramon 2007), (Oaul and Ogunfunmi 2013) and (Gao et al. 2014). Усі ці джерела можуть бути хорошими бібліографічними посиланнями для охоплення тематики.

Коментар 1. Вхід системи був гауссівським білим шумом у всіх цих джерелах. Білий шум є ідеалізованим процесом, який існує як модель, але для ряду практичних задач вимагає апроксимацій.

Ідентифікація або оцінювання параметрів поліноміальних систем із використанням гауссівських вхідних процесів може бути сформульовано в термінах перетворень Фур'є-Лапласа, див. , (Bendat and Piersol 1980, Chapters

3–8), (Brillinger 1981, Chapters 5–8), (Benn and Kulperger 1998), (Demir and Sangiovanni-Vintcentelli 1998, Sections 2.3– 2.5), (McKelvey 2000) та (Ogunfumni 2007, Chapters 3–5). Таким чином, задачі стохастичного аналізу переходять у задачі про пошук розв'язків функціональних та алгебраїчних рівнянь. Ці підходи працюють з модулем функцій частотної характеристики (перетворення Фур'є ІПФ), тоді як фази втрачаються.

Коментар 2. При використанні підходів з перетворенням Фур'є-Лапласа, припускається стійкість систем (ядра є L_1-інтегрованими).

Умови, зазначені в коментарях 1 і 2, були успішно усунені Булдигіним і його співавторами при оцінюванні L_2-інтегрованої ІПФ у LTI-системах з одним входом і одним виходом (SISO), див. (Buldygin and Li 1997, Parts I-II), (Buldygin and Kurotschka 1999), (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2004), (Buldygin and Blazhievska 2009, 2010). Підхід у цих роботах був заснований на:

- специфічна апроксимація вхідного гауссівського білого шуму;
- крос-корелограма між процесами на вході та виході в якості оцінки;
- асимптотичний аналіз вибіркових крос-корелограм між стаціонарними гауссовими процесами.

Розглянуто точкові властивості та асимптотичну нормальність дискретних та неперервних типів крос-корелограмних оцінок. У перших двох роботах серії використовувалася центральна гранична теорема (ЦГТ) у термінах моментів, тоді як в останніх – у термінах кумулянтів. Метод кумулянтів Бріліндженра (Brillinger 1981) завжди приводить нас до певного класу інтегралів, що включають циклічні добутки ядер. Виокремлена робота з інтегралами цього типу дає хороші верхні оцінки і дозволяє довести слабку збіжність оцінок у багатьох непараметричних задачах, див. (Rosenblatt 2000, Chapters 5–6), (Buldygin, Utzet and Zaiats 2002). Застосування кумулянтного аналізу граничного розподілу звело умови на ІПФ до мінімуму, необхідного для існування стохастичних інтегралів.

Далі, ці результати були доповнені асимптотичною нормальністю в банахових просторах неперервних функцій, записом оцінок хвостів

розподілів у рівномірній нормі та перевіркою гіпотез щодо ІПФ, див. (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2004), (Buldygin and Blazhievska 2010), (Kozachenko and Rozora 2015, 2016) і (Rozora 2018). Зауважимо, що методологія для непараметричного оцінювання ІПФ та для непараметричного оцінювання кореляційних функцій є подібною, використовує класичну теорію гауссівських стаціонарних процесів та асимптотичну поведінку їх лінійних та білінійних форм.

Згодом у роботах Блажієвської та Зайця (Blazhievska and Zaiats, 2018, 2020) результати асимптотичної нормальності були поширені від SISO-систем до SIDO-систем для інтегральних крос-корелограмних оцінок. За найслабшої умови щодо невідомої компоненти ІПФ $H \in L_2(R)$, автори застосували кумулянтний аналіз для центрованих оцінок і, таким чином, покращили попередні результати Лі (Li 2005). Вивчаючи слабку збіжність у банахових просторах неперервних функцій, розглядались два типи процесів – граничний нестаціонарний гауссівський процес і дограничний стаціонарний квадратично-гауссівський процес з простору Орліча. Центральна гранична теорема в просторі неперервних функцій була доведена за допомогою класичної теореми Прохорова, ентропійного підходу та принципів порівняння, пов'язаних з цими класами процесів, див. (Dudley 1973), (Fernique 1975), (Lifshits 1995, Chapter 14), (Buldygin and Kozachenko 2000, Chapter 4) та (Kozachenko et al. 2017, Chapter 6).

У багатьох практичних застосуваннях спостереження за процесами та/або здійснення обробки даних відбувається у дискретні моменти часу. Саме тому, в роботі нас цікавлять властивості дискретних вибіркових крос-корелограмних оцінок ІПФ для SIDO-систем. У цьому випадку задача стає складнішою, оскільки слід враховувати додатковий параметр дискретизації (який має збігатись до нуля). Використано як взаємну кореляцію вихідних випадкових процесів, так і кореляцію нескінченних детермінованих функцій, обіграно властивість згортки з дельта-подібною послідовністю та умови існування стохастичних інтегралів по мірі Вінера.

Якщо береться крос-коваріація між відгуками системи:

$$cov\big(Y(t),X(s)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t-u)g(s-v)\mathbf{E}\big(dW(u)dW(v)\big)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(v)g(s-t+v)dv\,, \quad t,s \in \mathbb{R},$$

тоді інтеграл є нестохастичним і коректно визначеним, якщо $\{H,g\} \subset L_2(R)$. Якщо g – дельта функція Дірака: $g(v) = \delta(|v|), v \in \mathbb{R}$, тоді можна знайти значення невідомої компоненти ІПФ:

$$cov\big(Y(t),X(0)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} H(v)\delta(|-t+v|)dv = (H*\delta)(t) = H(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Коментар 3. Функцію H можна отримати шляхом крос-кореляції вихідних процесів, якщо в якості компоненти g обрати парне δ-подібне ядро.

Мета дослідження полягає в тому, щоб оцінити H за допомогою наступної вибіркової крос-корелограми дискретного типу:

$$\widehat{H}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y(nh+\tau)X(nh)\,, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

де h – крок дискретизації. Ми припускаємо, що компонента g ІПФ залежить від параметра Δ та має дельта -подібну поведінку при $\Delta \to \infty$.

Наведена вище оцінка $\widehat{\mathrm{H}}$ містить три параметри: крок дискретизації h, довжину інтервалу спостереження $T = Nh$, необхідну для побудови оцінки, і параметр Δ - який відповідає за наближення g до дельта-функції Дірака. Нас цікавить встановлення зв'язку між цими параметрами, що забезпечують асимптотичну нормальність $\widehat{H}$ у слабкому сенсі. В роботі припускається, що невідома компонента ІПФ $H \in L_2(R)$, а модуль її перетворення Фур'є $|H^*|$ має компактний носій. Умова компактності є технічно необхідною для роботи з ядрами, що залежать від параметрів, і може бути усунена розглядом SIDO-системи зі зворотнім ходом або каскадним з'єднанням двох SISO-

систем. Зокрема, компактність носія H^* не означає L_1-інтегрованість ні H^*, ні H.

Вибір нашого підходу встановлює зв'язок між трьома теоріями:

- L_2-теорія ядер стохастичних інтегралів з ортогональними приростами;

- кумулянтний аналіз розподілу, застосований до вибіркових дискретних крос-корелограм;

- теорія інтегралів із циклічними добутками ядер та залежних від параметрів.

L_2-інтегрованість компонент ІПФ H та g задає коректно визначені стохастичні інтеграли по мірі Вінера - вихідні процеси. Лінійність та інваріантність у часі системи генерує процеси Y і X - стаціонарні, сумісно гауссівські, центровані, зі спектральними щільностями, що виражаються явно через перетворення Фур'є-Планшереля H та g.

В якості оцінки розглядаються дискретні вибіркові крос-корелограми між процесами на виході системи. Застосовано кумулянтний аналіз для встановлення асимптотичного розподілу відповідним чином нормованої центрованої оцінки. Відома комбінаторна діаграмна формула Леонова-Ширяєва-Брилліджера дозволяє звести кумулянти старших порядків до скінченних сум багатовимірних інтегралів, що містять циклічні добутки ядер і залежать від параметрів. Збіжність до нуля цих інтегралів призводить до асимптотичної нормальності $\widehat{H}$. Наше доведення центральної граничної теореми спирається на застосування теорії інтегралів, що містять циклічні добутки ядер, див. (Buldygin, Utzet, and Zaiats 1998, 2002, 2004), а не на теорії дельта-матроїдних інтегралів, розробленої в (Anh, Leonenko, and Sakhno 2007), (Avram, Leonenko, and Sakhno 2010, 2015). Причина полягає у збереженні незмінним найслабшого L_2-обмеження в інтегралах, що залежать від h, N та Δ. У будь-якому випадку, вищезазначені джерела (Peccati and Taqqu 2011), (Nourdin and Peccati 2012) і (Maj'or 2013) можуть стати гарною відправною точкою для подальших бібліографічних посилань, що стосуються граничних теорем для багатовимірних стохастичних інтегралів.

Різні інтегральні представлення статистик другого та вищих порядків для стаціонарних процесів, часових рядів та однорідних випадкових полів можна знайти в (Brillinger 1981, Chapters 6–9), (Benn and Kulperger 1998), (Rosenblatt 2000, Chapters 5–6), (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2002, 2004), (Anh, Leonenko, and Sakhno 2003, 2007), (Peccati and Taqqu 2011, Chapters 5–11), (Maj´or 2013) і (Avram, Leonenko, and Sakhno 2010, 2015). Зазначимо, що сумісні моменти та кумулянти для хаотичних випадкових величин стандартно зображаються за допомогою комбінаторних тотожностей, після застосування діаграмної формули Леонова-Ширяєва-Брилліджера. «Вінерський хаос» зараз відіграє вирішальну роль у багатьох задачах теоретичної та прикладної ймовірності. Наприклад, той факт, що кожен функціонал від гауссівського процесу або міри Пуассона можна записати у вигляді ряду багатовимірних інтегралів («властивість представлення Вінера-Іто») є одним із основних елементів числення Маллявена та його численних застосувань до стохастичних диференціальних рівнянь у частинних похідних чи стохастичного аналізу. У серії статей Nourdin, Nualart, Peccati та Taqqu, було показано, що властивості хаотичних випадкових величин є ключовими елементами для отримання дуже загальних результатів щодо збіжності нелінійних функціоналів від гауссівських полів, міри Пуассона та процесів Леві, див. (Peccati and Taqqu 2011), (Nourdin and Peccati 2012), (Nualart and Nualart 2018).

