

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Електронні прилади та пристрої»
спеціальності 171 «Електроніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Чисельні методи. Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О.О.Абакумова. – Електронні текстові дані (1 файл: 1049 кбайт). – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 36 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 09.12.2021 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол №10/2021 від 27.10.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладач: *Абакумова Олена Олегівна*, канд. філос. наук, доц.

Відповідальний
редактор: *Ямненко Ю.С.*, д-р. техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Рецензент: *Казміренко В.А.*, канд. техн. наук, доц.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Посібник містить роз'яснення щодо виконання індивідуального семестрового завдання у вигляді розрахункової роботи з дисципліни «Чисельні методи». Наведено загальні вимоги щодо оформлення та структури роботи, необхідні теоретичні відомості, зразок виконання та оформлення кожного завдання, критерії оцінювання та список рекомендованої літератури. Запропоновано індивідуальні завдання для групи з 30 студентів.

Для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електронні прилади та пристрої» спеціальності 171 «Електроніка» всіх форм навчання.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

Вступ	4
Загальні положення	5
Вимоги до оформлення та структури роботи	5
Індивідуальні завдання	6
Теоретичні відомості	13
Зразок виконання завдань	22
Критерії оцінювання	33
Рекомендована література	34

ВСТУП

Індивідуальне семестрове завдання – форма організації навчання, яка має на меті поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань, що їх студенти отримують у процесі навчання, а також розвиток самостійного мислення та творчих здібностей студентів, підвищення їх пізнавальної активності, виховання наукового світогляду.

Основними видами індивідуальних семестрових завдань студентів є: реферат, розрахункова робота, домашня контрольна робота, курсова робота, курсовий проект, дипломна робота, магістерська дисертація.

Індивідуальне семестрове завдання є видом поза аудиторної самостійної роботи студентів навчального чи навчально-дослідного характеру. Це завершена робота в межах навчальної програми дисципліни, яка виконується на основі знань, отриманих під час лекцій, семінарських, практичних та лабораторних занять, охоплює декілька тем або зміст навчальної дисципліни в цілому і завершується підготовкою відповідного письмового звіту.

Індивідуальні семестрові завдання виконуються студентами самостійно із забезпеченням необхідних консультацій з окремих питань з боку викладача. Як правило, індивідуальні завдання виконуються окремо кожним студентом. У тих випадках, коли завдання мають комплексний характер, до їх виконання можуть залучатися декілька студентів.

Наявність позитивної оцінки, отриманої студентом за індивідуальне завдання, є необхідною умовою допуску до семестрового контролю з дисципліни.

Ці методичні рекомендації призначені для якісної організації поза аудиторної індивідуальної роботи студентів навчального та навчально-дослідного характеру з дисципліни «Чисельні методи».

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Розрахункова робота – індивідуальне завдання, яке передбачає розв’язання конкретної практичної навчальної задачі з використанням відомого, а також (або) самостійно вивченого теоретичного матеріалу. Основну частину розрахункової роботи складають розрахунки, які можуть супроводжуватися ілюстративним матеріалом (графіками, блок-схемами, векторними діаграмами, гістограмами тощо), виконаним із застосуванням прикладного програмного забезпечення.

Виконання розрахункової роботи сприяє поглибленому вивченню студентом теоретичного матеріалу, систематизації отриманих теоретичних знань, формуванню вмінь використання теоретичних положень дисципліни для розв’язання конкретних практичних завдань.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ТА СТРУКТУРИ РОБОТИ

1. Загальні вимоги

Мова виконання роботи: українська.

2. Оформлення роботи

Текст повинен бути набраний у текстовому редакторі Microsoft Word в одну колонку, вирівняний за шириною та не містити переносів.

Шрифт: Times New Roman, кегль 14.

Інтервал: полуторний.

Формат сторінки: А4 (210х297 мм).

3. Структура роботи

Розрахункова робота має складатися з наступних структурних елементів:

- титульна сторінка;
- індивідуальне завдання;
- розрахункова частина;
- сторінка відповідей.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1: за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона з точністю до 0.0001 обчислити наближені значення функції $y = f(x)$ у заданих точках. За наявним набором значень побудувати графік інтерполяційної функції.

Таблиця 1

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
1.415	0.8885	1	1.416	1.456
1.420	0.8895	11	1.431	1.462
1.425	0.8906	21	1.422	1.451
1.430	0.8916			
1.435	0.8926			
1.440	0.8936			
1.445	0.8947			
1.450	0.8956			
1.455	0.8966			
1.460	0.8976			
1.465	0.8986			

Таблиця 2

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.101	1.2618	2	0.112	0.145
0.106	1.2764	12	0.104	0.133
0.111	1.2912	22	0.107	0.137
0.116	1.3061			
0.121	1.3213			
0.126	1.3366			
0.131	1.3520			
0.136	1.3677			
0.141	1.3835			
0.146	1.3995			
0.151	1.4157			

Таблиця 3

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.15	0.8607	3	0.151	0.505
0.20	0.8187	13	0.223	0.554
0.25	0.7788	23	0.252	0.457
0.30	0.7408			
0.35	0.7046			
0.40	0.6703			
0.45	0.6376			
0.50	0.6065			
0.55	0.5769			
0.60	0.5488			
0.65	0.5220			

Таблиця 4

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.180	5.5154	4	0.184	0.221
0.185	5.4669	14	0.189	0.227
0.190	5.3263	24	0.193	0.216
0.195	5.1930			
0.200	5.0664			
0.205	4.9461			
0.210	4.8317			
0.215	4.7226			
0.220	4.6185			
0.225	4.5191			
0.230	4.4242			

Таблиця 5

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
3.50	33.1154	5	3.522	3.905
3.55	34.8133	15	3.643	4.005
3.60	36.5982	25	3.675	3.852
3.65	38.4747			
3.70	40.4473			
3.75	42.5211			
3.80	44.7012			
3.85	46.9931			
3.90	49.4024			
3.95	51.9354			
4.00	54.5982			

Таблиця 6

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.115	8.6572	6	0.122	0.146
0.120	8.2932	16	0.129	0.157
0.125	7.9582	26	0.133	0.151
0.130	7.6489			
0.135	7.3623			
0.140	7.0961			
0.145	6.8491			
0.150	6.6185			
0.155	6.3998			
0.160	6.1965			
0.165	6.0055			

