

УДК 621.317

СИНТЕЗ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Туз Ю. М., Шумков Ю. С., Козир О. В.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

E-mail: tuz@aer.kpi.ua, yu.shumkov@gmail.com, olegkozr86@gmail.com

Фінітні експоненціальні сплайни є оптимальним базисом під час дискретного синтезу випробувальних сигналів, що описуються тими самими функціями, що й сплайни, наприклад, в задачах вимірювання та контролю параметрів електричних кіл за методом нулів та полюсів [1].

Формуюче коло (деяка імпульсна система) містить дискретну частину (ДЧ), імпульсний елемент, що працює з тактом h , та неперервну частину (НЧ). Передатна функція (ПФ) зведеної НЧ, з урахуванням ЦАП з регістрами пам'яті та ідеального імпульсного елемента, дорівнює:

$$W_{\text{reduced}}(q) = K_{\Phi}(q) \tilde{W}_{\text{reduced}}(q) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{p} W_{\text{AF}}(p) \right]_{p=q/h},$$

де $q = ph$ – комплексна змінна у відносному часу $\bar{t} = t/h$. ПФ НЧ визначає вид кускових функцій, що утворюють сплайн, та забезпечує їх неперервність та неперервність похідних у вузлах. Так для виключення розривів неперервності першого роду у вузлах необхідною умовою є наступне: ступінь полінома в знаменнику ПФ НЧ має бути $m \geq 2 + l$, де l – ступінь полінома в чисельнику. Для забезпечення неперервності першої похідної – $m \geq 3 + l$ для поліномів і так далі [2]. При наявності процесу дискретизації вихідний сигнал НЧ описується зміщеними решітчастими функціями.

$$W_{\text{reduced}}(q) = \frac{R_l(q)}{Q_m(q)} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_{\text{reduced}}^*(q, \varepsilon) = K_h \cdot \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k(\varepsilon) \cdot e^{q(m-k)}}{\sum_{j=0}^m a_j \cdot e^{q \cdot j}}, \quad m > l$$

де ε – дійсна змінна; $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Індекс (*) – використовуємо для позначення ПФ для дискретизованих сигналів, $\mathcal{D}$ – оператор, який встановлює зв'язок між $\mathcal{L}$ -зображенням за Лапласом неперервної функції та $\mathbf{D}$ -зображенням відповідної її зміщеної решітчастої функції. Загальна ПФ формуючого кола в області $\mathbf{D}$ -зображень зміщених решітчастих функцій матиме вигляд:

$$K_{\Sigma_{\text{Gm}}}^*(q, \varepsilon) = H(e^{-q}) \cdot A(\mathbf{a}_T, h) \cdot W_{\text{reduced}}^*(q, \varepsilon)$$

де $A(\mathbf{a}_T, h)$ – нормуючий множник; $H(e^{-q})$ – ПФ зведеної дискретної частини (цифровий фільтр, наприклад, на базі сигнального процесора).

Якщо ПФ дискретної частини матиме вигляд $H(e^{-q}) = \sum_{j=0}^m a_j \cdot e^{q(j-m)}$, то

$$K_{\Sigma_{Gm}}^*(q, \varepsilon) = A(a_T, h) H(e^{-q}) K_h \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k(\varepsilon) e^{q(m-k)}}{\sum_{j=0}^m a_j e^{q \cdot j}} = A(a_T, h) K_h e^{-mq} \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\varepsilon) e^{q(m-k)}.$$

Імпульсна перехідна характеристика формуючого кола матиме вигляд:

$$\begin{aligned} G_m(a, \bar{t}) &= A^*(a) \cdot D^{-1} \left\{ e^{-mq} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\varepsilon) \cdot e^{q(m-k)} \right\} = \\ &= A^*(a) \cdot D^{-1} \left\{ 0 + b_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon) e^{-q} + \dots + b_{m-1}(\varepsilon) e^{-q(m-1)} + 0 \right\}, \end{aligned}$$

де $A^*(a) = A(a_T, h) \cdot K_h$ – нормуючий множник ($A^*(a) = 1 / |b_0(\varepsilon)|_{\varepsilon=1}$ або $A^*(a) = 1 / \left| \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=1}$); D^{-1} – оператор зворотного ДПЛ; a – параметри ПФ НЧ (нулі та полюси у відносному масштабі часу, $a = a_T h$).