РОЗДІЛ 1. Основні теорії, що застосовуються в роботі

1.1. Лінійна фільтрація білого шуму. Стаціонарні процеси

Вінерівський процес. Вінерівський процес $\{w(t); t \geq 0\}$ — це гауссівський процес з $w(0) = 0$, такий, що $E(w(t)) = 0$, а дисперсія приросту $w(t + h) - w(t)$ на будь-якому інтервалі $[t, t + h], h > 0$, пропорційна довжині інтервалу:

$$E(w(t + h) - w(t))^2 = h\sigma^2.$$

Стандартний вінерівський процес на всій числовій осі $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ є сукупністю двох незалежних вінерівських процесів w_1 і w_2 , так що $W(t) = w_1(t)$ при $t \geq 0$, і $W(t) = w_2(-t)$ при $t < 0$. Його характеристиками є нульове середнє та кореляційна функція вигляду для всіх $s, t \in \mathbb{R}$::

$$Cov(W(s), W(t)) = \begin{cases} \sigma^2 \min\{|s|, |t|\}, & s, t \leq 0; \\ 0, & \min\{s, t\} \leq 0 \leq \max\{s, t\} \\ \sigma^2 \min\{s, t\}, & 0 \leq s, t. \end{cases};$$

Вінерівський процес є процесом з ортогональними (незалежними) приростами, що є нормальними величинами. Остання властивість покладена в основу моделювання стохастичних інтегралів за мірою Вінера.

Гауссівський білий шум. В задачах ідентифікації або оцінювання параметрів лінійних систем використовується «ідеальний вхідний сигнал» - гауссівський білий шум. Формально, білий шум визначається , як часова похідна від вінерівського процесу $\dot{W}(t) \in \mathbb{R}$ (це ідеалізований процес, бо наспрвді вінерівський процес є неперервним, ніде недиференційовним процесом). Характеристики білого шуму – гауссівість приростів, нульове середнє та спектральна щільність, що є сталою:

$$f_W(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, -\infty < \lambda < \infty.$$

Важлива властивість приростів процесу білого шуму – генерація дельта (δ)-функції Дірака для кожної пари – використана в роботі:

$$EdW(t)dW(s) \quad = \frac{\sigma^2}{2\pi}\text{б}(t-s)dtds.$$

Строго кажучи, стала спектральна щільність належить стаціонарному Гауссівському процесу, чия кореляційна функція є дельта-функцією Дірака.

Зазначимо, що згортка невідомої функції з дельта-функцією в деякій точці дає значення функції в цій точці. В роботі статистичними методами генерується дельта-видна послідовність (на базі білого шуму), згортка якої з невідомим параметром системи однозначно ідентифікує його.

Лінійна фільтрація. Якщо на вхід лінійної однорідної системи з імпульсною перехідною функцією (ІПФ) H подавати білий шум, то умова $\int|\mathrm{H}(t)|^2dt < \infty$, є достатньою для генерації відгуку, що є стаціонарним центрованим гауссівським процесом (Вінерівським дробовим процесом). Властивості лінійної фільтрації білого шуму наводяться в наступному твердженні.

<u>Теорема 4.10 [Lingren, 2006]</u> *Стаціонарний процес* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$*, який визначається як стохастичний інтеграл від стандартного Вінерівського процесу* $\{w(t), t \in \mathbb{R}\}$ *формулою*

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}(t-u)dW(u),$$

має коваріаційну функцію

$$r_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-u)H(-u)du$$

та спектральну щільність

$$f_Y(\lambda) = \frac{\left|H^*(\lambda)\right|^2}{2\pi}, -\infty < \lambda < \infty,$$

де $H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\lambda}H(u)du$ *– частотна характеристика* ІПФ $H(u), u \in \square$.

Контролюючи ІПФ лінійної системи, можна генерувати стаціонарні Гауссівські процеси із наперед заданими спектральними щільностями. Умова існування відповідного стохастичного інтегралу та спектральної щільності - це L_2-інтегровність відповідної ІПФ системи.

В нашому дослідженні, гауссівський білий шум подається на вхід лінійної однорідної системи з одним входом та двома виходами (SIDO) та проходить через 2 канали з різними L_2 -інтегровними ІПФ. Відгуками системи є 2 сумісно стаціонарні та сумісно Гауссівські центровані процеси зі спектральними щільностями.

Моментні характеристики парного порядку від процесів-відгуків згортають кожну пару стохастичного багатовимірного інтегралу Іто-Вінера до звичайного інтеграла по мірі Лебега. Зокрема, крос-корелограма різних відгуків дає звичайну згортку, з якої можна вилучити невідому ІПФ.

Наведемо теорему про лінійну фільтрацію загального стаціонарного Гауссівського процесу. Вказана теорема фігурує в зв'язках результатів з моделями SIDO-систем зі зроротнім зв'язком, та з каскадним сполученням двох SISO-систем.

<u>Теорема 4.3 [Гіхман, Скороход, 1977] .</u> *Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$ – ІПФ; вхідний процес $X = (X(t), t \in \mathrm{R})$ - дійснозначний, стаціонарний у широкому сенсі процес зі спектральною щільністю $f_X(\lambda), \lambda \in \mathrm{R}$; $\mathrm{E}X(t) = 0, t \in \mathrm{R}$. Тоді відгук системи*

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) X(t-s) ds, t \in \mathrm{R}.$$

визначений у середньому квадратичному сенсі. При цьому спектральна щільність стаціонарного у широкому сенсі процесу Y має вид

$$f_Y(\lambda) = |H^*(\lambda)|^2 \; f_X(\lambda), \lambda \in \mathrm{R}.$$

Крім того, процеси X і Y є сумісно стаціонарними у широкому сенсі. Якщо, додатково, процес X є гауссівським, то процес Y також є гауссівським, а процеси X і Y є сумісно гауссівськими.

1.2. Кумулянти та їх властивості. Слабка збіжність розподілів

Сумісні кумулянти. Нехай $(Y_1, \dots, Y_r)$ – випадковий вектор з дійсними або комплексними компонентами Y_j, для якого $\mathrm{E}\left|Y_j\right|^r < \infty, j = 1, \dots, r$.

Сумісний кумулянт r-го порядку $cum(Y_1, \dots, Y_r)$ вектора $(Y_1, \dots, Y_r)$ задається формулою:

$$cum(Y_1, \dots, Y_r) = \sum (-1)^{p-1}(p-1)!\left(\mathrm{E}\left(\prod_{j \in v_1} Y_j\right)\right) \dots \left(\mathrm{E}\left(\prod_{j \in v_p} Y_j\right)\right),$$

де сумування береться по всіх розбиттях $v_1, \dots v_p, p = 1, \dots, r$, множини $(1, \dots, r)$.

<u>Теорема 2.3.1 [Brillinger, 1981]</u> *Кумулянт $cum(Y_1, \dots, Y_r)$ є коефіцієнтом при $(i)^r t_1 \dots t_r$ у розкладі функції $log\left(\mathrm{E}\, exp\, i \sum_{j=1}^{n} Y_j t_j\right)$ в ряд Тейлора в околиці початку координат.*

В роботі використовуються наступні властивості кумулянтів:

(i) $cum(a_1 Y_1, \dots, a_r Y_r) = a_1 \dots a_r cum(Y_1, \dots, Y_r)$ для всіх постійних $a_1, \dots, a_r$;

(ii) $cum(Y_1, \dots, Y_r)$ – симетричні функція своїх аргументів;

(iii) якщо деяка група величин з $Y_1, \dots, Y_r$ незалежна від інших величин в наборі, то $cum(Y_1, \dots, Y_r) = 0$;

(iv) $cum(Y_1 + Z_1, Y_2, \dots, Y_r) = cum(Y_1, \dots, Y_r) + cum(Z_1, Y_2, \dots, Y_r)$ для випадкових величин $Z_1, Y_1, \dots, Y_r$;

(v) для постійної μ і $r = 2,3, \dots$

$$cum(Y_1 + \mu, Y_2, \dots, Y_r) = cum(Y_1, Y_2, \dots, Y_r);$$

(vi) якщо випадкові величини $(Y_1, \dots, Y_r)$ і $(Z_1, \dots, Z_r)$ незалежні, то

$$cum(Y_1 + Z_1, \dots, Y_r + Z_r) = cum(Y_1, \dots, Y_r) + cum(Z_1, \dots, Z_r)$$

(vii) $cumY_j = \mathrm{E}Y_j$ *для* $j = 1, \dots, r$;

$(viii)$ $cum\left(Y_j, \bar{Y}_j\right) = DY_j$ для $j = 1, \dots, r$;

(ix) $cum\left(Y_j, \bar{Y}_k\right) = cov\left(Y_j, Y_k\right)$ для $j, k = 1, \dots, r$.

<u>Теорема 2.3.2. [Brillinger, 1981]</u> *Розглянемо набір випадкових величин* $X_{ij}; j = 1, \dots, J_j, i = 1, \dots, I$. *Введемо* I *випадкових величин*

$$Y_j = \prod_{j=1}^{J_j} X_{ij}\,, i = 1, \dots, I.$$

Тоді сумісний кумулянт $cum(Y_1, \dots, Y_I)$ *задається формулою*

$$\sum_{v} cum\big(X_{ij}; ij \in v_1\big) \dots cum\big(X_{ij}; ij \in v_p\big),$$

де сумування ведеться по всім нерозкладним розбиттям $v = v_1 \cup \dots \cup v_p$.

Означення (нерозкладне розбиття). Розглянемо (необов'язково прямокутну) таблицю

$$\begin{matrix} (1,1) & \cdots & (1,J_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (I,1) & \dots & (1,J_I) \end{matrix}$$

і розбиття $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_M$ безлічі її елементів. Ми скажемо, що розбиття які належать множині $P_{m'}, P_{m''}$ зачеплюються, якщо існують $(i_1, j_1) \in P_{m'}$ і $(i_2, j_2) \in P_{m''}$ такі, що $i_1 = i_2$. Будемо казати, що $P_{m'}$ і $P_{m''}$ сообщаются, якщо існує послідовність множин $P_{m_1} = P_{m'}, P_{m_2}, \dots, P_{m_N} = P_{m''}$ така, що P_{m_n} і $P_{m_{n+1}}$ зачеплюються для $n = 1,2, \dots, N-1$. Розбиття називається *нерозкладним*, якщо всі множини P_M сообщаются. Нехай $R_1, \dots, R_J$ позначають рядки табл. (вище). Розбиття $P_1, \dots, P_M$ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли не існує множин $P_{m_1}, \dots, P_{m_N} (N < M)$ і рядків $R_{i_1}, \dots, R_{i_0}$ $(0 < I)$ таких, що

$$P_{m_1} \cup \dots \cup P_{m_N} = R_{i_1} \cup \dots \cup R_{i_0}.$$

<u>Лема 2.3.1. [Brillinger, 1981]</u> (критерій нерозкладності розбиття) Розглянемо розбиття $P_1, \dots, P_M, M > 1$, табл. (вище). Для елементів таблиці r_{ij} і заданих чисел $s_m, j = 1, \dots, J_i, i = 1, \dots, I, m = 1, \dots, M$, покладемо $\phi(r_{ij}) = s_m$, якщо $(i, j) \in P_m$. Розбиття нерозкладне тоді і тільки тоді, коли всі елементи множини $\{s_m - s_{m'}; 1 \le m, m' \le M\}$ є сумами і різницями величин $\phi(r_{ij_1}) - \phi(r_{ij_2}), 1 \le j_1, j_2 \le J_i, i = 1, \dots, I$.