Таблиця 7

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
1.340	4.2556	7	1.361	1.394
1.345	4.3532	17	1.346	1.381
1.350	4.4552	27	1.354	1.377
1.355	4.5618			
1.360	4.6734			
1.365	4.7903			
1.370	4.9130			
1.375	5.0419			
1.380	5.1774			
1.385	5.3201			
1.390	5.4706			

Таблиця 8

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.01	0.9918	8	0.027	0.416
0.06	0.9519	18	0.124	0.492
0.11	0.9136	28	0.083	0.424
0.16	0.8769			
0.21	0.8416			
0.26	0.8077			
0.31	0.7753			
0.36	0.7441			
0.41	0.7141			
0.46	0.6854			
0.51	0.6579			

Таблиця 9

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.15	4.4817	9	0.159	0.234
0.16	4.9530	19	0.173	0.242
0.17	5.4739	29	0.165	0.221
0.18	6.0496			
0.19	6.6859			
0.20	7.3891			
0.21	8.1662			
0.22	9.0250			
0.23	9.9742			
0.24	11.0232			
0.25	12.1825			

Таблиця 10

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента x	
0.45	20.1946	10	0.455	0.533
0.46	19.6133	20	0.473	0.551
0.47	18.9425	30	0.468	0.524
0.48	18.1746			
0.49	17.3010			
0.50	16.3123			
0.51	15.1984			
0.52	13.9484			
0.53	12.5508			
0.54	10.9937			
0.55	9.2647			

Завдання 2. Використовуючи метод сіток, з точністю до 0.1 скласти наближений розв'язок $U=U(x,y)$ задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \text{ у квадраті } ABCD \text{ з вершинами } A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0)$$

із заданими межевими умовами; крок $h=0.2$.

№	$U _{AB}$	$U _{BC}$	$U _{CD}$	$U _{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0

2	$20y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos(\frac{\pi y}{2})$	$20x^2$
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin(\pi y)$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
11	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
12	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
13	$20\cos(\frac{\pi y}{2})$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
14	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
15	$20y$	$20x(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0
16	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
17	$30\cos(\frac{\pi y}{2})$	$30x^2$	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$
18	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
19	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
20	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
21	$20\sin(\pi y)$	$30x$	$30y$	$20x(1-x)$
22	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$
23	$20\sin(\pi y)$	$50\sqrt{x}$	$50y^2$	$20\sin(\pi x)$
24	40	40	$40y^2$	$40\sin\frac{\pi}{2}(1-x)$
25	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
26	$25y^2$	25	$25y$	$20x(1-x)$

27	$15\sqrt{y}$	$15(1-x)$	$30y(1-y)$	0
28	$30\cos(\frac{\pi y}{2})$	$20x(1-x)$	$25y(1-y^2)$	$30(1-x^2)$
29	$10y^2(1-y)$	$30\sin \pi x$	0	$15x(1-x^2)$
30	$25y$	$25(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0

Завдання 3. Для непарних варіантів: Методом золотого перетину знайти найбільше значення унімодальної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ з точністю до 0.01. Для парних варіантів: Методом золотого перетину знайти найменше значення унімодальної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ з точністю до 0.01.

Вар.	Функція	$[a,b]$
1	$f(x) = -x^2 - e^{-0.85x}$	$[-1;3]$
2	$f(x) = x^4 - 1.3\arctg(1.5x)$	$[-2;2]$
3	$f(x) = 4x - e^{(x-0.2)}$	$[-1;3]$
4	$f(x) = x^2 + 2e^{-0.65x}$	$[-1;3]$
5	$f(x) = 1.5\arctg(x) - x^4$	$[-2;2]$
6	$f(x) = e^{(x-0.4)} - 3.4x$	$[-1;3]$
7	$f(x) = -x^2 - 3e^{-0.45x}$	$[-2;3]$
8	$f(x) = x^4 - 0.9\arctg(2.5x)$	$[-2;2]$
9	$f(x) = 2.8x - e^{(x-0.6)}$	$[-1;3]$
10	$f(x) = x^2 + 4e^{-0.25x}$	$[-3;2]$
11	$f(x) = 1.1\arctg(2x) - x^4$	$[-2;2]$
12	$f(x) = e^{(x-0.8)} - 2.2x$	$[-1;4]$
13	$f(x) = -x^2 - 5e^{-0.05x}$	$[-2;3]$
14	$f(x) = x^4 - 0.3\arctg(3.5x)$	$[-2;2]$

15	$f(x) = 1.6x - e^{(x-1)}$	$[-1; 3]$
16	$f(x) = x^2 + 6e^{0.15x}$	$[-2; 3]$
17	$f(x) = 0.7 \operatorname{arctg}(3x) - x^4$	$[-2; 2]$
18	$f(x) = e^{(x-1.2)} - x$	$[-1; 3]$
19	$f(x) = -x^2 - 7e^{0.35x}$	$[-4; 1]$
20	$f(x) = x^4 + 0.2 \operatorname{arctg}(4.5x)$	$[-2; 2]$
21	$f(x) = 1.4 \operatorname{arctg}(3x) - x^2$	$[-2; 2]$
22	$f(x) = 2x^2 + 3e^{0.25x}$	$[-2; 3]$
23	$f(x) = -1.8 \operatorname{arctg}(5.5x) - x^2$	$[-2; 2]$
24	$f(x) = 2x^2 - 3e^{0.35x}$	$[-3; 2]$
25	$f(x) = -1.5 \operatorname{arctg}(7x) - x^2$	$[-2; 2]$
26	$f(x) = 0.8 \operatorname{arctg}(5.5x) + x^4$	$[-2; 2]$
27	$f(x) = 0.1 \operatorname{arctg}(4x) - x^4$	$[-3; 2]$
28	$f(x) = 2x^2 + 6e^{0.55x}$	$[-4; 1]$
29	$f(x) = -x^4 - 0.4 \operatorname{arctg}(5x)$	$[-2; 2]$
30	$f(x) = x^2 + 10e^{0.95x}$	$[-4; 1]$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Поняття кінцевих різниць

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею з постійним кроком.

x_i	$f(x_i)$
x_0	y_0
x_1	y_1
...	...
x_n	y_n

Різниці між значеннями функції у сусідніх вузлах інтерполяції називають **кінцевими різницями першого порядку**.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,$$

.....

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

З кінцевих різниць I порядку отримують **різниці другого порядку**:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,$$

.....

