

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені  
ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла

«На правах рукопису»  
УДК 537.6 МАГНЕТИЗМ

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри  
Віталій КОТОВСЬКИЙ  
(підпис) (ім'я, прізвище)

«12» 05 2021 р.

### Магістерська дисертація

зі спеціальності 104 – фізика та астрономія

освітньо - наукова програма «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів»

на тему *Спектральні характеристики обмінних спінових хвиль в мультишарових феромагнетиках з модульованим напрямком анізотропії*

Виконала студентка другого (магістерського) рівня вищої освіти, групи ОФ-91МН  
(шифр групи)

Мізюньська Ірина Михайлівна  
(ПІБ)

(підпис)

Науковий керівник в.о. зав. каф. З та ЕФ д. ф-м. н., проф.

Решетняк Сергій Олександрович

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)

(підпис)

Консультант Розділ: «Спінові хвилі в мультишарових феромагнетиках»

(назва розділу)

проф. каф. З та ЕФ, д. ф-м. н., проф. Кучко Андрій Миколайович

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)

(підпис)

Рецензент зав. відділом фізики мезо- та нанокристалічних магнітних структур  
Інституту магнетизму НАН та МОН України д. ф-м. н., проф.

Джежеря Юрій Іванович

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)

(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент

(підпис)

Київ – 2021 року

## АНОТАЦІЯ

### ДО ЗВІТУ З МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

СТУДЕНТА ФМФ, 2 КУРСУ МАГІСТЕРСЬКОГО РІВНЯ ГР. ОФ-91МН

Мізюнської Ірини Михайлівни  
(ПІБ)

На тему Спектральні характеристики обмінних спінових хвиль в мультишарових феромагнетиках з модульованим напрямком анізотропії.

**Науковий керівник** д-р фіз.-мат. н., проф., в.о. зав. каф. 3 та ЕФ Решетняк Сергій Олександрович

**Актуальність** Актуальність даної теми полягає у тому, що використання феромагнітних матеріалів мають велике практичне застосування у високочастотній, комп'ютерній, обчислювальній техніці та для магнітного запису інформації. На сьогоднішній день, розвиток техніки стрімко зростає, що веде за собою глобальне розширення інших сфер, де впроваджуються нові методи обробки інформації.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами** Тема 2110: Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованого струму з магнітними неоднорідностями в наноструктурованих феромагнітних матеріалах.

**Об'єкт дослідження** Мультишарові феромагнітні структури.

**Предмет дослідження** Властивості спінових хвиль в мультишарових феромагнітних структурах.

**Мета роботи** Метою роботи є знаходження закону дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку, дослідження спектру спінових хвиль в мультишарових феромагнетиках з модульованим напрямком анізотропії.

**Методи дослідження** Лінійна теорія збурень, варіаційне числення, використання рівняння Ландау-Ліфшиця для розрахунку динаміки спінових хвиль, перетворення Фур'є для знаходження рівняння дисперсії спінових хвиль.

*Відомості про обсяг звіту, кількість ілюстрацій, таблиць, додатків і літературних найменувань за переліком використаних*

1. Обсяг звіту – 93 сторінки з яких : титульна сторінка – 1 ст.; завдання на магістерську дисертацію та календарний план – 4 ст.; перелік умовних позначень – 1 ст.; реферат – 6 ст. ; зміст – 1 ст.; вступ – 2 ст.; основна частина – 63 ст.; висновки – 7 ст.; список використаних джерел – 8 ст.

2. Робота містить 6 ілюстрацій та 1 таблицю.

3. Обсяг літературних найменувань – 77 джерел з яких: 50 джерел – іноземна література; 27 джерел – вітчизняна література.

*Мета індивідуального завдання, використані методи та отримані результати* Метою індивідуального завдання було розрахувати енергію феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі; вивести рівняння Ландау-Ліфшиця для феромагнетика з різним напрямком анізотропії; знайти рівняння дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку; розрахувати спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі з модульованим напрямком параметру одновісної анізотропії; зробити аналіз одержаних результатів та побудувати графіки спектральних характеристик мультишарових структур.

Було використано наступні методи дослідження: лінійна теорія збурень, варіаційне числення, використання рівняння Ландау-Ліфшиця для розрахунку динаміки спінових хвиль, перетворення Фур'є для знаходження рівняння дисперсії спінових хвиль.

Було отримано наступні результати: розраховано енергію феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі; виведено рівняння Ландау-Ліфшиця для феромагнетика з різним напрямком анізотропії; знайдено рівняння дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку; отримано спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі з модульованим

напрямком параметру одновісної анізотропії та побудовано спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямком анізотропії.

### ***Висновок***

Під час виконання індивідуального завдання було розраховано енергію феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі та отримано рівняння Ландау-Ліфшиця для феромагнетика з різним напрямком анізотропії. Отримано закон дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку. Зроблено аналіз закону дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку та отримано спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямком анізотропії. Зокрема, визначено аналітичний вигляд спектру обмінних спінових хвиль в магнітному кристалі з періодично розташованими шарами, напрямом легкої осі в яких взаємоперпендикулярний. Досліджено еволюцію спектральних ліній в залежності від абсолютної величини параметра анізотропії. Показано динаміку зміни форми та характерних точок спектральних кривих, визначено вклад значення параметра анізотропії на ширину дозволених та заборонених зон. Зокрема, при збільшенні значення одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  при фіксованих значеннях  $\alpha$ ,  $M_0$ ,  $d_1$ ,  $d$ ,  $\tilde{H}_0$  границі як дозволених, так і заборонених зон зміщуються вбік більших значень частот і розміри зон при цьому також поступово зростають.

Подібні властивості спінових хвиль в мультишарових матеріалах можуть бути використані для створення багатосмугових фільтрів обмінних спінових хвиль з керованими діапазонами смуг пропускання та відбивання.

***Перелік ключових слів*** Спінові хвилі; мультишаровий феромагнетик; ферити; магнітні плівки; обмінна взаємодія; квазікласичні хвильові функції; епітаксія.

**Підпис керівника** \_\_\_\_\_

## SUMMARY

TO THE REPORT TO SCIENTIFIC AND RESEARCHING PRACTICE

STUDENT OF FMF, 2 COURSE OF THE MASTER LEVEL, GR. OF-91MN

IRYNA MIZIUNSKA

---

( FULL NAME)

**On the topic:** Spectral characteristics of exchange spin waves in multilayer anisotropy modulated ferromagnets

---

**Scientific supervisor:** Doctor Sci. degree in the field of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of General and Experimental Physics Serhii Reshetnyak

---

(scientific degree, academic status, position, FULL NAME)

**Topicality** The relevance of this topic is that the use of ferromagnetic materials have great practical application in high-frequency, computer, computer technology and for magnetic recording of information. Today, the development of technology is growing rapidly, which leads to the global expansion of other areas where new methods of information processing are being introduced.

---

**Relationship of work with scientific programs, plans, themes cathedra** Topic 2110: Interaction of spin waves and spin-polarized current with magnetic inhomogeneities in nanostructured ferromagnetic materials.

---

**Object of research** Multilayer ferromagnetic structures.

---

**Subject of research** Properties of spin waves in multilayer ferromagnetic structures.

---

**Purpose of work** The aim of the work is to find the dispersion law for a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions, to study the spectrum of spin waves in multilayer ferromagnets with a modulated direction of anisotropy.

---

**Research methods** Linear perturbation theory, calculus of variations, use of the Landau-Lifshitz equation to calculate the dynamics of spin waves, Fourier transform to find the equation of variance of spin waves.

---

**Information about the volume of the report, the number of illustrations, tables, applications and literary names in the list of used ones**

1. The volume of the report - 93 pages of which: title page - 1 page; assignments for master's dissertation and calendar plan - 4 pages; list of symbols - 1 page; abstract - 6 pages; table of contents - 1 page; introduction - 2 pages; main part - 63 pages; conclusions - 7 pages; list of used sources - 8 pages.

---

2. The work contains 6 illustrations and 1 table.

---

3. The volume of literary titles - 77 sources, of which: 50 sources - foreign literature; 27 sources - domestic literature.

---

**The purpose of the individual task, the methods used and the results obtained** The aim of the individual task was to calculate the energy of a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions in a magnetic field; derive the Landau-Lifshitz equation for a ferromagnetic with different direction of anisotropy; find the dispersion equation for a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions; calculate the spectrum of spin waves in a multilayer material with a modulated direction of the uniaxial anisotropy parameter; to make the analysis of the received results and to construct graphs of spectral characteristics of multilayer structures.

---

The following research methods were used: linear perturbation theory, calculus of variations, using the Landau-Lifshitz equation to calculate the dynamics of spin waves, Fourier transform to find the equation of the variance of spin waves.

---

The following results were obtained: the energy of a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions in a magnetic field was calculated; the Landau-Lifshitz equation for a ferromagnetic with different direction of anisotropy is derived; the dispersion equation for a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions is

---

found; the spectrum of spin waves in a multilayer material with a modulated direction of the uniaxial anisotropy parameter is obtained and the spectral characteristics of multilayer structures with a modulated direction of anisotropy are constructed.

### *Conclusion*

During the individual task, the energy of a ferromagnet with uniaxial anisotropy of different directions in the magnetic field was calculated and the Landau-Lifshitz equation for a ferromagnet with different directions of anisotropy was obtained. The dispersion law for a ferromagnet with uniaxial anisotropy of different directions is obtained. The analysis of the dispersion law for a ferromagnet with uniaxial anisotropy of different direction is made and the spectral characteristics of multilayer structures with modulated direction of anisotropy are obtained. In particular, the analytical form of the spectrum of exchange spin waves in a magnon crystal with periodically located layers in which the direction of the light axis is mutually perpendicular is determined. The evolution of spectral lines depending on the absolute value of the anisotropy parameter is investigated. The dynamics of changes in the shape and characteristic points of spectral curves is shown, the contribution of the value of the anisotropy parameter to the width of allowed and forbidden zones is determined. In particular, with increasing values of uniaxial magnetic anisotropy  $\beta$  at fixed values of  $\alpha$ ,  $M_0$ ,  $d_1$ ,  $d$ ,  $\widetilde{H}_0$  the boundaries of both allowed and forbidden zones are shifted toward higher values of frequencies and the size of the zones also gradually increases.

Similar properties of spin waves in multilayer materials can be used to create multiband filters of exchange spin waves with controlled bands of bandwidth and reflection.

*Keyword list* Spin waves; multilayer ferromagnetic; ferrites; magnetic films; exchange interaction; quasiclassical wave functions; epitaxy.

*Signature of the head* \_\_\_\_\_

**Національний технічний університет України**  
**“Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”**  
**Фізико-математичний факультет**

Інститут/факультет фізико-математичний  
(повна назва)

Кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла  
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою  
«Комп’ютерне моделювання фізичних процесів»

Спеціальність 104 – фізика та астрономія

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ЗФ та ФТТ

Віталій Котовський  
(підпис) (ім’я, прізвище)  
“01” 09 2020 р.

**ЗАВДАННЯ**

**на магістерську дисертацію студенту**

Мізюньської Ірини Михайлівни

(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема дисертації Спектральні характеристики обмінних спінових хвиль в мультишарових феромагнетиках з модульованим напрямком анізотропії.

науковий керівник дисертації Решетняк Сергій Олександрович, д. ф-м. н., проф.,

(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвердженні наказом по університету від «26» березня 2021 р. № 901С

2. Строк подання студентом дисертації 14 травня 2021 р.

3. Об’єкт дослідження Мультишарові феромагнітні структури

4. Предмет дослідження Властивості спінових хвиль в мультишарових феромагнітних структурах

5. Перелік завдань, які необхідно розробити Опрацювати джерела про властивості спінових хвиль в ферромагнітних матеріалах та властивості мультишарових структур; розрахувати енергію ферромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі; вивести рівняння Ландау-Ліфшиця для ферромагнетика з різним напрямком анізотропії; знайти закон дисперсії для ферромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку; розрахувати спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі з модульованим напрямком параметру одновісної анізотропії; провести аналіз одержаних результатів; побудувати графіки спектральних характеристик мультишарових структур.

6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу У роботі присутні 6 ілюстрацій та 1 таблиця.

7. Орієнтований перелік публікацій

1) Мізюньська І.М., Решетняк С.О. Спектр обмінних спінових хвиль в мультишаровому ферромагнетичу з модульованим напрямком анізотропії. // Зб. праць XVIII Міжнар. молодіж. наук.-практ. конф. «Історія розвитку науки, техніки та освіти», 23 квіт. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 117-119.

2) Решетняк С.О., Мізюньська І.М., Кучко А.М. Спектр обмінних спінових хвиль в одновісному мультишаровому ферромагнетичу з шарами зі взаємно перпендикулярними напрямками анізотропії. // International Scientific Conference «Modern Problems of Solid State Physics and Statistical Physics», 14-15 Sept. 2020. Kyiv: Institute of Magnetism, 2020. С. 34-35.

3) Iryna Miziunska Spectrum of exchange spin waves in a uniaxial multilayer ferromagnetic with layers with mutually perpendicular directions of anisotropy. // матеріали XXI Міжнар. студент. наук.-практ. онлайн конф. «SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE XXI CENTURY», 17 груд. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 86-88.

8. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Розділ 3 СПІНОВІ ХВИЛІ В МУЛЬТИШАРОВИХ ФЕРОМАГНЕТИКАХ	Кучко А.М., професор	10.08.2020 р.	26.02.2021 р.

9. Дата видачі завдання

07 «жовтня» 2019 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Проходження інструктажу з техніки безпеки та охорони праці	07.10.2019 р.	Виконано
2	Ознайомлення з місцем роботи	07.10.2019 р.	Виконано
3	Вивчення літературних джерел, складання огляду літератури	07.10.2019 р. – 12.04.2021 р.	Виконано
4	Пошук і добір фактичних матеріалів, їх групування	16.12.2019 р. - 12.04.2021 р.	Виконано
5	Наукові дослідження за темою МД	13.01.2020 р. - 08.02.2021 р.	Виконано
6	Аналіз отриманих результатів	10.03.2020 р. – 15.02.2021 р.	Виконано
7	Підготовка розділів МД на основі отриманих даних по темі МД	11.01.2021 р. – 12.04.2021 р.	Виконано
8	Підготовка звіту з МД та оформлення презентацій до захисту	19.04.2021 р. – 23.04.2021 р.	Виконано
9	Надання роботи на перевірку керівнику МД	26.04.2021 р.	Виконано
10	Отримання відгуку від керівника МД	30.04.2021 р.	Виконано

11	Перевірка МД на плагіат	05.05.2021 р.	Виконано
12	Формування плану публікацій по темі МД або документів по впровадженню (лист з підприємства або подання проекту впровадження в «КПІ ім. Ігоря Сікорського»)	12.04.2021 р.	Виконано
13	Подання МД на рецензію	29.04.2021 р.	Виконано
14	Здача МД на нормо-контроль (додержання вимог до оформлення МД)	14.05.2021 р.	Виконано
15	Попередній захист МД	12.05.2021 р.	Виконано
16	Виправлення матеріалу МД згідно з зауваженнями комісії на попередньому захисті	13.05.2021 р.	Виконано
17	Здача МД (друкований та електронний варіанти), Відгуку та Рецензії на кафедрі загальної фізики та ФТТ	17.05.2021 р.	Виконано
18	Відправка анотації МД на сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	17.05.2021 р.	Виконано
19	Остаточний захист МД	20.05.2021 р.	Виконано
20	Відправка матеріалів МД у бібліотеку «КПІ ім. Ігоря Сікорського» та сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	14.05.2021 р.	Виконано

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

І.М. Мізюньська  
(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

\_\_\_\_\_ (підпис)

С.О. Решетняк  
(ініціали, прізвище)

## РЕФЕРАТ

**Актуальність теми** Актуальність даної теми полягає у тому, що використання феромагнітних матеріалів мають велике практичне застосування у високочастотній, комп'ютерній, обчислювальній техніці та для магнітного запису інформації. На сьогоднішній день, розвиток техніки стрімко зростає, що веде за собою глобальне розширення інших сфер, де впроваджуються нові методи обробки інформації.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами** Тема 2110: Взаємодія спінових хвиль та спін-поляризованого струму з магнітними неоднорідностями в наноструктурованих феромагнітних матеріалах.

**Об'єкт дослідження** Мультишарові феромагнітні структури.

**Предмет дослідження** Властивості спінових хвиль в мультишарових феромагнітних структурах.

**Мета роботи** Метою роботи є знаходження закону дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку, дослідження спектру спінових хвиль в мультишарових феромагнетиках з модульованим напрямком анізотропії.

**Методи дослідження** Лінійна теорія збурень, варіаційне числення, використання рівняння Ландау-Ліфшиця для розрахунку динаміки спінових хвиль, перетворення Фур'є для знаходження рівняння дисперсії спінових хвиль.

**Задачі дослідження**

1. Розрахунок енергії феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі;
2. Отримання рівняння Ландау-Ліфшиця для феромагнетика з різним напрямком анізотропії;
3. Знаходження закону дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку;

4. Розрахунок спектру спінових хвиль в мультишаровому матеріалі з модульованим напрямком параметру одновісної анізотропії;

5. Аналіз одержаних результатів;

6. Побудова графіків спектральних характеристик мультишарових структур.

**Наукова новизна одержаних результатів** Вперше отримано спектр обмінних спінових хвиль в мультишаровому ферромагнетикі з періодичною модуляцією напрямку анізотропії при інших фіксованих параметрах.

**Практичне значення одержаних результатів** Розроблено модель багатосмугового фільтру обмінних спінових хвиль зі змінною зонною структурою на основі мультишарового ферромагнетика з періодичною модуляцією напрямку анізотропії.

#### **Апробація результатів дисертації**

1. ЗБІРНИК ПРАЦЬ ХVІІІ МІЖНАРОДНОЇ МОЛОДІЖНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ НАУКИ, ТЕХНІКИ ТА ОСВІТИ», «СПЕКТР ОБМІННИХ СПІНОВИХ ХВИЛЬ В МУЛЬТИШАРОВОМУ ФЕРОМАГНЕТИКУ З МОДУЛЬОВАНИМ НАПРЯМКОМ АНІЗОТРОПІЇ »

2. International Scientific Conference «Modern Problems of Solid State Physics and Statistical Physics», "СПЕКТР ОБМІННИХ СПІНОВИХ ХВИЛЬ В ОДНОВІСНОМУ МУЛЬТИШАРОВОМУ ФЕРОМАГНЕТИКУ З ШАРАМИ ЗІ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ НАПРЯМКАМИ АНІЗОТРОПІЇ"

3. ХХІ МІЖНАРОДНА СТУДЕНТСЬКА НАУКОВО – ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ „SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE XXI CENTURY“ “НАУКА ТА ТЕХНІКА ХХІ СТОЛІТТЯ”, «SPECTRUM OF EXCHANGE SPIN WAVES IN A UNIAXIAL MULTILAYER FERROMAGNETIC WITH

---

LAYERS WITH MUTUALLY PERPENDICULAR DIRECTIONS OF ANISOTROPY»

---

**Публікації автора МД**

1) Мізюньська І.М., Решетняк С.О. Спектр обмінних спінових хвиль в мультишаровому ферромагнетикі з модульованим напрямком анізотропії. // Зб. праць XVIII Міжнар. молодіж. наук.-практ. конф. «Історія розвитку науки, техніки та освіти», 23 квіт. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 117-119.

---

2) Решетняк С.О., Мізюньська І.М., Кучко А.М. Спектр обмінних спінових хвиль в одновісному мультишаровому ферромагнетикі з шарами зі взаємно перпендикулярними напрямками анізотропії. // International Scientific Conference «Modern Problems of Solid State Physics and Statistical Physics», 14-15 Sept. 2020. Kyiv: Institute of Magnetism, 2020. С. 34-35.

---

3) Iryna Miziunska Spectrum of exchange spin waves in a uniaxial multilayer ferromagnetic with layers with mutually perpendicular directions of anisotropy. // матеріали XXI Міжнар. студент. наук.-практ. онлайн конф. «SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE XXI CENTURY», 17 груд. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 86-88.