Сформулюємо характеризаційну властивість кумулянтів, яка лежить в основі кумулянтного методу аналізу граничного розподілу [Brillinger, 1981].

Теорема. *Нехай* $(Z(\tau), \tau \in \mathrm{R})$ - *гауссівський центрований процес з кореляційною функцією* $C(\tau_1, \tau_2), \tau_1, \tau_2 \in \mathrm{R}$. *Тоді для будь-яких* $n \in \mathrm{N}$ *та набору* $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{R}$, *має місце рівність*

$$cum(Z(\tau_1), ..., Z(\tau_n)) = \begin{cases} 0, & n = 1; \\ C(\tau_1, \tau_2), & n = 2; \\ 0, & n \geq 3, \end{cases}$$

де $cum(Z(\tau_1), ..., Z(\tau_n))$ - *сумісний кумулянт набору випадкових величин* $Z(\tau_j), j = 1, ..., n.$

Наступне твердження у літературі відоме як "*формула Іссерліса*" і задає зв'язок між моментами та кумулянтами наборів гауссівських центрованих випадкових векторів .

Теорема. *Нехай* $(Z(\tau), \tau \in \mathrm{R})$ - *гауссівський центрований процес з кореляційною функцією* $C(\tau_1, \tau_2), \tau_1, \tau_2 \in \mathrm{R}$. *Тоді для будь-яких* $n \in \mathrm{N}$ *та набору* $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{R}$, *має місце рівність*

$$\mathrm{E}\prod_{j=1}^{n} Z(\tau_j) = \begin{cases} 0, & n - \textit{непарне число}; \\ \sum\limits_{\{k_1, k_2\}, ..., \{k_{n-1}, k_n\}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j - \textit{непарне}}}^{n-1} C(\tau_{k_j}, \tau_{k_{j+1}}), & n - \textit{парне число}, \end{cases}$$

де в другому випадку сума береться по всіх невпорядкованих розбиттях множини $\{1, ..., n\}$ *на неперетинні двоелементні підмножини* $\{k_1, k_2\}, ..., \{k_{n-1}, k_n\}$.

Слабка збіжність розподілів. Розглянемо два твердження про характеризацію багатовимірного розподілу за допомогою його моментів та кумулянтів (теорема Маркова та її наслідок) [4, 7].

Теорема Маркова [Бенткус, 1984]. *Нехай* $(Z(\tau), \tau \in \mathrm{R})$ *- деякий випадковий процес;* $(Z_\alpha(\tau), \tau \in \mathrm{R}), \alpha \in (0, \infty],$ *- сім'я (по* α*) випадкових процесів. Якщо для будь-яких* $n \in \mathrm{N}$ *та набору* $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{R},$ *має місце рівність*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{E} \prod_{j=1}^{n} Z_\alpha(\tau_j) = \mathrm{E} \prod_{j=1}^{n} Z(\tau_j),$$

і якщо скінченновимірні розподіли процесу Z *однозначно визначаються його моментами, тоді* $Z_\alpha \Rightarrow Z$ *при* $\alpha \to \infty$.

Наслідок теореми Маркова. *Нехай* $(Z(\tau), \tau \in \mathrm{R})$ *- деякий випадковий процес;* $(Z_\alpha(\tau), \tau \in \mathrm{R}), \alpha \in (0, \infty],$ *- сім'я (по* α*) випадкових процесів. Якщо для будь-яких* $n \in \mathrm{N}$ *та набору* $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{R},$ *має місце рівність*

$$\lim_{\alpha \to \infty} cum(Z_\alpha(\tau_1), ..., Z_\alpha(\tau_n)) = cum(Z(\tau_1), ..., Z(\tau_n)),$$

і якщо скінченновимірні розподіли процесу Z *однозначно визначаються його кумулянтами, тоді* $Z_\alpha \Rightarrow Z$ *при* $\alpha \to \infty$.

Гауссівський розподіл однозначно характеризується своїми кумулянтами /моментами, тому слабка збіжність розподілів випливає зі збіжності відповідних кумулянтів/ моментів. Це лежить в основі кумулянтного методу характеризації розподілів.

1.3. Інтеграли з циклічним зачепленням ядер

Розглянемо деякі властивості багатократних згорткових інтегралів із циклічним зачепленням аргументів.

Нехай $n \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$; $K_j = (K_j(x), x \in \mathrm{R}^m)$ і $\phi_j = (\phi_j(x), x \in \mathrm{R}^m)$, $j = 1,...,n$, - вимірні функції. Інтегралом з циклічним зачепленням ядер $K_j, j = 1,...,n$, називається інтеграл виду:

$$I_n = I(K_1,...,K_n;\phi_1,...,\phi_n) = \int \cdots \int_{\mathrm{R}^m \times \cdots \times \mathrm{R}^m} [\prod_{j=1}^{n} K_j(x_j - x_{j+1})\phi_j(x_j)]dx_1...dx_n,$$

де $x_{n+1} = x_1$; та збіжність якого розуміється в сенсі Лебега. Поряд з наведеним інтегралом будемо розглядати $I_n = I(|K_1|,...,|K_n|;|\phi_1|,...,|\phi_n|)$. Зрозуміло: якщо $I_n < \infty$, то I_n коректно визначений та $|I_n| \le I_n$.

Припустимо, що ядра $K_1,...,K_n$, залежать від параметра θ з деякого параметричного простору Θ, тобто $K_j = K_j^\theta, j = 1,...,n, \theta \in \Theta$.

Умови збіжності до нуля інтегралів $I_n^\theta = I(K_1^\theta,...,K_n^\theta;\phi_1,...,\phi_n)$ та $I_n^\theta = I(|K_1^\theta|,...,|K_n^\theta|;|\phi_1|,...,|\phi_n|)$, залежних від параметра θ та функцій $\phi_j, j = 1,...,n$, наводяться у наступному твердженні.

<u>Теорема 5.3 (B) [Buldygin, Utzet, Zaiats 2004]</u> *Нехай* $n \in \mathrm{N} \setminus \{1,2\}$. *Припустимо:*

(i) для ядер $K_j^\theta, j = 1,...,n,$ *при всіх* $p \in (1,\infty]$ *існує така стала* $C_p \ge 0$, *що виконується мажорантна умова*

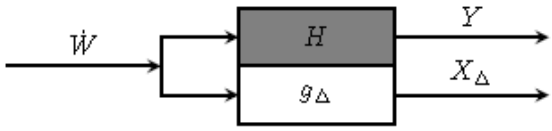
$$\max_j \|K_j^\theta\| \le C_p[\sigma(\theta)]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \text{де } \sigma(\theta) > 0, \theta \in \Theta$$

(ii) серед функцій $\phi_1,...,\phi_n$, *існує* $n_1 \ge 0$ *функцій з простору* $L_1(\mathrm{R})$, $n_\infty = n_1$ *функцій з простору* $L_\infty(\mathrm{R})$, *та* $n_2 = n - 2n_1 \ge 0$ *функцій з простору* $L_2(\mathrm{R})$, *тоді* $\lim_{\sigma(\theta)\to\infty} I_n^\theta = 0.$

РОЗДІЛ 2. Кумулянтний аналіз розподілу дискретної крос-корелограмної оцінки IRF лінійної однорідної SIDO-системи

2.1. Основні означення та попередні відомості

Модель. Розглянемо таку LTI SIDO-систему з дійсними компонентами:



Припущення. Перша компонента ІПФ – це невідома функція $H = (H(t), t \in \mathbb{R})$, а друга компонента $g_\Delta = (g_\Delta(t), t \in \mathbb{R})$ - є відомою функцією, що залежить від параметра $\Delta > 0$. Наступні обмеження вважаються незмінними протягом дослідження:

- $H \in L_2(\mathbb{R})$;
- сім'я $(g_\Delta, \Delta > 0)$ задовольняє:

$$g_\Delta \in L_2(\mathbb{R}), \Delta > 0; \tag{1a}$$

$$g_\Delta(t) = g_\Delta(-t), t \in \mathbb{R}, \Delta > 0; \tag{1b}$$

$$\lambda_0(\Delta) = sup\{\lambda > 0: |g_\Delta^*(\lambda)| > 0, |H^*(\lambda)| > 0\} < \infty, \Delta > 0 \tag{1c}$$

$$\sup_{\Delta>0} \|g_\Delta^*\|_\infty < \infty; \tag{1d}$$

$$\exists c \in (0, \infty)\ \ \forall a \in (0, \infty): \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{-a\le\lambda\le a} |g_\Delta^*(\lambda) - c| = 0. \tag{1e}$$

Для будь-якої функції $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ її перетворення Фур'є-Планшереля:

$$\varphi^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi(t)dt, \lambda \in \mathbb{R},$$

та має місце $\|\varphi^*\|_2 = \sqrt{2\pi}\|\varphi\|_2$, див. (Kolmogorov and Fomin 1968, 439).

Відповідно до (1b), маємо $g_\Delta^* = \overline{g_\Delta^*}$; тому g_Δ^* завжди є парною функцією з дійсним значенням у нашій структурі. Умова (1c) означає, що як $|g_\Delta^*|$, так і $|H^*|$ мають компактний носій $[-\lambda_0(\Delta);\ \lambda_0(\Delta)]$ для всіх $\Delta > 0$.

Приклад 2.1. Розглянемо сім'ї, що задовольняють (1a)-(1e) і апроксимують, у деякому сенсі, дельта-функцію Дірака при $\Delta \to \infty$. Нагадаємо, що $\mathbb{I}_A(\cdot)$ позначає індикатор множини $A \subset \mathbb{R}$.

Характеристики відомої компоненти ІПФ			
Назва	g_Δ	g_Δ^*	Параметр $\lambda_0(\Delta)$
Ядро Фейєра	$\frac{c}{2\pi\Delta}\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right)^2, t \in \mathbb{R}$	$c\left(1-\frac{\lvert\lambda\rvert}{\Delta}\right)\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$	Δ
Sinc-ядро	$\frac{c\sin(\Delta t)}{\pi t}, t \in \mathbb{R}$	$c\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$	Δ
Сума Sinc-ядер	$2c\Delta\frac{\cos(\Delta t)}{\pi^2 - 4\Delta^2 t^2}, t \in \mathbb{R}$	$c\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2\Delta}\right)\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$	Δ

Якщо $g = (g(t), t \in \mathbb{R})$ - парна функція така, що $g^*(0) = c > 0$ і $\sup\{\lambda > 0: |g_\Delta^*(\lambda)| > 0\} = 1$, то масштабовані функції $g_\Delta = \Delta g(\Delta\lambda), \Delta > 0$ задовольняють умовам (1a)-(1e) з $g_\Delta^* = g^*\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right), \lambda \in \mathbb{R}$ та $\lambda_0(\Delta) = \Delta$. Зауважимо, що в якості g^* можна розглядати класичні віконні функції з компактним носієм (Prabhu 2014, Chapter 3).

