УДК 571.986

М.М. Кухарчук, М.І. Яременко

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З МАТРИЦЕЮ ГІЛЬБАРГА–СЕРРИНА В R^l

Вступ

Дана стаття є логічним продовженням попередніх праць авторів: в ній розробляється та модернізується метод розв'язання нелінійних задач, що був вперше запропонований М.М. Кухарчуком [1, 2]. Доведено існування і єдиність розв'язку рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + b(x,u,\nabla u) = f,\ \lambda > 0,$$
$$\forall f \in W_{-1}^{p},$$

за нестандартних обмежень.

Постановка задачі

Мета статті — довести розв'язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільбарга–Серрина за нестандартних обмежень, що наведені нижче.

Дослідження рівняння квазілінійного рівняння з матрицею Гільбарга–Серрина

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + b(x,u,\nabla u) = f,\ \lambda > 0, \quad \forall f \in W_{-1}^{p}, \tag{1}$$

де a — відома матриця Гільбарга–Серрина:

$$a = \left(\delta_{ij} + b\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right),\ b = -1 + \frac{l-1}{1-\chi},\ \chi < 1,\ l \ge 3,$$

при обмеженнях

$$\begin{gathered}
|b(x,u,\nabla u)| \le \mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x),\\
|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \le \mu_4(x)|u-v| + \mu_5(x)|\nabla(u-v)|,\\
|b^r(x,u,\nabla u)| \le \mu_6(x)|\nabla u| + \mu_7(x)|u| + \mu_8(x),\\
|b^u(x,u,\nabla u)| \le \mu_9(x)|\nabla u| + \mu_{10}(x)|u| + \mu_{11}(x),\\
|b^{\nabla u}(x,u,\nabla u)| \le \mu_{12}(x)|\nabla u| + \mu_{13}(x)|u| + \mu_{14}(x),
\end{gathered} \tag{2}$$

де $\mu_i \in L_\infty(R^n), i = 1,\dots,14$, і $\mu_3 \in L_p(R^n)$; $b(x,y,z)$ — неперервна на $R^l \times R \times R^l$ скалярна функція, неперервно диференцьована по (y,z); $b^u(x,u,\nabla u)$ — за визначенням, похідна функції $b(x,y,z)$ по другому аргументу; $b^{\nabla u}(x,u,\nabla u)$ — за визначенням, похідна функції $b(x,y,z)$ по третьому аргументу; $da = b(l-1)\dfrac{x}{|x|^2}$; $da \circ a^{-1} \circ da = (1+b)^{-1}\left(\dfrac{l-1}{|x|}\right)^2$.

Введемо простір $W_1^p(R^l, d^l x) =: \{v \mid v \in L^p(R^l, d^l x),\ D_i v \in L^p(R^l, d^l x),\ i = 1,\dots,l\}$,

$$\|v\|_{W_1^p(R^l,d^lx)} = \|v\|_{L^p(R^l,d^lx)} + \sum_i \|D_i v\|_{L^p(R^l,d^lx)},$$

де $W_{1,0}^p(R^l, d^l x) =: \{v \mid v \in W_1^p(R^l, d^l x)$ і має компактний носій$\}$; $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — спряжений до $W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ простір (див. [3, с. 84, 85]).

У статті буде використовуватися клас функцій $\text{ПК}_\beta(-\Delta)$, $v^2 \in \text{ПК}_\beta(-\Delta)$ (див. [2]), тоді і тільки тоді, коли $v^2 \in L^1_{\text{loc}}(R^l)$ і існують такі константи β і $C(\beta)$, що

$$\|v\varphi\|_2^2 \le \beta\|\nabla\varphi\|_2^2 + C(\beta)\|\varphi\|_2^2, \tag{3}$$

для довільної $\varphi \in C_0^\infty(R^l)$.

Тоді буде справедлива така теорема.

Теорема 1. Рівняння (1) за умов (2) однозначно розв'язне в W_1^p.

Для доведення цієї теореми використаємо модернізацію методу Гальоркіна, але спочатку введемо деякі позначення та сформулюємо деякі леми.

