

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Введение

На практике в упругих подвесах акселерометров и динамически настраиваемых гироскопов часто встречаются стержни, образованные двумя цилиндрическими поверхностями, которые при эксплуатации могут терять устойчивость [1].

Устойчивость элементов упругой системы является существенным фактором, поскольку потеря устойчивости отдельными элементами обуславливает значительные изменения их жесткостных характеристик, что в конечном итоге может привести к разрушению всей конструкции. Поэтому одним из главных условий эффективной работы конструкции является ограничение величин действующих в ней сил, которые не должны превышать некоторых критических значений, приводящих к потере устойчивости. При этом для успешного решения отдельных задач, например, задач оптимизации, недостаточно иметь только численные значения критических сил, а необходимо также располагать аналитическими формулами, описывающими зависимость величин критических сил, приводящих к потере устойчивости, от параметров элементов упругой конструкции [4].

Постановка задачи

Рассматривается нагруженный продольной сжимающей силой стержень, образованный двумя цилиндрическими поверхностями радиуса ρ . Его ширина b постоянна по длине, а толщина изменяется и в наиболее узкой части равна h_0 (рис. 1).

Необходимо в аналитическом виде определить величину критической сжимающей силы, которая приводит к потере рассматриваемым стержнем его изначальной прямолинейной формы.

Как известно, для аналитического расчета критической сжимающей силы в стержнях переменного поперечного сечения невозможно использование традиционных методов ввиду их чрезмерной трудоемкости [5]. Поэтому для определения величины критической сжимающей силы прямолинейного стержня переменного поперечного сечения используем метод упругой шарнирной цепи, являющегося разновидностью метода конечных элементов [2]. Согласно этому методу сжимаемый стержень

заменяется прямолинейной упругой цепью, которая состоит из упругих шарниров, соединенных между собой абсолютно жесткими связями. При этом эквивалентность стержня и заменяющей его упругой цепи обеспечивается равенством угловых жесткостей участков, на которые разбивается исследуемый стержень, и замещающих их шарниров.

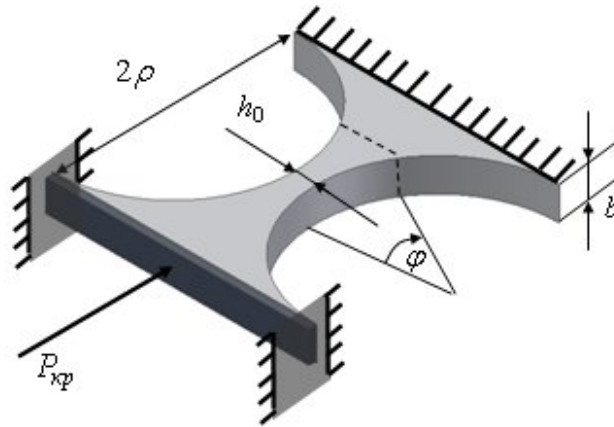


Рис. 1. Стержень, образованный двумя цилиндрическими поверхностями

Отметим, что увеличение числа шарниров в аппроксимирующей упруго-шарнирной цепи хоть и повышает ее адекватность исследуемому стержню, но при этом приводит к существенному возрастанию громоздкости аналитического решения. Поэтому ограничимся рассмотрением упруго-шарнирных цепей, содержащих не больше шести упругих шарниров.

Определение основных параметров аппроксимирующей упруго-шарнирной цепи

Для определения угловых жесткостей различных участков рассматриваемого стержня проведем аналитический расчет его угловой податливости в цилиндрической системе координат, вводя следующие обозначения:

- E – модуль упругости материала стержня;
- $J(\varphi) = \frac{1}{12} h^3(\varphi) \cdot b$ – момент инерции поперечного сечения при изгибе стержня;
- $h(\varphi) = h_0 + 2\rho(1 - \cos \varphi)$ – толщина стержня в поперечном сечении, соответствующем текущей координате φ .