Вхідні та вихідні процеси. Нехай вхідний процес до системи $W = (W(t), t \in \mathbb{R})$ є стандартним процесом Вінера на всій осі $\mathbb{R}$. Спостерігаються два відгуки системи

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-s)dW(s), t \in \mathbb{R}; \quad X_\Delta(t) \int_{-\infty}^{\infty} g_\Delta(t-s)dW(s), t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Оскільки H і g є L_2-інтегрованими, а система - лінійна однорідна в часі (LTI), то відгуки Y і X_Δ є сумісно гауссівськими стаціонарними процесами з нульовим середнім, що мають спектральні густини $\frac{1}{2\pi}|H^*|^2$, $\frac{1}{2\pi}|g_\Delta^*|^2$

відповідно, див. (Lindgren 2006, Theorem 4.8). Відповідно до (1c), щільності мають компактні носії і, отже, для кожного $\Delta > 0$ майже всі вибіркові прирости процесів X_Δ і Y є нескінченно диференційовними (Cramer and Leadbetter 1967, Section 9.3).

Крос-корелограмна оцінка. Для будь-якого $\Delta > 0$ покладемо

$$h = h(\Delta) = \frac{\pi}{2\lambda_0(\Delta)} \qquad (3)$$

де константа $\lambda_0(\Delta)$ визначена в (1c). Зрозуміло, що $h(\Delta) \to 0$, якщо $\Delta \to \infty$. Протягом роботи ми завжди вважаємо, що виконується умова балансу (3). Для будь-якого $\tau \in \mathbb{R}$, розглянемо наступну вибіркову крос-корелограму дискретного типу як оцінку H:

$$\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cN}\sum_{n=1}^{N} Y\big(nh(\Delta)\big)X_\Delta(nh(\Delta) - \tau), \qquad (4)$$

де $\Delta > 0$, N – ціле додатне число, а константа c взята з умови з (1e). Для побудови оцінки, процес Y слід спостерігати в моменти часу $nh(\Delta)$, а процес X_Δ слід спостерігати в моменти часу $nh(\Delta) - \tau, n = 1,2,\dots,N$.

Процес $\widehat{H}_{N,\Delta} = \big(\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R}\big)$ залежить від двох параметрів N і Δ, баланс між якими вносить основну складність в дослідження.

Інтеграли в (2) і (4) інтерпретуються у середньоквадратичному сенсі. За альтернативою Бєляєва (Lifshits 1995, Theorem 7.3) процеси Y і X_Δ майже напевно неперервні. Тому інтеграл (4) можна інтерпретувати у сенсі Рімана, а отже, він майже напевно неперервний відносно $\tau \in \mathbb{R}$. У будь-якому випадку, формула (4) визначає процес, який є неперервним за ймовірністю; тому оцінка $\widehat{H}_{N,\Delta}$ є сепарабельною. Нескінченна диференційованість $X_\Delta(nh(\Delta) - \tau)$ і $Y\big(nh(\Delta)\big)$ для будь-яких $\Delta > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ означає, що $\widehat{H}_{N,\Delta}$ є нескінченно диференційованим процесом.

Для кожного $\tau \in \mathbb{R}$, маємо $H(\tau) \neq \mathrm{E}\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} g_\Delta(s+\tau)H(s)ds$, тобто $\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau)$ є зміщеною оцінкою $H(\tau)$. За деяких додаткових припущень

щодо поведінки сім'ї $(g_\Delta, \Delta > 0)$, оцінку можна зробити асимптотично незміщеною при $\Delta \to \infty$, див (Buldygin, Utzet and Zaiats 2004, Section 3).

Зазначимо, що точкові властивості оцінки не є предметом інтересу в даній роботі.

Об'єкт дослідження. Розглянемо наступну центровану та нормовану версію оцінки $\widehat{H}_{N,\Delta}$:

$$\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau) = \sqrt{Nh(\Delta)}\left[\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau) - \mathrm{E}\widehat{H}_{N,\Delta}(\tau)\right], t \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Далі будемо позначати $\left(\Delta, Nh(\Delta)\right) \to \infty$, якщо $\Delta \to \infty$ і $Nh(\Delta) \to \infty$.

Дослідження в роботі присвячене асимптотичній поведінці процесу $\hat{Z}_{N,\Delta} = \left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R}\right)$, при $\left(\Delta, Nh(\Delta)\right) \to \infty$. Буде показано, що цей процес асимптотично гауссівський.

Зауважимо, що коефіцієнт нормалізації $\sqrt{Nh(\Delta)}$ поруч із відхиленням – квадратний корінь з довжини інтервалу усереднення – це класика для доведення центральної граничної теореми (CLT).
Далі ми просто пишемо h замість $h(\Delta)$.

2.2. Границя коваріаційної функції процесу $\widehat{Z}_{N,\Delta}$

Зрозуміло, що процес (5) має нульове середнє; його кореляційна функція наведена в наступній лемі.

Лема 2.1. Припустимо, що $\{H, g_\Delta\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Тоді для будь-яких $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_2) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[e^{i(\tau_2-\tau_1)\lambda_2}|H^*(\lambda_1)|^2|g_\Delta^*(\lambda_2)|^2$$

$$+ e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\overline{g_\Delta^*(\lambda_1)g_\Delta^*(\lambda_2)}\Big]F_{N,\Delta}(\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2, \qquad (6)$$

де

$$F_{N,\Delta}(\lambda) = \begin{cases}\Phi_{N,\Delta}(\lambda), \text{якщо } |\lambda| \le 2\lambda_0(\Delta);\\ 0, \qquad \text{якщо } |\lambda| > 2\lambda_0(\Delta),\end{cases}$$

і

$$\Phi_{N,\Delta}(\lambda) = \begin{cases}\dfrac{hN}{2\pi}, & \text{якщо } \lambda = 0;\\ \dfrac{h}{2\pi N}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{Nh\lambda}{2}\right)}{\frac{h\lambda}{2}}\right)^2, & \text{якщо } \lambda \ne 0.\end{cases}$$

Слід зазначити, що

$$\|F_{N,\Delta}\|_1 = 1, \Delta > 0, N \ge 1,$$

і для будь-якого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{(\Delta, Nh(\Delta))\to\infty}\int_{|\lambda|>\varepsilon} F_{N,\Delta}(\lambda)d\lambda \to 0.$$

Зауваження 2.2. Без втрати загальності, будемо писати знаки комплексного спряження протягом всієї роботи (навіть для дійснозначних функцій g_Δ^*).

Доведення. Оскільки X_Δ і Y є сумісно гауссівськими процесами, то з формули Іссерліса (Brillinger 1981, 27) випливає:

$$\mathrm{E}\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_2) = \frac{h}{c^2 N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} cov\big(Y(nh)X_\Delta(nh-\tau_1), Y(mh)X_\Delta(mh-\tau_2)\big)$$

$$= \frac{h}{c^2 N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\big[K_Y\big((n-m)h\big)\cdot K_{X_\Delta}\big((m-n)h+\tau_2-\tau_1\big)$$

$$+ K_{Y,X_\Delta}\big((n-m)h+\tau_2\big)\cdot K_{Y,X_\Delta}\big((m-n)h+\tau_1\big)\big].$$

Тут K_Y та K_{X_Δ} є коваріаційними функціями Y та X_Δ відповідно, а K_{Y,X_Δ} є крос- коваріаційною функцією між Y та X_Δ. Застосуємо теорему Бохнера (Lifshits 1995, Theorem 4.1) до K_Y; K_{X_Δ} і K_{Y,X_Δ}, змінимо змінні та перепишемо наведену вище формулу таким чином:

$$\mathrm{E}\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_2) =$$

$$\frac{h}{c^2}\sum_{j=-N}^{N}\big[K_Y(jh)\cdot K_{X_\Delta}(-jh+\tau_2-\tau_1) + K_{Y,X_\Delta}(jh+\tau_2)\cdot K_{Y,X_\Delta}(-jh+\tau_1)\big]\left(1-\frac{|j|}{N}\right) =$$

$$\frac{h}{c^2}\sum_{j=-N}^{N}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(jh)\lambda_1}|H^*(\lambda_1)|^2 d\lambda_1\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-jh+\tau_2-\tau_1)\lambda_2}|g_\Delta^*(\lambda_2)|^2 d\lambda_2\right]\left(1-\frac{|j|}{N}\right) +$$

$$+\frac{h}{c^2}\sum_{j=-N}^{N}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(jh+\tau_2)\lambda_2}H^*(\lambda_2)\overline{g_\Delta^*(\lambda_2)}d\lambda_2\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-jh+\tau_1)\lambda_1}H^*(\lambda_1)\overline{g_\Delta^*(\lambda_1)}d\lambda_1\right]\left(1-\frac{|j|}{N}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big[e^{i(\tau_2-\tau_1)\lambda_2}|H^*(\lambda_1)|^2|g_\Delta^*(\lambda_2)|^2\big]\times\frac{h}{2\pi}\left[\sum_{j=-N}^{N} e^{ijh(\lambda_1-\lambda_2)}\left(1-\frac{|j|}{N}\right)dt\right]d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$\frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big[e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\overline{g_\Delta^*(\lambda_1)g_\Delta^*(\lambda_2)}\big]\times\frac{h}{2\pi}\left[\sum_{j=-N}^{N} e^{ijh(\lambda_2-\lambda_1)}\left(1-\frac{|j|}{N}\right)dt\right]d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$\frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big[e^{i(\tau_2-\tau_1)\lambda_2}|H^*(\lambda_1)|^2|g_\Delta^*(\lambda_2)|^2 + e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\overline{g_\Delta^*(\lambda_1)g_\Delta^*(\lambda_2)}\big]$$

$$\times\frac{h}{2\pi}\left[\sum_{j=-N}^{N} e^{ijh(\lambda_1-\lambda_2)}\left(1-\frac{|j|}{N}\right)dt\right]d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\lambda \neq 0$ маємо:

$$\Phi_{N,\Delta}(\lambda) = \frac{h}{2\pi}\sum_{j=-N}^{N} e^{ijh\lambda}\left(1-\frac{|j|}{N}\right) = \frac{h}{2\pi N}\left|\sum_{j=-N}^{N} e^{ijh\lambda}\right|^2 = \frac{h}{2\pi N}\left(\frac{\sin\left(\frac{Nh\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h\lambda}{2}\right)}\right)^2,$$

тоді як для $\lambda = 0$:

$$\Phi_{N,\Delta}(0) = \frac{h}{2\pi}\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N}\right) = \frac{h}{2\pi N}\left|\sum_{j=-N}^{N} 1\right|^2 = \frac{Nh}{2\pi}.$$

Підстановка функції $\Phi_{N,\Delta}(\lambda)\cdot \mathbb{I}_{\{|\lambda|\le 2\lambda_0(\Delta)\}}(\lambda) = F_{N,\Delta}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, в останнє зображення кореляційної функції $\hat{Z}_{N,\Delta}$, завершує доведення Леми 2.1. ■

Подальший результат стосується граничної кореляційної функції процесу $\hat{Z}_{N,\Delta}$ при $\big(\Delta, Nh(\Delta)\big) \to \infty$, та за виконання припущень (1a)-(1e). Детальне доведення цього факту, після перепозначень та певної адаптації, можна знайти у статтях (Buldygin, Utzet and Zaiats 2004, Lemma 3.4) та (Blazhievska and Zaiats 2020, Theorem 3.1).