Визначимо форму $h_\lambda^p(u,v)$, покладаючи

$$h_\lambda^p(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle + \langle dv \circ a \circ du\rangle + \langle b(x,u,\nabla u), v\rangle, \tag{4}$$

де $u \in W_1^p$; v — довільний елемент із простору $W_{1,0}^{p'}$; $D(h_\lambda^p) = \{u \in W_1^p : |h_\lambda^p(u,v)| < \infty\}$.

Отже, мають місце такі леми.

Лема 1. Форма h_λ^p обмежена.

Доведення. Для того щоб показати обмеженість форми $h_\lambda^p(u,v)$, використовуємо нерівність Гельдера. Одержимо

$$|h_\lambda^p(u,v)| \le \lambda \| u \|_p \| v \|_{p'} + C_1 \|\nabla u\|_p \|\nabla v\|_{p'} + \\ + \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p \|v\|_{p'} + \|\mu_2\|_\infty \|u\|_p \|v\|_{p'} + \\ + \|\mu_3\|_p \|v\|_{p'}.$$

Лема доведена.

Як наслідок наведеної леми одержимо, що форма породжує оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, який є обмеженим. Дійсно, оскільки $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^{p''} \to R$ є обмеженим та лінійним відображенням по кожному аргументу, то форма завдяки теоремі Банаха породжує оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$. Отже, можемо записати $h_\lambda^p(u,v) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u), v \rangle$.

Лема 2. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – коерцитивне відображення.

Доведення. Під коерцитивним ми розуміємо такий оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, який породжений формою та задовольняє умову

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^{p'}} \to \infty} \frac{h_\lambda^p(u, u|u|^{p-2})}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^{p'}}} = \infty. \quad (*)$$

Справді, має місце оцінка

$$\begin{aligned} h_\lambda^p(u, u|u|^{p-2}) &\ge \lambda \|u\|_p^p + (p-1) \times \\ &\times \langle du \circ a \circ du, |u|^{p-2} \rangle - \frac{1}{p} \|\mu_1\|_\infty \|\nabla u\|_p^p - \\ &- \|\mu_1\|_\infty \frac{p-1}{p} \|u\|_p^p - \|\mu_2\|_\infty \|u\|_p^p - \\ &- \|\mu_3\|_p \frac{p-1}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{p} \|\mu_3\|_p, \end{aligned} \quad (5)$$

для одержання якої застосовані нерівності Гельдера і Юнга, а також деякі властивості норм L_p.

Застосовуючи ще раз нерівності Гельдера і Юнга, а також невід'ємність норм, одержуємо

$$h_\lambda^p(u, u|u|^{p-2}) \ge \\ \ge \left(\lambda - \|\mu_1\|_\infty \frac{p-1}{p} - \|\mu_2\|_\infty - \|\mu_3\|_\infty \frac{p-1}{p} \right) \|u\|_p^p + \\ + \left((p-1) C_1 \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \|\mu_1\|_\infty \right) \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{p} \|\mu_3\|_p,$$

тому, враховуючи останню нерівність, безпосередньо перевіряємо умову (*). Лема доведена.

Лема 3. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – акретивне відображення.

Доведення. Згідно з означенням акретивності (див., наприклад, [2, 4]) оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ акретивний в L_p, якщо

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle \ge 0 \quad \forall u,\ v \in W_1^p.$$

Отже, враховуючи умови (2) та виконуючи перетворення аналогічні тим, що й при доведенні леми 2, маємо

$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \rangle \ge \lambda \|u-v\|_p^p + \\ &+ (p-1) \langle d(u-v) \circ a \circ d(u-v), |u-v|^{p-2} \rangle - \\ &- \|\mu_4\|_\infty \|u-v\|_p^p - \|\mu_5\|_\infty \langle \nabla(u-v), |u-v|^{p-1} \rangle \ge \\ &\ge (\lambda - \lambda_c) \|W\|_2^2 + C(p, l, \mu_4, \mu_5) \|\nabla W\|_2^2 \ge 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $W = (u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}$ і знак рівності справедливий лише у випадку $u \equiv v$. Лема доведена.

Лема 4. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – хемінеперервне відображення.