При этом, для вычисления угловой податливости $\delta_0(\varphi)$ участка стержня, соответствующего координате φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), можно воспользоваться формулой Мора [6]:

$$\delta_0^{(\varphi)}(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\rho \cdot \cos \varphi}{E \cdot J(\varphi)} d\varphi = \frac{9}{2Eb\rho^2k^5} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{k} + \frac{\frac{\varphi}{k} (3\frac{\varphi^2}{k^2} + 5)}{3(\frac{\varphi^2}{k^2} + 1)^2} \right],$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (1)$$

где $k = \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ – параметр, существенно меньший, чем 1.

В свою очередь, является очевидным, что угловая жесткость $c_0^{(\varphi)}(\varphi)$ участка стержня, соответствующего координате φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), определяется выражением

$$c_0^{(\varphi)}(\varphi) = [\delta_0^{(\varphi)}(\varphi)]^{-1} = \frac{2Eb\rho^2k^5}{9 \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{k} + \frac{\frac{\varphi}{k} (3\frac{\varphi^2}{k^2} + 5)}{3(\frac{\varphi^2}{k^2} + 1)^2} \right]}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Следовательно, угловая жесткость c_0 (при $\varphi = \frac{\pi}{2}$) всего стержня (рис. 1), согласно формуле (2), находится из выражения

$$c_0 \approx \frac{2Ebh_0^3}{9\pi\sqrt{h_0\rho}}. \quad (3)$$

Представим рассматриваемый стержень в виде упругой шарнирной цепи, состоящей из n ($n \geq 3$) одинаковых упругих шарниров. При этом симметричность рассматриваемого стержня обуславливает такой же вид симметрии в упругой шарнирной цепи (рис. 2).

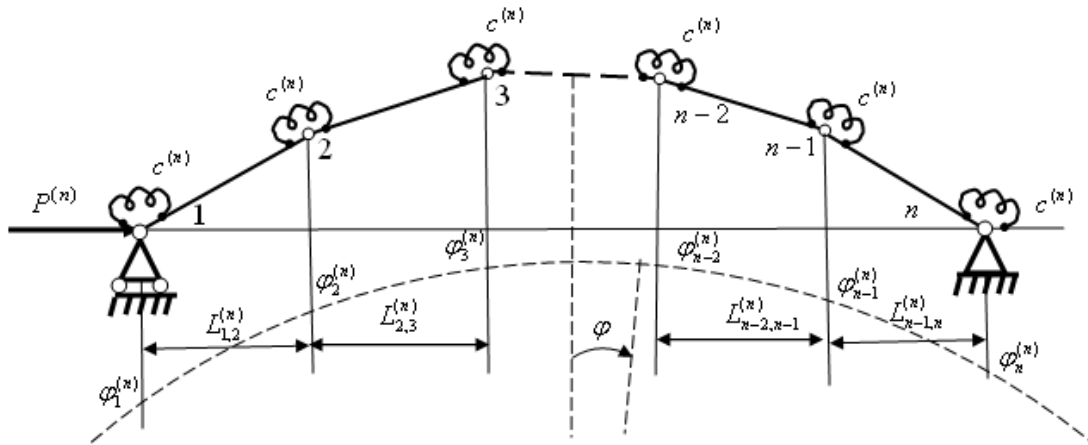


Рис. 2. Схема представления стержня симметричной упруго-шарнирной цепью

При определении критической сжимающей силы $P^{(n)}$ исследуемый стержень делится на равно жесткие участки, чтобы при представлении стержня упруго-шарнирной цепью угловые жесткости $c^{(n)}$ всех n упругих шарниров были одинаковыми:

$$c^{(n)} = n \cdot c_0. \quad (4)$$

При этом, если учесть очевидное утверждение, что для рассматриваемого стержня из всех сжимающих сил, приводящих к потере устойчивости, наименьшей будет сила, обуславливающая первую моду выпучивания, то схему представления стержня симметричной упругой шарнирной цепью (рис. 2), можно заменить половинной моделью (рис. 3). Причем отметим, что в случае нечетного количества шарниров в симметричной упруго-шарнирной цепи для построения половинной модели центральный упругий шарнир разбивается на два последовательно соединенных шарнира, обладающих удвоенной жесткостью.