Теорема 2.1. Припустимо, що $\{H, g_\Delta\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Тоді для будь-яких $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(\Delta, Nh(\Delta))\to\infty} \mathrm{E}\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_2) = C_\infty(\tau_1,\tau_2)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i(\tau_2-\tau_1)\lambda}|H^*(\lambda)|^2 + e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda}\big(H^*(\lambda)\big)^2\right]d\lambda. \qquad (7)$$

Функція C_∞ є коректно визначеною та неперервною функцією лише за найслабшого обмеження: $H \in L_2(\mathbb{R})$.

2.3. Слабка асимптотична нормальність процесу $\widehat{Z}_{N,\Delta}$

Теорема 2.1 показує, що C_∞ в (7) є додатною напіввизначеною функцією на $\mathbb{R}^2$ (як границя кореляційних функцій). Тоді існує вимірний сепарабельний дійснозначний гауссівський процес $Z = (Z(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ з нульовим середнім і коваріаційна функція якого дорівнює C_∞, тобто

$$\mathrm{E}Z(\tau_1)Z(\tau_2) = C_\infty(\tau_1, \tau_2)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i(\tau_2-\tau_1)\lambda} |H^*(\lambda)|^2 + e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda} \left(H^*(\lambda)\right)^2 \right] d\lambda, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$$

Без втрати загальності, можна вважати, що процес Z визначено на тому ж імовірнісному просторі, що й процес $\hat{Z}_{N,\Delta}$. Покажемо, що процес Z є границею $\hat{Z}_{N,\Delta}$, у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів. Має місце наступне твердження.

Теорема 2.2. Припустимо, що $\{H, g_\Delta\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Тоді для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ і для будь-якої множини точок $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(\Delta, Nh(\Delta)) \to \infty} \mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{m} \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_j)\right] = \mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{m} Z(\tau_j)\right]. \qquad (8)$$

Більш того, всі скінченновимірні розподіли процесів $\hat{Z}_{N,\Delta}$, слабко збігаються до відповідних розподілів Z при $(\Delta, Nh(\Delta)) \to \infty$.

Доведення теореми 2.2. Застосуємо кумулянтний метод (Brillinger 1981, Chapter 2) у поєднанні з теорією інтегралів, що містять циклічний добуток ядер (Buldygin and Kurotschka, 1990) і (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2002, 2004).

Візьмемо $m \in \{1,2\}$. У цьому випадку Теорема 2.2 явно виконується, оскільки $\hat{Z}_{N,\Delta}$ і Z мають нульові середні, і припущення Теореми 2.1 задовольняються.

Тепер візьмемо $m \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}; \tau_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$ і запишемо $cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right)$ для сумісного простого кумулянта сім'ї

випадкових величин $\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)$. Відомо, що всі моменти випадкового вектора взаємно однозначно виражаються через його кумулянти, і справджують проблемі єдиності для характеризації розподілу. Тому ми доведемо збіжність до гауссівського розподілу, якщо покажемо, що

$$\lim_{(\Delta, Nh(\Delta))\to\infty} cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right) = 0. \qquad (9)$$

За загальними властивостями кумулянтів і за означеннями $\hat{Z}_{N,\Delta}$ і $\widehat{H}_{N,\Delta}$ (див. (4) і (5)), маємо

$$cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right) = \left(\frac{h}{c^2 N}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{n_1=1}^{N} \dots \sum_{n_m=1}^{N} cum\big(Y(n_j h) X_\Delta(n_j h - \tau_j), j = 1, \dots, m\big), \qquad (10)$$

де $h = h(\Delta)$ визначено в (3).

Оскільки X_Δі Y є гауссівськими процесами з нульовим середнім, то Теорема 2.3.2 у (Brillinger 1981), застосована до доданку в (10), дає:

$$cum\big(Y(n_j h) X_\Delta(n_j h - \tau_j), j = 1, \dots, m\big) = \sum \prod_{p=1}^{m} cum\left(D_p^{(2)}\right) \qquad (11)$$

де підсумовування береться по всіх невпорядкованих нерозкладних розбиттях таблиці

$$D_{m\times 2} = \begin{bmatrix} Y(n_1 h) & X_\Delta(n_1 h - \tau_1) \\ Y(n_2 h) & X_\Delta(n_2 h - \tau_2) \\ \vdots & \vdots \\ Y(n_m h) & X_\Delta(n_m h - \tau_m) \end{bmatrix}$$

на пари $\left\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\right\}$. Порядок елементів у розбитті $\left\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\right\}$ значення не має. Тому ми завжди можемо припустити, що це розбиття виглядає наступним чином (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2004):

(1) $D_p^{(2)} \cap D_q^{(2)} = \emptyset$ для $p \neq q$;

(2) $D_{m\times 2} = D_1^{(2)} \cup \dots \cup D_m^{(2)}$;

(3) якщо $m \geq 3$, то для будь-якого p множина $D_p^{(2)}$ не збігається ні з одним із рядків $R_1, \dots, R_m$ таблиці $D_{m\times 2}$; якщо до того ж $1 \leq v < m$, то об'єднання будь-якої множини елементів розбиття $\left\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\right\}$ не повинно збігатися з об'єднанням будь-яких v рядків таблиці $D_{m\times 2}$;

(4) для будь − якого $p = 1, \dots, m-1$, існує рівно один рядок $\tilde{R}_p$ таблиці $D_{m\times 2}$ такий, що $\tilde{R}_p \subset D_p^{(2)} \cup D_{p+1}^{(2)}$;

(5) $R_1 \subset D_1^{(2)} \cup D_m^{(2)}$.

Це означає, що елементи невпорядкованого нерозкладного розбиття $\left\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\right\}$ зачеплюються один за інший послідовно, і вичерпують всю таблицю $D_{m\times 2}$, а $D_m^{(2)}$ – зачеплюється за $D_1^{(2)}$. Далі для даного $D_p^{(2)}$ запишемо $D_p^{(2)} = D_{j,\tilde{j}}^{(2)}$, де j і $\tilde{j}$ – номери рядків тих двох рядків $D_{m\times 2}$, елементи яких утворюють множину $D_p^{(2)}$. Таким чином, для будь-якого невпорядкованого нерозкладного розбиття $\left\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\right\}$, маємо

$$\vec{D}^{(2)} = \left\{D_{j_1,j_2}^{(2)}, D_{j_2,j_3}^{(2)}, \dots, D_{j_{m-1},j_j}^{(2)}, D_{j_m,j_{m+1}}^{(2)}\right\},$$

де $(j_1, \dots, j_m)$ таке, що $j_1 = 1, (j_2, j_3, \dots, j_m)$ є перестановкою $\{2,3, \dots, m\}$ і $j_{m+1} = j_1 = 1$.

Подальший аналіз структури $\vec{D}^{(2)}$ показує, що всередині множини можна виділити три групи елементів. Першу групу утворюють невпорядковані множини, що мають вигляд $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} = \left\{X_\Delta\left(n_j h - \tau_j\right), X_\Delta\left(n_{\tilde{j}} h + \tau_{\tilde{j}}\right)\right\}, j \neq \tilde{j}$. Друга група містить невпорядковані множини наступного виду: $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} = \left\{Y\left(n_j h\right), Y\left(n_{\tilde{j}} h\right)\right\}, j \neq \tilde{j}$. Нарешті, третю групу утворюють невпорядковані множини виду $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} = \left\{Y\left(n_j h\right), X_\Delta\left(n_{\tilde{j}} h - \tau_{\tilde{j}}\right)\right\}, j \neq \tilde{j}$. Позначимо ці три групи відповідно $G_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right), G_1\left(\vec{D}^{(2)}\right), G_2\left(\vec{D}^{(2)}\right)$, і нехай $m_v\left(\vec{D}^{(2)}\right)$ – це потужність $G_v\left(\vec{D}^{(2)}\right), v \in \{\infty, 1,2\}$. Зрозуміло, що для будь-якого $\vec{D}^{(2)}$

$$m_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right) = m_1\left(\vec{D}^{(2)}\right);\ m_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right) + m_1\left(\vec{D}^{(2)}\right) + m_2\left(\vec{D}^{(2)}\right) = m. \qquad (12)$$

Далі, якщо $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} \in G_1\left(\vec{D}^{(2)}\right)$, то

$$cum\left(D_{j,\tilde{j}}^{(2)}\right) = \mathrm{E}X_\Delta(n_j h - \tau_j)X_\Delta(n_{\tilde{j}} h - \tau_{\tilde{j}}) = K_{X_\Delta}\left((n_{\tilde{j}} - n_j)h + (\tau_j - \tau_{\tilde{j}})\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(n_{\tilde{j}}-n_j)h\lambda_j} e^{-i(\tau_{\tilde{j}}-\tau_j)\lambda_j}\left|g_\Delta^*(\lambda_j)\right|^2 d\lambda_j\,;$$

якщо $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} \in G_2\left(\vec{D}^{(2)}\right)$, то

$$cum\left(D_{j,\tilde{j}}^{(2)}\right) = \mathrm{E}Y(n_j h - \tau_j)Y(n_{\tilde{j}} h) = K_Y\left((n_{\tilde{j}} - n_j)h\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(n_{\tilde{j}}-n_j)h\lambda_j}\left|H^*(\lambda_j)\right|^2 d\lambda_j\,;$$

якщо $D_{j,\tilde{j}}^{(2)} \in G_3\left(\vec{D}^{(2)}\right)$, то

$$cum\left(D_{j,\tilde{j}}^{(2)}\right) = \mathrm{E}Y(n_j h)X_\Delta(n_{\tilde{j}} h - \tau_{\tilde{j}}) = K_{Y,X_\Delta}\left((n_{\tilde{j}} - n_j)h - \tau_{\tilde{j}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(n_{\tilde{j}}-n_j)h\lambda_j} \cdot e^{-i\tau_j\lambda_j} H^*(\lambda_j)\overline{g_\Delta^*(\lambda_j)}d\lambda_j.$$