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}.$$

Аналогічно отримують **різниці k-го порядку**:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i=0,1,\dots,n-1.$$

Продовжуючи цей процес, можна за даною таблицею функції скласти таблицю кінцевих різниць.

Кінцеві різниці можуть бути представлені безпосередньо через значення функції:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i,\end{aligned}$$

.....

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k y_i, \quad i=0,1,\dots,n-1.$$

Перша інтерполяційна формула Ньютона

Будемо шукати інтерполяційний багаточлен у вигляді:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \quad (1)$$

Це багаточлен n -го степеню. Значення коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_n$ знайдемо з умови співпадання значень вихідної функції та багаточлена у вузлах інтерполяції:

$$N(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

Покладаючи $x = x_0$, знаходимо $N(x_0) = a_0 = y_0$.

Для $x = x_1$:

$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1. \text{ Звідки } a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Для $x = x_2$:

$$N(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2.$$

$$\begin{aligned}\text{Звідки } a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)}{2h^2} = \\ &= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Аналогічно знаходимо } a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}, \quad a_5 = \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Тобто, загальна формула для коефіцієнтів має вигляд:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Підставляючи знайдені вирази у формулу (1) для $N_n(x)$, отримуємо:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Це – перша інтерполяційна формула Ньютона. (3)

Проте, на практиці цю формулу використовують дещо в іншому вигляді. Для цього вводять змінну $q = \frac{x - x_0}{h}$. Тоді

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = q - 2,$$

.....

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = q - n + 1.$$

З урахуванням цих співвідношень, формула Ньютона (3) набуває вигляду:

$$N_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (4)$$

Це – запис першої формули Ньютона через фазу інтерполяції.

Отриманий вираз може апроксимувати задану функцію $y = f(x)$ на усьому відрізку зміни значення аргумента $[x_0, x_n]$. Проте цю формулу доцільно використовувати для інтерполяції (екстраполяції) функції $y = f(x)$ лише в околі початкового значення x_0 , де $q < 1$, тобто мале за абсолютною величиною. Для інших значень аргумента з першої половини відрізка інтерполяції, обчислюючи значення функції у фіксованій точці x в якості x_0 слід обирати найближче зліва вузлове значення аргумента. Тому інша назва першої інтерполяційної формули Ньютона – **формула Ньютона для інтерполяції вперед.**

Друга інтерполяційна формула Ньютона

Побудуємо інтерполяційний багаточлен у вигляді:

$$\begin{aligned} N_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ & + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + \\ & + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ обчислюємо, виходячи з тієї самої умови (2):

$$N_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Покладемо в (5) $x = x_n$. Тоді

$$N_n(x_n) = a_0 = y_n.$$

Для визначення a_1 покладемо $x = x_{n-1}$:

$$N_n(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n).$$

Враховуючи, що $N_n(x_{n-1}) = y_{n-1}$, $a_0 = y_n$, $x_{n-1} - x_n = -h$, можемо записати:

$$y_{n-1} = y_n - a_1 h.$$

Звідки

$$a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Вважаючи $x = x_{n-2}$ і замінюючи знайдені коефіцієнти їхніми значеннями, матимемо:

$$a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Аналогічні подальші обчислення дозволяють отримати вирази для інших коефіцієнтів:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4!h^4}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Після підстановки в (5) знайдених значень коефіцієнтів формула матиме вигляд:

$$N_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots +$$

(6)

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Це - друга інтерполяційна формула Ньютона.

Цю формулу можна також записати через фазу інтерполяції.

Позначимо фазу як $\frac{x - x_n}{h} = q$:

Тоді

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - (x_n - h)}{h} = q + 1;$$

$$\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - (x_n - 2h)}{h} = q + 2;$$

.....

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - [x_n - (n-1)h]}{h} = q + n - 1.$$

З урахуванням цих співвідношень, друга інтерполяційна формула Ньютона (6) набуває вигляду:

$$N_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (7)$$

Цю формулу використовують для значень аргумента у кінці таблиці, тобто для **інтерполяції назад**.

Підкреслимо: першу інтерполяційну формулу Ньютона застосовують для інтерполяції вперед і екстраполяції назад, а другу – для інтерполяції назад і екстраполяції вперед.

Диференційні рівняння у частинних похідних

Розв'язання практичних інженерних задач у багатьох випадках зводиться до розв'язання диференційних рівнянь у частинних похідних.

Якщо розв'язок рівняння шукається у обмеженій області, то задаються умови на її межі, так звані *межові (крайові) умови*. Такі задачі називають *крайовими задачами* для рівнянь у частинних похідних.

Диференційні рівняння з частковими похідними виду:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

називають *рівняннями Лапласа*.

Розглянемо двомірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

Розв'язок $U(x, y)$ цього рівняння будемо шукати для деякої обмеженої області D зміни значень незалежних змінних x, y . Межею області D є замкнена лінія L . Межові умови задаються у вигляді

$$U(x, y)|_L = \varphi(x, y) \quad (9)$$

Задача, яка полягає у розв'язанні рівняння Лапласа за відомих значень шуканої функції на межі розрахункової області, називають *задачею Діріхле*.

Одним з методів розв'язання задачі Діріхле є побудова *різницевої схеми* шляхом апроксимації рівняння (8). Для цього у області розв'язку D вводять різницеву сітку з кроком h за допомогою координатних прямих $x = \text{const}$ та $y = \text{const}$.

Значення функції $U(x, y)$ у вузлах сітки (x_i, y_i) замінюють значеннями сіткової функції u_{ij} . Апроксимуючи другі похідні у рівнянні (8) за допомогою співвідношень кінцевих різниць (шаблон зображений на рис. 1), отримують різницеве рівняння:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} = 0.$$

Дане рівняння можна представити у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень сіткової функції у вузлах. Система матиме вигляд:

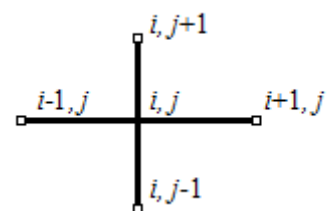


Рис. 1. Шаблон для рівняння Лапласа

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}).$$

Значення сіткової функції у вузлах, розташованих на межі області розв'язку, знаходять із межових умов (9):

$$u_{0j} = \varphi(x_0, y_j), u_{1j} = \varphi(x_1, y_j), u_{i0} = \varphi(x_i, y_0), u_{i1} = \varphi(x_i, y_1).$$

Одним з методів розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь є ітераційний метод. Ітераційний процес контролюється максимальним відхиленням значень сіткової функції у вузлах для двох послідовних ітерацій. Якщо його величина досягне деякого заданого малого числа ε , ітерації зупиняються.