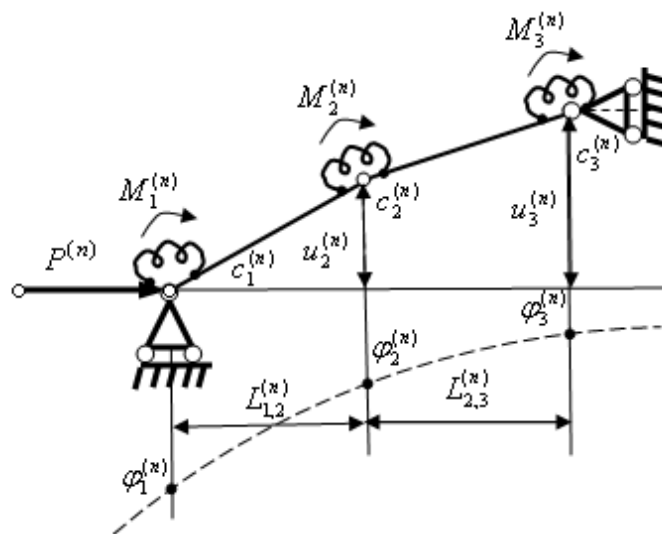


Рис. 3. Половинная модель симметричной упруго-шарнирной цепи, учитывающая первую моду выпучивания

В данной половинной модели цепи, состоящей из n упругих шарниров, введены следующие обозначения:

- $c_i^{(n)}$ – угловая жесткость i -го упругого шарнира;
- $L_{i,i+1}^{(n)}$ – длина абсолютно жесткого участка между i -ым и $(i+1)$ -ым шарнирами;
- $u_i^{(n)}$ – смещение i -го упругого шарнира;
- $P^{(n)}$ – сжимающая сила;
- $M_i^{(n)}$ – упругий момент, возникающий в i -ом упругом шарнире.

При этом, координаты места положения первой половины упругих шарниров, необходимые для расчета величин критических сил $P^{(n)}$ ($n = \overline{3,6}$), будем находить, используя формулу:

$$\varphi_i^{(n)} = \arg \left[c_0^{(\varphi)}(\varphi) = \frac{2n}{2i-1} c_0 \right], \quad (5)$$

где $i = \overline{1,2}$ при $n = \overline{3,4}$ и $i = \overline{1,3}$ при $n = \overline{5,6}$.

Необходимо отметить, что решение ($\varphi_i^{(n)}$) уравнения (5) можно определить различными способами, например, с помощью встроенных конструкций инженерно-математического пакета MathCad [3].

В свою очередь, является очевидным, что длины абсолютно жестких участков между шарнирами могут быть найдены по формуле

$$L_{i,i+1}^{(n)} = \rho(\sin \varphi_{i+1}^{(n)} - \sin \varphi_i^{(n)}) \approx \rho(\varphi_{i+1}^{(n)} - \varphi_i^{(n)}), \quad (6)$$

где $i = 1$ при $n = \overline{3,4}$ и $i = \overline{1,2}$ при $n = \overline{5,6}$.