---

**Ключові слова** спінові хвилі; мультишаровий ферромагнетик; ферити; магнітні плівки; обмінна взаємодія; квазікласичні хвильові функції; епітаксія.

---

**В роботі наведено:** використаної літератури - 77, сторінок - 93, рисунків - 6, таблиць - 1.

## ABSTRACT

**Actuality of theme** The relevance of this topic is that the use of ferromagnetic materials have great practical application in high-frequency, computer, computer technology and for magnetic recording of information. Today, the development of technology is growing rapidly, which leads to the global expansion of other areas where new methods of information processing are being introduced.

**Relationship of work with scientific programs, plans, themes** Topic 2110: Interaction of spin waves and spin-polarized current with magnetic inhomogeneities in nanostructured ferromagnetic materials.

**Object of research** Multilayer ferromagnetic structures.

**Subject of research** Properties of spin waves in multilayer ferromagnetic structures.

**Purpose of work** The aim of this work is to find the dispersion law for a ferromagnetic with uniaxial anisotropy of different directions, to study the spectrum of spin waves in multilayer ferromagnets with a modulated direction of anisotropy.

**Research methods** Linear perturbation theory, calculus of variations, use of the Landau-Lifshitz equation to calculate the dynamics of spin waves, Fourier transform to find the equation of variance of spin waves.

### **Tasks of research**

1. Calculation of the energy of a ferromagnet with uniaxial anisotropy of different directions in a magnetic field;
2. Obtaining the Landau-Lifshitz equation for a ferromagnet with different direction of anisotropy;
3. Finding the dispersion law for a ferromagnet with uniaxial anisotropy of different directions;
4. Segmentation of the spin wave spectrum in a multilayer material with a modulated direction of uniaxial anisotropy parameters;

5. Analysis of the obtained results;

---

6. Construction of graphs of spectral characteristics of multilayer structures.

---

**Scientific novelty of the results** For the first time, the spectrum of exchange spin waves in a multilayer ferromagnetic with periodic modulation of the direction of anisotropy at other fixed parameters was obtained.

---

**The practical significance of the results** A model of a multiband filter of exchange spin waves with a variable band structure based on a multilayer ferromagnetic with periodic modulation of the anisotropy direction is developed.

---

### **Approbation of the results of the dissertation**

1. ЗБІРНИК ПРАЦЬ ХVІІІ МІЖНАРОДНОЇ МОЛОДІЖНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ НАУКИ, ТЕХНІКИ ТА ОСВІТИ», «СПЕКТР ОБМІННИХ СПІНОВИХ ХВИЛЬ В МУЛЬТИШАРОВОМУ ФЕРОМАГНЕТИКУ З МОДУЛЬОВАНИМ НАПРЯМКОМ АНІЗОТРОПІЇ »

---

2. International Scientific Conference «Modern Problems of Solid State Physics and Statistical Physics», "СПЕКТР ОБМІННИХ СПІНОВИХ ХВИЛЬ В ОДНОВІСНОМУ МУЛЬТИШАРОВОМУ ФЕРОМАГНЕТИКУ З ШАРАМИ ЗІ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ НАПРЯМКАМИ АНІЗОТРОПІЇ"

---

3. ХХІ МІЖНАРОДНА СТУДЕНТСЬКА НАУКОВО – ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ „SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE XXI CENTURY“ “НАУКА ТА ТЕХНІКА ХХІ СТОЛІТТЯ”, «SPECTRUM OF EXCHANGE SPIN WAVES IN A UNIAXIAL MULTILAYER FERROMAGNETIC WITH LAYERS WITH MUTUALLY PERPENDICULAR DIRECTIONS OF ANISOTROPY»

---

## **Publications**

1) Мізюньська І.М., Решетняк С.О. Спектр обмінних спінових хвиль в мультишаровому ферромагнетику з модульованим напрямком анізотропії. // Зб. праць XVIII Міжнар. молодіж. наук.-практ. конф. «Історія розвитку науки, техніки та освіти», 23 квіт. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 117-119.

2) Решетняк С.О., Мізюньська І.М., Кучко А.М. Спектр обмінних спінових хвиль в одновісному мультишаровому ферромагнетику з шарами зі взаємно перпендикулярними напрямками анізотропії. // International Scientific Conference «Modern Problems of Solid State Physics and Statistical Physics», 14-15 Sept. 2020. Kyiv: Institute of Magnetism, 2020. С. 34-35.

3) Iryna Miziunska Spectrum of exchange spin waves in a uniaxial multilayer ferromagnetic with layers with mutually perpendicular directions of anisotropy. // матеріали XXI Міжнар. студент. наук.-практ. онлайн конф. «SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE XXI CENTURY», 17 груд. 2020 р. Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. С. 86-88.

**Keywords** spin waves; multilayer ferromagnetic; ferrites; magnetic films; exchange interaction; quasiclassical wave functions; epitaxy.

**The article contains:** used literature - 77, pages - 93, pictures - 6, tables - 1.

## **ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ**

див. – дивись

інш. – інше

ст. – стаття

т.д. – так далі

% - відсоток

|| - паралельний напрямок

⊥ - перпендикулярний напрямок

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	20
Розділ 1 МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ.....	22
1.1 Діамагнетики.....	22
1.2 Парамагнетики.....	24
1.3 Феромагнетики.....	25
ВИСНОВКИ ДО 1 РОЗДІЛУ .....	28
Розділ 2 ВИДИ ЕНЕРГІЇ В ФЕРОМАГНЕТИКАХ.....	31
2.1 Обмінна модель феромагнетика.....	31
2.2 Магніто-дипольна взаємодія.....	46
2.3 Енергія магнітної анізотропії і повна енергія феромагнетика.....	53
ВИСНОВКИ ДО 2 РОЗДІЛУ .....	60
Розділ 3 СПІНОВІ ХВИЛІ В МУЛЬТИШАРОВИХ ФЕРОМАГНЕТИКАХ...61	
3.1 Властивості мультишарових структур.....	61
3.2 Рівняння динаміки намагніченості в мультишаровому середовищі.....	67
3.3 Особливості трансформації спінових хвиль при проходженні через границю.....	77
3.4 Закон дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією напрямку $\vec{\beta} \parallel \vec{H}$ .....	79
3.5 Закон дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією напрямку $\vec{\beta} \perp \vec{H}$ .....	80
3.6 Спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі.....	84
3.7 Спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямом анізотропії.....	85
ВИСНОВКИ ДО 3 РОЗДІЛУ .....	89
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	90
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	92

## ВСТУП

Стрімкий прогрес в області нанотехнологій і наноелектроніки, що спостерігається протягом останніх десятиліть, викликає необхідність розробки нових матеріалів і пристроїв, у яких реалізується можливість використання переваг високочастотних хвиль. Зокрема, становить інтерес прикладне використання характерних рис спінових хвиль. Унікальні властивості спінових хвиль вже багато років успішно використовуються для побудови різних приладів обробки сигналів в діапазоні надвисоких частот [1-8].

Останнім часом великих зусиль докладають з виготовлення і дослідження складових магнітних систем, які утворені почерговими шарами різних по фізичних властивостях матеріалів. Швидкий прогрес у техніці епітаксії, іонній імплантації і хімічному напиленні дає можливість вирощувати системи з визначеною товщиною плівок і заданими властивостями перехідних шарів. Цей новий клас штучних шарових матеріалів викликає велику зацікавленість як з загальнофізичної точки зору, так і в зв'язку з можливістю створення пристроїв магнітооптичної пам'яті, підвищенням густини запису інформації й іншими технічними застосуваннями[9-11].

Дисперсійні характеристики й сильна поверхнева і об'ємна анізотропія властивостей сприяє формуванню унікальних характеристик поширення спінових хвиль в періодичних структурах на основі феромагнітних плівок – магнетонних кристалах [12-14]. Тому останнім часом матеріали з періодично модульованими магнітними і геометричними властивостями представляють особливий інтерес з

точки зору практичного застосування, яке спрямовано на маніпулювання спіновими хвилями, які поширюються [15-18].

При епітаксіальному отриманні магнітних плівок є можливість змінювати режими росту плівок таким чином, що в отриманому матеріалі виникає періодичний або антиперіодичний розподіл магнітних параметрів по товщині. Найбільш чутливим параметром до зовнішнього впливу є константа магнітної анізотропії, у той час як величина обмінної взаємодії і намагніченість насичення можуть залишатись практично постійними. Таким методом може бути створений матеріал з періодично модульованою анізотропією. Експериментальне та теоретичне дослідження магнітних плівок з модульованою анізотропією проводились в роботах[19,20]. Найбільшої інформації про властивості матеріалів можна отримати, якщо досліджувати спектри власних коливань намагніченості у них.

Актуальність моєї теми полягає у тому, що використання феромагнітних матеріалів мають велике практичне застосування у високочастотній, комп'ютерній, обчислювальній техніці та для магнітного запису інформації. На сьогоднішній день, розвиток техніки стрімко зростає, що веде за собою глобальне розширення інших сфер, де впроваджуються нові методи обробки інформації.

## Розділ 1 МАГНІТІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ

Магнетизм — це клас фізичних явищ, зумовлених магнітними полями. Походження магнетизму в речовинах можна пояснити, розглянувши круговий рух електронів. Електрони в атомах рухаються по кругових орбітах навколо ядра, що еквівалентно круговій котушці, по якій проходить струм. Орбітальний рух електронів породжує орбітальний магнітний момент.

Крім того, електрони обертаються навколо своєї осі, утворюючи спіновий магнітний момент. Результируючий магнітний момент атома є векторною сумою орбітального і спінового магнітних моментів.

За магнітними властивостями речовини підрозділяються на три групи: діамагнетики, парамагнетики і феромагнетики.

### 1.1 Діамагнетики

Діамагнетики - це речовини, які намагнічуються при розміщенні в зовнішньому магнітному полі в напрямку, протилежному до прикладеного поля. Магнетизм, що проявляється цими речовинами, називається діамагнетизмом [21].

Орбітальний рух електронів породжує орбітальний магнітний момент. Крім того, електрони обертаються навколо своєї осі, створюючи спіновий магнітний

момент. Результируючий магнітний момент атома є векторною сумою орбітального і спінового магнітних моментів. В атомі електрони можуть обертатись за або проти годинникової стрілки. Точно так само електрони можуть обертатися навколо ядра за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки.

У діамагнетиках орбітальні магнітні моменти і магнітні моменти атомів орієнтовані таким чином, що векторна сума магнітного моменту атома дорівнює нулю.

Коли діамагнітна речовина знаходиться в зовнішньому магнітному полі, електрорушійна сила (ЕРС) в кожному атомі збільшується. В результаті швидкість електронів, що обертаються в одному напрямку, збільшується, а швидкість електронів, що обертаються в протилежному напрямку, зменшується. Таким чином, речовина в цілому набуває чистий магнітний момент в напрямку, протилежному прикладеному полю.

Характеристики діамагнетиків:

- магнітний момент кожного атома дорівнює нулю;
- вони слабо відштовхуються зовнішнім магнітним полем;
- при розміщенні в неоднорідному магнітному полі вони мають тенденцію переміщення з більш сильної частини поля в більш слабку;
- у зовнішньому магнітному полі вони слабо намагнічуються у протилежному напрямку до напрямку поля;
- для діамагнетиків магнітна сприйнятливність негативна;
- за відсутності зовнішнього магнітного поля чистий магнітний момент діамагнітної речовини дорівнює нулю;
- при зникненні зовнішнього магнітного поля діамагнітні речовини втрачають свою намагніченість.

Приклади речовин: мідь, золото, сурма, вісмут, срібло, свинець, кремній, ртутна вода, повітря, водень, азот і т. д.

## 1.2 Парамагнетики

Парамагнетики – це речовини, які намагнічуються при розміщенні у зовнішньому магнітному полі в тому ж напрямку, що і прикладене поле. Магнетизм, що проявляється цими речовинами, називається парамагнетизмом.

У парамагнітних речовинах орбітальний та спіновий магнітні моменти атомів орієнтовані в такій хвилі, що кожен атом має постійний магнітний дипольний момент. Однак завдяки тепловому руху (вібрації) напрямки магнітних моментів атомів мають випадкову орієнтацію. В результаті цього, чистий магнітний момент парамагнітної речовини дорівнює нулю.

Коли парамагнітну речовину поміщають у зовнішнє магнітне поле, кожен магнітний момент атома має тенденцію вирівнюватися у напрямку поля. Таким чином, парамагнітна речовина набуває чистого магнітного моменту (намагнічування).

Однак ступінь вирівнювання безпосередньо залежить від сили зовнішнього поля та від температури зразка.

Коли парамагнітну речовину забирають з магнітного поля, вирівнювання знову порушується через теплові коливання, і вона розмагнічується. З цієї причини парамагнітні речовини не можуть використовуватися як постійні магніти.

Характеристики парамагнетиків:

- кожен атом - це магнітний диполь, що має результуючий магнітний момент;
- вони слабо притягуються зовнішнім магнітним полем;
- поміщені в неоднорідне магнітне поле, вони, як правило, переходять від слабшої до сильнішої частини поля;
- у зовнішньому магнітному полі вони слабо намагнічуються в тому ж напрямку, що і напрям поля;
- за відсутності зовнішнього магнітного поля, магнітні моменти атомних магнітів розташовані хаотично, отже, чистий магнітний момент парамагнітної речовини дорівнює нулю;
- при відсутності зовнішнього магнітного поля парамагнітні речовини втрачають свій магнетизм;
- для парамагнітних речовин магнітна сприйнятливість є позитивною і малою, яка зменшується зі збільшенням температури.

Приклади речовин: алюміній, платина, марганець, хром, натрій, кальцій, літій, вольфрам, ніобій, хлорид міді, коронне скло, кисень тощо [22].

### 1.3 Феромагнетики

Феромагнетики – це речовини, які сильно намагнічені у зовнішньому магнітному полі в тому ж напрямку, що і зовнішнє прикладене поле, і зберігають

свій магнітний момент навіть після зникнення зовнішнього поля. Вони мають дуже сильну тенденцію переходити від слабших до сильніших частин зовнішнього поля. Магнетизм, який виявляють ці речовини, називається феромагнетизмом.

Феромагнетизм - це окремий випадок парамагнетизму. У феромагнітних речовинах вклад спінового магнітного моменту до магнітного дипольного моменту атомів дуже великий.

Згідно з теорією доменів, феромагнітна речовина складається з великої кількості малих одиниць (областей), відомих як домени. Домен - це надзвичайно мала область, що містить велику кількість атомних магнітних моментів, що мають магнітні осі, які вирівняні в одному напрямку через сильний обмінний зв'язок [23]. Коли феромагнітна речовина знаходиться в магнітному полі, відбувається постійне вирівнювання домену завдяки сильній взаємодії – обмінній взаємодії. В одному домені магнітні дипольні моменти всіх атомів вирівняні в одному напрямку. Отже, кожна область має результуючий магнітний дипольний момент.

Однак за відсутності зовнішнього магнітного поля різні домени мають випадкові орієнтації, а отже, їх результуючий магнітний момент дорівнює нулю.

Коли феромагнітна речовина піддається впливу зовнішнього магнітного поля, кожен домен відчуває обертальний момент. В результаті цього, деякі домени швидко обертаються і залишаються вирівняними паралельно напрямку поля. У той же час ті домени, магнітні осі яких майже відповідають зовнішньому магнітному полю, збільшуються в розмірі за рахунок сусідніх доменів.

У міру збільшення сили зовнішнього магнітного поля все більше і більше доменів перевертаються і вирівнюються у напрямку зовнішнього магнітного поля. Нарешті, на певному етапі практично всі домени вирівнюються у напрямку поля. На цій стадії феромагнітна речовина поводить себе як постійний магніт і зберігає свою магнітну властивість, навіть якщо зовнішнього магнітного поля вже не буде.

Характеристики феромагнітних речовин:

- вони сильно намагнічуються при розміщенні у зовнішньому магнітному полі;
- речовини складаються з великої кількості малих доменів;
- вони не втрачають магнітних властивостей при зникненні зовнішнього магнітного поля;
- при нагріванні вище температури Кюрі вони стають парамагнітними;
- їх сильно притягує зовнішнє магнітне поле;
- коли вони розміщені в неоднорідному магнітному полі, вони, як правило, рухаються від слабшої до сильнішої частини поля;
- у зовнішньому магнітному полі вони сильно намагнічуються в тому ж напрямку, що і поле;
- за відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти доменів розташовані хаотично, отже, чистий магнітний момент феромагнітної речовини дорівнює нулю;
- при видаленні зовнішнього магнітного поля феромагнітні речовини не втрачають свого магнітного моменту, тобто вони є постійними магнітами;
- для феромагнітних речовин магнітна сприйнятливність є позитивною і великою.

Приклади речовин: залізо, кобальт, нікель.

## ВИСНОВКИ ДО 1 РОЗДІЛУ

Щоб класифікувати матеріали як магнітні або немагнітні, перш за все необхідно визначити, чи діють сили на матеріал, коли матеріал поміщається в магнітне поле. Якщо стрижень з будь-якого матеріалу підвісити в магнітному полі, то він або повернеться під прямим кутом до поля, або вирівняється з магнітним полем.

Матеріал, який повертається під прямим кутом до поля, створюючи магнітний відгук, протилежний прикладеному полю, називається діамагнітним матеріалом, таким як срібло, мідь і вуглець, який має проникність трохи менше, ніж вільний простір.

Матеріал, який вирівнюється по прикладеному полю, називається парамагнітним матеріалом. Парамагнітні матеріали, такі як алюміній і повітря, мають проникність трохи більше, ніж проникність вільного простору. Ефекти діамагнетизму і парамагнетизму мізерно малі, тому матеріали, що володіють цими слабкими явищами, вважаються немагнітними.

У парамагнітному класі матеріалів існує особлива класифікація матеріалів, званих феромагнітними матеріалами. Ці матеріали сильно притягуються до магнітів і виявляють феноменальний парамагнетизм. Феромагнітні матеріали, такі як залізо, сталь, кобальт і їхні сплави, мають відносну проникність, що обчислюється сотнями і тисячами, і вважаються магнітними.

Для наочного прикладу, наведено порівняльну характеристику матеріалів та їх властивостей у таблиці 1.

Таблиця 1 – Порівняльна характеристика матеріалів та їх властивостей

Характеристики	Діамагнітні матеріали	Парамагнітні матеріали	Феромагнітні матеріали
Стан	Можуть бути тверді, рідкі та газоподібні	Можуть бути тверді, рідкі та газоподібні	Можуть бути тверді
Ефект магніту	Слабо відштовхується магнітом	Слабо притягується магнітом	Сильно притягується магнітом
Поведінка в неоднорідному полі	Має тенденцію переходити з високого рівня до низького	Має тенденцію переходити з області низького поля в область високого поля	Має тенденцію переходити з області низького поля в область високого поля
Поведінка у зовнішньому полі	Вони не зберігають магнітні властивості після зняття зовнішнього поля	Вони не зберігають магнітні властивості після зняття зовнішнього поля	Вони зберігають магнітні властивості після зняття зовнішнього поля
Вплив температури	Немає ефекту	З підвищенням температури стає діамагнетиком	Вище точки Кюрі стає парамагнетиком

Проникність	Трохи менше одиниці	Трохи більше одиниці	Дуже високо
Сприйнятливість	Трохи менше одиниці та негативна	Трохи більше одиниці та позитивна	Дуже висока та позитивна
Приклади	Мідь, срібло, золото	Літій, тантал, магній	Залізо, нікель, кобальт

## Розділ 2 ВИДИ ЕНЕРГІЇ В ФЕРОМАГНЕТИКАХ

### 2.1 Обмінна модель феромагнетика

Великий ряд кристалів володіє впорядкованою магнітною структурою. Це означає, що при відсутності стороннього магнітного поля середнє, тобто квантово-механічне значення магнітного моменту по крайній мірі одного із атомів в кожній елементарній частинці кристалу є відмінне від нуля.