Оптимізація функцій

Під **оптимізацією** розуміють процес вибору найкращого варіанту з усіх можливих. Більшість *задач оптимізації* зводиться до пошуку найменшого (найбільшого) значення деякої функції. Методи математичного аналізу зручні для розв'язання цієї задачі, коли функція задається в явному вигляді і при цьому є диференційованою. Коли ж функція задається таблицею значень або має аналітично громіздку формулу, ефективними є числові методи розв'язання.

Існують різні числові *методи пошуку* для розв'язання задачі оптимізації. Вони засновані на обчисленні функції в окремих точках і виборі серед них найбільшого чи найменшого значення. Процес розв'язання задачі методом пошуку полягає у послідовному звуженні інтервалу зміни параметра функції, який називають *інтервалом невизначеності*. На початку процесу оптимізації його довжина дорівнює $b - a$, а по закінченню вона має стати меншою за допустиму похибку ε , причому $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$.

Метод золотого перетину

Одним з найбільш ефективних числових методів оптимізації функції є **метод золотого перетину**. Він полягає в побудові послідовності відрізків, що

стягуються до точки мінімуму (максимуму) функції. На кожному кроці, за виключенням першого, обчислення значення функції $f(x)$ проводяться лише в одній точці, яку називають *золотим перетином*.

Точка x здійснює *золотий перетин* відрізка $[a;b]$ якщо відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини відрізка до довжини його меншої частини (рис. 2):

$$\frac{b-a}{b-x} = \frac{b-x}{x-a} = \Phi.$$

Число $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484...$ називають *золотим*

числом.

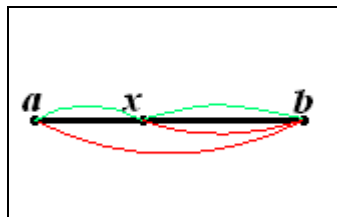


Рис. 2. Золотий перетин відрізка $[a;b]$ точкою x

Зауважимо, що на відрізку $[a;b]$ можна визначити дві симетрично розміщені відносно центру відрізка точки (x_1 та x_2), що реалізують золотий перетин (рис. 3):

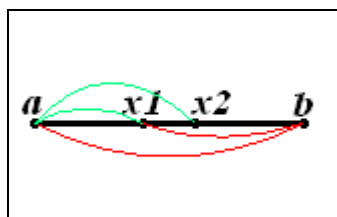


Рис. 3. Точки золотого перетину відрізка $[a;b]$

Їх знаходимо за формулами:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}.$$

Якщо $a < x_1 < x_2 < b$, то очевидно, що точка x_1 ділить відрізок $[a; x_2]$ у

відношенні золотого перетину. Аналогічно x_2 ділить відрізок $[x_1; b]$ у тій самій пропорції. Ця властивість й використовується для побудови ітераційного процесу.

Розглянемо метод золотого перетину на прикладі знаходження мінімуму функції $f(x)$ на заданому відрізку. Припустимо, що функція *унімодальна*, т. б. на даному відрізку вона має лише один мінімум.

На першій ітерації в середині відрізка $[a; b]$ у пропорції золотого перетину обираємо дві внутрішні точки x_1 та x_2 й обчислюємо значення функції у цих точках. Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, очевидно, що мінімум функції розташований на одному з відрізків: $[a; x_1]$ чи $[x_1; x_2]$. Тому відрізок $[x_2; b]$ можна відкинути, зменшивши тим самим початковий інтервал невизначеності. Другу ітерацію проводимо на новому відрізку $[a; b]$, ввівши позначення:

$$b = x_2, \quad x_2 = x_1, \quad x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}.$$

Якщо ж $f(x_1) > f(x_2)$, очевидно, що мінімум функції розташований на одному з відрізків: $[x_1; x_2]$ чи $[x_2; b]$. Отже можна відкинути відрізок $[a; x_1]$. Другу ітерацію в цьому випадку проводимо на новому відрізку $[a; b]$, ввівши позначення:

$$a = x_1, \quad x_1 = x_2, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}.$$

Знову обчислюємо значення функції $f(x_1)$ і $f(x_2)$, проводимо порівняння та повторюємо алгоритм звуження інтервалу невизначеності.

Процес оптимізації триває до тих пір, поки довжина чергового відрізка $[a; b]$ не стане меншою за задану величину ε :

$$|b^{(k)} - a^{(k)}| < \varepsilon, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1: за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона з точністю до 0.0001 обчислити наближені значення функції $y = f(x)$ у точках 0.1 та 0.9. За наявним набором значень побудувати графік інтерполяційної функції.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	1.2715	2.4652	3.6443	4.8095	5.9614	7.1005

Розв'язання: Складемо для заданої функції таблицю кінцевих різниць:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	0	1.2715	1.1937	-0.0146	0.0007	-0.0001	0.0000
1	0.2	2.4652	1.1791	-0.0139	0.0006	-0.0001	
2	0.4	3.6443	1.1652	-0.0133	0.0005		
3	0.6	4.8095	1.1519	-0.0128			
4	0.8	5.9614	1.1391				
5	1	7.1005					

За умовою крок таблиці $h = 0.2$.

Для $x = 0.1$ за початкове значення беремо $x_0 = 0$.

$$\text{Тоді } q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.1 - 0}{0.2} = 0.5.$$

Обчислення проводимо за першою інтерполяційною формулою Ньютона:

$$N_5(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0.$$

Отже

$$f(0.1) \approx N(0.1) = 1.2715 + 0.5 \cdot 1.1937 + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(-0.0146) +$$

$$+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!} 0.0007 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!} (0.0001) + 0 =$$

$$= 1.2715 + 0.59685 + 0.00182 + 0.00004 + 0.000004 = 1.8702.$$

Для $x = 0.9$ маємо: $x_n = x_5 = 1$, $q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0.9 - 1}{0.2} = -0.5$.