Ці формули означають, що

$$\prod_{p=1}^{m} cum\left(D_p^{(2)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int \dots \int_{R^m}\left[\prod_{k=1}^{m} e^{i\left(n_{j_{k+1}}-n_{j_k}\right)h\lambda_{j_k}}\right]\varphi_0\left(\vec{\lambda},\vec{\tau},\vec{D}^{(2)}\right)$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{m}\varphi_{j_k}\left(\lambda_{j_k},\Delta,\vec{D}^{(2)}\right)\right)d\lambda_{j_1}\dots d\lambda_{j_m}. \qquad (13)$$

Тут $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$; $\vec{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_m)$; $(j_1,\dots,j_m)$ є таким, що $j_1 = 1, (j_2,\dots,j_m)$ перестановкою $\{2,\dots,m\}$ і $j_{m+1} = j_1 = 1$. Для кожного розбиття $\vec{D}^{(2)}$ функція $\varphi_0\left(\cdot,\vec{D}^{(2)}\right)$ є добутком деяких функцій $e^{i\left(\tau_{j_{k+1}}-\tau_{j_k}\right)\lambda_{j_k}}, e^{-i\tau_{j_k}\lambda_{j_k}}$ та індикаторних функцій $I_{\mathbb{R}}\left(\lambda_{j_k}\right)$. Тому

$$\sup_{\vec{D}^{(2)}}\sup_{\vec{\lambda},\vec{\tau}}\left|\varphi_0\left(\vec{\lambda},\vec{\tau},\vec{D}^{(2)}\right)\right| = 1. \qquad (14)$$

Для будь-якого $\Delta > 0$ і будь-якого $\vec{D}^{(2)}$ кожна функція, що належить до множини $\mathfrak{F}\left(\Delta, \vec{D}^{(2)}\right) = \left\{\varphi_1\left(\cdot, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right), \dots, \varphi_m\left(\cdot, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right)\right\}$, може дорівнювати лише одній із функцій: $|g_\Delta^*|^2, |H^*|^2$, або $H^*\overline{g_\Delta^*}$. За умовою (1c) усі ці функції мають однаковий компактний носій на $[-\lambda_0(\Delta), \lambda_0(\Delta)]$. Крім того,

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}\left\{\varphi \in \mathfrak{F}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \varphi = |g_\Delta^*|^2\right\} = m_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right); \\ &\operatorname{card}\left\{\varphi \in \mathfrak{F}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \varphi = |H^*|^2\right\} = m_1\left(\vec{D}^{(2)}\right); \\ &\operatorname{card}\left\{\varphi \in \mathfrak{F}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \varphi = H^*\overline{g_\Delta^*}\right\} = m_2\left(\vec{D}^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Змінимо $\prod_{k=1}^m e^{i\left(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}\right)h\lambda_{j_k}} = \prod_{k=1}^m e^{in_{j_{k+1}}\left(\lambda_{j_k} - \lambda_{j_{k+1}}\right)}, \lambda_{m+1} = \lambda_1$ і розглянемо m-вимірну суму

$$\sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_m=1}^N \left(\prod_{k=1}^m e^{in_{j_{k+1}}h\left(\lambda_{j_k} - \lambda_{j_k+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^m \left(\sum_{n_{j_{k+1}}}^N e^{in_{j_{k+1}}h\left(\lambda_{j_k} - \lambda_{j_k+1}\right)}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^m U_{N,\Delta}\left(\lambda_{j_k} - \lambda_{j_k+1}\right),$$

де $h = h(\Delta)$ і

$$U_{N,\Delta}(t) = \sum_{n=1}^N e^{inh(\Delta)\lambda} = e^{ih(\Delta)\lambda} \cdot \frac{1 - e^{iNh(\Delta)\lambda}}{1 - e^{ih(\Delta)\lambda}}, t \in \mathbb{R}.$$

Звернемо увагу, що

$$\left|U_{N,\Delta}(t)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{Nh(\Delta)\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\right|, t \in \mathbb{R}.$$

Деякими алгебраїчними діями з (10), (11) і (13) отримуємо

$$\begin{aligned} &cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi c^2}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\vec{D}^{(2)}} \int \dots \int_{R^m} \left[\prod_{k=1}^m \hat{F}^{(N,\Delta)}(\lambda_k - \lambda_{k+1})\right] \varphi_0\left(\vec{\lambda}, \vec{\tau}, \vec{D}^{(2)}\right) \\ &\times \left(\prod_{k=1}^m \varphi_k\left(\lambda_k, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right)\right) d\lambda_1 \dots d\lambda_m, \end{aligned} \tag{16}$$

де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$ і де

$$\hat{F}^{(N,\Delta)}(\lambda) = \sqrt{F_{N,\Delta}(\lambda)} = \begin{cases} \left(\frac{h(\Delta)}{2\pi N}\right)^{\frac{1}{2}} U_{N,\Delta}(\lambda), \text{якщо } |\lambda| \leq 2\lambda_0(\Delta); \\ 0, \qquad\qquad \text{якщо } |\lambda| > 2\lambda_0(\Delta), \end{cases} \quad (17)$$

З (16) випливає, що $cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right)$ можна представити у вигляді скінченної суми інтегралів, що містять циклічний добуток ядер, див. (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2002, 2004). Усі ядра дорівнюють $\hat{F}^{(N,\Delta)}$ і залежать від параметрів $N \geq 1$ і $\Delta > 0$.

Виключенням функції φ_0 та усуненням залежность функцій $\varphi_k, k = 1, \dots, m$, від параметра Δ (див. (14) і (1d)), отримуємо нерівність на базі (16). Точніше, для будь-якого $m \geq 3$ і будь-якого набору точок $\tau_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$, ми маємо

$$\left|cum\left(\hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{Z}_{N,\Delta}(\tau_m)\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2\pi c^2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\sup_{\Delta>0} \|g_\Delta^*\|_\infty\right)^m \times$$

$$\times \sum_{\vec{D}^{(2)}} \int \dots \int_{R^m} \left|\prod_{k=1}^{m} \hat{F}^{(N,\Delta)}(\lambda_k - \lambda_{k+1})\, \bar{\varphi}_k\left(\lambda_k, \vec{D}^{(2)}\right)\right| d\lambda_1 \dots d\lambda_m, \quad (18)$$

де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$ і де

$$\bar{\varphi}_k\left(\cdot, \vec{D}^{(2)}\right) = \begin{cases} I_{\mathbb{R}}, \quad \text{якщо } \bar{\varphi}_k\left(\cdot, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right) = |g_\Delta^*|^2; \\ |H^*|^2, \text{якщо } \bar{\varphi}_k\left(\cdot, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right) = |H^*|^2; \\ |H^*|, \quad \text{якщо } \bar{\varphi}_k\left(\cdot, \Delta, \vec{D}^{(2)}\right) = H^* \overline{g_\Delta^*}. \end{cases} \quad (19)$$

Для будь-якого фіксованого $\vec{D}^{(2)}$ визначимо:

$$I_m^{N,\Delta}\left(\vec{D}^{(2)}\right) = \int \dots \int_{R^m} \prod_{k=1}^{m} \left|\hat{F}^{(N,\Delta)}(\lambda_k - \lambda_{k+1})\right| \prod_{k=1}^{m} \bar{\varphi}_k\left(\lambda_k, \vec{D}^{(2)}\right) d\lambda_1 \dots d\lambda_m, \quad \lambda_{m+1} = \lambda_1.$$

Наступний крок доведення базується на застосуванні Теореми 5.3, Частина B, у (Buldygin, Utzet, and Zaiats 2004), адаптована версія якої наведена в наступній лемі.

Лема 2.2. Нехай $m \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$. Припустимо, що:

(i) сім'я ядер $\left(\hat{F}^{(N,\Delta)}, N \geq 1, \Delta > 0\right)$ задовольняє для всіх $p \in [1, \infty]$ нерівність $\left\|\hat{F}^{(N,\Delta)}\right\|_p \leq C_p \cdot \left(Nh(\Delta)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, де C_p – константа, яка не залежить від параметрів (ні від N, ні від Δ).

(ii) серед функцій $\bar{\varphi}_k, k = 1, \dots, m,$ є $m_1 \geq 0$ функцій, що належать до $L_1(\mathbb{R}), m_\infty = m_1$ функцій, що належать до $L_\infty(\mathbb{R})$, і $m_2 = m - 2m_1$ функцій, що належать до $L_2(\mathbb{R})$.

Тоді $\lim\limits_{(\Delta, Nh(\Delta)) \to \infty} I_m^{(N,\Delta)}\left(\vec{D}^{(2)}\right) = 0.$

Покажемо, що $I_m^{(N,\Delta)}\left(\vec{D}^{(2)}\right)$ збігається до нуля. Нагадаємо, що ми розглядаємо випадок $m \in \mathbb{N} \backslash \{1,2\}$. Нам слід перевірити припущення Леми 2.2, щоб побачити, чи всі вони задовольняються.

Припущення (i). Розглянемо норми $\left\|\hat{F}^{(N,\Delta)}\right\|_p, p \in [1, \infty]$. Легко перевірити, що для всіх $p \in [1, \infty]$:

$$A_p\left(Nh(\Delta)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq \left\|\hat{F}^{(N,\Delta)}\right\|_p \leq B_p\left(Nh(\Delta)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},$$

де $A_p = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$, і $B_p = \frac{\pi}{2} A_p$. Крім того, $\left\|\hat{F}^{(N,\Delta)}\right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Nh(\Delta)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Підсумовуючи, маємо для будь-якого $p \in [1, \infty]$:

$$\left\|\hat{F}^{(N,\Delta)}\right\|_p = C_p \cdot \left(Nh(\Delta)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},$$

де $C_p = \max\left\{\frac{1}{2\pi}; B_p\right\} < \infty$. Це означає, що припущення (i) виконується.

Припущення (ii). Для заданого $\vec{D}^{(2)}$ множину функцій $\bar{\mathfrak{F}}\left(\vec{D}^{(2)}\right) = \left\{\bar{\varphi}_1\left(\cdot, \vec{D}^{(2)}\right), \dots, \bar{\varphi}_m\left(\cdot, \vec{D}^{(2)}\right)\right\}$ можна розділити на три класи:

$$\begin{aligned} M_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right) &= \left\{\bar{\varphi} \in \bar{\mathfrak{F}}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \bar{\varphi} = I_{\mathbb{R}}\right\}; \\ M_1\left(\vec{D}^{(2)}\right) &= \left\{\bar{\varphi} \in \bar{\mathfrak{F}}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \bar{\varphi} = |H^*|^2\right\}; \qquad (20) \\ M_2\left(\vec{D}^{(2)}\right) &= \left\{\bar{\varphi} \in \bar{\mathfrak{F}}\left(\vec{D}^{(2)}\right): \bar{\varphi} = |H^*|\right\}. \end{aligned}$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbb{R})$, кожна з множин в (20) є підмножиною іншого класу функцій, а саме:

$$M_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right) \subset L_\infty(\mathbb{R}), M_1\left(\vec{D}^{(2)}\right) \subset L_1(\mathbb{R}), M_2\left(\vec{D}^{(2)}\right) \subset L_2(\mathbb{R}).$$

Відповідно до (12), (15), (19) і (20), потужності $M_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right)$ і $M_1\left(\vec{D}^{(2)}\right)$ рівні, і має місце рівність:

$$card\left[M_\infty\left(\vec{D}^{(2)}\right)\right] + card\left[M_1\left(\vec{D}^{(2)}\right)\right] + card\left[M_2\left(\vec{D}^{(2)}\right)\right] = m,$$

тому припущення (ii) виконується.