Доведення. За визначенням, оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – хемінеперервне відображення, якщо $\forall u,\ v \in W_1^p$ $\omega - \lim_{t \to 0} \mathrm{A}_\lambda^p(u+tv) = \mathrm{A}_\lambda^p(u)$ в нормі W_{-1}^p.

Отже, можемо написати такі оцінки:

$$\begin{aligned} &|\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u+tv) - \mathrm{A}_\lambda^p(u), W \rangle| = \lambda |t \langle v, W \rangle| + \\ &+ |t \langle dW \circ a \circ dv \rangle| + |\langle (b(x, (u+tv), \nabla(u+tv)) - \\ &- b(x, u, \nabla u)), W \rangle| \le \lambda t |\langle v, W \rangle| + \\ &+ t |\langle dW \circ a \circ dv \rangle| + t \|\mu_4\|_\infty |\langle v, W \rangle| + \\ &+ t \|\mu_5\|_\infty |\langle \nabla v, W \rangle| \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \ \ \forall W \in W_{1,0}^{p'}, \end{aligned}$$

що й доводить лему.

Перейдемо до доведення теореми.

Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ – гладкі базиси відповідно просторів $W_{1,0}^p$, $W_{1,0}^{p'}$ і нехай $[v_1, \ldots, v_n]$ – лінійна оболонка базисних елементів, $\langle u_n, u_n^* \rangle = \| u_n \|_p^p$.

Покладемо, за визначенням, $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, $u_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* v_i^*$ (див. [4]). Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n) - f, v_i^* \rangle = 0,\ i = 1,...,n. \qquad (6)$$

Система (6) визначає неперервне відображення $\bar{B}: R^n \to R^n$, отже, має місце лема "про гострий кут".

Нехай на сфері $S_R = (\bar{C} : |\bar{C}| = R)$, де $R > 0$ – деяке відповідно вибране число, що можливо завдяки властивості коерцитивності оператора і виконанні умови "гострого кута" $\langle \bar{B}(\bar{C}), \bar{C}^* \rangle \geq 0$. Тоді існує принаймні одна точка $\bar{C}, |\bar{C}| \leq R$, така, що $\bar{B}(\bar{C}) = 0$.

Доведення цієї леми можна знайти в [4, 5]. Далі будемо реалізовувати аналог методу Гальоркіна, тобто покажемо, що система (6) має розв'язок у лінійній оболонці перших n елементів базису $\{v_i\}$. Дійсно, відображення $\bar{B}(\bar{C}) : 0 \subset B_i(\bar{C}) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n) - f, v_i^* \rangle$, $i = 1,...,n$, внаслідок коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ задовольняє умови "гострого кута":

$$\langle \bar{B}(\bar{C}), \bar{C}^* \rangle = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) - f, \sum_{i=1}^{n} c_i^* v_i^* \right\rangle =$$

$$= \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_n) - f, u_n |u_n|^{p-2} \rangle \geq$$

$$\geq \left(\frac{h_\lambda^p(u_n, |u_n|^{p-2})}{\| u_n |u_n|^{p-2} \|_{W_1^{p'}}} - \| f \|_{W_{-1}^p} \right) \| u_n |u_n|^{p-2} \|_{W_1^{p'}} \geq 0.$$

Оскільки $\mathrm{A}_\lambda^p(u_n)$ – неперервне відображення на скінченних підпросторах простору $W_{1,0}^p$, має місце існування $\bar{C}, |\bar{C}| = R$, $\bar{B}(\bar{C}) = 0$ внаслідок умови "гострого кута" для досить великих $R > 0$.

Отже, ми фактично вказали спосіб побудови послідовності $\{u_n(x)\}$, такої, що є розв'язками систем (6), тобто далі хочемо довести, що послідовність $\{u_n(x)\}$ збігається до розв'язку рівняння (1).

Використовуючи умову коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ одержуємо $\| \mathrm{A}_\lambda^p(u_n) \|_{W_{-1}^p} \leq \| f \|_{W_{-1}^p}$. Якщо нами буде доведено, що $\| u_n \|_{W_{-1}^p} < C$, де стала залежить лише від структури рівняння, тоді внаслідок слабкої компактності W_1^p [3, с. 180] існує підпослідовність $(u_{n'}(x))$, така, що $u_{n'} \xrightarrow[W_1^p]{} u_0$ – слабко і $\mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) \xrightarrow[W_1^p]{} y$ – слабко. Покажемо, що $y = \mathrm{A}_\lambda^p(u_0) = f$, звідси випливатиме, що відображення $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є сюр'єкцією, або "відображенням на".