Обчислення проводимо за другою інтерполяційною формулою Ньютона:

$$N_5(x) = y_5 + q\Delta y_4 + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_3 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_2 +$$

$$+ \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} \Delta^4 y_1 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}{5!} \Delta^5 y_0.$$

Отже

$$f(0.9) \approx N(0.9) = 7.1005 - 0.5 \cdot 1.1391 - \frac{0.5(-0.5+1)}{2!} (-0.0128) -$$

$$- \frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!} 0.0005 - \frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)}{4!} (-0.0001) + 0 =$$

$$= 7.1005 - 0.5696 + 0.0016 - 0.00003 + 0.000004 = 6.5325.$$

За наявним набором значень побудуємо графік інтерполяційної функції $y = N(x)$ на інтервалі $(0; 1)$ (рис. 4):

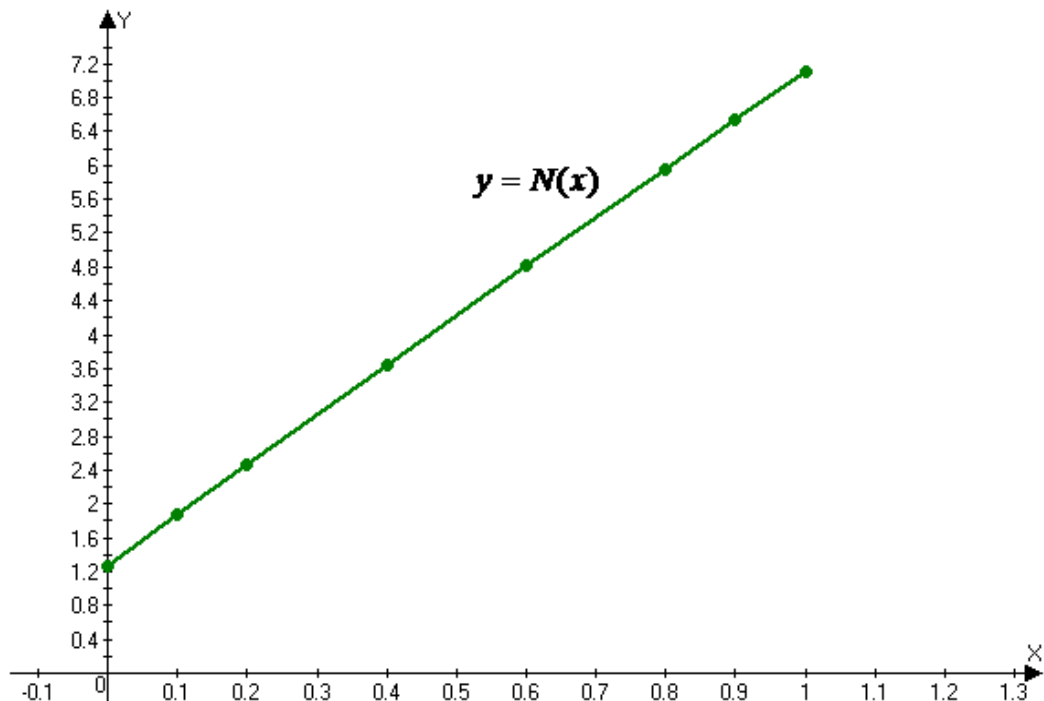


Рис. 4. Графік інтерполяційної функції $y = N(x)$

Відповідь: $f(0.1) \approx 1.8702$, $f(0.9) \approx 6.5325$.

Завдання 2. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв'язок

$U(x, y)$ задачі Діріхле для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ у квадраті ABCD

з вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$ із заданими межевими умовами

$U|_{AB} = 45y(1 - y)$, $U|_{BC} = 25x$, $U|_{CD} = 25$, $U|_{AD} = 25x \sin \frac{\pi x}{2}$; крок $h=0.2$.

Відповідь дати з точністю до 0.01.

Розв'язання:

Побудуємо область розв'язку, тобто введемо у квадраті ABCD різницеву сітку з кроком $h=0.2$. Вузли сітки є розрахунковими точками (рис. 5):

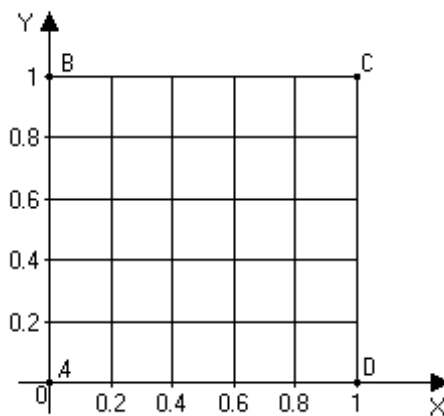


Рис. 5. Сітка області розв'язку

Значення функції $U(x, y)$ на стороні AB шукаємо за формулою $U(x, y) = 45y(1 - y)$. Маємо: $U(0, 0) = 0$; $U(0, 0.2) = 7.2$; $U(0, 0.4) = 10.8$; $U(0, 0.6) = 10.8$; $U(0, 0.8) = 7.2$; $U(0, 1) = 0$.

На стороні BC: $U(x, y) = 25x$. Маємо: $U(0.2, 1) = 5$; $U(0.4, 1) = 10$; $U(0.6, 1) = 15$; $U(0.8, 1) = 20$; $U(1, 1) = 25$.

На стороні BC : $U(x, y) = 25$. Отже: $U(1, 0.8) = U(1, 0.6) = U(1, 0.4) = U(1, 0.2) = U(1, 0) = 25$.

На стороні AD : $U(x, y) = 25x \sin \frac{\pi x}{2}$. Маємо: $U(0.2, 0) = 1.545$;
 $U(0.4, 0) = 5.878$; $U(0.6, 0) = 12.135$; $U(0.8, 0) = 19.021$

Відмітимо на сітці знайдені межові значення та шукані значення функції $U(x, y)$ (рис. 6):

0	5	10	15	20	25
7.2	U_{13}	U_{14}	U_{15}	U_{16}	25
10.8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}	25
10.8	U_5	U_6	U_7	U_8	25
7.2	U_1	U_2	U_3	U_4	25
0	1.545	5.878	12.135	19.021	25

Рис. 6. Розрахункові точки області розв'язку

Для визначення значень функції у внутрішніх точках області розв'язку методом сіток задане рівняння Лапласа у кожній точці замінимо кінцево-різницевою рівнянням за формулою

$$U(x_i, y_j) = \frac{1}{4}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1})$$