В простому типі магнітовпорядкованих кристалів – феромагнетиках – середнє значення магнітних моментів всіх атомів мають однакову орієнтацію, тільки якщо температура феромагнетика не перевищує певної критичної температури – температури Кюрі. Завдяки цьому, феромагнетики мають властивість спонтанного магнітного моменту, тобто макроскопічного магнітного моменту, який є відмінний від нуля при відсутності стороннього магнітного поля.

У більш важких магнітовпорядкованих кристалах – антиферомагнетиках – середнє значення магнітних моментів атомів компенсують одне одного в межах кожної елементарної комірки. Іншими словами, антиферомагнетик являє собою сукупність декількох підрешіток ( магнітні підрешітки), для кожної з яких середнє значення магнітних моментів атомів відмінне від нуля. Така магнітна впорядкованість має місце, якщо температура антиферомагнетика нижче певної критичної температури – температури Нееля.

Існує ще один тип магнітовпорядкованих кристалів – ферити, які складаються з декількох магнітних підрешіток, магнітні моменти яких не компенсуються, на відміну від антиферомагнетиків, тому ферити володіють спонтанним магнітним моментом.

Магнітна впорядкованість феромагнетиків та антиферомагнетиків виникає завдяки кореляції між напрямками спінів електронів окремих атомів цих тіл, магнітний момент яких має в основному спінову природу. Ця кореляція обумовлена в свою чергу взаємозв'язком між просторовою симетрією хвильової функції та величиною сумарного спіна системи електронів. Такий взаємозв'язок є наслідком принципу невизначеності однакових частинок, який приводить до залежності енергії системи від величини її повного спіну, так як хвильовим функціям, які мають властивість різної просторової симетрії, відповідають різні значення енергії системи.

Істотно, що при цьому, гамільтоніан системи може не включати в себе членів, які описують магнітні взаємодії електронів, тобто мова йде тільки про квантовий ефект, який зв'язаний з тим, що електрони підпорядковуються статистиці Фермі-Дірака. Цей ефект має назву обмінного ефекту, а залежність енергії системи від величини її повного спіну обумовлена обмінною взаємодією [24].

Розглянемо просту модель молекули водню, у якій два електрони електростатично взаємодіють між собою і обома протонами молекули та вивчимо характер обмінної взаємодії.

Гамільтоніан системи електронів при закріплених на заданій відстані ядрах буде мати вигляд:

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}} \right),$$

де  $\mathbf{p}_1$  і  $\mathbf{p}_2$  – оператори імпульсів електронів,  $m$  – маса електрона,  $e$  – заряд електрона,  $r_{\alpha\beta}$  – відстань між частинками  $\alpha$  та  $\beta$  (1 та 2 – індекси електронів, а та

$b$  – індекси ядер електронів, поставимо  $r = r_{ab}$ ). Так як гамільтоніан  $\mathcal{H}$  не включає в себе членів, які описують магнітну взаємодію електронів, то представимо хвильову функцію  $\psi$  у вигляді добутку просторової  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  та спінової  $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$  хвильових функцій:

$$\psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2) = \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot \chi(\sigma_1, \sigma_2),$$

де  $\sigma_1, \sigma_2$  – проекції спінів електронів на деяку вісь.

Згідно принципу Паулі, хвильова функція  $\psi$  має бути антисиметричною відносно одночасної перестановки спінових змінних та координат електронів, тобто симетрична спінова функція відповідає антисиметричній просторовій функції і навпаки. Функція  $\chi$  буде симетричною, якщо сумарний спін  $S$  всіх електронів буде дорівнювати одиниці,  $S=1$ , і антисиметричний буде дорівнювати нулю,  $S=0$ . Позначимо функції антисиметричної хвильової функції через  $\varphi_a$  і симетричної  $\varphi_s$ .

Так як взаємодія між атомами є слабкою і вони знаходяться в основному стані, побудуємо хвильові функції через  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  і  $\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , які рухаються у кулонівському полі кожного із ядер:

$$\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} [\varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) + \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1})], S=0,$$

$$\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma^2)}} [\varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) - \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1})], S=1,$$

де  $\varphi(\mathbf{r}_{\alpha i})$  – нормована хвильова функція атома водню, яка «складається» з  $i$ -того електрона і  $\alpha$ -того ядра,  $\gamma = \int \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) d\mathbf{r}_1$ .

Значення енергії молекули у станах  $S=0$  та  $S=1$  пов'язаний із функціями  $\varphi_s$  та  $\varphi_a$  такими співвідношеннями:

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \int \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H} \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$E_{\uparrow\downarrow}(r) = \int \varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H} \varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

так як  $\varphi_a$  та  $\varphi_s$  є дійсними функціями за рахунок того, що атоми знаходяться в основному стані, тому в інтегралах опущений знак комплексного спряження.

Підставляючи в данні співвідношення вирази, які були приведені вище для  $\varphi_a$  та  $\varphi_s$ , отримаємо:

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \frac{A(r)-B(r)}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}, E_{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{A(r)+B(r)}{\sqrt{(1+\gamma^2)}},$$

де

$$A(r) = \int U \varphi^2(\mathbf{r}_{a1}) \varphi^2(\mathbf{r}_{b2}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$B(r) = \int U \varphi(\mathbf{r}_{a1}) \varphi(\mathbf{r}_{b1}) \varphi(\mathbf{r}_{a2}) \varphi(\mathbf{r}_{b2}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

та

$$U = e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} \right),$$

також у виразах  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  та  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  не включаються доданки, які не залежать від  $r$ , які являють собою енергію двох атомів водню, які знаходяться на нескінченному рівні один від одного.

Величина  $A(r)$  визначає електростатичну енергію взаємодії двох атомів зауважуючи те, що кожен з електронів досить «тісно» зв'язаний з одним із ядер, а величина  $B(r)$  визначає обмінну енергію.  $B(r)$  являє собою матричний елемент електростатичної енергії взаємодії електронів  $U$  між станом, у якому перший електрон 1 «належить» ядру  $a$ , а другий електрон 2 – ядру  $b$ , та станом, у якому перший електрон 1 «належить» ядру  $b$ , а другий електрон 2 – ядру  $a$ .

Обмінна енергія відрізняється деякою важливою особливістю: вона експоненціально зменшується з ростом відстані між ядрами, на відмінно від повільно спадаючої енергії їх кулонівської взаємодії. Так як  $B(r)$  залежить від того, в якій мірі «перекриваються» хвильові функції  $\varphi(\mathbf{r}_{ai})$  і  $\varphi(\mathbf{r}_{bi})$ , а це «перекриття» експоненціально зменшується з ростом  $r$ , тому обмінна взаємодія є короткодіючою.

На рисунку 2.1.1 можна побачити, як змінюються величини  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  та  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  з ростом  $r$ . Як бачимо з рисунку 2.1.1, тільки при антипаралельній орієнтації спінів

обох електронів два незбуджених атоми водню можуть сформувати молекулу водню. Даний приклад демонструє, як чисто квантовий ефект приводить до ефективної взаємодії між атомами, хоча спінові змінні не входять у гамільтоніан сукупності атомів.

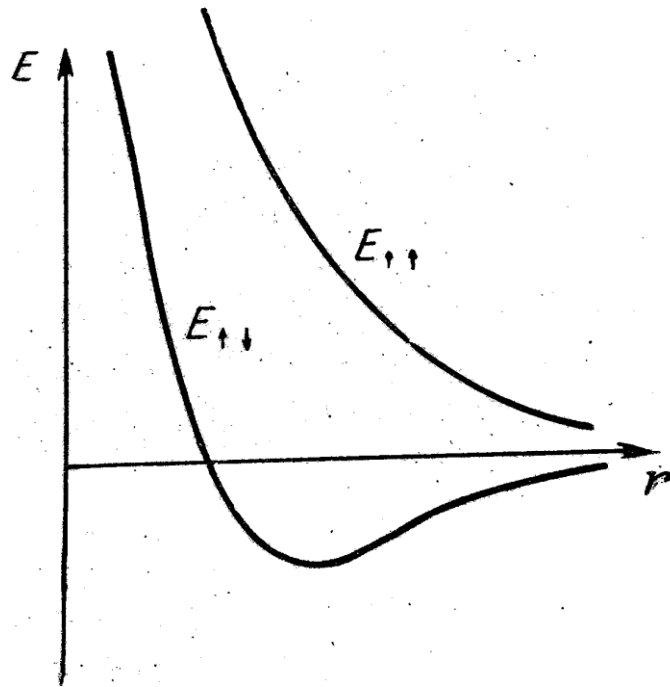


Рисунок 2.1.1 – Зміна величин  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  та  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  з ростом  $r$

Обмінна взаємодія, яка лежить в основі гомеоплярного хімічного зв'язку, пояснює природу феромагнетизму та антиферомагнетизму[24].

На відмінну від молекули водню, для якої обмінна енергія від'ємна ( $B(r) < 0$ ), завдяки чому стан з сумарним спіном  $S=0$  має меншу енергію, аніж стан з сумарним спіном  $S=1$ , у феромагнетиках з більшим спіном стає у відповідність менша енергія, так що в основному стані феромагнетика спіни всіх атомів мають паралельну орієнтацію.

Введемо оператор, який опише з математичної точки зору обмінну взаємодію

$$\mathcal{H} = -J(r)\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + E(r),$$

де  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  – оператори спінів електронів і  $J(r)$ ,  $E(r)$  – деякі функції від  $r$ , які ми отримуємо таким чином, щоб власні значення оператора  $\mathcal{H}$  співпадали зі значеннями енергій  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  та  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$ .

Так як

$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2) = \frac{1}{2}S(S + 1) - \frac{3}{4},$$

то власні значення оператора  $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$  рівні:  $-\frac{3}{4}$  при  $S=0$  та  $\frac{1}{4}$  та  $S=1$ . Тому власні значення  $\mathcal{H}$  будуть співпадати з величинами  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  та  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$ , якщо покласти наступне:

$$\begin{aligned} J(r) &= E_{\uparrow\downarrow}(r) - E_{\uparrow\uparrow}(r), \\ E(r) &= \frac{3}{4}E_{\uparrow\uparrow}(r) + \frac{1}{4}E_{\uparrow\downarrow}(r). \end{aligned}$$

Величина  $E(r)$  визначає середнє значення енергії атомів ( статична вага  $\frac{3}{4}$  відповідає паралельній орієнтації спінів електронів, а  $\frac{1}{4}$  - антипаралельній орієнтації спінів електронів), а  $J(r)$  - визначає обміну енергією. Надалі буде розглядатись тільки перший доданок для  $\mathcal{H}$ , який залежить від спінів електронів. Він матиме назву гамільтоніан обмінної взаємодії електронів та матиме вигляд:

$$\mathcal{H}_e = -J(r)\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2. \quad (2.1.1)$$

Даний вираз для гамільтоніана обмінної взаємодії було розглянути конкретно для молекули водню. Також його можна отримати з більш загальних міркувань, а саме виходячи із інваріантності гамільтоніана взаємодії частинок відносно просторових обертів[24].

Дійсно, давайте знайдемо більш загальний вираз для гамільтоніана взаємодії двох частинок припускаючи те, що він залежить тільки від координат і спінів

частинок. Так як із операторів частинок  $\mathbf{s}_1$  та  $\mathbf{s}_2$  та радіус-вектора  $\mathbf{r}$ , які визначають їх відносне положення, можемо побудувати тільки три незалежних інваріанти відносно перетворень просторових обертів:

$$r^2, \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2, (\mathbf{s}_1\mathbf{r})(\mathbf{s}_2\mathbf{r}),$$

то шуканий гамільтоніан  $\mathcal{H}$  може бути довільною функцією цих інваріантів. Замість  $(\mathbf{s}_1\mathbf{r})(\mathbf{s}_2\mathbf{r})$  для зручності введемо наступний інваріант:

$$s_{12} = 3(\mathbf{s}_1\mathbf{n})(\mathbf{s}_2\mathbf{n}) - \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2,$$

де  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , тому  $\mathcal{H}$  матиме вигляд:

$$\mathcal{H} = f(r, \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2, s_{12}),$$

де  $f$  – довільна функція трьох незалежних змінних.

Якщо спін кожної з частинок буде рівний  $\frac{1}{2}$ , тоді цей вираз може бути значно спрощений. Це відбувається завдяки наступній властивості спіна  $\frac{1}{2}$ : будь-яка ціла додатня степінь матриць  $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$  та  $s_{12}$ , а також добуток таких степенів будуть виражатись у вигляді лінійної комбінації самих цих матриць та одиничної матриці[24]. Ця властивість є наслідком відношення компонент спіна  $\frac{1}{2}$ :

$$s_k s_l = \frac{i}{2} \varepsilon_{klm} \varepsilon_m + \frac{1}{4} \sigma_{kl}.$$

Використовуючи дане співвідношення, можемо переконатись у наступному:

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)^2 &= \frac{3}{16} - \frac{1}{2} s_1 s_2, \\ s_{12}^2 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} s_{12} \\ s_{12}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) &= (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)s_{12} = \frac{1}{4} s_{12}. \end{aligned}$$

Звідси слідує, що розклавши функцію  $f$  в ряд по степенях її аргументів, отримаємо наступний вигляд гамільтоніана  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H} = U_1(r) + U_2(r)\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + U_3(r)s_{12}, \quad (2.1.2)$$

де  $U_1(r)$ ,  $U_2(r)$  та  $U_3(r)$  – деякі функції, які залежать від відстані частинок. Дана формула справедлива тільки для того випадку, коли спін дорівнює  $\frac{1}{2}$ .

Перші два доданки гамільтоніана  $\mathcal{H}$  були розглянуті вище, коли розглядалась молекула водню. Що стосується третього доданка, то у випадку двох електронів, він являє собою енергію їх магнітної взаємодії, тобто енергію взаємодії магнітних моментів електронів,  $\frac{e\hbar}{mc}\mathbf{s}_1$  та  $\frac{e\hbar}{mc}\mathbf{s}_2$  ( $m$  – маса електрона,  $\hbar$  – квантова стала). При цьому  $U_3(r) \approx \left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^3}$ . Ця енергія додатковий множник  $\frac{1}{c^2}$  на відміну від  $U_1(r) + U_2(r)\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$  (точніше  $\frac{v^2}{c^2}$ , де  $v$  – величина порядку швидкості електрона в атомі). У випадку молекули водню, даної енергії не було враховано, так як  $v \ll c$ . Встановимо вид гамільтоніана феромагнетика. Вияснимо характер енергетичного спектру феромагнетика поблизу основного стану, якому відповідає паралельна орієнтація магнітних моментів окремих атомів феромагнетика. Спершу не будемо брати до уваги відносно слабкі релятивістські взаємодії. Тому отриманий макроскопічний гамільтоніан феромагнетика буде містити в собі у якості потенціальної енергії тільки енергію кулонівської взаємодії електронів та ядер, а також кінетичну енергію частинок, тобто суму операторів Лапласа для кожної з частинок. Хвильові функції цього гамільтоніана мають володіти певними властивостями симетрії, завдяки яким встановлюється кореляція між значеннями загального спіну системи та значеннями її енергії[24].

Якщо вважати, що кристал формується аналогічно до молекули водню, тобто з окремих атомів, в кожному з яких є по одному електрону в основному стані, тобто використовуючи знайдений вище макроскопічний гамільтоніан, можна приблизно знайти енергетичні рівні кристала.

Проте, для дослідження більш загальних випадків, знайдений макроскопічний гамільтоніан є занадто важкий, щоб ним можна було безпосередньо користуватись. Тому перейдемо від макроскопічного гамільтоніана до гамільтоніана, який має більш просту математичну структуру і у загальному випадку приводить до одного і того ж енергетичного спектру. Цей перехід можна здійснити, розглянувши аналогічний вище розказаний перехід від макроскопічного гамільтоніану двох атомів водню, які включають у себе два лапласіана і електростатичні потенціальні енергії різних пар частинок, до обмінного гамільтоніана, який має значно спрощену і простішу математичну структуру. До того ж, якщо мова йде про енергетичні рівні, які виникають із основних станів двох атомів і відрізняються тільки значенням сумарного спіну  $S$ , то отриманий гамільтоніан буде еквівалентний обмінному гамільтоніану.

Припустимо, що всі атоми феромагнетика мають спін  $S = \frac{1}{2}$ . Тоді обмінний гамільтоніан феромагнетика, яким тепер заміняється макроскопічний гамільтоніан, буде мати вигляд суми гамільтоніанів (2.1.1):

$$\mathcal{H}_e = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(\mathbf{R}_{lm}) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m, \quad (2.1.3)$$

де  $\mathbf{s}_l$  та  $\mathbf{s}_m$  – спіни атомів, які знаходяться в  $l$  – му та  $m$  – му вузлі решітки і  $J(\mathbf{R}_{lm})$  – деяка функція від радіус-вектора  $\mathbf{R}_{lm}$ , який з'єднує  $l$  – тий та  $m$  – тий вузол (сумування відбувається по всіх парах атомів кристалу). Ця функція має назву обмінного інтегралу  $l$  – го та  $m$  – го атомів, та швидко, експоненціально, спадає зі збільшенням відстані між атомами так як вона визначається степенем перекриття хвильових функцій атомів. Тому, величина  $J(\mathbf{R}_{lm})$  відміна від нуля тільки у тому випадку, якщо  $l$  – тий та  $m$  – тий атоми є з'єднані. При цьому

$$J(\mathbf{R}_{lm}) \sim \xi \frac{e^2}{a},$$

де  $a$  – стала решітки і  $\xi$  – чисельний параметр порядку 0,1, який визначається степенем перекриття хвильових функцій сусідніх атомів.

У гамільтоніані (2.1.3) відстань між атомами вважаються заданими, а динамічними параметрами виступають тільки оператори спінів атомів, які діють на хвильову функцію системи, що являє собою функцію тільки від спінових змінних.

Для феромагнетика обмінний інтеграл є додатній, тобто  $J(\mathbf{R}_{lm}) > 0$ . Завдяки цьому в основному стані спіни всіх атомів мають одну і ту ж орієнтацію.

Надалі переконаємось, що обмінний гамільтоніан феромагнетика приводить не тільки до правильного висновку про те, що спіни, а відповідно і магнітні моменти атомів феромагнетика, які є в основному спіновими, мають в стані з найменшою енергією однакову орієнтацію, а також правильно описує ту частину енергетичного спектру феромагнетика, яка знаходиться поблизу основного стану. Тому використання обмінного гамільтоніану приводить до розумних висновків в області достатньо низьких температур ( тобто температур, які є малими у порівнянні з температурою Кюрі), коли збуджені головним чином основні стани, є близькі до основного стану. Будемо вважати, що вираз (2.1.3) обмінного гамільтоніану є справедливий не тільки для  $S = \frac{1}{2}$ , але й при будь-якому вибраному спіні атомів.

Важливою властивістю обмінного гамільтоніану (2.1.3), який зазвичай має назву гайзенбергівського гамільтоніану, є те, що він комутує з кожною проекцією сумарного спіна феромагнетика

$$\mathbf{S} = \sum_l \mathbf{s}_l.$$

Дійсно, якщо використати відомі перестановки для операторів проєкцій спіна атома

$$[s_{l\alpha}, s_{m\beta}] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{l\gamma}\delta_{lm} \quad (2.1.4)$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  – координатні індекси), то можемо легко впевнитись, що

$$(\mathbf{s}_l + \mathbf{s}_m)\mathbf{s}_l\mathbf{s}_m = \mathbf{s}_l\mathbf{s}_m(\mathbf{s}_l + \mathbf{s}_m)$$

а тому

$$\mathcal{H}_e\mathbf{S} = \mathbf{S}_e\mathcal{H}.$$

Звідси випливає, що якщо враховувати тільки обмінну взаємодію, то квадрат повного спіну системи і його проекція на будь-яку із осей будуть квантовомеханічними інтегралами руху, тобто обмінна взаємодія саме по собі не може змінити ці величини. Якщо згадати, що обмінна взаємодія – це чисто електростатична взаємодія з врахуванням симетрії хвильової функції системи, то дане припущення являється достатньо зрозумілим.