Аппроксимация стержня упругой трехшарнирной цепью

Сначала представим рассматриваемый стержень в виде симметричной упругой трехшарнирной цепи. Тогда, согласно половинной модели упруго-шарнирной цепи (рис. 4), учитывающей первую моду выпучивания, уравнение статического равновесия системы может быть записано в следующем виде:

$$P^{(3)} u_2^{(3)} - M_1^{(3)} - M_2^{(3)} = 0, \quad (7)$$

где

$$M_1^{(3)} = c_1^{(3)} \cdot \frac{u_2^{(3)}}{L_{1,2}^{(3)}}; \quad c_1^{(3)} = 3c_0; \quad M_2^{(3)} = c_2^{(3)} \cdot \frac{u_2^{(3)}}{L_{1,2}^{(3)}}; \quad c_2^{(3)} = 6c_0. \quad (8)$$

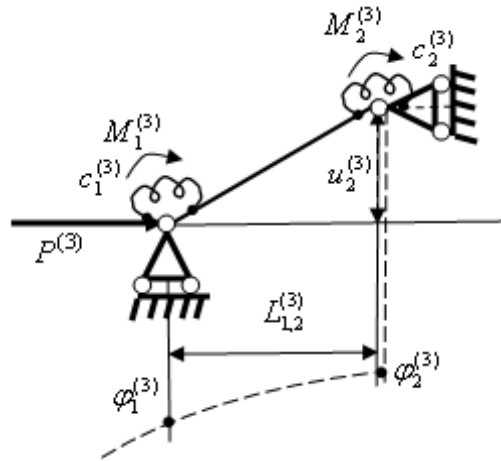


Рис. 4. Половинная модель изгиба прямолинейной упругой трехшарнирной цепи при потере устойчивости

С учетом формул (8) уравнение равновесия (7) приобретает вид:

$$\left(P^{(3)} - \frac{9c_0}{L_{1,2}^{(3)}} \right) u_2^{(3)} = 0. \quad (9)$$

Следовательно, значение сжимающей силы $P^{(3)}$, обеспечивающее нетривиальное решение уравнения (9), будет описываться выражением

$$P^{(3)} = \frac{9c_0}{L_{1,2}^{(3)}}. \quad (10)$$

Угловые координаты $(\phi_1^{(3)}, \phi_2^{(3)})$ двух первых шарниров упруго-шарнирной цепи и длину $(L_{1,2}^{(3)})$ абсолютно жесткого участка, найденные согласно выражений (5) и (6), будут иметь следующие значения:

$$\phi_1^{(3)} = -0,479 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \quad \phi_2^{(3)} = 0, \quad L_{1,2}^{(3)} = 0,479 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}. \quad (11)$$

Подставляя выражения (3) и (11) в формулу (10), получим приближенную величину критической силы $P^{(3)}$

$$P^{(3)} \approx 1,330 \cdot \frac{Eb h_0^2}{\rho}. \quad (12)$$

Аппроксимация стержня упругой четырехшарнирной цепью

Рассмотрим случай представления исследуемого стержня упругой четырехшарнирной симметричной цепью. Тогда, согласно половинной

модели упруго-шарнирной цепи (рис. 5), учитывающей первую моду выпучивания, уравнение статического равновесия системы может быть записано в следующем виде:

$$P^{(4)}u_2^{(4)} - M_1^{(4)} - M_2^{(4)} = 0, \quad (13)$$

где

$$M_1^{(4)} = c_1^{(4)} \cdot \frac{u_2^{(4)}}{L_{1,2}^{(4)}}; \quad c_1^{(4)} = 4c_0; \quad M_2^{(4)} = c_2^{(4)} \cdot \frac{u_2^{(4)}}{L_{1,2}^{(4)}}; \quad c_2^{(4)} = 4c_0. \quad (14)$$