За цією формулою складемо рівняння для кожної внутрішньої точки сітки. В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$U_1 = U(0.2; 0.2) = \frac{1}{4}(7.2 + 1.545 + U_2 + U_5);$$

$$U_2 = U(0.4; 0.2) = \frac{1}{4}(5.878 + U_1 + U_3 + U_6);$$

$$U_3 = U(0.6; 0.2) = \frac{1}{4}(12.135 + U_2 + U_4 + U_7);$$

$$U_4 = U(0.8;0.2) = \frac{1}{4}(19.021 + 25 + U_3 + U_8);$$

$$U_5 = U(0.2;0.4) = \frac{1}{4}(10.8 + U_1 + U_6 + U_9);$$

$$U_6 = U(0.4;0.4) = \frac{1}{4}(U_2 + U_5 + U_7 + U_{10});$$

$$U_7 = U(0.6;0.4) = \frac{1}{4}(U_3 + U_6 + U_8 + U_{11});$$

$$U_8 = U(0.8;0.4) = \frac{1}{4}(25 + U_4 + U_7 + U_{12});$$

$$U_9 = U(0.2;0.6) = \frac{1}{4}(10.8 + U_5 + U_{10} + U_{13});$$

$$U_{10} = U(0.4;0.6) = \frac{1}{4}(U_6 + U_9 + U_{11} + U_{14});$$

$$U_{11} = U(0.6;0.6) = \frac{1}{4}(U_7 + U_{10} + U_{12} + U_{15});$$

$$U_{12} = U(0.8;0.6) = \frac{1}{4}(25 + U_8 + U_{11} + U_{16});$$

$$U_{13} = U(0.2;0.8) = \frac{1}{4}(7.2 + 5 + U_9 + U_{14});$$

$$U_{14} = U(0.4;0.8) = \frac{1}{4}(10 + U_{10} + U_{13} + U_{15});$$

$$U_{15} = U(0.6;0.8) = \frac{1}{4}(15 + U_{11} + U_{14} + U_{16});$$

$$U_{16} = U(0.8;0.8) = \frac{1}{4}(20 + 25 + U_{12} + U_{15}).$$

Розв'язок цієї системи будемо шукати ітераційним методом Гауса-Зейделя. Розрахункові співвідношення матимуть вигляд:

$$U_1^{(k)} = \frac{1}{4}(8.745 + U_2^{(k-1)} + U_5^{(k-1)});$$

$$U_2^{(k)} = \frac{1}{4}(5.878 + U_1^{(k)} + U_3^{(k-1)} + U_6^{(k-1)});$$

$$U_3^{(k)} = \frac{1}{4}(12.135 + U_2^{(k)} + U_4^{(k-1)} + U_7^{(k-1)});$$

$$U_4^{(k)} = \frac{1}{4} \left(44.021 + U_3^{(k)} + U_8^{(k-1)} \right);$$

$$U_5^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10.8 + U_1^{(k)} + U_6^{(k-1)} + U_9^{(k-1)} \right);$$

$$U_6^{(k)} = \frac{1}{4} \left(U_2^{(k)} + U_5^{(k)} + U_7^{(k-1)} + U_{10}^{(k-1)} \right);$$

$$U_7^{(k)} = \frac{1}{4} \left(U_3^{(k)} + U_6^{(k)} + U_8^{(k-1)} + U_{11}^{(k-1)} \right);$$

$$U_8^{(k)} = \frac{1}{4} \left(25 + U_4^{(k)} + U_7^{(k)} + U_{12}^{(k-1)} \right);$$

$$U_9^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10.8 + U_5^{(k)} + U_{10}^{(k-1)} + U_{13}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{10}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(U_6^{(k)} + U_9^{(k)} + U_{11}^{(k-1)} + U_{14}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{11}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(U_7^{(k)} + U_{10}^{(k)} + U_{12}^{(k-1)} + U_{15}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{12}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(25 + U_8^{(k)} + U_{11}^{(k)} + U_{16}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{13}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(12.2 + U_9^{(k)} + U_{14}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{14}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(10 + U_{10}^{(k)} + U_{13}^{(k)} + U_{15}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{15}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(15 + U_{11}^{(k)} + U_{14}^{(k)} + U_{16}^{(k-1)} \right);$$

$$U_{16}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(45 + U_{12}^{(k)} + U_{15}^{(k)} \right);$$

Для проведення обчислень за цими формулами необхідно визначити початкові наближення $U_i^{(0)}$. Припустимо, що функція $U(x, y)$ по горизонталях області розв'язку розподілена рівномірно.

Розглянемо горизонталь з граничними точками $(0, 0.2)$ та $(1, 0.2)$. Шукані значення функції у внутрішніх точках позначимо через $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, U_4^{(0)}$. Оскільки відрізок поділений на 5 частин, то крок зміни функції знаходимо зі співвідношення

$$K_1 = \frac{25 - 7.2}{5} = 3.56.$$

Тоді отримаємо

$$U_1^{(0)} = 7.2 + K_1 = 7.2 + 3.56 = 10.76;$$

$$U_2^{(0)} = U_1^{(0)} + K_1 = 10.76 + 3.56 = 14.32;$$

$$U_3^{(0)} = U_2^{(0)} + K_1 = 14.32 + 3.56 = 17.88;$$

$$U_4^{(0)} = U_3^{(0)} + K_1 = 17.88 + 3.56 = 21.44.$$

Аналогічні міркування проведемо для знаходження початкових наближень у внутрішніх точках інших горизонталей.

Для другої горизонталі з граничними точками (0, 0.4) та (1, 0.4) маємо

$$K_2 = \frac{25 - 10.8}{5} = 2.84.$$

Отже,

$$U_5^{(0)} = 10.8 + 2.84 = 13.64; \quad U_6^{(0)} = 13.64 + 2.84 = 16.48;$$

$$U_7^{(0)} = 16.48 + 2.84 = 19.32; \quad U_8^{(0)} = 19.32 + 2.84 = 22.16.$$

Значення у граничних точках третьої горизонталі такі самі, як й для другої.

Тому маємо:

$$U_9^{(0)} = U_5^{(0)} = 13.64; \quad U_{10}^{(0)} = U_6^{(0)} = 16.48;$$

$$U_{11}^{(0)} = U_7^{(0)} = 19.32; \quad U_{12}^{(0)} = U_8^{(0)} = 22.16.$$

Нарешті, значення у граничних точках четвертої горизонталі такі самі, як й для першої.