Як було уже сказано, магнітний момент феромагнетика має в загальному спінову природу. Тому можна визначити оператор густини магнітного моменту феромагнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  в точці  $\mathbf{r}$  як суму

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{s}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (2.1.5)$$

де  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  – магнетон Бора,  $\mathbf{R}_l$  - радіус-вектор, який визначає положення  $l$  – го вузла кристалічної решітки.

Гамільтоніан обмінної взаємодії  $\mathcal{H}_e$  можна виразити через оператор густини магнітного моменту:

$$\mathcal{H}_e = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}) \mathbf{M}(\mathbf{r}').$$

Дійсно, підставляючи сюди замість  $\mathbf{M}$  вираз (2.1.4), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e &= -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \sum_{l \neq m} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m) (2\mu_0)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(\mathbf{R}_{lm}) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m, \end{aligned}$$

що співпадає з виразом (2.1.3).

Легко переконатись, використовуючи (2.1.4), що оператори проекції густини магнітного моменту задовольняють перестановкам

$$[M_i(\mathbf{r}), M_k(\mathbf{r}')] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ikl} M_l(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.1.6)$$

Якщо ввести оператор повного магнітного моменту феромагнетика

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.1.7)$$

то його проекції будуть задовольняти даним перестановкам

$$[\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_k] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ikl} \mathcal{M}_l. \quad (2.1.8)$$

Гамільтоніану (2.1.3) відповідає макроскопічна обмінна енергія феромагнетика

$$W_e = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \sum_{l \neq m} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \bar{J}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \mathbf{M}(\mathbf{r}', t), \quad (2.1.9)$$

де  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  – густина макроскопічного магнітного моменту феромагнетика, яка є функцією координат  $\mathbf{r}$  і часу  $t$ ,  $\bar{J}(\mathbf{r})$ - деяка функція від  $\mathbf{r}$ , а також від температури  $T$ . Ця функція швидко зменшується з ростом  $r$  та при достатньо низьких температурах мало відрізняється від функції  $J(\mathbf{r})$ .

Густина макроскопічного магнітного моменту зв'язана з оператором густини магнітного моменту  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  співвідношенням

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \overline{Sp \rho \mathbf{M}(\mathbf{r})},$$

де  $\rho$  – локально рівноважна матриця густини феромагнетика, яка є усереднена по фізично нескінченно малому елементу об'єму.

Так як в основному стані феромагнетика сумарний спін має максимально можливе значення, то припустимо, що при достатньо низьких температурах ( $T \ll$

$T_C$ ) модуль густини макроскопічного моменту майже не змінюється з часом, тому можливі зміни вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  зводяться в основному до його повороту практично без зміни модуля вектора  $\mathbf{M}$ .

Повертаючись до формули (2.1.9) для обмінної енергії феромагнетика, згадаємо, що обмінний інтеграл  $\bar{J}(\mathbf{r})$  дуже швидко зменшується з ростом  $\mathbf{r}$ . Тому в формулі (2.1.9) можна розкласти  $\mathbf{M}(\mathbf{r}', t)$  в ряд по степенях  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  і обмежитись тільки членами не вище другого порядку:

$$\mathbf{M}_l(\mathbf{r}', t) = M_l(\mathbf{r}, t) + (x'_i - x_i) \frac{\partial M_l(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \frac{\partial^2 M_l(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Підставляючи даний вираз в (2.1.9) і відкидаючи перший доданок, що є константою, отримаємо

$$\begin{aligned} W_e = & -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (x'_i - x_i) d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \int \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} d\mathbf{r} \\ & - \frac{1}{4(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \\ & \times d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \int \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_k} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Будемо вважати, що кожний вузол решітки є центром її симетрії. В цьому випадку перший доданок перетворюється в нуль. Тоді ми отримаємо наступний вираз для обмінної енергії:

$$W_e = \int d\mathbf{r} \alpha_{ik} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (2.1.10)$$

де

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(\mathbf{r}) x_i x_k d\mathbf{r}. \quad (2.1.11)$$

Виконавши у виразі (2.1.10) інтегрування частинами, можна представити обмінну енергію феромагнетика у вигляді

$$W_e = \int_V \omega_e d\mathbf{r}, \quad (2.1.12)$$

де

$$\omega_e = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}$$

Дана величина представляє собою густину макроскопічної обмінної енергії феромагнетика.

Звернемо також увагу на те, що величина  $\omega_e$  не залежить від напрямку вектора густини магнітного моменту  $\mathbf{M}$ . Це явище є фундаментальною властивістю обмінної взаємодії.

Структура виразу  $\omega_e$  можна зрозуміти, якщо розглядати обмінну енергію феромагнетика як енергію магнітної неоднорідності. Дійсно, розглянемо залежність густини енергії феромагнетика від градієнтів компонент вектора  $\mathbf{M}$ . Основному стану феромагнетика відповідає однакова орієнтація спінів атомів, тобто деякий постійний за величиною та напрямком вектор намагнічення. Навпаки, для збуджених станів компоненти вектора намагнічення будуть залежати від координат. Для станів, які є близькі до основного стану, компоненти  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  будуть повільно змінюватись від точки до точки, а тому густину енергії можна розкласти в ряд по степенях градієнтів компонент  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , обмежившись тільки першими членами, які не зникнуть. Коефіцієнти у цьому розкладі будуть являти собою деякі тензори, які мають властивості симетрії кристала.

Якщо в числі елементів симетрії кристалу є центр інверсії, то розклад густини енергії  $\omega_e$  буде починатись з членів, які є квадратичні відносно градієнтів, тобто будуть мати наступний вигляд

$$\omega_e = \frac{1}{2} \alpha_{iklm} \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial M_l}{\partial x_m}, \quad (2.1.13)$$

де  $\alpha_{iklm}$  – деякий тензор 4-того рангу. Але енергія  $\omega_e$  має обмінну природу, а це значить те, що  $\omega_e$  не повинна залежати від напрямку вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , тобто у виразі (2.1.13) повинні співпадати індекси  $i$  та  $l$ , тобто тензор  $\alpha_{iklm}$  має мати вигляд  $\alpha_{km} \delta_{il}$ , і ми приходимо до виразу (2.1.12) для  $\omega_e$ , яке було отримано вище, у якому  $\alpha_{ik}$  представляло собою деякий тензор другого рангу, який може залежати від квадрату вектора  $\mathbf{M}$  і від температури, та який відрізняється тим, що квадратична форма  $\omega_e$  відносно градієнтів повинна бути істотно додатною.

Симетричний тензор  $\alpha_{ik}$ , який входить у вираз для обмінної енергії, визначається в моделі Гайзенберга формулою (2.1.11), у яку входить обмінний інтеграл між сусідніми атомами. У більш загальному випадку він може залежати від квадрату намагніченості і температури, але завжди по порядку величини дорівнює

$$\alpha_{ik} \sim \frac{J_0}{(2\mu_0)^2} a^5, \quad (2.1.14)$$

де  $J_0$  – величина обмінного інтегралу між сусідніми атомами; даний інтеграл також визначає температуру Кюрі  $T_C$  по порядку величини; тому

$$\alpha_{ik} \sim \frac{T_C}{\mu_0 M_0} a^2,$$

де  $M_0 \approx \frac{\mu_0}{a^3}$ .

В одновісних кристалах тензор  $\alpha_{ik}$  має дві незалежні компоненти, а тому  $\omega_e$  матиме вигляд

$$\omega_e = \frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \alpha_2 \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2 \quad (2.1.15)$$

(вісь  $z$  співпадає з вісю кристала).

У кубічних кристалів  $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$ .

## 2.2 Магніто-дипольна взаємодія

Обмінна взаємодія є найбільшою, проте не єдиною взаємодією між атомами феромагнетика. Поруч із нею також стоїть магнітна взаємодія між магнітними моментами атомів та взаємодія між магнітними моментами і електричним полем кристалічної решітки. Ці дві взаємодії є релятивістськими, у зв'язку з цим енергії, що їм відповідають, набагато менше обмінної енергії  $W_e$ , яка дорівнює порядку  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 W_e$ , де  $v$  – величина порядку швидкості електрону в атомі.

Але, не дивлячись на те, що релятивістські взаємодії набагато менше обмінної взаємодії, вони відіграють важливу роль, і ця роль є двоякою.

По-перше, завдяки релятивістським взаємодіям у кристалі виникає певний напрямок намагнічення, якому відповідає мінімальне значення феромагнетика. У зв'язку з цим, виникає енергія анізотропії, тобто залежність енергії феромагнетика від напрямку намагнічення.

По-друге, завдяки релятивістським взаємодіям відбувається релятивістська рівновага в системі спінів феромагнетика. Якщо цих взаємодій не було б, а також не було б взаємодій спінів з коливанням решітки, то статистична рівновага в решітці не могла б встановитись.

Розглянемо магніто-дипольну взаємодію, яка описується гамільтоніаном

$$\mathcal{H}_m = 2\mu_0^2 \sum_{l \neq m} \frac{1}{R_{lm}^5} \{(\mathbf{s}_l \mathbf{s}_m) R_{lm}^2 - 3(\mathbf{s}_l \mathbf{R}_{lm})(\mathbf{s}_m \mathbf{R}_{lm})\}, \quad (2.2.1)$$

де  $\mathbf{s}_l$  – спін атома в  $l$ -му вузлі і  $\mathbf{R}_{lm}$  – радіус-вектор, який з'єднує вузли  $l$  та  $m$ .

Гамільтоніану  $\mathcal{H}_m$  відповідає макроскопічна енергія магнітної дипольної взаємодії

$$W_m = -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{l \neq m} M_l(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_m) \frac{\partial^2}{\partial R_{lm}^i \partial R_{lm}^k} \cdot \frac{1}{R_{lm}},$$

де  $\mathbf{M}(\mathbf{R}_l) = \frac{2\mu_0}{v_0} \bar{\mathbf{s}}_l$  (риска над  $\mathbf{s}_l$  вказує на усереднення) і  $v_0$  – об'єм елементарної комірки.

Щоб даний вираз набув феноменологічного вигляду, перейдемо у ньому від сумування по окремих вузлах решітки до інтегрування по об'єму феромагнетика[25]. Але, при такому переході виникає невизначеність при  $R_{lm} \rightarrow 0$ , тому необхідно передчасно виділити область малих  $R_{lm}$ . Для цього розіб'ємо  $W_m$  на два доданки,

$$\begin{aligned} W_m &= W_m' + W_m'', \\ W_m' &= -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{\substack{l, j \\ R_{lj} > \rho}} M_i(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_j) \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \cdot \frac{1}{R_{lj}}, \\ W_m'' &= -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{\substack{l \neq j \\ R_{lj} < \rho}} M_i(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_j) \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \cdot \frac{1}{R_{lj}}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

де  $\rho$  – достатньо мала макроскопічна довжина; якщо  $L$  – довжина, на якій суттєво буде змінюватись густина магнітного моменту, то величину  $\rho$  вибирають таким чином, щоб виконувалась рівність

$$a \ll \rho \ll L.$$

Так як  $M(\mathbf{R}_l)$  повільно змінюється на відстаннях порядку  $a$ , то перший доданок можна представити у вигляді подвійного інтегралу по об'єму феромагнетика:

$$W_m' = -\frac{1}{2}v_0^2 \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>\rho} d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k'} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.2.3)$$

У другому доданку можна винести величину  $M_k(\mathbf{R}_j)$  за знак суми, та замінивши  $M_k(\mathbf{R}_j)$  на  $M_k(\mathbf{R}_l)$ . Введемо наступні позначення

$$\beta_{ik} = v_0 \sum_j \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \cdot \frac{1}{R_{lj}}, \quad (j \neq l; R_{lj} < \rho)$$

представимо  $W_m''$  у вигляді

$$W_m'' = -\frac{1}{2} \beta_{ik} \int_V d\mathbf{r} M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}). \quad (2.2.4)$$

Покажемо, що

$$W_m' = -\frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left\{ \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}^2 + \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} \right\}, \quad (2.2.5)$$

де  $\mathbf{H}^{(m)}$  – статистичне магнітне поле, яке створюється намагніченістю  $\mathbf{M}$ . Це поле задовольняє рівняння магнітостатики

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}^{(m)} &= 0, \\ \text{div } (\mathbf{H}^{(m)} + 4\pi \mathbf{M}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

і умовам неперервності на границі феромагнетика тангенціальних складових вектора магнітного поля  $\mathbf{H}^{(m)}$  і нормальної складової вектора індукції  $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} + 4\pi \mathbf{M}$

$$(\mathbf{H}_+^{(m)})_\tau = (\mathbf{H}_-^{(m)})_\tau, (\mathbf{H}_+^{(m)})_\nu + 4\pi M_\nu = (\mathbf{H}_-^{(m)})_\nu, \quad (2.2.7)$$

де індекси плюс та мінус використовуються для позначення полів всередині та зовні феромагнетика, а індекси  $\tau$  та  $\nu$  позначають тангенціальну та нормальну складову векторів на поверхні феромагнетика  $S$ .

Розв'язання рівняння магнітостатики з граничними умовами (2.2.7) має вигляд

$$\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.2.8)$$

де  $\varphi(\mathbf{r})$  – магнітостатичний потенціал, який визначається формулою

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_V d\mathbf{r}' \frac{\text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_S dS_i \frac{M_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.2.9)$$

Дану формулу перепишемо наступним чином

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' M_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.2.10)$$

звідки

$$\begin{aligned} H_i^{(m)}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}) + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>\rho} d\mathbf{r}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Підставляючи даний вираз у формулу (2.2.5), ми приведемо його до вигляду (2.2.3).

Таким чином, енергія магнітної дипольної взаємодії буде мати вигляд

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left\{ \beta_{ik} M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}^2(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}) \mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (2.2.11)$$

Покажемо, що інтеграл від третього доданку в цьому виразі може бути приведений до наступного вигляду

$$-\frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r} = \frac{1}{8} \int (\mathbf{H}^{(m)})^2 d\mathbf{r}, \quad (2.2.12)$$

де інтегрування у правій частині рівності відбувається по всьому простору. Згідно рівняння (2.2.6), матимемо

$$\mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi B_i^{(m)} - \frac{(\mathbf{H}^{(m)})^2}{4\pi}.$$

Тому

$$-\frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{H}^{(m)})^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int_S \varphi B_i^{(m)} dS_i,$$

де інтегрування у другому інтегруванні відбувається по поверхні тіла. Так як потенціал  $\varphi$  і нормальна складова вектора індукції  $\mathbf{B}^{(m)}$  неперервні на поверхні тіла, то поверхневий інтеграл може бути переписаний через об'ємний інтеграл по об'єму  $V'$ , який оточений феромагнетиком:

$$\frac{1}{8\pi} \int_S \varphi B_i^{(m)} dS_i = -\frac{1}{8\pi} \int_{V'} d\mathbf{r} \operatorname{div} (\varphi \mathbf{H}^{(m)}).$$

Враховуючи те, що  $\operatorname{div} (\varphi \mathbf{H}^{(m)}) = -(\mathbf{H}^{(m)})^2$ , ми отримаємо формулу (2.2.12).

Розглянемо однорідно намагнічений феромагнетик,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Магнітне поле  $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$  в такому феромагнетикі, відповідно до (2.2.10), матиме вигляд

$$\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{M}\nabla) \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \hat{N}(\mathbf{r}) \mathbf{M}, \quad (2.2.13)$$

де  $\hat{N}(\mathbf{r})$  – тензор з компонентами:

$$N_{ik}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.2.14)$$

Дане поле не є однорідним. Але, якщо надати феромагнетику форму будь-якого еліпсоїда, то при  $\mathbf{M} = const$  поле всередині нього буде однорідним. Дійсно, для точок всередині еліпсоїда, буде справедлива рівність

$$\int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{R_s} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right),$$

де

$$R_s = \sqrt{(a^2 + s) \cdot (b^2 + s) \cdot (c^2 + s)},$$

$a, b, c$  – піввісі еліпсоїда та  $x, y, z$  – проекції радіус-вектора  $\mathbf{r}'$  будь-якої точки всередині еліпсоїда на головній осі еліпсоїда. Так як інтеграл  $\int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  представляє собою квадратичну функцію координат точки  $\mathbf{r}$ , то тензор  $\hat{N}$  не буде залежати від координат, тобто поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  буде однорідне.

Тензор  $\hat{N}$  називається тензором розмагнічування коефіцієнтів. В системі координат, осі якої співпадають з головними осями еліпсоїда, тензор матиме тільки діагональні елементи:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)R_s}, \\ N_2 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)R_s}, \\ N_3 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)R_s}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Легко переконатись, що сума розмагнічуваних коефіцієнтів  $N_1, N_2, N_3$  завжди рівна одиниці:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1. \quad (2.2.16)$$

Якщо тіло має форму кулі, то

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}.$$

Якщо тіло має форму циліндра, вісь якого напрямлена вздовж осі  $x$ , то

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2}.$$

Якщо тіло має форму витягнутого еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ , то

$$N_1 = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left( \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right), \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2}(1 - N_1),$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Якщо тіло має форму сплюсненого еліпсоїда  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , то

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2}(1 - N_3), \quad N_3 = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e),$$

$$e = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}.$$

До цього часу не враховувалось магнітне поле, яке створюється зовнішніми джерелами. При наявності такого поля, яке є стороннім  $\mathbf{H}_0^{(e)}$ , до енергії ферромагнетика добавимо доданок

$$W_H = - \int d\mathbf{r} \mathbf{M} \mathbf{H}_0^{(e)}. \quad (2.2.17)$$

Якщо стороннє поле є однорідним та талі має форму еліпсоїда, то поле та намагнічення всередині тіла також будуть однорідними. При цьому зв'язок між

магнітним полем  $\mathbf{H}^{(i)}$  всередині тіла, намагніченням  $\mathbf{M}$  та стороннім магнітним полем  $\mathbf{H}_0^{(e)}$  буде мати вигляд

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(m)} + \mathbf{H}_0^{(e)} = \mathbf{H}_0^{(e)} - 4\pi\hat{N}\mathbf{M}. \quad (2.2.18)$$

Також, говорячи про однорідність поля та намагніченість феромагнетика, до уваги не приймалась можлива доменна структура феромагнетика [26]. Це справедливо у випадках, коли достатньо сильні зовнішні магнітні поля. Якщо ж феромагнетик розпадається на домени, то у приведених вище формулах поля та намагніченості необхідно приймати до уваги середнє значення цих величин по доменній структурі феромагнетика.

### 2.3 Енергія магнітної анізотропії і повна енергія феромагнетика

Розглянемо взаємодію магнітних моментів атомів феромагнетика з електричним полем кристалічної решітки. Гамільтоніан цієї взаємодії, який має назву спін-орбітальний, можна представити у вигляді

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_k \mathbf{s}_k \mathbf{A}_k, \quad (2.3.1)$$

де  $\mathbf{s}_k$  – спіні  $k$  – го атома,  $\mathbf{A}_k = -2\mu_0\mathbf{H}_k$  і  $\mathbf{H}_k$  – магнітне поле, яке відчуває  $k$  – тий атом завдяки його руху в електричному полі  $\mathbf{E}_k$  кристалічної решітки. Якщо  $v_k$  – швидкість  $k$  – го атома, то, очевидно

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{c}(\mathbf{v}_k \times \mathbf{E}_k).$$

Віднесена до одного атома енергія спін-орбітальної взаємодії матиме порядок

$$\mu_0 \frac{v}{c} \cdot \frac{e}{a^2} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{e^2}{a}.$$

Гамільтоніан спін-орбітальної взаємодії включає у собі швидкість, тобто оператори імпульсів частинок, і відповідає мікроскопічному гамільтоніану. Переходячи до моделі Гайзенберга, замінимо оператори швидкостей операторами, які залежать тільки від спінів частинок, при чому ця заміна, не повинна змінити структуру енергетичного спектру феромагнетика.