Для того щоб довести останнє твердження, складемо "інтегральні тотожності":

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) v_i^* \rangle = \langle f, v_i^* \rangle,\ i = 1,... \qquad (8)$$

Перейдемо у (8) до границі при $n' \to +\infty$. Одержимо $\lim_{n' \to \infty} \mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) = y = f$ (границя по нормі W_{-1}^p).

Оскільки оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ акретивний в L^p, то $\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) - - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u_{n'} - v) |u_{n'} - v|^{p-2} \rangle \geq 0$. В останній нерівності, переходячи до границі при $n' \to \infty$, одержуємо $\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u_0 - v) |u_0 - v|^{p-2} \rangle \geq 0$.

Покладаючи $v = u_0 - tz,\ t > 0,\ \forall z \in W_{1,0}^p$ і далі скорочуючи обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, знаходимо, що $\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p(u_0 - tz), z |z|^{p-2} \rangle \geq 0$.

Використовуючи хемінеперервність оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ та довільність вибору елемента $z \in W_{1,0}^p$, одержуємо $y = = \mathrm{A}_\lambda^p(u_0) = f$, тобто для заданих початкових даних ми побудували послідовність $\{u_{n'}\}$ і довели її збіжність до елемента $u_0 \in W_{-1}^p$, такого, що реалізує розв'язок рівняння (1) за згаданих вище умов.

Таким чином, теорема про існування розв'язку рівняння (1) буде доведена (доведення єдиності наведено пізніше), якщо ми встановимо наявність апріорної оцінки $\| u_n \|_{W_1^p} < < C$. Отже, справедлива така лема.

Лема 5. Наближення Гальоркіна u_n розв'язків рівняння (1) задовольняють апріорну оцінку $\| u_n(x) \| < C$.

Для того щоб довести лему, складемо інтегральну тотожність

$$\lambda \langle u_n, u_n | u_n |^{p-2} \rangle + (p-1) \langle du_n \circ a \circ du_n, | u_n |^{p-2} \rangle +$$
$$+ \langle b(x, u_n, \nabla u_n), u_n | u_n |^{p-2} \rangle = \langle f, u_n | u_n |^{p-2} \rangle.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і Юнга, одержуємо

$$\| u_n \|_p \le \frac{\| f \|_p}{\lambda - \| \mu_3 \|_p - \frac{p-1}{p} \| \mu_1 \|_\infty - \| \mu_2 \|_\infty},$$

де використана техніка, аналогічна тій, що застосовувалась для доведення леми 1.

Далі продиференціюємо почленно рівняння (1) при $u = u_n$ і складемо інтегральну тотожність

$$\lambda \langle u_n^r, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle + \langle d(u_n^r | u_n^r |^{p-2}) \circ a^r \circ du_n^r \rangle +$$
$$+ \langle d(u_n^r | u_n^r |^{p-2}) \circ a \circ du_n^r \rangle + \langle b^r(x, u_n, \nabla u_n),$$
$$u_n | u_n^r |^{p-2} \rangle + \langle b^u(x, u_n, \nabla u_n) u_n^r, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle +$$
$$+ \langle b^{\nabla u}(x, u_n, \nabla u_n) \circ du_n^r, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle =$$
$$= \langle f_r, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle.$$

Одержимо

$$\lambda \| u_n^r \|_p^p +$$
$$+ 4 \frac{p-1}{p^2} \langle d(u_n^r | u_n^r |^{\frac{p-2}{2}}) \circ a^r \circ d(u_n^r | u_n^r |^{\frac{p-2}{2}}) \rangle +$$
$$+ 4 \frac{p-1}{p^2} \langle d(u_n^r | u_n^r |^{\frac{p-2}{2}}) \circ a \circ d(u_n^r | u_n^r |^{\frac{p-2}{2}}) \rangle -$$
$$- | \langle \mu_6 | \nabla u_n | + \mu_7 | u_n | + \mu_8, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle | -$$
$$- | \langle (\mu_9 | \nabla u_n | + \mu_{10} | u_n | + \mu_{11}) u_n^r, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle | -$$
$$- | \langle (\mu_{12} | \nabla u_n | + \mu_{13} | u | + \mu_{14}) | \nabla u_n^r |, u_n^r | u_n^r |^{p-2} \rangle | \le$$
$$\le \langle -f, \nabla_r (u_n^r | u_n^r |^{p-2}) \rangle. \tag{9}$$