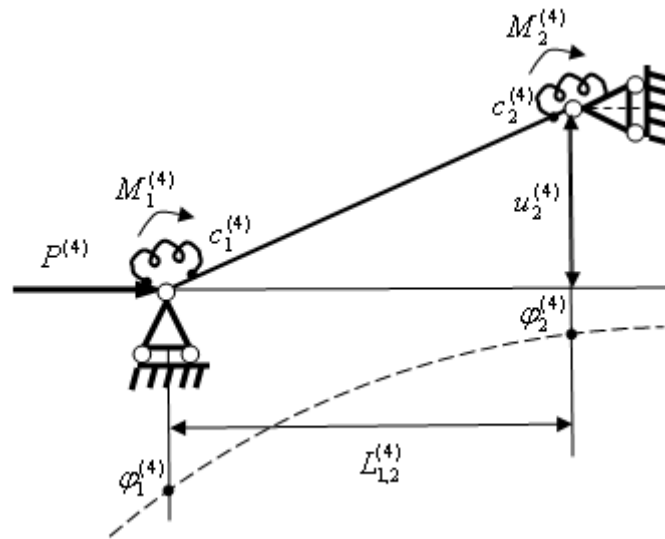


Рис. 5. Половинная модель изгиба прямолинейной упругой четырехшарнирной цепи при потере устойчивости
С учетом формул (14) уравнение равновесия (13) приобретает вид:

$$\left(P^{(4)} - \frac{8c_0}{L_{1,2}^{(4)}} \right) u_2^{(4)} = 0. \quad (15)$$

Следовательно, значение сжимающей силы $P^{(4)}$, обеспечивающее нетривиальное решение уравнения (15), будет описываться выражением

$$P^{(4)} = \frac{8c_0}{L_{1,2}^{(4)}}. \quad (16)$$

Угловые координаты $(\phi_1^{(4)}, \phi_2^{(4)})$ двух первых шарниров упруго-шарнирной цепи и длина $L_{1,2}^{(4)}$ абсолютно жесткого участка, определяемые согласно выражений (5) и (6), будут иметь следующие значения:

$$\phi_1^{(4)} = -0,582 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \quad \phi_2^{(4)} = -0,151 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \quad L_{1,2}^{(4)} = 0,431 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (3) и (17) в формулу (16), получим приближенную величину критической силы $P^{(4)}$

$$P^{(4)} \approx 1,312 \cdot \frac{Ebh_0^2}{\rho}. \quad (18)$$

Аппроксимация стержня упругой пятишарнирной цепью

Теперь рассмотрим случай представления исследуемого стержня упруго-шарнирной симметричной цепью, состоящей из пяти одинаковых упругих шарниров. Тогда, согласно сохраняющей первую моду выпучивания половинной модели упруго-шарнирной цепи (рис.6), система уравнений, описывающая условия статического равновесия рассматриваемой конструкции в случае потери ею устойчивости, может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P^{(5)}u_2^{(5)} - M_1^{(5)} - M_2^{(5)} &= 0 \\ P^{(5)}u_3^{(5)} - M_1^{(5)} - M_3^{(5)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} M_1^{(5)} &= c_1^{(5)} \cdot \frac{u_2^{(5)}}{L_{1,2}^{(5)}}; & c_1^{(5)} &= 5c_0; & M_2^{(5)} &= c_2^{(5)} \cdot \left(\frac{u_2^{(5)}}{L_{1,2}^{(5)}} - \frac{u_3^{(5)} - u_2^{(5)}}{L_{2,3}^{(5)}} \right); \\ c_2^{(5)} &= 5c_0; & M_3^{(5)} &= c_3^{(5)} \cdot \frac{u_3^{(5)} - u_2^{(5)}}{L_{2,3}^{(5)}}; & c_3^{(5)} &= 10c_0. \end{aligned} \quad (20)$$