Якщо б розглядався ізотропний простір, а не решітка і спін атомів був рівний  $s = \frac{1}{2}$ , то модифікований гамільтоніан спін-орбітальної взаємодії мав би вигляд:

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_{ik} f(\mathbf{R}_{ik}) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_k + (2\mu_0)^2 \sum_{ik} \beta(\mathbf{R}_{ik}) \{3(\mathbf{s}_i \mathbf{R}_{ik})(\mathbf{s}_k \mathbf{R}_{ik}) - (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k) R_{ik}^2\}, \quad (2.3.2)$$

де  $f(\mathbf{R}_{ik})$  та  $\beta(\mathbf{R}_{ik})$  – деякі функції відстаней між вузлами решітки. Перша з цих сум не відрізняється за своєю структурою від гамільтоніану обмінної взаємодії, тому вона може бути віднесена до цього гамільтоніана і не розглядатись.

Друга сума має таку ж структуру, як і гамільтоніан магнітної дипольної взаємодії. Відмінність тільки у тому, що у дану суму входить швидко спадаюча зі збільшенням відстані між атомами функція  $\beta(\mathbf{R}_{ik})$ , тоді як в гамільтоніані дипольної взаємодії, який є довгодіючим, входить повільно змінююча функція  $R_{ik}^{-3}$ .

У кристалічній решітці ситуація ускладнюється через нееквівалентності різних напрямків. Завдяки цьому скалярна функція  $\beta(\mathbf{R}_{ik})$  замінюється тензором другого рангу  $\hat{\beta}(\mathbf{R}_{ik})$  і гамільтоніан спін-орбітальної взаємодії буде мати вигляд

$$\mathcal{H}_{sl} = 2\mu_0^2 \sum_{ik} \beta_{\alpha\gamma}(\mathbf{R}_{ik}) s_{i\alpha} s_{k\gamma}.$$

Перейшовши від спінів до густини магнітного моменту, отримаємо наступний вираз для макроскопічної енергії спін-орбітальної взаємодії:

$$W_{sl} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \beta_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}'). \quad (2.3.3)$$

Так як функція  $\beta_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  швидко зменшується зі збільшенням  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  між атомами, то функцію  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  можна розкласти у ряд по степенях  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , і у даному розкладі зберігається тільки перший член. У результаті отримаємо

$$W_{sl} = \int_V \omega_a(\mathbf{M}) d\mathbf{r}, \quad (2.3.4)$$

де

$$\omega_a(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \beta_{ik} M_i M_k$$

та

$$\beta_{ik} = \int \beta_{ik}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Порівняння даного виразу для  $W_{sl}$  з виразом для енергії магнітної дипольної взаємодії  $W_m$  показує, що два доданки під знаком інтегралу в (2.2.11) мають таку ж саму структуру, як і  $\omega_a(\mathbf{M})$ . Тому можна віднести ці доданки до  $\omega_a(\mathbf{M})$  і розуміти, як енергію магнітної дипольної взаємодії величину

$$W_m = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r}. \quad (2.3.5)$$

При виведенні формули для  $W_{sl}$  було прийнято, що  $s = \frac{1}{2}$ . У загальному випадку при  $s \neq \frac{1}{2}$ , дана формула не справедлива і про  $\omega_a(\mathbf{M})$  можна сказати тільки те, що дана величина являє собою деяку функцію густини магнітного моменту, причому на відміну від густини обмінної енергії, яка не залежить від напрямку

вектора намагнічення, густина енергії спін-орбітальної взаємодії залежить від напрямку даного вектора відносно кристалографічних осей.

При достатньо низьких температурах ( $T \ll T_c$ ) модуль вектора  $\mathbf{M}$  являє собою деяку постійну величину і  $\omega_a(\mathbf{M})$  можна розглядати тільки як функцію напрямку  $\mathbf{M}$ . Дану функцію називають густиною енергії магнітної анізотропії.

При феноменологічному опису феромагнетика функцію  $\omega_a(\mathbf{M})$  зазвичай представляють у вигляді розкладу в ряд по степенях компонент  $\mathbf{M}$  і зберігають в ньому декілька перших членів. У даний розклад повинні входити тільки такі комбінації добутку компонент вектора  $\mathbf{M}$ , які є інваріантами відносно елементів симетрії кристала. У числі елементів симетрії є також перетворення часу ( $t \rightarrow -t$ ), при якому компоненти вектора  $\mathbf{M}$  міняють свій знак; тому розклад  $\omega_a(\mathbf{M})$  має включати в себе тільки парні степені компонент  $\mathbf{M}$ .

Розглянемо одновісний феромагнетик. Якщо обмежуватись у розкладі  $\omega_a(\mathbf{M})$  членами другого порядку по степенях компонент вектора  $\mathbf{M}$ , то отримаємо

$$\omega_a(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\beta M_0^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2}\beta M_0^2 - \frac{1}{2}\beta (\mathbf{nM}), \quad (2.3.6)$$

де  $\theta$  – кут між вектором  $\mathbf{M}$  і віссю симетрії кристалу  $\mathbf{n}$  і  $\beta$  – деяка константа, яка має назву константи анізотропії. Ця константа є функцією температури.

Якщо  $\beta > 0$ , то мінімум енергії анізотропії досягається при  $\theta = 0$ , тобто енергія анізотропії буде мінімальною при намагніченості вздовж осі симетрії (вісь  $z$ ), яка є напрямком легкого намагнічення. Якщо  $\beta < 0$ , то енергія анізотропії досягає мінімум при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , тобто при намагніченні, яка перпендикулярна осі  $z$ . Для визначення напрямку легкого намагнічення, недостатньо приведенного виразу для  $\omega_a(\mathbf{M})$  і необхідно брати до уваги наступні члени розкладу  $\omega_a(\mathbf{M})$  по степенях компонент вектора  $\mathbf{M}$ .

Якщо кристал відноситься до тетрагональної симетрії, то анізотропія у базисній площині (площина  $xy$ ) визначається інваріантом  $M_x^2 M_y^2$ . При гексогональній симетрії кристалу анізотропія в базисній площині проявляється тільки в членах 6-го порядку відносно компонент вектора  $\mathbf{M}$  і визначається інваріантом [27]

$$\frac{1}{6i} \left\{ (M_x + iM_y)^6 - (M_x - iM_y)^6 \right\}.$$

Якщо кристал має кубічну симетрію, то першими членами в розкладі енергії магнітної анізотропії по степенях компонент вектора  $\mathbf{M}$  будуть члени 4-го порядку, які складені із компонент вектора  $\mathbf{M}$  :

$$M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2, \quad M_x^4 + M_y^4 + M_z^4.$$

Другий інваріант не є незалежним, так як він дорівнює  $M^4 - 2(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2)$ . Тому енергія магнітної анізотропії кубічного феромагнетика, якщо враховувати тільки члени 4-го порядку відносно компонент вектора  $\mathbf{M}$ , буде мати вигляд

$$\omega_a(\mathbf{M}) = \beta' (M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2) \quad (2.3.7)$$

або ж

$$\omega_a(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2} \beta' (M_x^4 + M_y^4 + M_z^4), \quad (2.3.8)$$

де  $\beta'$  - деяка константа ( константа анізотропії).

Зрозуміло, що при  $\beta' > 0$  напрямок легкого намагнічення співпадає з напрямком трьох ребер куба. Якщо  $\beta' < 0$ , то енергія анізотропії буде мінімальною при намагніченні вздовж будь-якої із чотирьох просторових діагоналей куба.

Відмітимо, що спін-орбітальна взаємодія має вплив також на гіромагнітне співвідношення атомів у феромагнетику. Дійсно, розглянемо магнітний момент атома

$$\mathbf{m} = 2\mu_0\mathbf{s} + \mu_0\mathbf{l},$$

де  $\mathbf{l}$  - орбітальний момент. Якщо б не було спін-орбітальної взаємодії, то середнє значення орбітального моменту було б рівне нулю. Завдяки спін-орбітальній взаємодії середнє значення вектора  $\mathbf{l}$  стає відмінним від нуля,

$$\langle \mathbf{l} \rangle = \hat{\lambda}\mathbf{s},$$

де  $\hat{\lambda}$  – деякий тензор з компонентами порядку  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , і вираз для  $\mathbf{m}$  матиме вигляд

$$\mathbf{m} = 2\mu_0\hat{g}\mathbf{s}, \quad \hat{g} = I + \frac{1}{2}\hat{\lambda}. \quad (2.3.9)$$

Відмінність тензора  $\hat{g}$  від одиничного тензора  $I$  відповідає порядку величини  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ .

Склавши енергії обмінної, спін-орбітальної та магнітної дипольної взаємодії, а також енергію феромагнетика у сторонньому магнітному полі, отримано повну макроскопічну енергію феромагнетика

$$W = \int_V dr \left\{ F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{H}^{(m)} - \mathbf{M}\mathbf{H}_0^{(e)} \right\}, \quad (2.3.10)$$

$$F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} + \omega_a(\mathbf{M}) + f(M^2).$$

Тут  $f(M^2)$  – деяка функція від  $M^2$ , у якій енергія, яка їй відповідає, має в основному обмінне походження.

Якщо врахувати енергію магнітної неоднорідності, яка обумовлена релятивістськими взаємодіями, то з точністю до членів, квадратичних по  $\frac{\partial M_i}{\partial x_k}$ , функція  $F$  буде мати вигляд

$$F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\alpha_{ik;lm}(\mathbf{M}) \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial M_l}{\partial x_m} + \gamma_{ik}(\mathbf{M}) \frac{\partial M_i}{\partial x_k} + \omega_a(\mathbf{M}) + f(M^2), \quad (2.3.11)$$

де тензори  $\alpha_{ik;lm}(\mathbf{M})$  та  $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$  являють собою деякі функції від густини магнітного моменту  $\mathbf{M}$  та від температури. Другий доданок для  $F$  відсутній у випадку феромагнетика, який володіє центром інверсії.

Вираз (2.3.10) для енергії феромагнетика, справедливий тільки в статистичному випадку. При цьому поле  $\mathbf{H}^{(m)}$ , яке створене магнітними моментами атомів, задовольняє рівняння магнітостатики (2.2.6). Однак, вираз (2.3.10) і рівняння магнітостатики можна використовувати і у тому випадку, коли величини  $\mathbf{H}^{(m)}$  та  $\mathbf{M}$  змінюються з часом, щоправда зміна має відбуватись достатньо повільно, саме, фазова швидкість хвиль, зв'язаних з коливанням величини  $\mathbf{H}^{(m)}$  та  $\mathbf{M}$ , повинна бути малою у порівнянні зі швидкістю світла.

Використовуючи (2.2.12), можна переписати вираз для  $W$  у вигляді

$$W = \int \omega dr,$$

де

$$\omega = \left( \mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^{(m)})^2 - \mathbf{M} \mathbf{H}_0^{(e)} \quad (2.3.12)$$

та інтегрування відбувається по всьому просторі.

Даний вираз макроскопічної енергії феромагнетика відноситься до квазістатистичного випадку, коли магнітне поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  і густина магнітного моменту  $\mathbf{M}$  повільно змінюються з часом.

## ВИСНОВКИ ДО 2 РОЗДІЛУ

У даному розділі було знайдено гамільтоніан обмінної взаємодії, розраховано макроскопічну обмінну енергію феромагнетика та знайдено тензор розмагнічування коефіцієнтів.

Слід відзначити, що вибір математичної форми енергії магнетика напряму залежить як від матеріалу, в якому відбуваються магнітні взаємодії, так і від умов, за яких цей процес здійснюється. Крім того, ще одним чинником є частота хвилі, яка може розповсюджуватися в магнітному матеріалі. Наприклад, при високих частотах спінових хвиль домінуючою буде обмінна частина енергії, а магнітостатичним вкладом можна знехтувати. При низькочастотних збудженнях – навпаки: залишають лише магнітостатичні доданки, а обмінним впливом нехтують.

## Розділ 3 СПІНОВІ ХВИЛІ В ОДНОРІДНИХ ФЕРОМАГНЕТИКАХ

### 3.1 Властивості мультишарових структур

Однією з важливих областей фізики магнітних явищ являється фізика мультишарових магнітних систем, яка зараз інтенсивно розвивається. Технічний прогрес в області одержання плівок з визначеною товщиною, аж до нанометрів, і можливість виробництва структур із чіткими міжшаровими границями й необхідним розподілом компонент у залежності від товщини дозволили створити новий клас матеріалів – штучні мультишарові магнетики, які представляють собою матеріали з періодично модульованими магнітними параметрами. Такі матеріали мають унікальні властивості, такі як гігантський магнітоопір, гігантське фарадеївське обертання, висока магнітна сприйнятливості й ін., що сприяє можливості їхнього широкого використання в мікроелектроніці.

Дослідження показали, що наявність різного типу взаємодії між шарами (магнітостатичне, обмінне) значно змінює поведінку системи магнітних плівок, у порівнянні з одношаровими плівками [28].

Так, наприклад, іонна імплантація інертних газів епітаксціальних ферит-гранатових плівок дозволяє приглушувати "тверді" циліндричні домени в шарі, змінюючи структуру доменної границі в доменах цього шару [29,30]. Тришарові плівки дають можливість зменшити повзучість доменних границь у порівнянні з одношаровими, збільшити густину запису інформації. На основі двошарових плівок

з різним типом коерцитивної сили та анізотропії вже створені системи пам'яті зі зчитуванням без руйнування інформації. У таких плівках зчитування відбувається з м'якої плівки, а тверда плівка практично не збурюється. Потім, коли поле, яке зчитується, знімається, за рахунок зв'язку між шарами намагніченість м'якої плівки відновлюється. Плівки структури типу "тверда-м'яка-тверда" можуть мати початкову сприйнятливність до 10, що робить їх досить перспективними для використання в якості індуктивностей [28]. Двошарові плівки із шарами з різним типом анізотропії перспективні для створення керованих фільтрів на спінових, магнітостатичних хвилях [26].

На сьогодні вже виконано велику кількість робіт з дослідження магнітостатичних та спінових хвиль у мультишарових системах. Наприклад, у магнітодипольному наближенні вивчені спінові хвилі у надрешітках, які утворені чергуванням магнітних і немагнітних шарів Fe-V, Cu-Ni, Mo-Ni, Tm-Lu [27-29]. У цих роботах теоретично та експериментально показано, що в таких структурах можливе порушення взаємодіючих поверхневих хвиль. Теоретичні дослідження спектра виконані на основі використання лінеаризованого рівняння Ландау-Ліфшиця й показано, що спектр магнітостатичних хвиль має зонну структуру [26,27].

У розглянутих вище структурах обмінна взаємодія між шарами магнетиків не враховувалася, оскільки магнітовпорядковані шари чергуються з немагнітними. Вивчення властивостей періодичних надрешіток, отриманих методами пошарового напилювання двох магнітних матеріалів [31], призвело до необхідності розгляду обмінної взаємодії на поверхні розділу двох магнітовпорядкованих шарів. Обмінні хвилі в надрешітках, що складаються із двох різних магнітних матеріалів, були розглянуті в роботі [31].

Теоретичні розрахунки спектра спінових хвиль зазвичай виконуються для випадків феромагнітних матеріалів, що чергуються, або для мультишарових систем, які отримані чергуванням феромагнітних й антиферомагнітних шарів. Дисперсійне рівняння для спінових хвиль, які поширюються у надрешітці, що складається із двох простих гайзенбергівських феромагнетиків, було отримано методом "матриць перенесення" [31]. Цей метод призводить до комплексного виразу дисперсійного співвідношення для спінових хвиль і дає відповідну характеристику оптичних й акустичних властивостей надрешітки [31].

В роботі [32] представлено дослідження основних характеристик магнітного відгуку надрешітки, яка сформована чергуванням шарів феромагнітного й антиферомагнітного матеріалів, що описуються в рамках моделі локалізованого спіну. Спіни у феромагнітних й антиферомагнітних шарах розташовані паралельно поверхні розділу. Розглядаються випадки надрешіток, у яких антиферомагнітні плівки мають парне й непарне число складових їхніх шарів. Для випадку ненульового зовнішнього поля представлений розрахунок спектра спінових хвиль, який отриманий в [28], через рівняння руху для оператора спіну. При класичному описі основного стану як функції зовнішнього поля виходить послідовність спін-переорієнтаційних переходів, це особливо характерно для надрешіток, у яких антиферомагнітні складові мають парне число шарів [32].

В роботі [32] методом "матриць передачі" отримано загальне дисперсійне рівняння для обмінних, магнітостатичних і повільних (електромагнітних) хвиль у нескінченній і напівнескінченній феромагнітній надрешітці, що містить  $N$  різних феромагнітних шарів. Отримані результати дозволили зробити наступні висновки щодо поширення хвиль:

1) число зон об'ємних магнітостатичних хвиль  $\epsilon n = n_f + 2n_a$ , де  $n_f$  ( $n_a$ ) - число феромагнітних та антиферомагнітних шарів в елементарній комірці;

2) число поверхневих мод менше або дорівнює числу зон об'ємних магнітостатичних мод;

3) поверхневі моди в надрешітках „магнетик-немагнетик” існують тільки в тому випадку, коли товщина магнітного шару більша, ніж товщина немагнетика (елементарна комірка надрешітки містить один магнітний шар);

4) поверхневі моди в надрешітках з більш ніж одним магнітним шаром на елементарну комірку, поширюються при довільному співвідношенні товщин шарів;

5) для спектру об'ємних хвиль в надрешітці, яка складається з трьох та більше різних магнітних матеріалів в загальному випадку

$$\omega(-\mathbf{k}) \neq \omega(\mathbf{k}),$$

де  $\omega$  - частота,  $\mathbf{k}$  - хвильовий вектор.

Як говорилося вище, у магнітній надрешітці переважний магнітодипольний або обмінний зв'язок між шарами визначається характером розділення шарів. Для атомних розмірів границь розділу шарів у надрешітці переважною взаємодією є обмінна. Динамічні властивості магнітної надрешітки багато в чому є наслідком обмінної взаємодії між шарами. Зокрема, вона визначає частоти феромагнітного резонансу зв'язаних магнітних шарів [33].

Існує багато робіт, як експериментальних, так і теоретичних, у яких вивчаються надрешітки, отримані шляхом модулювання сполуки [29]. Дослідження спектра спінових хвиль у таких плівках показало [29,34], що квазіперіодична одномірна модуляція основних спінових параметрів призводить до модифікації дисперсійного закону для спінових хвиль  $\omega(\mathbf{k})$ . Дисперсійна крива має точку перегину, хвильовий вектор якої відповідає хвильовому вектору модуляції структури. Координата точки перегину невід'ємно залежить від періоду модуляції.

Сучасні технології дозволяють одержувати штучні мультишарові матеріали з модуляцією окремих параметрів спінової системи [35,36]. Цього можна досягти у

процесі епітаксiального росту феромагнiтних плiвок шляхом перiодичної змiни умов росту та технологiчних параметрiв (наприклад, температури, швидкостi росту й т.п.). Цей метод може бути використаний для виробництва матерiалiв з модуляцiєю величини константи магнiтної анизотропiї, так як даний параметр є найбільш чутливим до зовнiшнiх впливiв, а параметр обмiнної взаємодiї й намагнiченiсть насичення можуть залишатися практично постiйними вiд шару до шару [35].

iснує також й iнший метод для одержання таких матерiалiв. Це хiмiчне осадження. Зокрема, у роботi [36] розповiдається про виробництво цим методом плiвок загальною товщиною 2000-2500 Å і перiодом модуляцiї 20-200 Å. Найбільш вагомими для даної роботи виявилися такі типи мультишарових плiвок:

- 1) Композицiйно-модульованi структури;
- 2) Структури з модульованою симетрiєю та концентрацiйно-модульованi структури.

У композицiйно-модульованих й симетрично-модульованих структурах, якi складаються iз шарiв рiзної сполуки, що чергуються, всi параметри спиновiї системи (намагнiченiсть, обмiн, анизотропiя й т.д.) змiнюються вiд шару до шару. У концентрацiйно-модульованих мультишарових плiвках, якi отримано шляхом чергування окремих шарiв може бути отримана модуляцiя не всiх, а тiльки деяких параметрiв спиновiї системи. Цей метод зручно використовувати для виробництва матерiалiв з модуляцiєю тiльки величини параметра анизотропiї та обмiнної взаємодiї, тодi як намагнiченiсть насичення може залишатися постiйною вiд шару до шару.