Сумуючи почленно нерівність (9) (починаючи від 1 до l) і використовуючи нерівність Гельдера і Юнга, одержуємо $\| \nabla u_n \|_p^p \le C(l, p, \mu_i, f)$, $i = 1, \ldots, n$, де ця залежність розуміється як функціональна. Звідси випливає необхідна оцінка $\| u_n \|_{W_1^p} < C$, де C залежить від структури рівняння.

Єдиність розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^p(\cdot)$. Дійсно, покажемо, що цей розв'язок єдиний. Доводимо від супротивного. Нехай u_0 та u_0' — два таких розв'язки. Тоді справедливі такі рівності:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_0), \omega \rangle = 0, \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_0'), \omega \rangle = 0 \quad \forall \omega \in W_{1,0}^{p'}(R^l, d^l x),$$

тобто

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_0) - \mathrm{A}_\lambda^p(u_0'), \omega \rangle = 0.$$

Поклавши $\omega = (u_0 - u_0') | u_0 - u_0' |^{p-2}$, отримаємо

$$0 = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_0) - \mathrm{A}_\lambda^p(u_0'), (u_0 - u_0') | u_0 - u_0' |^{p-2} \rangle \ge$$
$$\ge \lambda \| u_0 - u_0' \|_p^p + (p-1) \langle d(u_0 - u_0') u_0' \circ a \circ d(u_0 - u_0'),$$
$$| u_0 - u_0' |^{p-2} \rangle - \| \mu_4 \|_\infty \| u_0 - u_0' \|_p^p - \| \mu_5 \|_\infty \langle \nabla (u_0 - u_0'),$$
$$| u_0 - u_0' |^{p-1} \rangle \ge 0,$$

а це внаслідок строгої акретивності означає, що $u_0 = u_0'$. Отже, теорема доведена повністю.

Якщо в умовах (2) умову

$$| b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v) | \le$$
$$\le \mu_4(x) | u - v | + \mu_5(x) | \nabla (u - v) |$$

замінити умовою

$$| b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v) | \le$$
$$\le \tilde{\mu}_4(x) | u - v |^\gamma + \tilde{\mu}_5(x) | \nabla (u - v) |^\gamma,$$

то оператор уже не буде акретивним, але для нього буде справджуватися таке твердження:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \ge$$
$$-C_1(\| u - v \|_{W_1^p}).$$

Означення. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \to$ $\to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ називається псевдоакретивним в L^p, якщо

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \ge$$
$$\ge -c(\| (u - v) | u - v |^{\frac{p-2}{2}} \|_{W_1^p}),$$

де $c(\rho)$ $\forall\rho > 0$ — неперервна додаткова функція, що задовольняє умову $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{c(\rho t)}{t^{p-1}} = 0$.

Лема 6. Оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ задовольняє умову напівобмеженої варіації:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(u), (u-v)\,|\,u-v\,|^{p-2}\rangle \ge -C_1(\|u-v\|_{w_1^p}),$$

де $\gamma > 1$.

Д о в е д е н н я. Згідно з означенням псевдоакретивності, маємо

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u-v)\,|\,u-v\,|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge \lambda\|u-v\|_p^p + \langle d(u-v)^{\frac{p}{2}} \circ a \circ d(u-v)^{\frac{p}{2}}\rangle 4\frac{(p-1)}{p^2} +$$

$$+ \langle \tilde{\mu}_4\,|\,u-v\,|^\gamma + \tilde{\mu}_5\,|\,u-v\,|^\gamma, (u-v)\,|\,u-v\,|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge -\|\,\tilde{\mu}_4\|_\infty\,(\tilde{C}_1\,\|\,u-v\,\|_p^p + \tilde{C}_2\,\|\,(u-v)^\gamma\,\|_p^p) -$$

$$-\|\,\tilde{\mu}_5\|_\infty\,(\tilde{C}_3\|(\nabla(u-v))^\gamma\,\|_p^p + \tilde{C}_4\,\|\,u-v\,\|_p^p).$$

Лема доведена.