Отже, з Леми 2.2 випливає результат

$$\lim_{(\Delta, Nh(\Delta)) \to \infty} I_m^{(N,\Delta)}\left(\vec{D}^{(2)}\right) = 0. \qquad (21)$$

Сума в (18) містить скінченну кількість доданків, які рівномірно задовольняють (21) відносно $\Delta > 0$. Тоді (9) виконується, і цей аргумент завершує доведення Теореми 2.2. ■

Давайте підведемо підсумки щодо основних результатів розділу 2. Для доведення асимптотичної нормальності центрованих оцінок ми застосували кумулянти вищих порядків дискретних крос-корелограм між стаціонарними сумісно гауссівськими процесами. В контексті, було використано діаграмну формулу Брилліджера, специфічне 2-елементне розбиття 2-стовпцевої матриці, представлення кумулянтів через багатопараметричні інтеграли з циклічними добутками ядер та умови, що пояснюють збіжність до нуля цих інтегралів. Оскільки гауссівський розподіл однозначно визначається своїми кумулянтами, ми довели, що граничний розподіл є гауссівським (всі кумулянти m-го порядку є нулями, крім 2-го - коваріаційної функції C_∞.)

Основна частина дослідження пов'язана з демонстрацією, як саме кумулянтний аналіз працює у задачі оцінювання імпульсної перехідної функції (ІПФ). Зауважимо, що крос-корелограми дискретного типу як оцінки H-компоненти SIDO-системи розглядалися вперше. Усі отримані результати є новими. Деякі цікаві зв'язки з попередніми результатами щодо SIDO-систем зі зворотнім зв’язком та каскадно з’єднаних 2 SISO-систем наведено в заключних зауваженнях.

2.4. Приклад імпульсної перехідної функції

LTI – системи вивчаються на різних технічних рівнях залежно від цільової аудиторії, а в підручниках наводяться переважно класичні приклади стійких систем (системи з L_1 – інтегровними ядрами. Ми наведемо приклади L_2-інтегрованих компонентів ІПФ, які задовольняють наведеним вище теоремам. Наші приклади охоплюють широкий спектр функцій, корисних в інженерії (sinc і ступінчаста інтерполяція). Нагадаємо, що в нашому прикладі 2.1 вже наведено корисні випадки сімей $(g_\Delta, \Delta > 0)$, які наближені до δ – функції Дірака. Ми не накладаємо додаткових обмежень на компонент H, окрім основного, $H \in L_2(\mathbb{R})$, та компактності носія модуля частотної характеристики («плата за дискретну схему»).

Приклад 2.2. Візьмемо скінчену послідовність $\{a_k\}_{k=0}^m \subset \mathbb{R}$. Нехай

$$H(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{\sin(k+1)t - \sin kt}{\pi t}, t \in \mathbb{R}.$$

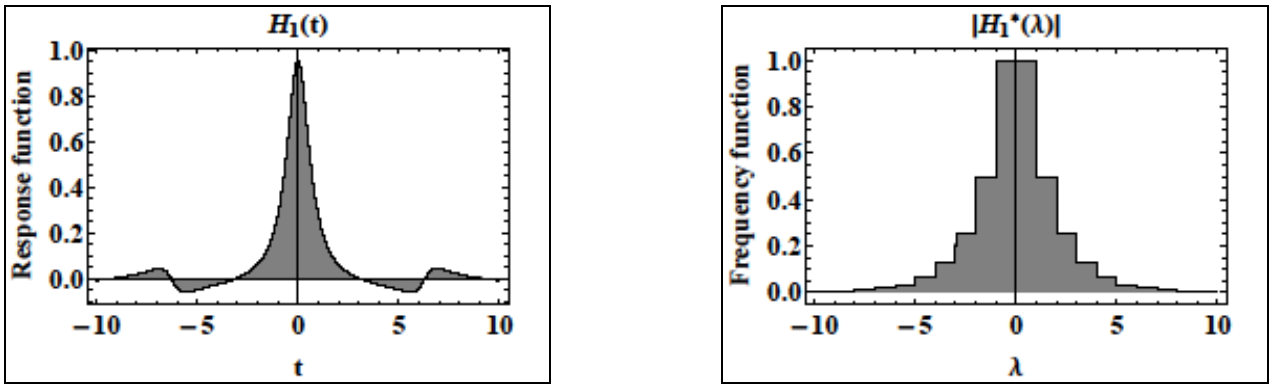
Зрозуміло, що $H \notin L_1(\mathbb{R})$. Однак H належить до $L_2(\mathbb{R})$, оскільки

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \right)^2 \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} a_k \left(\cos\left(\frac{k+1}{k}\right) t \right) \right]^2 dt \le \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k| \right)^2 < \infty.$$

Перетворення Фур'є-Планшереля можна обчислити за допомогою властивостей смугового фільтра

$$H^*(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \frac{\sin(k+1)t - \sin kt}{\pi t} dt = \sum_{k=0}^{m} a_k I_{(k,k+1)}(|\lambda|), \lambda \in \mathbb{R},$$

На малюнку 1 показано поведінку H та $|H^*|$ з $a_k = 2^{-k}, k = 0,1,\dots,10$.



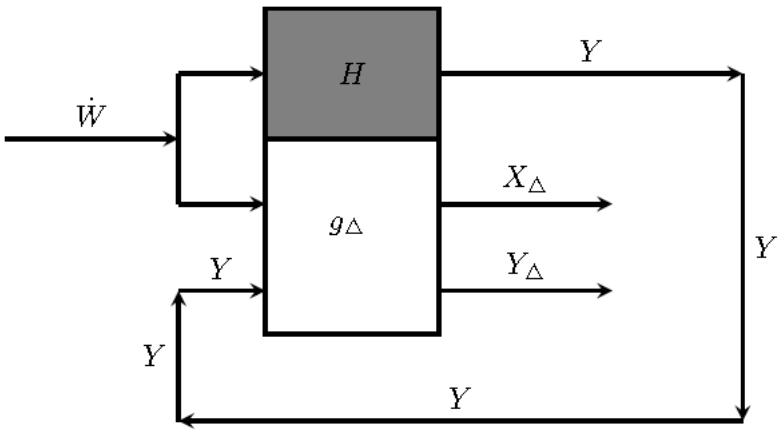
Мал. 1: ІПФ H і модуль його перетворення Фур'є-Планшереля з $a_k = 2^{-k}, k = 0,1,\dots,10$

Функція H дає приклад ІПФ узагальненого смугового фільтра. Зауважимо, що $H^* \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, тому наші результати, застосовані до H, еквівалентні результатам для інтегральної крос-корелограмної оцінки ІПФ у Li (Li 2005, Theorem 1).

ВИСНОВКИ

Ми розглянули SIDO-модель, описану LTI- системою, ІПФ якої має дві дійсні компоненти. Обидві компоненти є L_2-інтегрованими, а вхідні процес є стандартним процесом Вінера. Ми оцінили одну невідому компоненту ІПФ за спостереженнями за другою δ-подібною компонентою. В якості оцінки вибрано нормовану дискретну крос-корелограму між виходами системи. Доведено асимптотичну нормальність центрованої оцінки. Для доведення ЦГТ ми застосували кумулянтний аналіз вибіркових крос-корелограм між виходами та теорію інтегралів з циклічними добутками ядер. На завершення нашого дослідження наведемо наочні приклади.

У цій роботі оцінка ІПФ H належить до $L_2(\mathbb{R})$, що означає, що наші системи можуть бути нестійкими, оскільки H не обов'язково має бути L_1-інтегрована. Оскільки від дискретної схеми нам знадобився обмежений носій $\left[-\frac{\pi}{2h(\Delta)}; \frac{\pi}{2h(\Delta)}\right]$ частотної роздільної здатності послідовності $K_Y\big(nh(\Delta)\big)$. Зауважимо, що умову компактного носія $|H^*|$ можна видалити, розглянувши таку лінійну систему зі зворотним зв'язком:



Тут вихід Y генерується після проходження через невідомий H-канал, а потім проходить через відомий g_Δ-канал. Він стає залежним від параметра - $(Y_\Delta, \Delta > 0)$, і його щільність автоматично успадковує компактний носій, заданий у (1c). Точніше, кореляційні функції головної трійки для всіх t ∈ R:

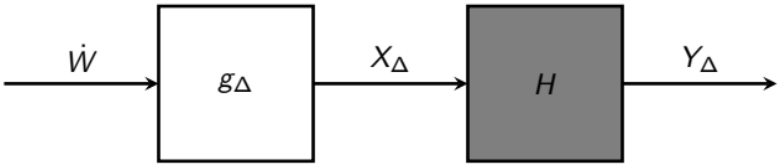
$$K_{X_\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} |g_\Delta^*(\lambda)|^2 d\lambda,$$

$$K_{Y_\Delta, X_\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H^*(\lambda) |g_\Delta^*(\lambda)|^2 d\lambda,$$

$$K_{Y_\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} |H^*(\lambda)|^2 |g_\Delta^*(\lambda)|^2 d\lambda$$

Таким чином, запропонована система зворотного зв'язку дає результати, еквівалентні оцінці ІПФ в SISO-системі в (Buldygin, Utzet and Zaiats, 2004) з мінімальними умовами на невідому ІПФ: $H \in L_2(\mathbb{R})$. Зауважимо, що процес Y_Δ є результатом білінійної інваріантної в часі системи Вольтерра, отриманої за допомогою 2-вимірного гауссівського білого шуму.

SIDO-систему зі зворотнім зв'язком, яка уточнює отримані результати, можна також записати у вигляді каскадного з'єднання двох LTI SISO-систем:

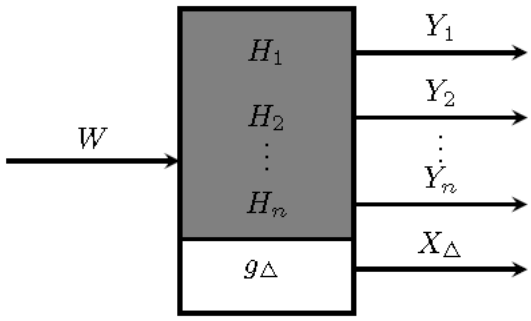


У цьому випадку перша система LTI з g_Δ-каналом, що фільтрує гауссівський білий шум, генерує сімейство стаціонарних гауссівських процесів з нульовим середнім та щільністю $\frac{1}{2\pi}|g^*()|^2$. Звертаємо увагу, що умови (1a)-(1e) показують, у певному сенсі, як сімейство $(X_\Delta, \Delta > 0)$ апроксимує гауссівський білий шум.