При подачі на вхід імпульсної системи, передатна функція якої $G_m^*(q, \varepsilon)$, послідовності дискретних відліків $x[n] = f[n+1]$, D -зображення вихідного сигналу матиме вигляд:

$$\begin{aligned} sf_{Gm}^*(q, \varepsilon) &= G_m^*(q, \varepsilon) \cdot F^*(q, 0) \cdot e^q = \\ &= F^*(q, 0) \cdot A^*(a) \left[0 + b_0(\varepsilon) \cdot e^q + b_1(\varepsilon) \cdot e^0 + \dots + b_{m-1}(\varepsilon) \cdot e^{-q(m-2)} + 0 \right], \end{aligned}$$

де $F^*(q, 0) = D\{f[n]\}$, D – оператор прямого ДПЛ. Зсув на один відлік в бік випередження $x[n] = f[n+1]$ (або $X^*(q, 0) = e^q \cdot F^*(q, 0)$), служить для компенсації часової затримки під час відтворення неперервної залежності $f(\bar{t})$.

Вираз $sf_{Gm}^*(q, \varepsilon)$ дає в часовій області сплайн $sf_{Gm}(\bar{t}) = sf_{Gm}[n, \varepsilon]$, де $\bar{t} = n + \varepsilon$. Сплайн-функція $sf_{Gm}(\bar{t})$ є сума фінітних реакцій на кожен вхідний дискретний відлік $x[n] = f[n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$sf_{Gm}(\bar{t}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n+1-i] \cdot G_m(i + \varepsilon)$$

$$sf_{Gm}(\bar{t}) = A^*(a) \left\{ 0 + f[n+1] \cdot b_0(\varepsilon) + f[n] \cdot b_1(\varepsilon) + \dots + f[1] \cdot b_{m-1}(\varepsilon) + 0 \right\},$$

де $\bar{t} = n + \varepsilon$ – відносний час, пов'язаний з дійсним часом $\bar{t} = t/h$, h – рівномірний інтервал дискретизації; $n = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq \varepsilon \leq 1$. У термінах зміщених решітчастих функцій сплайн-функція буде:

$$sf_{Gm}[n, \varepsilon] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n+1-i] \cdot G_m[i, \varepsilon].$$

Експоненціальні сплайни, що синтезовані на основі моделі у вигляді передатної функції лінійних неперервних кіл, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Експоненціальні сплайни