Крiм того, у реальних магнiтних матерiалах можуть бути присутнi як перiодично розподiленi дефекти, що призводять до локальної змiни величин анизотропiї та обмiнної взаємодiї, так i iзольованi. Такi дефекти можуть бути як

ізолюваними, так і періодично розподіленими в матеріалі [37]. У ферит-гранатах константи анізотропії можуть бути також результатом квазіперіодичної модуляції поля внутрішніх напружень, що обумовлено когерентними флуктуаціями розподілу іонів у кристалічній решітці [38]. Періодичні неоднорідності обмінної взаємодії знаходять своє місце й у феромагнетиках з періодично розташованими міжфазовими межами [39].

Крім того, останнім часом у зв'язку з вирощування плівок таких магнітних матеріалів, як залізо-ітрійовий гранат (ЗІГ), достатньо сильно підвищився інтерес до вивчення процесів поширення спінових хвиль. У цей час з'явилася можливість формувати на основі ЗІГ складні періодичні структури, хвильові й коливальні властивості яких зручно моделювати. ЗІГ має мале загасання, яке дозволяє розглядати його як перспективний матеріал для застосування в пристроях мікроелектроніки. В [34] докладно розглядаються методи генерації й детектування спінових хвиль, а також процеси їхнього поширення в магнітостатичному наближенні.

Як і у випадку немагнітних мультишарових матеріалів, а також у випадку мультишарових матеріалів типу магнетик-немагнетик, модуляція окремих магнітних параметрів, таких як величина одновісної анізотропії та обмінна взаємодія, і виникаючі при цьому різного роду міжшарові взаємодії достатньо змінюють поведінку системи магнітних плівок, у порівнянні з одношаровими плівками, що впливає на процеси поширення спінових хвиль у цих матеріалах.

Існують дві головні властивості, що роблять мультишарові матеріали такими важливими та специфічними для застосування:

- 1) Власні хвилі намагніченості в періодичних структурах являють собою нескінченний набір просторових гармонік, які мають фазові швидкості, що приймають значення від нуля до нескінченності;

2) У періодичних структурах можуть поширюватися виключно такі хвилі, що відповідають чітко обмеженим дозволеним зонам.

Тому для дослідження та розробки реальних пристроїв спін-хвильової мікроелектроніки на сьогодні є цікавим проаналізувати особливості поширення спінових хвиль у мультишаровій магнітній системі з модулюванням деяких магнітних параметрів (зокрема, параметрів анізотропії, намагніченості насичення та обмінної взаємодії).

### 3.2 Рівняння динаміки намагніченості в мультишаровому середовищі

Розглянемо необмежений мультишаровий феромагнетик, який складається з почергових однорідних одновісних феромагнітних шарів, які мають однакові значення параметрів обмінної взаємодії  $\alpha$ , одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  та намагніченості насичення  $M_0$  (рисунок 3.2.1). Дана система знаходиться у зовнішньому однорідному магнітному полі  $H_0$ . Декартова система координат обрана таким чином, що вісь  $Ox$  паралельна площинам розділу шарів, а зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі  $Oz$ . Легкі осі в сусідніх шарах взаємно перпендикулярні і направлені під кутом  $45^\circ$  до межі шарів, які мають товщини  $d_1$  та  $d_2$ .

В роботах [41-43] представлена коротка характеристика процесів відбиття спінових хвиль у періодичних структурах подібної конфігурації.

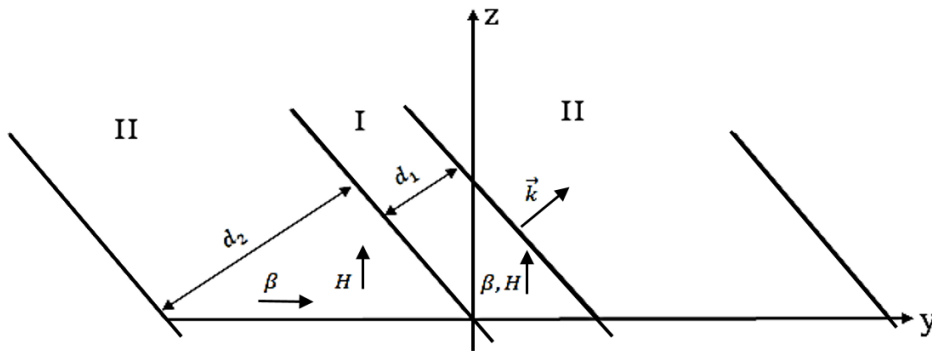


Рисунок 3.2.1 - Необмежений мультишаровий ферромагнетик з почерговими однорідними одновісними ферромагнітними шарами

Динаміка вектора намагніченості описується рівнянням руху моменту імпульсу, яке характеризує швидкість зміни моменту імпульсу та дорівнює обертаючому моменту. Рівняння руху вектора магнітного моменту вперше було запропоновано у роботах Ландау Л.Д. і Ліфшиця Є.М.

Моментом імпульсу одиниці об'єму магнетика, положення якого характеризується радіус-вектором  $\mathbf{r}$ , є механічний момент спінів  $\mathbf{L}$  електронів. Він зв'язаний з магнітним моментом наступним чином:

$$\mathbf{L} = -\frac{\mathbf{M}}{g},$$

де  $g$  – гіромагнітне відношення,  $\mathbf{M}$  – намагніченість.

Основне рівняння руху магнітного моменту може бути записане так:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{T}.$$

Обертальний момент, який діє на магнітний момент, обумовлений деяким ефективним магнітним полем  $\mathbf{H}_e$  і дорівнює

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}_e.$$

У випадку відсутності дисипації ефективне магнітне поле, яке діє на магнітний момент, визначається як

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\delta w}{\delta \mathbf{M}}$$

де  $w$  - просторова густина енергії магнетика.

Рівняння руху вектора магнітного моменту із урахуванням дисипації матиме вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -g[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\lambda}{M_S^2} [\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e]],$$

де  $\lambda$  – параметр згасання в формі Ландау, а саме рівняння називається рівнянням руху магнітного моменту Ландау-Ліфшиця.

Така форма рівняння Ландау-Ліфшиця не є єдиною, і поруч з нею користуються рівнянням в формі Гільберта [44]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -g[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\lambda}{M_0} \left[ \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right],$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт згасання у формі Гільберта,  $\mathbf{H}_e$  – ефективне магнітне поле.

Перший доданок у рівнянні Ландау-Ліфшиця описує прецесію магнітного моменту навколо напрямку ефективного магнітного поля, другий доданок описує релаксацію намагніченості.

В роботі [45] було показано, що, поряд зі дисипативним доданком у сильних магнітних полях, у рівнянні Ландау-Ліфшиця необхідно враховувати дисипацію, яка обумовлена неоднорідним обміном.

Слідуючи [45], представимо розподіл намагніченості в матеріалі у вигляді:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_0 \Psi^+(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi(\mathbf{r}, t),$$

де

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad \Psi^+(\mathbf{r}, t) = (\Psi_1^*(\mathbf{r}, t) \quad \Psi_2^*(\mathbf{r}, t)) \quad - \quad \text{квзікласичні}$$

«хвильові функції» електронів (спінори),  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор декартової системи координат,  $\boldsymbol{\sigma}$  - двохрядні матриці Паулі:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Принцип найменшої дії приводить до таких рівнянь Лагранжа при урахуванні згасання у системі [45]:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^+ \boldsymbol{\sigma} \Psi)}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi^+(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mu_0 \Psi^+(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi \boldsymbol{\sigma} \Psi^+)}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^+. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

Враховуючи, що в основному стані матеріал намагнічений паралельно осі  $z$ , представимо

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t),$$

де  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  є малим відхиленням від основного стану. Припускаючи  $M^2(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ , будемо шукати розв'язок (3.2.1) у вигляді:

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}.$$

Функція  $\Psi_0$  описує основний стан магнетика,  $\Psi_1$  – малі відхилення від основного стану в рамках першого порядку теорії збурень.

Якщо параметри матеріалу задовольняють умові  $L \gg d$  [34], де  $L$  – характеристична довжина матеріалу,  $d = d_1 + d_2$  – період функцій  $\alpha$  і  $\beta$ , то в ефективному гамільтоніані задачі можна знехтувати членами, які описують магнітостатичну взаємодію, у порівнянні з обмінними і записати для густини енергії такий вираз:

$$w = \frac{\alpha(x)}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\beta(x)}{2} (m_x^2 + m_y^2) - H_0 M_z,$$

де  $\mathbf{H}_e^{(0)} = H_0 \mathbf{e}_z$  – зовнішнє магнітне поле, спрямоване уздовж осі  $z$ .

Тоді ефективне поле  $\mathbf{H}_e$  виглядає таким чином:

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) = [\alpha \Delta - \beta(x)] \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{n} [\beta(x) M_0 + H_0]$$

Тут  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор, напрямлений уздовж осі легкого намагнічування,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Представимо ефективне магнітне поле в рамках теорії збурень першого порядку у вигляді:

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_e^{(0)} + \mathbf{H}_e^{(1)},$$

де

$$\mathbf{H}_e^{(0)} = nH_0, \quad \mathbf{H}_e^{(1)} = [\alpha\Delta - \beta(x)]\mathbf{m}(\mathbf{r}, t).$$

Запишемо рівняння Лагранжа (3.2.1) для функції  $\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial t} &= -\mu_0 H_0 \sigma_z \Psi^{(0)} + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)+} \sigma_z \Psi^{(0)})}{\partial t} \sigma_z \Psi^{(0)}, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi^{(0)+}(r, t)}{\partial t} &= \mu_0 \Psi^{(0)+}(r, t) \sigma_z H_0 + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)} \sigma_z \Psi^{(0)+})}{\partial t} \sigma_z \Psi^{(0)+}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

Розв'язки рівнянь (3.2.2) будемо шукати у вигляді:

$$\Psi^{(0)} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(0)} \\ \Psi_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(0)+} = (\Psi_1^{(0)*} \quad \Psi_2^{(0)*}).$$

Тоді з рівнянь (3.2.2) випливає:

$$\Psi_1^{(0)} = e^{i\eta t},$$

$$\Psi_2^{(0)} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{(0)}(r, t) &= e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi^{(0)+}(r, t) &= e^{-i\eta t} (1 \quad 0), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

$$\text{де } \eta = \frac{H_0 \mu_0}{\hbar}.$$

Рівняння Лагранжа для  $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  з урахуванням релаксації матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)+} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \\
&+ \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(1)+} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)+} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)}, \\
i\hbar \frac{\partial \Psi^{(1)+}}{\partial t} &= \mu_0 \Psi^{+(1)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}_e^{(0)} + \mu_0 \Psi^{+(0)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}_e^{(1)} + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)+})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)+} + \\
&+ \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)+})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)+} + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial (\Psi^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)+})}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)+},
\end{aligned} \right\}$$

Перепишемо перше з двох рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \\
&+ \frac{\lambda \hbar}{2} \left( \frac{\partial \Psi^{+(0)}}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \Psi^{+(0)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)}}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} \right) + \\
&+ \frac{\lambda \hbar}{2} \left( \frac{\partial \Psi^{+(1)}}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} + \Psi^{+(1)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)}}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} \right)
\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

де  $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_2^{(1)} \end{pmatrix}$ ,  $\Psi^{(1)+}(\mathbf{r}, t) = (\Psi_1^{(1)*} \quad \Psi_2^{(1)*})$ ,

або

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(1)+}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\eta t} (\xi^*(\mathbf{r}, t) \quad \chi^*(\mathbf{r}, t)). \quad (3.2.5)$$

тут  $\xi(\mathbf{r}, t), \chi(\mathbf{r}, t)$  – малі (лінійні) додатки до елементів функції  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ .

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.2.1) будемо шукати у вигляді :

$$\Psi = e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}.$$

При підстановці у рівняння (3.2.4) функцій у вигляді (3.2.3), (3.2.5)

отримаємо:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda \hbar}{2} \left( \frac{\partial e^{-i\eta t}}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \\
& + \frac{\lambda \hbar}{2} e^{-i\eta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right] \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{\lambda \hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-i\eta t} \begin{pmatrix} \xi^+ & \chi^+ \end{pmatrix} \right] \cdot e^{2i\eta t} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{\lambda \hbar}{2} e^{-i\eta t} \begin{pmatrix} \xi^+ & \chi^+ \end{pmatrix} \frac{\partial e^{i\eta t}}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Позначимо через  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  відповідні компоненти доданку, що відповідає за згасання, тоді отримаємо:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda \hbar}{2} (S_x + S_y + S_z).$$

Тепер розрахуємо компоненти  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ :

$$\begin{aligned}
S_x & = \left( \frac{\partial e^{-i\eta t}}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sigma_x e^{2i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma_x e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right] \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-i\eta t} \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} \right] \cdot e^{2i\eta t} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} \frac{\partial e^{i\eta t}}{\partial t} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
& = -i\eta e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\eta e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \\
& - i\eta e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
& + i\eta e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_y &= \left( \frac{\partial e^{-i\eta t}}{\partial t} (1 \ 0) \cdot \sigma_y e^{2i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \\
&+ (1 \ 0) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma_y e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right] \sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} [e^{-i\eta t} (\xi^* \ \chi^*)] \cdot e^{2i\eta t} \sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ (\xi^* \ \chi^*) \frac{\partial e^{i\eta t}}{\partial t} \sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= -i\eta e^{i\eta t} (1 \ 0) \begin{pmatrix} -i\chi \\ i\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + i\eta e^{i\eta t} (1 \ 0) \begin{pmatrix} -i\chi \\ i\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \\
&+ e^{i\eta t} (1 \ 0) \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -i\chi \\ i\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} - i\eta e^{i\eta t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \\
&+ e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + i\eta e^{i\eta t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \\
&= e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} (\chi - \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z &= \left( \frac{\partial e^{-i\eta t}}{\partial t} (1 \ 0) \cdot \sigma_z e^{2i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \\
&+ (1 \ 0) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma_z e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right] \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} [e^{-i\eta t} (\xi^* \ \chi^*)] \cdot e^{2i\eta t} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ (\xi^* \ \chi^*) \frac{\partial e^{i\eta t}}{\partial t} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= -i\eta e^{i\eta t} (1 \ 0) \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\eta e^{i\eta t} (1 \ 0) \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ e^{i\eta t} (1 \ 0) \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\eta e^{i\eta t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\eta e^{i\eta t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} (\xi + \xi^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

За умови  $m_z = 0$  справедливе співвідношення  $\xi + \xi^* = 0$ . Дійсно,

$$\begin{aligned}
m_z &= M_0 \Psi^{(1)+} \sigma_z \Psi^{(0)} + M_0 \Psi^{(0)+} \sigma_z \Psi^{(1)} = \\
&= M_0 \left( e^{-i\eta t} (\xi^* \ \chi^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-i\eta t} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) =
\end{aligned}$$

$$= M_0 \left( (\xi^* \quad \chi^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) = M_0(\xi^* + \xi) = 0.$$

Відповідно,  $S_z = 0$ .

Враховуючи вищезазначене, отримуємо рівняння:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \hbar e^{i\eta t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$i\hbar e^{i\eta t} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \hbar \eta e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \hbar e^{i\eta t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділимо обидві частини на  $\mu_0 e^{i\eta t}$ :

$$\frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{\hbar \eta}{\mu_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda \hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{\hbar \eta}{\mu_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - H_0 \sigma_z \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \alpha(x) \Delta \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \beta(x) (m_x n_x + m_y n_y) \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda \hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Користуючись (3.2.3), (3.2.5) перепишемо вирази для  $m_x, m_y$  у термінах функцій  $\xi(\mathbf{r}, t), \chi(\mathbf{r}, t)$ :

$$m_x = M_0 \Psi^{(1)+} \sigma_x \Psi^{(0)} + M_0 \Psi^{(0)+} \sigma_x \Psi^{(1)} =$$

$$= M_0 \left( e^{-i\eta t} (\xi^* \quad \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-i\eta t} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) =$$

$$= M_0 \left( (\xi^* \quad \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 1) \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) = M_0(\chi^* + \chi),$$

$$m_y = M_0 \Psi^{(1)+} \sigma_y \Psi^{(0)} + M_0 \Psi^{(0)+} \sigma_y \Psi^{(1)} =$$

$$= M_0 \left( e^{-i\eta t} (\xi^* \quad \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-i\eta t} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) =$$

$$= M_0 \left( (\xi^* \quad \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + (0 \quad -i) \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \right) = iM_0(\chi^* - \chi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} &= \frac{\hbar\eta}{\mu_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} - \\ &- \alpha(x)\Delta M_0 \left[ (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \beta(x)M_0 \left( (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} &= H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} - \alpha(x)\Delta M_0 \left[ (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \beta(x)M_0 \left( (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right) + \frac{\lambda\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.6) \end{aligned}$$

$$\frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = 2\chi H_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\alpha(x)M_0\Delta\chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\beta(x)M_0\chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділимо обидві частини (3.2.6) на  $2M_0$  і позначимо  $\tilde{H} = \frac{H_0}{M_0}$ :

$$\frac{i\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = [\tilde{H} - \alpha(x)\Delta + \beta(x)]\chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

Аналогічним способом отримуємо рівняння:

$$-\frac{i\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi^* & \chi^* \end{pmatrix} = [\tilde{H} - \alpha(x)\Delta + \beta(x)]\chi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \chi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Виконаємо перетворення Фур'є за часом:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \xi_\omega(\mathbf{r}) d\omega,$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi_\omega(\mathbf{r}) d\omega,$$

де  $\xi_\omega(\mathbf{r})$  та  $\chi_\omega(\mathbf{r})$  – Фур'є-образи функцій  $\xi(\mathbf{r}, t)$  та  $\chi(\mathbf{r}, t)$  відповідно,  $\omega$  – частота.

Оскільки  $\alpha$  і  $\beta$  – функції лише координати  $x$ , застосуємо до функцій  $\xi_\omega(\mathbf{r})$  та  $\chi_\omega(\mathbf{r})$

перетворення Фур'є за координатами  $y$  та  $z$ :

$$\xi_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_\perp \rho} \xi_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(x) d^2 \mathbf{k}_\perp,$$

$$\chi_{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}_{\perp}\boldsymbol{\rho}} \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x) d^2 \mathbf{k}_{\perp},$$

де  $\mathbf{k}_{\perp} = (0, k_y, k_z)$  - хвильовий вектор у площині шару,  $\boldsymbol{\rho} = (0, y, z)$ .

Тоді отримуємо з (3.2.7) - (3.2.8) таку систему:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x) &= 0, \\ \xi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}^*(x) &= 0, \\ \alpha \frac{\partial^2 \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x)}{\partial x^2} &= [\alpha k_{\perp}^2 + \beta + \tilde{H} - \Omega] \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x) - i\lambda\Omega \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}, \\ \alpha \frac{\partial^2 \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}^*(x)}{\partial x^2} &= [\alpha k_{\perp}^2 + \beta + \tilde{H} - \Omega] \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}^*(x) + i\lambda\Omega \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

де  $k_{\perp}^2 = k_z^2 + k_y^2$ , а  $\Omega = \frac{\omega\hbar}{2\mu_0 M_0}$ .

### 3.3 Особливості трансформації спінових хвиль при проходженні через границю

Знаходження спектрів спінових хвиль в структурах з безперервною і дискретною трансляційною симетрією є добре відомим завданням [46-57]. Так, в [46-53] детально дослідженні спектр і дисперсія магнітостатичних хвиль в різній геометрії експерименту. Дисперсія обмінних спінових хвиль в різних магнетонних кристалах була розглянута, наприклад, в [44-47]. Розсіювання магнітостатичних хвиль та обмінних спінових хвиль було вивчено в [46-64].

Для отримання амплітуд розсіювання обмінних спінових хвиль використовується короткохвильове наближення, часто в поєднанні з наближенням

геометричної оптики [62,63]. Наприклад, в [62,63] обмінні спінові хвилі описуються скалярною функцією, що підкоряється рівнянню типу Шредінгера, а отримані коефіцієнти розсіювання по виду збігаються зі звичайними френелівськими коефіцієнтами в оптиці [66], відрізняючись лише законом дисперсії.