Друга система LTI з H-каналом фільтрує вхідний X_Δ і дає Y_Δ як вихід для всієї системи. Вибіркова крос-кореляція між X_Δ і Y_Δ зводить H-оцінку до задачі оцінювання ІПФ в SISO-системах, яка була вирішена для дискретних та інтегральних випадків (Buldygin and Li, 1997), (Buldygin and Kurotschka 1999), (Buldygin, Utzet and Zaiats, 2004) та (Buldygin and Blazhievska, 2009, 2010).

Наша схема, з одного боку, вимагає додаткової умови компактної носія частотної характеристики $|H^*|$, але з іншого боку, показує, як з неї можна отримати класичні задачі.

Усі результати можна успішно поширити на оцінку будь-якої фіксованої кількості невідомих компонент ІПФ у моделі каналу LTI з одним входом і кількома виходами (SIMO) за аналогічних припущень. Справді, розглянемо такий «чорний ящик»:



де всі $(n+1)$ компоненти є L_2-інтегрованими, а їх частотні характеристики мають компактні носії; $H_j, j = 1, \dots, n$ – має n невідомих компонент, а g_Δ –є відомою δ-подібною компонентою, що задовольняє (1a)–(1e). Для будь-якого $j = 1, \dots, n$ нормована крос-корелограма між Y_j і X_Δ має вигляд:

$$\widehat{H}_{j,N,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cN} \sum_{n=1}^{N} Y_j\big(nh(\Delta)\big) X_\Delta(nh(\Delta) - \tau), \tau \in \mathbb{R},$$

та дає зміщену оцінку H_j. Тому нашу ЦГТ можна застосувати до n центрованих оцінок невідомих компонент ІПФ в LTI SIMO-системах. Зауважимо, що умову компактності можна було б усунути, розглянувши лінійні системи зі зворотнім зв'язком або каскади LTI SISO-систем. Напрямом подальших досліджень є застосування кумулянтного аналізу до нормованої похибки оцінки та точкових властивостей відповідних оцінок, доведення ЦГТ у функціональних просторах. Однак останнє вимагає зовсім інших теорій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бенткус Р.Ю. Исследования по непараматрическому спектральному анализу стационарных случайных процессов / Р.Ю. Бенткус // дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук. – Вильнюс. – 1984. – 323 с.

2. Булдигін В. В. Про асимптотичні властивості емпіричної корелограми гаусового процесу // Доп. НАН України.1994. №11. С.33-38.

3. Булдигін В. В. Асимптотична нормальність оцінки сумісної кореляційної функції в функціональних просторах // Доп. НАН України. 1993. №1. С. 32-37

4. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.:«Наука», 1974. 542 с.

5. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. К.: ТВиМС, 1995. 246 с.

6. Островский Е. И. Асимптотические свойства распределения максимума гауссовского нестационарного процесса, встречающегося в ковариационной статистике // Теория вероятностей и её применение. 1994. 39. №3. С. 641-649.

7. Anh, V.V., N.N. Leonenko, and L.M. Sakhno. 2003. Higher-order spectral densities of fractional random fields. Journal of Statistical Physics 111(3): 789–814. doi:10.1023/A:1022898131682.

8. Anh, V.V., N.N. Leonenko, and L.M. Sakhno. 2007. Statistical inference using higher-order information. Journal of Multivariate Analysis 98(4): 706–742. doi:10.1016/j.jmva.2006.09.009.

9. Avram, F., N.N. Leonenko, and L.M. Sakhno. 2010. On a Szegö-type limit theorem, the Hölder-Young Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields. ESAIM: Probability and Statistics, EDP Sciences, 14: 210–255. doi:10.1051/ps:2008031.

10. Avram, F., N.N. Leonenko, and L.M. Sakhno. 2015. Limit Theorems for additive functionals of stationary fields, under integrability assumptions on the

higher order spectral densities. Stochastic Processes and their Applications 125 (4): 1629–1652. doi: 10.1016/j.spa.2014.11.010.

11. Bendat, J.S., and A.G. Piersol. 1980. Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis. New York: Wiley-Interscience.

12. Benn, A.G., and R.J. Kulperger. 1998. A remark on Fourier bounding method of proof for convergence of sums of periodograms. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 50(1): 187-202. doi:10.1023/A:1003409716549.

13. Blazhievska, I. P., and V.V. Zaiats. 2020. Estimation of impulse response functions in two-output systems. Communications in Statistics Theory and Methods 49(2): 257–280. (https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1536210).

14. Blazhievska, I.P., and V.V. Zaiats. 2020. On cross-correlogram IRFs estimators of two-output systems in spaces of continuous functions. Communications in Statistics Theory and Methods, 1–25. (https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1738490).

15. Brillinger, D.R. 1981. Time Series: Data Analysis and Theory. San Francisco: Holden - Day.

16. Buldygin, V., F. Utzet, and V. Zaiats. 1998. Cross-correlogram estimates of the response function in linear and bilinear Volterra systems. Prepublicaci´o 1998–8. Departament de Matem`atiques, Universitat Aut`onoma de Barcelona, Barcelona.

17. Buldygin, V., F. Utzet, and V. Zaiats. 2002. A note on the application of integrals involving cyclic products of kernels. Q¨uestii´o 26(1-2): 3–14. doi:hdl.handle.net/2099/4180.

18. Buldygin, V., F. Utzet, and V. Zaiats. 2004. Asymptotic normality of cross-correlogram estimates of the response function. Statistical Inference for Stochastic Processes 7(1): 1–34. doi:10.1023/B:SISP.0000016454.89610.35.

19. Buldygin, V.V., and F. Li. 1997. On asymptotic normality of estimators of unit impulse responses of linear systems, I. Theory of Probability and Mathematical Statistics 54: 17–24. (Russian)

20. Buldygin, V.V., and F. Li. 1997. On asymptotic normality of estimators of unit impulse responses of linear systems, II. Theory of Probability and Mathematical Statistics 55: 29–36. (Russian)

21. Buldygin, V.V., and I.P. Blazhievska. 2009. On correlation properties of the cross-correlogram estimators of impulse response functions. Naukovi visti NTUU-KPI 5: 120–128. (Ukrainian)

22. Buldygin, V.V., and I.P. Blazhievska. 2010. On asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear systems. Naukovi visti NTUU-KPI 4: 16–27. (Ukrainian)

23. Buldygin, V.V., and Yu.V. Kozachenko. 2000. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes (Vol. 188). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. Buldygin, V., and V. Kurotschka. 1999. On cross-correlogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations. Random Operators and Stochastic Equations 7(1): 71–90. doi: 10.1515/rose.1999.7.1.71.

24. Camps-Valls, G., J.L. Rojo-Alvarez, and M. Mart´ınez-Ram´on. 2007. ´ Kernel Methods in Bioengineering, Signal and Image Processing. Hershey, USA: IGI Global.

25. Demir, A., and A. Sangiovanni-Vincentelli. 1998. Analysis and Simulation of Noise in Nonlinear Electronic Circuits and Systems. New York: Springer Science & Business Media, LLC.

26. Edwards, R.E. 1965. Functional Analysis: Theory and Applications. New York: Holt, Rinehart and Winston.

27. Engberg, J., and T. Larsen. 1995. Linear and Nonlinear Circuits. New York: John Wiley & Sons.

28. Gao, W., J. Chen, C. Richard, and J. Huang. 2014. Online dictionary learning for kernel LMS. IEEE Transactions on Signal Processing 62(11): 2765–2777. doi:10.1109/TSP.2014.2318132.

29. Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. Introduction to the Theory of Random Processes. Dover.

30. Kolmogorov, A.N. and S.V. Fomin. 1968. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka. (Russian)

31. Kozachenko, Yu.V., and I.V. Rozora. 2015. On cross-correlogram estimators of impulse response functions. Theory Probability and Mathematical Statistics (93): 75–86. doi:10.1090/tpms/995. (Ukrainian)

32. Kozachenko, Yu.V., and I.V. Rozora. 2016. A criterion for testing hypothesis about impulse response function. Statistics, Optimization & Information Computing 4(3): 214–232. doi: 10.19139/soic.v4i3.222.

33. Lee, Y.W., and M. Schetzen. 1965. Measurement of the Wiener kernels of a non-linear system by cross-correlation. International Journal of Control 2(3): 237–254. doi:10.1080/00207176508905543.

34. Li, F. 2005. Asymptotic properties of an estimator of an impulse response function in linear two-dimensional systems. Bulletin BGU (Physics. Mathematics. Informatics) 1: 93–99 (Russian).

35. Lifshits, M.A. 1995. Gaussian Random Functions (Vol. 322). Springer Netherlands: Springer Science & Business Media Dordrecht.

36. Lindgren, G. 2006. Lectures on Stationary Stochastic Processes. Accessed Abril 19, 2018. http://www.maths.lth.se/matstat/staff/georg/Publications/lecture2006.pdf.

37. Major, P. 2013. Multiple Wiener-Itö Integrals with Applications to Limit Theorems. New York: Springer.

38. Marmarelis, P.Z. and V.Z. Marmarelis. 1978. Analysis of Physiological Systems: The White-Noise Approach. New York: Plenum.

39. McKelvey, T. 2000. Frequency Domain Identification. In 12th IFAC Symposium on System Identification, 21-23 June 2000, Santa Barbara, CA, USA 33(15): 7–18. doi:10.1016/S1474-6670(17)39719-7.

40. Nourdin, I., and G. Peccati. 2012. Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein’s Method to Universality. New York: Cambridge University Press.

41. Ogunfunmi, T. 2007. Adaptive Nonlinear System Identification: The Volterra and Wiener Model Approaches. New York: Springer Science & Business Media.

42. Øksendal, B. 2000. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. 5th ed.. New York: Springer-Verlag.

43. Paul, T.K., and T. Ogunfunmi. 2013. Study of the convergence behavior of the complex kernel least mean square algorithm. IEEE transactions on neural networks and learning systems 24(9): 1349–1363. doi:10.1109/TNNLS.2013.2256367.

44. Peccati, G., and M.S. Taqqu. 2011. Wiener Chaos: Moments, Cumulants and Diagrams – A survey with computer implementation. Italia: Springer-Verlag.

45. Rosenblatt, M. 2000. Gaussian and non-Gaussian Linear Time-series and Random Fields. New York: Springer Science & Business Media.

46. Rozora, I.V. 2018. Statistical hypothesis testing for the shape of impulse response function. Communications in Statistics–Theory and Methods 47(6): 1459–1474. doi: 10.1080/03610926.2017.1321125.

47. Söderström, T., and P. Stoica. 1988. System Identification. London: Prentice-Hall.

48. Wiener, N. 1958. Nonlinear Problems in Random Theory. New York: John Wiley & Sons.