Отже,

$$U_{13}^{(0)} = U_1^{(0)} = 10.76; \quad U_{14}^{(0)} = U_2^{(0)} = 14.32;$$

$$U_{15}^{(0)} = U_3^{(0)} = 17.88; \quad U_{16}^{(0)} = U_4^{(0)} = 21.44.$$

Всі отримані значення розміщуємо у таблиці, яку називають *нульовим шаблоном*:

1	0	5	10	15	20	25
0.8	7.2	10.76	14.32	17.88	21.44	25
0.6	10.8	13.64	16.48	19.32	22.16	25
0.4	10.8	13.64	16.48	19.32	22.16	25
0.2	7.2	10.76	14.32	17.88	21.44	25
0	0	1.545	5.878	12.135	19.021	25
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

Для кожного нового наближеного розв'язку задачі складаємо таблицю, що міститиме лише внутрішні значення, які змінюються в процесі обчислень. Ці таблиці називають *шаблонами*.

Отримаємо наступну послідовність шаблонів:

Шаблон №1

9.790	13.258	17.027	20.904
12.641	15.363	18.411	21.589
12.524	15.169	18.240	21.506
9.176	12.354	16.312	20.623

Шаблон №2

9.346	12.706	16.558	20.677
11.927	14.449	17.624	21.151
11.754	14.200	17.432	21.076
8.406	11.441	15.610	20.284

Шаблон №3

9.090	12.368	16.285	20.543
11.456	13.823	17.096	20.885
11.228	13.507	16.850	20.768
7.985	10.918	15.192	20.072

Шаблон №4

8.929	12.156	16.114	20.458
11.146	13.410	16.758	20.716
10.871	13.030	16.450	20.565
7.723	10.575	14.908	19.924

Шаблон №5

8.825	12.020	16.004	20.403
10.942	13.141	16.539	20.607
10.631	12.708	16.186	20.432
7.548	10.341	14.713	19.825

Шаблон №6

8.757	11.932	15.933	20.367
10.809	12.966	16.397	20.536
10.470	12.495	16.012	20.344
7.429	10.182	14.582	19.759

Шаблон №7

8.713	11.874	15.887	20.344
10.722	12.851	16.305	20.490
10.363	12.354	15.898	20.287
7.349	10.076	14.495	19.715

Шаблон №8

8.685	11.837	15.856	20.329
10.664	12.776	16.244	20.459
10.293	12.262	15.823	20.250
7.296	10.006	14.439	19.687

Шаблон №9

8.666	11.812	15.836	20.319
10.627	12.727	16.204	20.440
10.247	12.202	15.774	20.225
7.261	9.960	14.401	19.668

Шаблон №10

8.654	11.796	15.823	20.313
10.602	12.695	16.178	20.427
10.217	12.162	15.742	20.209
7.238	9.930	14.377	19.656

Шаблон №11

8.646	11.786	15.815	20.308
10.586	12.674	16.161	20.418
10.197	12.136	15.721	20.199
7.223	9.910	14.361	19.648

Шаблон №12

8.640	11.779	15.809	20.306
10.576	12.661	16.150	20.413
10.184	12.119	15.707	20.192
7.213	9.897	14.350	19.643

Шаблон №13

8.637	11.774	15.806	20.304
10.569	12.652	16.143	20.409
10.175	12.108	15.698	20.188
7.206	9.888	14.343	19.639

Шаблон №14

8.635	11.772	15.803	20.303
10.565	12.646	16.138	20.407
10.170	12.101	15.693	20.185
7.202	9.883	14.339	19.637

Ітераційний процес зупиняємо, оскільки шаблони №14 та №13 містять послідовні наближення невідомих, відхилення між якими стали меншими за 0.01 (задану точність):

-0,002	-0,003	-0,002	-0,001
-0,004	-0,006	-0,005	-0,002
-0,006	-0,007	-0,006	-0,003
-0,004	-0,006	-0,004	-0,002

Результат округлюємо до сотих.

Відповідь:

1	0	5	10	15	20	25
0.8	7.2	8.63	11.77	15.80	20.30	25
0.6	10.8	10.56	12.64	16.14	20.40	25
0.4	10.8	10.17	12.10	15.69	20.18	25
0.2	7.2	7.20	9.88	14.34	19.64	25
0	0	1.54	5.88	12.14	19.02	25
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

Завдання 3. Методом золотого перетину знайти мінімальне значення унімодальної функції $f(x) = x^2 + 10e^{0.95x}$ на відрізку $[-5; 5]$ з точністю до 0.01.

Розв'язання: Обчислення проводимо за формулами:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}, \quad \text{де } \Phi \approx 1.618.$$

Результати обчислень заносимо до таблиці:

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x_1^{(k)})$	$f(x_2^{(k)})$
1	-5	5	-1.18047	1.18047	4.65159	32.08641
2	-5	1.18047	-2.63935	-1.18047	7.78098	4.65159
3	-2.63935	1.18047	-1.18047	-0.27852	4.65159	7.75273
4	-2.63935	-0.27852	-1.73763	-1.18047	4.93841	4.65159
5	-1.73763	-0.27852	-1.18047	-0.83583	4.65159	5.21877
6	-1.73763	-0.83580	-1.39317	-1.18050	4.60291	4.65157
7	-1.73763	-1.18050	-1.52483	-1.39320	4.67412	4.60292
8	-1.52480	-1.18050	-1.39320	-1.31201	4.60292	4.59672
9	-1.39320	-1.18050	-1.31200	-1.26174	4.59672	4.60799
10	-1.39320	-1.26170	-1.34297	-1.31200	4.59558	4.59672
11	-1.39320	-1.31200	-1.36219	-1.34300	4.59706	4.59558
12	-1.36220	-1.31200	-1.34300	-1.33117	4.59558	4.59550
13	-1.34300	-1.31200	-1.33120	-1.32384	4.59550	4.59577
14	-1.34300	-1.32380	-1.33567	-1.33120	4.59546	4.59550
15	-1.34300	-1.33120	-1.33849	-1.33567	4.59548	4.59546
16	-1.33849	-1.33120	-1.33567	-1.33398	4.59546	4.59547

Критерієм закінчення ітераційного процесу є виконання умови

$$|b^{(k)} - a^{(k)}| < 0.01, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки:

$$|b^{(16)} - a^{(16)}| = |-1.33120 + 1.33849| = 0.00729 < 0.01,$$

то ітераційний процес зупиняється. Можемо прийняти

$$x_{\min} \approx \frac{1}{2}(-1.33849 - 1.33120) \approx -1.33485 \approx -1.33.$$

Отже

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = (-1.33)^2 + 10e^{0.95(-1.33)} \approx 4.59553 \approx 4.60.$$

Відповідь: $x_{\min} \approx -1.33$, $y_{\min} \approx 4.60$.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Оцінювання розрахункової роботи відбуватиметься на основі аналізу наступних факторів:

- наявність розрахункових формул;
- наявність проміжних розрахунків;
- формат подання відповіді;
- правильність виконання розрахункової частини роботи;
- правильність виконання ілюстративного матеріалу;
- дотримання вимог щодо оформлення та структури роботи.