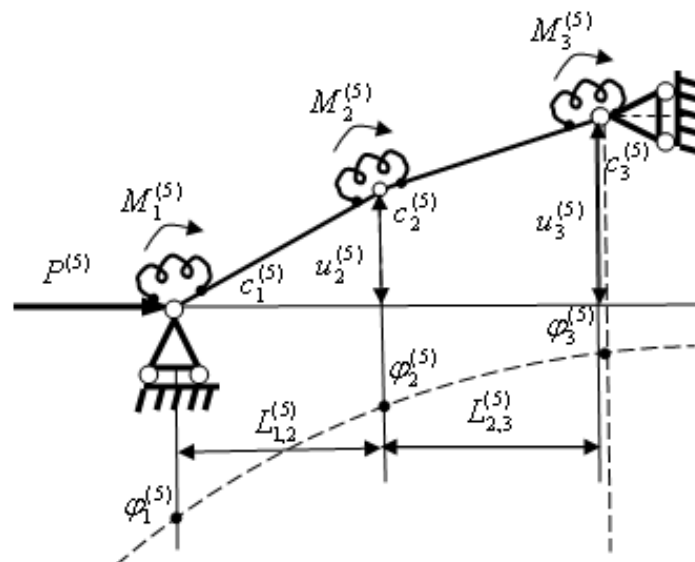


Рис. 6. Половинная модель изгиба прямолинейной упругой пятишарнирной цепи при потере устойчивости

С учетом формул (20) система уравнений равновесия (19) приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(P^{(5)} - \frac{10c_0}{L_{1,2}^{(5)}} - \frac{5c_0}{L_{2,3}^{(5)}} \right) u_2^{(5)} + \frac{5c_0}{L_{2,3}^{(5)}} u_3^{(5)} &= 0 \\ -5c_0 \left(\frac{1}{L_{1,2}^{(5)}} - \frac{2}{L_{2,3}^{(5)}} \right) u_2^{(5)} + \left(P^{(5)} - \frac{10c_0}{L_{2,3}^{(5)}} \right) u_3^{(5)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Согласно системы однородных уравнений (21) нетривиальное решение будет существовать при выполнении следующего квадратного уравнения:

$$(P^{(5)})^2 - \frac{5c_0}{L_{1,2}^{(5)}L_{2,3}^{(5)}} (3L_{1,2}^{(5)} + 2L_{2,3}^{(5)}) P^{(5)} + \frac{125c_0^2}{L_{1,2}^{(5)}L_{2,3}^{(5)}} = 0. \quad (22)$$

Следовательно, наименьшее значение сжимающей силы $P^{(5)}$, обеспечивающее решение уравнения (22), будет описываться выражением

$$P^{(5)} = \frac{5c_0}{2L_{1,2}^{(5)}L_{2,3}^{(5)}} \left[3L_{1,2}^{(5)} + 2L_{2,3}^{(5)} - \sqrt{(3L_{1,2}^{(5)} - 2L_{2,3}^{(5)})^2 + 4L_{1,2}^{(5)}L_{2,3}^{(5)}} \right]. \quad (23)$$

Определяемые согласно выражений (5) и (6) угловые координаты ($\varphi_1^{(5)}$, $\varphi_2^{(5)}$ и $\varphi_3^{(5)}$) первых трех шарниров упруго-шарнирной цепи и длины ($L_{1,2}^{(5)}$ и $L_{2,3}^{(5)}$) двух первых абсолютно жестких участков будут иметь следующие значения:

$$\varphi_1^{(5)} = -0,660 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \quad \varphi_2^{(5)} = -0,250 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \quad \varphi_3^{(5)} = 0,$$

$$L_{1,2}^{(5)} = 0,410 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}, \quad L_{2,3}^{(5)} = 0,250 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (3) и (24) в формулу (23), получим приближенную величину критической силы $P^{(5)}$

$$P^{(5)} \approx 1,310 \cdot \frac{Eb h_0^2}{\rho}. \quad (25)$$

Аппроксимация стержня упругой шестишарнирной цепью

Рассмотрим, наконец, случай представления исследуемого стержня шестишарнирной симметричной цепью. Тогда, согласно сохраняющей первую моду выпучивания половинной модели упруго-шарнирной цепи (рис. 7), система уравнений, описывающая условия статического