Однак добре відомо, що особливістю обмінних спінових хвиль є наявність чотирьох коренів в дисперсійному рівнянні, два з яких уявні, тобто відповідають експоненціально спадаючим або зростаючим рішенням [67]. Це повинно приводити до відмінності задач розсіювання обмінних спінових хвиль від класичних, в яких динамічна змінна є або скалярною функцією (тиск в звуковій хвилі [68]), або строго поляризованою. Дійсно, в разі обмінних спінових хвиль можна говорити лише про поляризацію основного стану, яка визначає киральність прецесії намагніченості. Тому кожна з розсіювальних хвиль має по дві динамічні компоненти намагніченості. При цьому, амплітуди цих компонент не є незалежними, а пов'язані через відповідні еліптичності, що визначаються з рівняння Ландау-Ліфшиця [67]. У той же час, система граничних умов для зшивання обмінних спінових хвиль рішень на кордоні двох феромагнітних середовищ містить чотири скалярні рівняння. Таким чином, одержувана система рівнянь в загальному випадку виявляється перевизначена, що призводить до невідповідності числа невідомих амплітуд хвиль і рівнянь. Тому, в загальному випадку, для вирішення завдання про розсіювання обмінних спінових хвиль необхідний облік всіх коренів дисперсійного рівняння в граничних умовах (як дійсних, так і уявних).

### 3.4 Закон дисперсії для феромагнетика з однією анізотропією напрямку $\vec{\beta} \parallel \vec{H}$

Розглянемо поширення хвилі в однорідному середовищі, параметри  $\alpha$  і  $\beta$  якого слабо змінюються. У такому випадку застосуємо до функції  $\chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x)$  перетворення Фур'є по координаті  $x$ :

$$\chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x x} \chi_{\omega, \mathbf{k}} dk_x.$$

Отримуємо залежність вигляду:

$$-\alpha k_x^2 \chi_{\omega, \mathbf{k}} = [\alpha k_{\perp}^2 + \beta + \tilde{H} - \Omega - i\lambda\Omega] \chi_{\omega, \mathbf{k}} = 0.$$

Звідси маємо рівняння дисперсії:

$$\alpha k^2 = -\beta - \tilde{H} + \Omega + i\lambda\Omega,$$

де  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ .

При  $\lambda = 0$  отримуємо відоме рівняння дисперсії для середовища без згасання:

$$\alpha k^2 = -\beta - \tilde{H} + \Omega.$$

Рівняння (3.2.9) описує динаміку намагніченості у короткохвильовому (обмінному) наближенні. З рівняння (3.2.9) випливає, що розв'язок даного рівняння повинен бути неперервним і мати неперервну похідну  $\frac{\partial \chi_{\omega, \mathbf{k}_{\perp}}(x)}{\partial x}$ . У цьому випадку за відсутності згасання рівняння (3.2.9) буде аналогічне рівнянню Шредінгера для руху частинки в одновимірному потенціалі. Це дає можливість застосувати добре вивчені та розвинені методи квантової механіки для опису процесів, що відбуваються у багат шарових матеріалах.

Далі розглянемо середовища, які представляють собою двошарову структуру, що періодично повторюється у просторі. Зсув у такому середовищі на ціле число

періодів у деякому напрямку не змінить вигляду структури, тому відмінність періодичних матеріалів від однорідних речовин полягає у додатковій трансляційній симетрії. Для розрахунку хвильових процесів у таких середовищах можна розв'язати хвильові рівняння у кожному з однорідних шарів, а потім зшити отримані розв'язки, враховуючи граничні умови для намагніченості на границях розділу шарів.

### 3.5. Закон дисперсії для феромагнетика з однією анізотропією напрямку $\vec{\beta} \perp \vec{H}$

Розглянемо необмежений феромагнетик, який складається із двох напівнескінчених частин, що контактують уздовж площини  $yOz$ , і мають у відповідних півпросторах значення намагніченості насичення  $M_{01}$  та  $M_{02}$ , а також значення параметрів обмінної взаємодії  $\alpha$  і ромбічної  $\beta$  магнітної анізотропії, які безперервно (або кусково-безперервно) і повільно змінюються. Легка вісь магнетика й зовнішнє постійне магнітне поле спрямовані уздовж осі  $Oz$ .

Густина енергії магнетика описаної конфігурації в обмінному (високочастотному) наближенні має вигляд [69]:

$$w = \sum_{j=1}^2 \theta[(-1)^j x] w_j + A \delta(x) \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (3.5.1)$$

де

$$w_j = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial m_j}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\beta}{2} m_{jx}^2 - H_0 M_{jz}, \quad (3.5.2)$$

$\theta(x)$  – східчаста функція Хевісайда;  $A$  – параметр, що характеризує обмінну взаємодію в інтерфейсі між півпросторами при  $x = 0$ ;  $\mathbf{M}_j = M_{0j} \mathbf{e}_z + \mathbf{m}_j$ ,  $\mathbf{m}_j$  – малі відхилення намагніченості від основного стану,  $j = 1, 2$ .

Будемо використовувати формалізм спінової густини [69], відповідно до якого намагніченість можна представити у вигляді:

$$\mathbf{M}_j(\mathbf{r}, t) = M_{0j} \Psi_j^+(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi_j(\mathbf{r}, t), j = 1, 2. \quad (3.5.3)$$

де (опустимо на деякий час індекс  $j$ , який нумерує контактуючі середовища)

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix},$$

$$\Psi^+(\mathbf{r}, t) = (\Psi_1^+(\mathbf{r}, t) \quad \Psi_2^+(\mathbf{r}, t))$$

– квазікласичні хвильові функції, які грають роль параметра порядку спінової густини,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор декартової системи координат,  $\boldsymbol{\sigma}$  – двохрядні матриці Паулі.

Принцип найменшої дії призводить до таких рівнянь Лагранжа для  $\Psi_j$  при відсутності згасання у системі [69]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{H}_{ej}(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.5.4)$$

де  $\mu_0$  – магнетон Бора,  $\mathbf{H}_{ej} = -\frac{\partial w_j}{\partial \mathbf{M}_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial w_j}{\partial (\partial \mathbf{M}_j / \partial x_k)}$ .

Будемо шукати розв'язок (3.5.4) в рамках лінійної теорії збурень у вигляді:

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}.$$

В слабо неоднорідному двохосьовому феромагнітному середовищі ефективне магнітне поле можна записати у вигляді:

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_e^{(0)} + \mathbf{H}_e^{(1)},$$

де  $\mathbf{H}_e^{(0)} = H_0 \mathbf{e}_z$  – зовнішнє магнітне поле,  $\mathbf{H}_e^{(1)} = \alpha(x)\Delta\mathbf{M} - \beta(x)m_x \mathbf{e}_x$ .

Запишемо рівняння Лагранжа (3.5.4) для функції  $\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial t} = -\mu_0 H_0 \sigma_z \Psi^{(0)} \quad (3.5.5)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^{(0)+}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \Psi^{(0)+}(\mathbf{r}, t) \sigma_z H_0$$

Тоді з рівнянь (3.5.5) випливає:

$$\Psi_1^{(0)} = e^{i\eta t},$$

$$\Psi_2^{(0)} = 0,$$

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.6)$$

$$\Psi^{(0)+}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\eta t} (1 \ 0).$$

$$\text{де } \eta = \frac{H_0 \mu_0}{\hbar}.$$

Рівняння Лагранжа для  $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  матимуть вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(1)} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} \Psi^{(0)} \quad (3.5.7)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^{(1)+}}{\partial t} = \mu_0 \Psi^{(1)+} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}_e^{(0)} + \mu_0 \Psi^{(0)+} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}_e^{(1)}$$

Отже загальний розв'язок рівняння (3.5.5) будемо шукати у вигляді :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.5.8)$$

При підстановці у рівняння (3.5.7) функцій у вигляді (3.5.6) та (3.5.8):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = -\mu_0 \mathbf{H}_e^{(0)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - \mu_0 \mathbf{H}_e^{(1)} \boldsymbol{\sigma} e^{i\eta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.9)$$

Після певних перетворень одержимо, що

$$\frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{\hbar\eta}{\mu_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} -$$

$$-\alpha(\mathbf{r})\Delta M_0 \left[ (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \beta(\mathbf{r})M_0(\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\frac{i\hbar}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} - H_0 \begin{pmatrix} \xi \\ -\chi \end{pmatrix} - \quad (3.5.10) \\ -\alpha(\mathbf{r})\Delta M_0 \left[ (\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i(\chi^* - \chi) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right] + \\ + \beta(\mathbf{r})M_0(\chi + \chi^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділимо обидві частини (3.5.10) на  $2M_0$  і позначимо  $\tilde{H}_0 = \frac{H_0}{M_0}$ :

$$\frac{i\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[ \tilde{H}_0 - \alpha(\mathbf{r})\Delta + \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \right] \chi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \chi^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічним способом отримуємо рівняння:

$$-\frac{i\hbar}{2M_0\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \left[ \tilde{H}_0 - \alpha(\mathbf{r})\Delta + \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \right] \chi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \chi \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що вклад у відхилення намагніченості дає тільки функція  $\chi(\mathbf{r}, t)$ , тому проведена лінеаризація приводить до такого загального вигляду хвильової функції в кожному з півпросторів ( $j = 1, 2$ ):

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \exp(i\mu_0 H_0 t / \hbar) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_j(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (3.5.11)$$

Таким чином, лінеаризація рівняння (3.5.4) з урахуванням (3.5.11) приводить до таких рівнянь:

$$-\frac{i\hbar}{2\mu_0 M_{0j}} \frac{\partial \chi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( \alpha(\mathbf{r})\Delta - \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} - \tilde{H}_{0j} \right) \chi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \chi_j^*(\mathbf{r}, t), \\ \frac{i\hbar}{2\mu_0 M_{0j}} \frac{\partial \chi_j^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( \alpha(\mathbf{r})\Delta - \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} - \tilde{H}_{0j} \right) \chi_j^*(\mathbf{r}, t) - \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \chi_j(\mathbf{r}, t). \quad (3.5.12)$$

Виражаючи  $\chi^*(\mathbf{r}, t)$  з одного з рівнянь системи (3.5.12) і підставляючи в інше, приходимо до наступного рівняння динаміки намагніченості:

$$-\frac{\hbar^2}{(2\mu_0 M_{0j})^2} \frac{\partial^2 \chi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \left[ \alpha^2 \Delta^2 - 2\alpha \left( \frac{\beta}{2} + \tilde{H}_{0j} \right) \Delta + \tilde{H}_{0j} (\beta + \tilde{H}_{0j}) \right] \chi_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.5.13)$$

Тоді, застосовуючи перетворення Фур'є, отримуємо для поверхневої спінової хвилі, яка експоненціально загасає вглиб магнетика уздовж осі Oz, дисперсійне співвідношення:

$$\Omega_j^2 = [\alpha(\mathbf{r}_\perp) k_\perp^2(\mathbf{r}_\perp) + \tilde{H}_{0j}] \times [\alpha(\mathbf{r}_\perp) k_\perp^2(\mathbf{r}_\perp) + \beta(\mathbf{r}_\perp) + \tilde{H}_{0j}], \quad (3.5.14)$$

де  $\Omega_j = \frac{\omega \hbar}{2\mu_0 M_{0j}}$ ,  $\omega$  – частота,  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$  – хвильовий вектор,  $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ .

### 3.6 Спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі

Спектр спінових хвиль у мультишаровій системі з модуляцією параметра одновісної анізотропії і має вигляд:

$$\cos Kd = \left( \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right) \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_1 + \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_1$$

Графік залежності безрозмірної частоти  $\Omega$  від квазіхвильового вектора  $K$ , який відповідає отриманому рівнянню, наведений на рисунок 3.6.1 при значеннях параметрів  $\alpha = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $\beta = 2$ ,  $M_0 = 100 \text{ Гс}$ ,  $d_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $\tilde{H}_0 = 10$ .

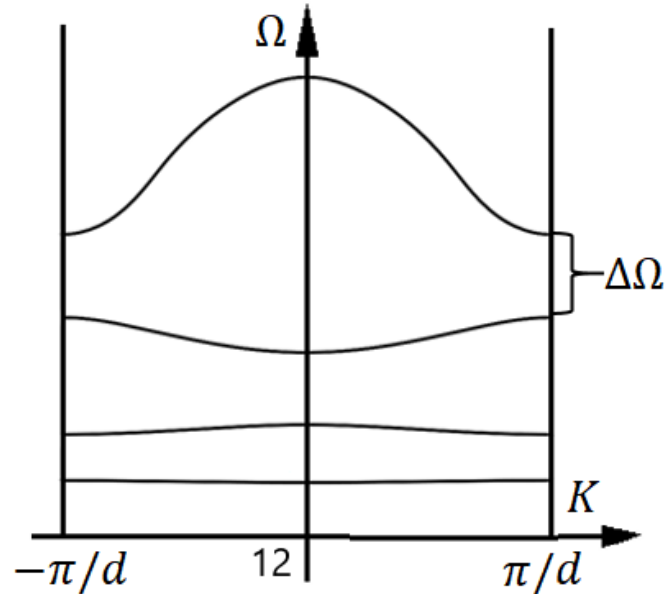


Рисунок 3.6.1 - Спектр спінових хвиль в мультишаровому матеріалі з модульованим напрямком параметру одновісної анізотропії

### 3.7 Спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямком анізотропії

З рисунку 3.6.1 можна побачити, що має місце розщеплення окремих рівнів, що характеризують спектр коливань феромагнітної системи, на зони. Це – характерна особливість будь-якої мультишарової системи [70].

Найнижча зона – активаційна, порогове значення якої для відзначених параметрів системи:  $\Omega_0 \approx 12.00235$ , що відповідає реальній частоті:

$$\omega_0 = \frac{2\mu_0 M_0 \Omega_0}{\hbar} \approx 2,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

Аналогічно, розміри наступних заборонених зон:

$$\Delta\Omega_1 \approx 0,00683; \Delta\omega_1 \approx 1,2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta\Omega_2 \approx 0,01072; \Delta\omega_2 \approx 1,9 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Дослідимо зміну характерних точок спектру від зміни параметрів системи. На рисунку 3.7.1 зображена залежність початків дозволених зон  $\Omega_i$  від абсолютного значення параметра одновісної магнітної анізотропії.

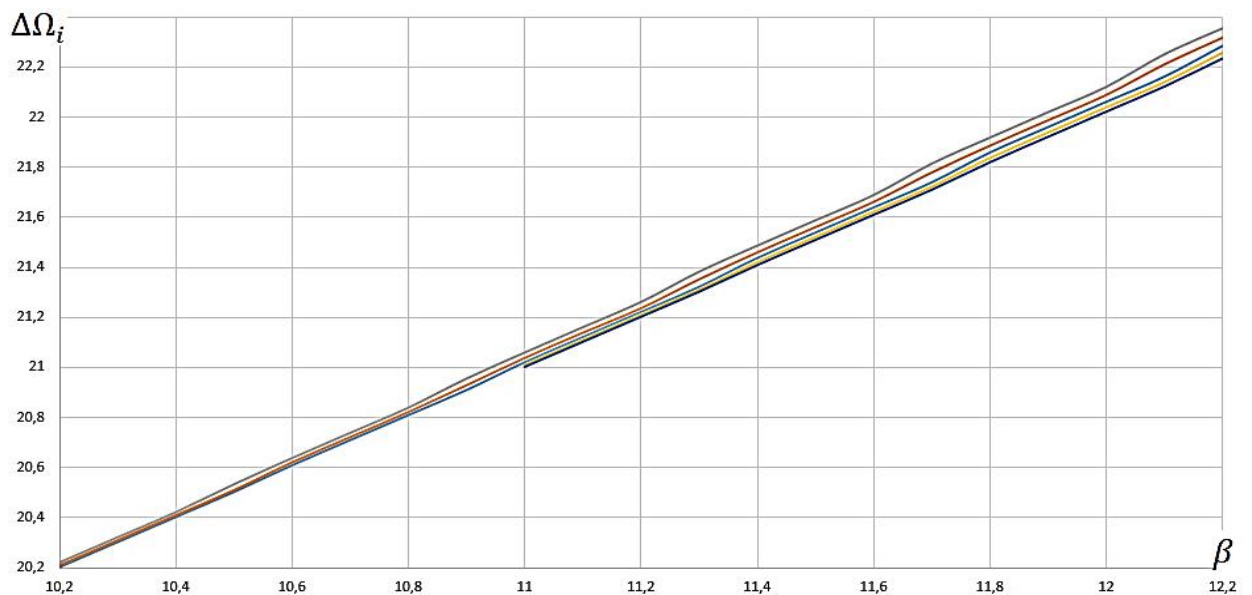


Рисунок 3.7.1 - Залежність початків дозволених зон частоти  $\Omega_i$  від одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  при  $\alpha = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $M_0 = 100 \text{ Гс}$ ,  $d_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $\tilde{H}_0 = 10$ .

Відзначимо, що зі збільшенням параметра одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  відбувається не тільки зміщення зон в область більш високих частот, але й зародження нових зон в нижній частині спектра (рисунок 3.7.2). Зокрема, при значенні  $\beta = 11$  бачимо початок нової кривої, яка і відповідає новонародженій зоні.

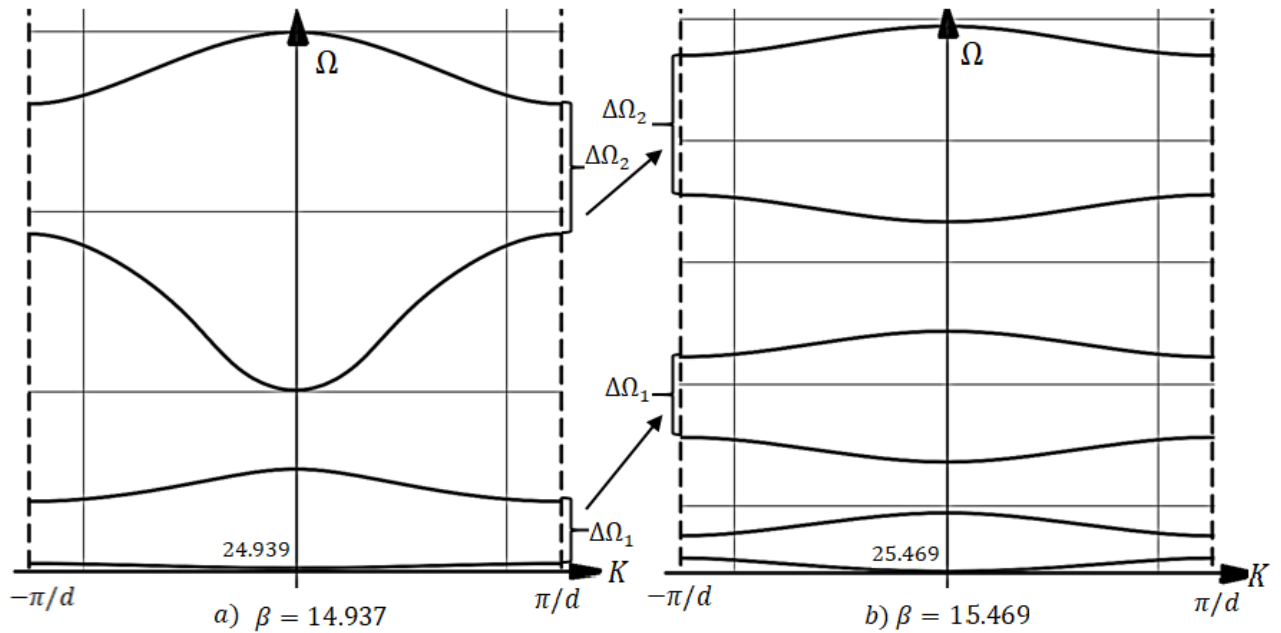


Рисунок 3.7.2 - Еволюція спектра спінових хвиль в мультишаровому матеріалі при зміні величини параметра одновісної анізотропії  $\beta$  ( $\alpha = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $M_0 = 100 \text{ Гс}$ ,  $d_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $\tilde{N}_0 = 10$ ).