Модель зведеної неперервної частини $W_G(\alpha_T, h, p)$	Сплайн-функція $sf_G[n, \varepsilon]$ ($\bar{t} = n + \varepsilon$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq \varepsilon \leq 1$)
$\alpha_T (1 - e^{-\alpha_T h})^{-1} \cdot \frac{1}{p(p + \alpha_T)}$	$\frac{1}{(1 - e^{-\alpha})} \{f[n+1] \cdot (1 - e^{-\alpha\varepsilon}) + f[n] \cdot (e^{-\alpha\varepsilon} - e^{-\alpha})\}$
$\frac{e^{\alpha_T h}}{h} \cdot \frac{1}{(p + \alpha_T)^2}$	$e^{\alpha} \{f[n+1] \varepsilon e^{-\alpha\varepsilon} + f[n] (1 - \varepsilon) e^{-\alpha(1+\varepsilon)}\}$
$\frac{\alpha_{T1} - \alpha_{T2}}{e^{-\alpha_{T2}h} - e^{-\alpha_{T1}h}} \cdot \frac{1}{(p + \alpha_{T1})(p + \alpha_{T2})}$	$\frac{f[n+1] \cdot (e^{-\alpha_2 \cdot \varepsilon} - e^{-\alpha_1 \cdot \varepsilon}) + f[n] (e^{-(\alpha_2 + \alpha_1 \cdot \varepsilon)} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon)})}{e^{-\alpha_2} - e^{-\alpha_1}}$
$\frac{\lambda}{h} \cdot \frac{e^{\gamma}}{\sin \lambda} \cdot \frac{1}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2}$	$\frac{e^{\gamma}}{\sin \lambda} \cdot \{f[n+1] e^{-\gamma\varepsilon} \sin \lambda \varepsilon + f[n] e^{-\gamma(1+\varepsilon)} \sin \lambda (1 - \varepsilon)\}$
$\left[\frac{1}{\alpha_{T1} \alpha_{T2}} + \frac{e^{-\alpha_{T1}h}}{\alpha_{T1}(\alpha_{T1} - \alpha_{T2})} - \frac{e^{-\alpha_{T2}h}}{\alpha_{T2}(\alpha_{T1} - \alpha_{T2})} \right]^{-1} \cdot \frac{1}{p(p + \alpha_{T1})(p + \alpha_{T2})}$	$A^*(a) \{f[n+1] [B + C e^{-\alpha_1 \varepsilon} - D e^{-\alpha_2 \varepsilon}] +$ $+ f[n] [-B(e^{-\alpha_1} + e^{-\alpha_2}) - C(1 + e^{-\alpha_2}) e^{-\alpha_1 \varepsilon} + D(1 + e^{-\alpha_1}) e^{-\alpha_2 \varepsilon}] +$ $+ f[n-1] [B e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} + C e^{-\alpha_2} e^{-\alpha_1 \varepsilon} - D e^{-\alpha_1} e^{-\alpha_2 \varepsilon}]\}$
$\frac{\alpha_T^2 (-1 + \alpha_T h + e^{-\alpha_T h})^{-1}}{p^2 (p + \alpha_T)}$	$\frac{1}{-1 + \alpha + e^{-\alpha}} \{f[n+1] \cdot (-1 + \alpha \varepsilon + e^{-\alpha\varepsilon}) + f[n] \cdot [1 + \alpha + e^{-\alpha} -$ $-(1 + e^{-\alpha}) \cdot \alpha \varepsilon - 2e^{-\alpha\varepsilon}] + f[n-1] e^{-\alpha} [\alpha(\varepsilon - 1) - 1 + e^{-\alpha(\varepsilon - 1)}]\}$
$\frac{\alpha^2}{h} [\alpha b + (\alpha - b)(1 - e^{-\alpha})]^{-1} \times$ $\times \frac{p + b_T}{p^2 \cdot (p + \alpha_T)}, \alpha = \alpha_T h; b = b_T h$	$\frac{1}{\alpha b + (\alpha - b) \cdot (1 - e^{-\alpha})} \times$ $\times \{f[n+1] \cdot [\alpha b \cdot \varepsilon + (\alpha - b) \cdot (1 - e^{-\alpha\varepsilon})] +$ $+ f[n] \cdot [\alpha b - \alpha b \cdot (1 - e^{-\alpha}) \cdot \varepsilon - (\alpha - b) \cdot (1 + e^{-\alpha} - 2e^{-\alpha\varepsilon})] +$ $+ f[n-1] \cdot [-\alpha b \cdot e^{-\alpha} \cdot (1 - \varepsilon) + (\alpha - b) \cdot (e^{-\alpha} - e^{-\alpha\varepsilon})]\}$

Ключові слова: лінійне електричне коло, дискретизація, зміщена решітчаста функція, дискретне перетворення Лапласа, експоненціальний сплайн.

Література

- [1] Yu. Shumkov, «Exponential splines in electric circuits' parameters measuring», in *Proc. of the International Conf. Actual problems of Measuring Technique "Measurement-98"*, Kyiv, 1998, pp. 250-253.
- [2] Ю. С. Шумков, М. В. Грашенко, та В. С. Дараган, «Формування випробувальних сигналів спеціальної форми на основі експоненціальних сплайнів», *Механіка гіроскопічних систем*, Вип. 35, с. 30-40, 2018. DOI: 10.20535/0203-3771352018128611
- [3] B.J. McCartin, «Theory of Exponential Splines», *Journal of Approximation Theory*, vol. 66, pp. 1-23, 1991. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90050-K