равновесия рассматриваемой конструкции в случае потери ею устойчивости, может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P^{(6)} u_2^{(6)} - M_1^{(6)} - M_2^{(6)} &= 0 \\ P^{(6)} u_3^{(6)} - M_1^{(6)} - M_3^{(6)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} M_1^{(6)} &= c_1^{(6)} \cdot \frac{u_2^{(6)}}{L_{1,2}^{(6)}}; & c_1^{(6)} &= 6c_0; & M_2^{(6)} &= c_2^{(6)} \cdot \left(\frac{u_2^{(6)}}{L_{1,2}^{(6)}} - \frac{u_3^{(6)} - u_2^{(6)}}{L_{2,3}^{(6)}} \right); \\ c_2^{(6)} &= 6c_0; & M_3^{(6)} &= c_3^{(6)} \cdot \frac{u_3^{(6)} - u_2^{(6)}}{L_{2,3}^{(6)}}; & c_3^{(6)} &= 6c_0. \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом формул (27) система уравнений равновесия (26) приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(P^{(6)} - \frac{12c_0}{L_{1,2}^{(6)}} - \frac{6c_0}{L_{2,3}^{(6)}} \right) u_2^{(6)} + \frac{6c_0}{L_{2,3}^{(6)}} u_3^{(6)} &= 0 \\ -6c_0 \left(\frac{1}{L_{1,2}^{(6)}} - \frac{1}{L_{2,3}^{(6)}} \right) u_2^{(6)} + \left(P^{(6)} - \frac{6c_0}{L_{2,3}^{(6)}} \right) u_3^{(6)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

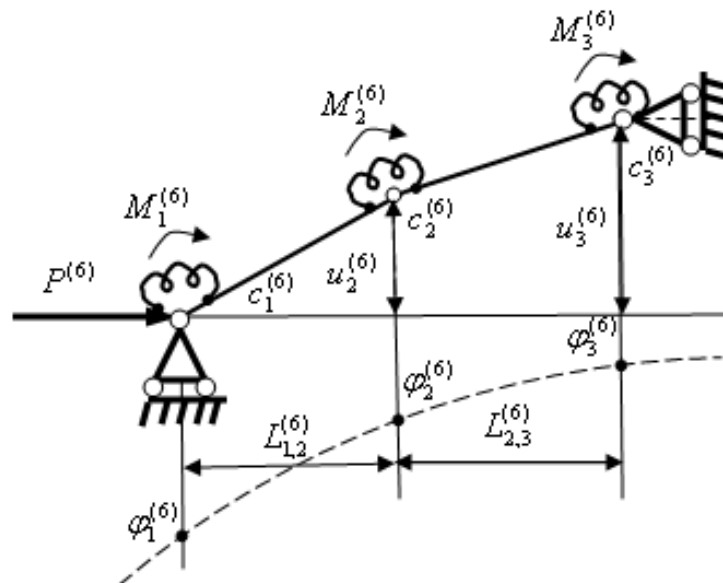


Рис. 7. Половинная модель изгиба прямолинейной упругой шестишарнирной цепи при потере устойчивости

Согласно системе однородных уравнений (28) нетривиальное решение будет существовать при выполнении следующего квадратного уравнения:

$$(P^{(6)})^2 - \frac{12c_0}{L_{1,2}^{(6)}L_{2,3}^{(6)}}(L_{1,2}^{(6)} + L_{2,3}^{(6)})P^{(6)} + 3L_{1,2}^{(6)}L_{2,3}^{(6)}\left(\frac{6c_0}{L_{1,2}^{(6)}L_{2,3}^{(6)}}\right)^2 = 0. \quad (29)$$

Следовательно, наименьшее значение сжимающей силы $P^{(6)}$, обеспечивающее решение уравнения (29), будет описываться выражением

$$P^{(6)} = \frac{6c_0}{L_{1,2}^{(6)}L_{2,3}^{(6)}} \left[L_{1,2}^{(6)} + L_{2,3}^{(6)} - \sqrt{(L_{1,2}^{(6)} - L_{2,3}^{(6)})^2 + L_{1,2}^{(6)}L_{2,3}^{(6)}} \right]. \quad (30)$$