На рисунку 3.7.3 наведені графіки залежності ширин дозволених зон як функцій параметра анізотропії. Бачимо, що на деяких ділянках навіть невеликі зміни анізотропії призводять до суттєвої зміни ширини зони, причому положення періодично розташованих максимумів та мінімумів для ширини кожної зони може бути чітко визначено.

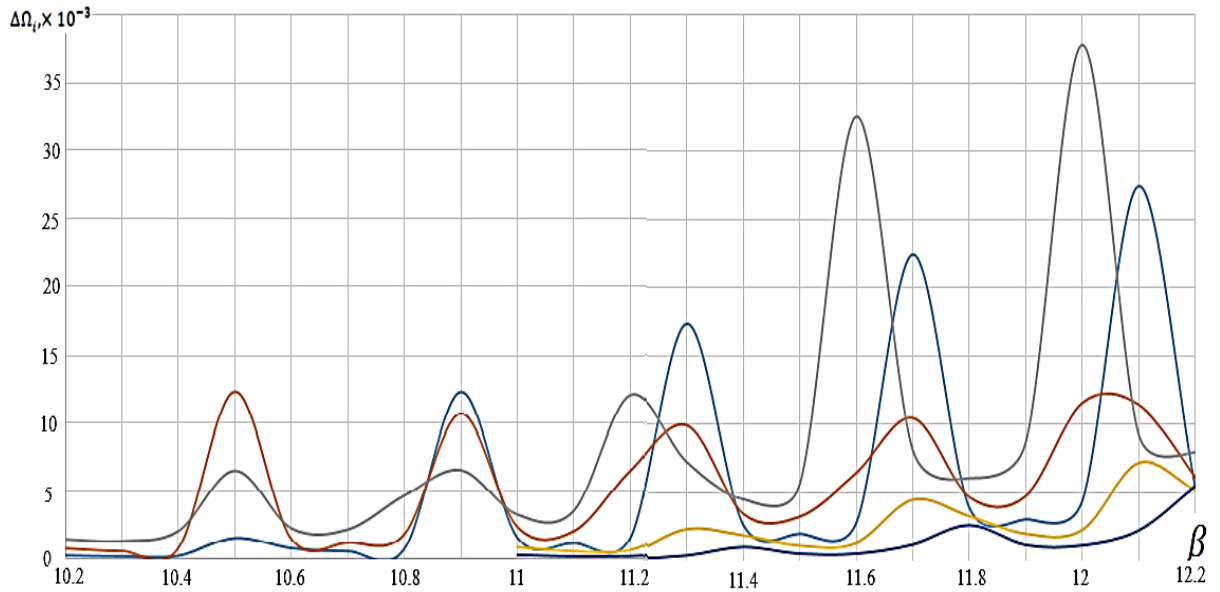


Рисунок 3.7.3 - Залежність ширин дозволених зон частоти  $\Delta\Omega_i$  від одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  при  $\alpha = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $M_0 = 100 \text{ Гс}$ ,  $d_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $\widetilde{H}_0 = 10$ .

## ВИСНОВКИ ДО 3 РОЗДІЛУ

Мультишарові феромагнетики володіють значною кількістю унікальних властивостей, які дозволяють їх широко використовувати мікро- та нанотехнологіях. У даному розділі було роз'яснено природу мультишарових феромагнітних структур, розраховано енергію феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі та знайдено закони дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією напрямку  $\vec{\beta} \parallel \vec{H}$  та  $\vec{\beta} \perp \vec{H}$ . Отримано спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямком анізотропії. Зокрема, визначено аналітичний вигляд спектру обмінних спінових хвиль в магнетонному кристалі з періодично розташованими шарами, напрямком легкої осі в яких взаємноперпендикулярний. Досліджено еволюцію спектральних ліній в залежності від абсолютної величини параметра анізотропії. Показано динаміку зміни форми та характерних точок спектральних кривих, визначено вклад значення параметра анізотропії на ширину дозволених та заборонених зон. Побудовано графіки функцій характеристик мультишарових структур від різних параметрів системи.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Одним із перспективних напрямів надвисокочастотної наноелектроніки і мікроелектроніки є створення магнітних матеріалів, які містять наперед задані дисперсійні властивості. Очевидно, що мультишарові структури з періодичним і неперіодичним чергуванням шарів дають більші можливості керування дисперсійними характеристиками, ніж однорідні феромагнітні плівки [71—77]. Таким чином, область застосування мультишарових магнітних структур є набагато ширшою, ніж одиночних феромагнітних плівок.

У даній дипломній роботі було розраховано енергію феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку в магнітному полі та отримано рівняння Ландау-Ліфшиця для феромагнетика з різним напрямком анізотропії. Отримано закон дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку. Зроблено аналіз закону дисперсії для феромагнетика з одновісною анізотропією різного напрямку та отримано спектральні характеристики мультишарових структур з модульованим напрямком анізотропії. Зокрема, визначено аналітичний вигляд спектру обмінних спінових хвиль в магнетонному кристалі з періодично розташованими шарами, напрямком легкої осі в яких взаємноперпендикулярний. Досліджено еволюцію спектральних ліній в залежності від абсолютної величини параметра анізотропії. Показано динаміку зміни форми та характерних точок спектральних кривих, визначено вклад значення параметра анізотропії на ширину дозволених та заборонених зон. Зокрема, при збільшенні значення одновісної магнітної анізотропії  $\beta$  при фіксованих значеннях  $\alpha$ ,  $M_0$ ,  $d_1$ ,  $d$ ,  $\tilde{H}_0$  границі як

дозволені, так і заборонені зон нелінійно зміщуються по осі частот і розміри зон при цьому також нелінійно змінюються.

Подібні властивості спінових хвиль в мультишарових матеріалах можуть бути використані для створення багатосмугових фільтрів обмінних спінових хвиль з керованими діапазонами смуг пропускання та відбивання.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гуревич А. Г. Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994. С — 464.
2. Chumak A.V., Serga A.A., Burkard Hillebrands. Magnon transistor for all-magnon data processing [Online]. — Available: <https://www.nature.com/articles/ncomms5700>.
3. Srinivasan G., Slavin A. N. High frequency processes in magnetic materials Текст. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995. P — 256.
4. Camley R.E., Stamps R.L. Magnetic multilayers: spin configurations, excitations and giant magnetoresistance // Journal of Physics: Condensed Matter. — 1993. — **5**, № 23. — P. 3727-3786.
5. Stamps R.L., Breitzkreutz S., Akerman J., Chumak A.V., Otani Y., Bauer G.E., ... & Prejbeanu I.L. 2014 Magnetism roadmap [Online]. — Available: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1410/1410.6404.pdf>.
6. Zhu Y., Chi K.H., Tsai C.S. Magnonic crystalsbased tunable microwave phase shifters [Online]. — Available: <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4890476>.
7. Metaxas P.J., Sushruth M., Begley R.A., Ding J., Woodward R.C., Maksymov I.S., ... & Kostylev M. Sensing magnetic nanoparticles using nano-confined ferromagnetic resonances in a magnonic crystal [Online]. — Available: <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4922392>.
8. Sushruth M., Ding J., Duczynski J., Woodward R.C., Begley R.A., Fangohr H., ... & Metaxas P.J. Resonance-based detection of magnetic nanoparticles and microbeads

using nanopatterned ferromagnets [Online]. — Available: <https://journals.aps.org/prapplied/pdf/10.1103/PhysRevApplied.6.044005>.

9. Gambino R. J., Plaskett T.S., Ruf R.R. // IEEE Trans. Magn. 1988 V.24. N 6. P.2557-2559.

10. Gueugnon G., Bernstein P., Lefebvre R. // J. Appl. Phys. 1985. V.57. N 3891-3893.

11. Barnas J. // J.Phys.C.: Solid State Phys. 1988. V. 21. P. 1021-1036.

12. Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D. Magnonics [Online]. — Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/43/26/264001/pdf>.

13. Lenk B., Ulrichs H., Garbs F., Münzenberg M. The building blocks of magnonics // Physics Reports. — 2011. — **507**, №4. — P. 107-136.

14. Krawczyk M., Grundler D. Review and prospects of magnonic crystals and devices with reprogrammable band structure [Online]. — Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/26/12/123202/pdf>.

15. Serga A.A., Chumak A.V., Hillebrands B. YIG magnonics. [Online]. — Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/43/26/264002/pdf>.

16. Chumak A.V., Neumann T., Serga A.A., Hillebrands B., Kostylev M.P. A current-controlled, dynamic magnonic crystal. [Online]. — Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/42/20/205005/pdf>.

17. Pirro P., Brächer T., Chumak A.V., Lägél B., Dubs C., Surzhenko O., ... & Hillebrands B. Spin-wave excitation and propagation in microstructured waveguides of yttrium iron garnet/Pt bilayers // Applied Physics Letters. — 2014 — **104**, №1 — P. 012402-1-4.

18. Jungfleisch M.B., Zhang W., Jiang W., Chang H., Sklenar J., Wu S. M., ... & Hoffmann A. Spin waves in micro-structured yttrium iron garnet nanometer-thick films // Journal of Applied Physics — 2015. — **117**, №17. — P. 17D128-1-4.

19. Зайончковский В.С., Козлов В.И., Николаев Е.И., Борисов Б.Г. // ФТТ. 1982. Т. 24. № 1. С. 9-14.
20. Шамсутдинов М.А., Веселаго В.Г., Фарзтдинов М.М., Екомасов Е.Г. // ФТТ. 1990. Т.32. №2. С. 497-502.
21. Каганов М. И. Природа магнетизма / М. И. Каганов, В. М. Цукерник. – М.: Наука, 1982. – 192 с. – 150000 экз.
22. Поплавко Ю. М. Основы физики магнитных явлений в кристаллах: учеб. пособие / Ю. М. Поплавко. – Київ: АБЕРС, 2007. – 215 с. – Библиогр.: с. 315. – 300 экз
23. Prabhakar, A.; Stancil, D.D. *Spin Waves, Theory and Applications*; Springer: New York, NY, USA, 2009.
24. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Спиновые волны (Москва: Наука: 1967).
25. Гуляев Ю В, Дикштейн И Е, Шавров В Г "Поверхностные магнитоакустические волны в магнитных кристаллах в области ориентационных фазовых переходов" *УФН* **167** 735–750 (1997).
26. Каганов М И, Пустыльник Н Б, Шалаева Т И "Магноны, магнитные поляритоны, магнитостатические волны" *УФН* **167** 191–237 (1997).
27. Бутрим В.И. Анизотропия и фазовые состояния феррит-гранатовых пленок с разориентированными поверхностями / В.И. Бутрим, С.В. Дубинко, Ю.Н. Мицай // Физика Твердого Тела. – 2003. – Т. 45. – С. 1052-1055.
28. Иелон А. Взаимодействие в многослойных пленочных магнитных структурах. В кн. Физика тонких пленок т. 6 / под ред. Франкомба М.Х. и Гофмана Р.У. / М.: Мир, 1973.- С. 228-334.
29. Henry R.D., Besser P.J. Магнитодоменная структура с подавлением "жестких" доменов. Патент США 4001793 ГПСИ/14 340-2174 ТГ, опубл.

04.01.1977.

30. Зайончковский В.С., Ринас Э.П., Николаев Е.И. Влияние ионной имплантации на состояние поверхности эпитаксиальных пленок ферритгранатов.//ФТТ.- 1982.-Т.22, N 3.- С.911-913.

31. Филиппов В.В. Связанные поверхностные магнитостатические волны в слоистых системах.// Радиотехника и электроника, 1988.- 33, N 6.- С.1225-1232.

32. Grunberg P., Mika K. Magnetostatic spin wave model a ferromagnetic multilayer.//Phys. Rev. B.- 1983.- v.27, N5.- P. 2955-2965.

33. Grunberg P., Mika K. Dipolar spin - wave modes of ferromagnetic multilayer with alternating directions of magnetization.// Phys. Rev. B. - 1985. - v.31, N 7. - P.4465-4471.

34. Nagai Y., Senda M., Toshima T. Properties of ion-beam sputtered Ni/Fe artificial lattice films.//J.Appl.Phys.- 1988.- v.63, P.1136-1140.

35. Грибкова Ю.В., Каганов М.И. Зонный магнитодипольный спектр ферромагнитной сверхрешетки.// Письма в ЖЭТФ.- 1988.- т.47.- С.588-591.

36. Spin waves in a magnetic superlattice./Albuquerque E.L., Fulco P., Sarmiento E.F., Tilley D.R.// Solid State Commun.- 1986.- v.58, N 1.- P.41-44.

37. Hinchey L.L., Mills D.L. Magnetic properties of superlattices formed from ferromagnetic and antiferromagnetic materials.// Phys. Rev. B. -1986.- v.33, N 5.- P.3329.

38. Barnas J. Spin waves in superlattices: I. General dispersion equation for exchange, magnetostatic and retarded modes. II. Magnetostatic modes in the Voigt configuration. // J.Phys.C.:Solid State Phys.- 1988.- v.21.- P.1021-1036, 4097-4112.

39. Данилов В.В., Зависляк М.В., Балинский М.Г. Спинволновая электродинамика. - Киев: Лыбидь, 1991. - 212 с.

40. Ignatchenko V.A., Iskhakov R.S., Mankov Yu.I. Spin waves spectrum and damping in quasi-periodic multilayers// In book: Thesis of International Conference on

Magnetism.- Warsaw, 1994. - P. 781.

41. Исхаков Р.С., Чеканов А.С., Чеканова Л.А. // ФТТ. - 1990. - 32, 12. - С. 441-447.

42. Шамсутдинов М.А. Доменные границы в ферромагнетике с одномерными неоднородностями параметра обменного взаимодействия и константы магнитной анизотропии // ФТТ. - 1991. - Т. 33, № 11. - С. 3336-3342.

43. Клепарский В.Г., Дымченко Н.П. // Микроэлектроника. - 1988. - № 2.- С. 182-184.

44. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. Наука, М. (1967), 368 с.

45. Власова Н.И., Кандаурова Г.С., Оноприенко Л.Г., Щеголева Н.Н. // УФН. - 1992. - 162, №5. - С. 161-197.

46. Elachi C. Magnetic wave-propagation a periodic medium // IEEE MAG-11. 1975. P.36.

47. Gulayev Y.V., Nikitov S.A., Plesskii V.P. Magnetostatic wave-propagation in a normally magnetized ferrite plate with periodically non-flat surfaces. // Fizika Tverdogo Tela. 1980. V. 22. P.2831.

48. Beginin E.N., Filimonov Y.A., Pavlov E.S., Vysotskii S.L., Nikitov S.A. Bragg resonances of magnetostatic surface spin waves in a layered structure: Magnonic crystal-dielectric-metal // Applied Physics Letters. 2012. V. 100. P.252412.

49. Filimonov Y.A., Pavlov E., Vystostkii S.L., Nikitov S.A. Magnetostatic surface wave propagation in a one-dimensional magnonic crystal with broken translational symmetry // Applied Physics Letters. 2012. V. 101. P.242408.

50. Dzian S.A., Ivanov B.A. Collective oscillations of the magnetic moments of a chain of spherical magnetic nanoparticles with uniaxial magnetic anisotropy. // Journal of Eksperimental and Theoretical Physics. 2013. V. 116. P.975.

51. Morozova M.A., Grishin S.V., Sadovnikov A.V., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Magnonic bandgap control in coupled magnonic crystals. // IEEE Transactions on Magnetics. 2014. V. 50. P.4007204.

52. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях // М.: Физматлит. 2016. 359с.

53. Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике СВЧ. // Саратов. 1993. 314 с.

54. Ignatchenko V.A., Mankov Y.I., Maradudin A.A. The spectrum and damping of waves in partially randomized multilayers. // Journal of Physics: Condensed Matter. 1999. V. 11. P.2773.

55. Ignatchenko V.A., Tsikalov D.S. Spin waves in multilayers with different magnitudes of the magnetization, exchange, and anisotropy. // Solid State Phenom. 2012. V. 190. P.71.

56. Gorobets Y.I., Kuchko A.N., Reshetnyak S.A. Reflection of spin waves in multilayered materials with modulated magnetic parameters. // Fizika Tverdogo Tela. 1996. V. 38. P.575.

57. Tkachenko V.S., Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Spectrum and reflection of spin waves in magnonic crystals with different interface profiles. // Phys. Rev. B. 2010. V. 81. P.024425.

58. Dvornik M., Kuchko A.N., Kruglyak V.V. Micromagnetic method of sparameter characterization of magnonic devices. // Journal of Applied Physics. 2011. V. 109. P.07D350.

59. Sadovnikov A.V., Davies C.S., Kruglyak V.V., Romanenko D.V., Grishin S.V., Beginin E.N., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Spin wave propagation in a uniformly biased curved magnonic waveguide. // Physical Review B. 2017. V. 96. P.060401.

60. Tkachenko V.S., Kuchko A.N., Dvornik M., Kruglyak V.V. Propagation and scattering of spin waves in curved magnonic waveguides. // *Appl. Phys. Lett.* 2012. V. 101. P.152402.
61. Au Y., Dvornik M., Dmytriiev O., Kruglyak V.V. Nanoscale spin wave valve and phase shifter. // *Applied Physics Letters*. 2012. V. 100. P.172408.
62. Горобец Ю.И., Решетняк С.А. Отражение и преломление спиновых волн в одноосных магнетиках в приближении геометрической оптики. // *Журнал технической физики*. 1998. Т. 68б. N2. С.60-63.
63. Решетняк С.А. Преломление поверхностных спиновых волн в пространственно неоднородных ферродиеlectricах с двуосной магнитной анизотропией. // *Физика твердого тела*. 2004. Т. 46. N6. С.1031-1037.
64. Dadoenkova Yu.S., Dadoenkova N.N., Lyubchanskii I.L., Sokolovsky M.L., Kłos J.W., Romero-Vivas J., Krawczyk M. Huge Goos-Hanchen effect for spin waves: A promising tool for study magnetic properties an interfaces. // *Applied Physics Letters*. 2015. V. 101. P.042404.
65. Кругляк В.В., Кучко А.Н., Финохин В.И. Спектр спиновых волн в идеальном мультислойном магнетике при модуляции всех параметров уравнения Ландау-Лифшица. // *Физика твердого тела*. 2004. Т. 46. N5. С.842- 845.
66. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // М.: Наука, 1973. 713с.
67. Саланский Н.М., Ерухимов М.Ш. Физические свойства и применение тонких плёнок. // Новосибирск: Наука. 1975. 222с.
68. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. // М.: Наука. 1973. 343с.
69. Карпов С.Ю., Столяров С.Н. // *УФН*. - 1993. - 163, № 1.- С. 63-89.
70. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Наука, М. (1989).

71. T. Balashov et al. (2014, Sept. 12). Magnon dispersion in thin magnetic films [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/26/39/394007/pdf>. doi: 10.1088/0953-8984/26/39/394007

72. V.V. Kruglyak et al. (2014, Oct. 8), Magnetization boundary conditions at a ferromagnetic interface of finite thickness [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/26/40/406001/pdf>. doi: 10.1088/0953-8984/26/40/406001

73. S.A. Reshetnyak, “Refraction of spin wave surface in spatially inhomogeneous ferroelectrics with biaxial magnetic anisotropy”, *Fizika Tverdogo Tela*, vol. 46, no. 6, pp. 1061—1067, 2004 (in Russian).

74. J.D. Adam et al., “Ferrite devices and materials”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 50, no. 3, pp. 721—737, 2002. doi: 10.1109/22.989957

75. B.A. Kalinikos and A.N. Slavin, “Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions”, *J. Phys. C*, vol. 35, no. 19, pp. 7013—7033, 1986.

76. K. Perzmaier et al. (2008, Feb. 20). Observation of the propagation and interference of spin waves in ferromagnetic thin films [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prb/pdf/10.1103/PhysRevB.77.054425>. doi: 10.1103/PhysRevB.77.054425

77. K. Tanabe et al. (2014, Apr. 9). Real-time observation of Snell’s law for spin waves in thin ferromagnetic films [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.7567/APEX.7.053001/pdf>. doi: 10.7567/APEX.7.053001