«Відмінно», повне правильне виконання роботи у відповідності до зазначених вимог та критеріїв – 13 балів;

«Дуже добре», повне виконання роботи у відповідності до зазначених вимог, незначні помилки у розрахунках – 11-12 балів

«Добре», повне виконання роботи, незначні помилки у розрахункових формулах та/чи у розрахунках, певна невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 9-10 балів;

«Задовільно», повне виконання роботи, помилки у розрахункових формулах та/чи у розрахунках, певна невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 8 балів;

«Достатньо», неповне та/чи неправильне виконання роботи, помилки у розрахункових формулах, суттєва невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 7 балів;

«Незадовільно», неповне та/чи неправильне виконання роботи, відсутність розрахункових формул, невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 1-6 балів;

«Роботу не зараховано», робота не відповідає варіанту – 0 балів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Андруник, В.А.* Чисельні методи в комп'ютерних науках : навчальний посібник / В.А. Андруник, В.А. Висоцька, В.В. Пасічник, Л.Б. Чирун, Л.В. Чирун ; за науковою редакцією В.В. Пасічника ; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". – Львів : Видавництво "Новий Світ-2000", 2019. – 2 т. : рис., табл. – Том 1. – 2019. – 469 с.; Том 1. – 2019. – 536 с.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : Высш. шк., 2000. – 192 с.
3. *Бахвалов Н. С.* Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с. : ил. – Библ. : с. 624-628.
4. *Бойко Л. Т.* Основи чисельних методів : Навчальний посібник / Л. Т. Бойко. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2009. – 244 с.
5. *Бойченко, Л. П.* Численные методы и их компьютерная реализация : Учебное пособие / Л.П. Бойченко, Н.М. Выборова, О.Н. Туманова – Ухта : УГТУ, 2012. – 90 с.
6. *Брановицька, С. В.* Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології : підручник / С. В. Брановицька, Р. Б. Медведєв, Ю. Я Фіалков; НТУУ «КПІ». – Київ : Політехніка, 2004. – 220 с.
7. *Вавіленкова, А. І.* Алгоритми та методи обчислень : підручник / А.І. Вавіленкова ; Міністерство освіти і науки України, Національний авіаційний університет. – Київ : НАУ, 2019. – 227 сторінок : рисунки, таблиці. – (Сучасний університетський підручник)
8. *Волков, Е. А.* Численные методы : учебное пособие / Е. А. Волков. – 5-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2008. – 256 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Библ. : с. 244.
9. *Гончаров, О. А.* Чисельні методи розв'язання прикладних задач :

навчальний посібник / О.А. Гончаров, Л.В. Васильєва, А.М. Юнда ; Міністерство освіти і науки України, Сумський державний університет. – Суми : Сумський державний університет, 2020. - 141 сторінка : рисунки, таблиці.

10. *Демидович Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова ; под ред. Б. П. Демидовича. – Изд. 4-е, стер. – Сер. Классическая учебная литература по математике. – СПб. : Лань, 2008. – 400 с.
11. *Жидков, Е.Н.* Вычислительная математика : Учебник. – 2-е изд., перераб. – М.: Академия, 2013. – 208 с. – (Сер. «Бакалавриат»). – ISBN 978-5-4468-0222-7, OCR.
12. *Задачин В. М.* Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.)
13. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие / Н.Н.Калиткин. – 2-е изд. исправленное. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 586 с. : ил. – (Учебная литература для вузов).
14. *Копченова Н. В.* Вычислительная математика в примерах и задачах Изд. 2-е, стер. / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – СПб.: Лань, 2008. – 368 с. – (Сер. Лучшие классические ученики).
15. *Петергеря Ю.С.* Обчислювальна математика: Навч. посібник / Ю.С. Петергеря, О.В. Соболев, О.О. Абакумова. – К. : НТУУ «КПІ», 2007. – Ч.1. – 92 с. – Бібл. : с. 88.
16. *Петергеря Ю.С.* Обчислювальна математика: Навч. посібник / Ю.С. Петергеря, О.В. Соболев, О.О. Абакумова. – К. : НТУУ «КПІ», 2010. – Ч.2. – 68 с. – Бібл. : с. 65.
17. *Пістунов І. М.* Чисельні методи: Навч. посібник. [Електронне видання] / І.М. Пістунов ; Нац. гірн. ун-т. – Електрон. текст. дані. – Д. : НГУ, 2014. – 215 с. – Режим доступу: http://pistunovi.narod.ru/E_K.pdf
18. *Турчак Л. Н.* Основы численных методов: Учеб. пособие / Л.И. Турчак,

- П.В. Плотников. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 304 с. – Библ. : с. 290-292.
19. *Фельдман Л. П.* Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BHV, 2006. - 480 стр.: іл. – Библ. : с. 471-472.
 20. *Цегелік, Г.Г.* Чисельні методи : Підручник. — Львів: Видавничий центр Львівського нац. ун-ту імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
 21. *Bansal, R.K.* Fundamentals of Numerical Methods / Rajeev K. Bansal – Oxford: Alpha Science International Ltd., 2018. – 574 p.
 22. *Grewal B.S.* Numerical Methods in Engineering and Science: C, C++, and MATLAB / B.S. Grewal. – Mercury Learning and Information, 2019. – 950 p.
 23. *Gupta R.* Numerical Methods: Fundamentals and Applications / R. Gupta/. – Cambridge University Press, 2019. – 830 p.
 24. *Kaushik, A.* Numerical Methods For Engineers (with programs in MATLAB) / Arti Kaushik. – New Delhe : Standard Book House, 2018. – 305 p.