Определяемые согласно выражений (5) и (6) угловые координаты ($\varphi_1^{(6)}$, $\varphi_2^{(6)}$ и $\varphi_3^{(6)}$) первых трех шарниров упруго-шарнирной цепи и длины ($L_{1,2}^{(6)}$ и $L_{2,3}^{(6)}$) двух первых абсолютно жестких участков будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(6)} &= -0,723 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, & \varphi_2^{(6)} &= -0,325 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, & \varphi_3^{(6)} &= -0,099 \cdot \sqrt{\frac{h_0}{\rho}}, \\ L_{1,2}^{(6)} &= 0,398 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}, & L_{2,3}^{(6)} &= 0,226 \cdot \sqrt{\rho \cdot h_0}. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя выражения (3) и (31) в формулу (30), получим приближенную величину критической силы $P^{(6)}$

$$P^{(6)} \approx 1,312 \cdot \frac{Eb h_0^2}{\rho}. \quad (32)$$

Анализ полученных результатов

Анализ результатов применения трех-, четырех-, пяти- и шести-шарнирной цепи, описываемых выражениями (12), (18), (25) и (32), показывает, что во всех рассмотренных случаях приближенные значения сил $P^{(n)}$ ($n = \overline{3,6}$) содержат аналитическую часть $\frac{Eb h_0^2}{\rho}$ и численный коэффициент. Следует отметить, что численный коэффициент в формуле для $P^{(3)}$ отличается от других случаев третьей значащей цифрой, в то время как формулы для сил $P^{(4)}$, $P^{(5)}$ и $P^{(6)}$ имеют различия этого коэффициента в четвертой значащей цифре.

Является очевидным, что увеличение количества n упругих шарниров в аппроксимирующей упруго-шарнирной цепи приводит к уточнению приближенного выражения для силы $P^{(n)}$, аппроксимирующей критическую сжимающую силу $P_{кр}$ исследуемого стержня. Это уточнение происходит за счет численного коэффициента и не может выйти за пределы его третьей значащей цифры для рассматриваемого стержня.

Таким образом, на основании выражений (12), (18), (25) и (32) можем записать формулу критической силы стержня, образованного двумя цилиндрическими поверхностями, в которой для повышения достоверности в численном коэффициенте ограничимся только двумя значащими цифрами,

$$P_{кр} \approx 1,3 \cdot \frac{Ebh_0^2}{\rho}$$

Выводы

Для исследования статической устойчивости стержня использована методика расчета критической силы с помощью аппроксимирующей упруго-шарнирной цепи, применение которой к стержню, образованному двумя цилиндрическими поверхностями, позволило получить аналитическую зависимость критической сжимающей силы от параметров стержня.

Список використаної літератури

1. *Виноградов, Г. И.* Исследование конструкции упругого подвеса динамически настраиваемого гироскопа типа ГВК-16 [Текст] / *Г. И. Виноградов, Н. А. Темляков, И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, В. И. Степин* // Гироскопия и навигация. –Науч.-техн. сб. – С.-Петербург, 2007, №4.-С. 60-67.
2. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем. [Текст] / *А. С. Вольмир* // – М.: Наука, 1967. – 880 с.
3. *Кирьянов, Д.В.* Mathcad 14 в подлиннике. [Текст] / *Д. В. Кирьянов* // –С-Пб: ВHV-СПб, 2007.-704 с.
4. *Пановко, Я.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем. [Текст] / *Я. Г. Пановко, И. И. Губанова* // – М.: Наука, 1967. – 420 с.
5. *Ржаницын, А. Р.* Строительная механика. [Текст] / *А. Р. Ржаницын* // – М.: Высш. шк., 1991. – 413 с.
6. *Феодосьев, В.И.* Соппротивление материалов. [Текст] / *В. И. Феодосьев* // -М.:Наука,1979.-560 с.