Якщо виконуються вимоги лем 1—3 і леми 6, тоді відображення буде сюр'єктивним, отже, буде мати місце така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови лем 1—3 і леми 6, то рівняння (1) має узагальнений розв'язок, а оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, $\lambda > 0$, $p \ge 2$, буде сюр'єктивним відображенням.

Д о в е д е н н я. Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_s^*\}$ — базиси просторів $W_{1,0}^p$, $W_{1,0}^{p'}$, відповідно. Нехай $[v_1,\dots,v_n]$ — лінійна оболонка базисних елементів $v_1,\dots,v_n$. Оскільки форма $h_\lambda^p(u,v)$ коерцитивна, то внаслідок умови "гострого кута" існує $u_n \in [v_1,\dots,v_n]$, що задовольняє систему

$$h_\lambda^p(u_n, v_i^*) = \langle f, v_i^*\rangle,\ \ i = 1,\dots,n. \tag{10}$$

Нехай $\|u_n\|_{W_1^p} < C$. Тоді внаслідок леми 2 існує підпослідовність $(u_{n'})$, така, що $\omega - \lim u_{n'} = u_0$, $\omega - \lim \mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) = y$ при $n' \to \infty$. Переходячи в (10) до границі при $n' \to \infty$, одержуємо $\langle y, v_i^*\rangle = \langle f, v_i^*\rangle$, але можемо записати

$$h_\lambda^p(u_{n'}, u_{n'}|u_{n'}|^{p-2}) =$$

$$= \langle f, u_{n'}|u_{n'}|^{p-2}\rangle \to \langle u_0|u_0|^{p-2}, f\rangle$$

при $n' \to \infty$.

Покажемо, що $\mathrm{A}_\lambda^p(u_0) = f$. Використовуючи лему 6, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u_{n'}) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u_{n'}-v)\,|\,u_{n'}-v\,|^{p-2}\rangle =$$

$$= \langle y - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u_0 - v)\,|\,u_0 - v\,|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge -(C_1\|u_0 - v\,\|_p^p + C_2\,\|\,(u_0-v)^\gamma\,\|_p^p +$$

$$+ C_3\|\,|\,\nabla(u_0-v)|^\gamma\,\|_p^p). \tag{11}$$

Поклавши в (11) $v = u_0 - tz,\ t > 0\ \ \forall z \in W_{1,0}^p$, одержимо

$$t^{p-1}\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p(u_0 - tz), z\,|\,z\,|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge -(C_1 t^p\,\|\,z\,\|_p^p + C_2 t^{\gamma p}\,\|\,z\,\|_p^p + C_3 t^{\gamma p}\,\|\,\nabla z\,\|_p^p)$$

при $\gamma \ge 1$. Скорочуючи обидві частини останньої нерівності на t^{p-1} і переходячи до границі при $t \to 0$ із врахуванням умови хемінеперервності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, приходимо до нерівності

$$\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p(u_0), z\,|\,z\,|^{p-2}\rangle \ge 0\ \ \ \forall z \in W_{1,0}^p,$$

звідки випливає $y = \mathrm{A}_\lambda^p(u_0)$. Теорема 2 доведена.

Висновки

Рівняння (1) однозначно розв'язне за умов (2) в $W_1^p(R^l, d^l x)$. За таких загальних умов цей результат одержано вперше. Із запропонованого способу розв'язання рівняння видно, що після незначної модернізації та уточнення оцінок дані результати можуть бути істотно покращені.

Н.М. Кухарчук, Н.И. Яременко

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С МАТРИЦЕЙ ГИЛЬБАРГА-СЕРРИНА В R^l

Робота посвящена исследованию квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с матрицей Гильбарга–Серрина во всем евклидовом пространстве R^l, $l \geq 3$. Расширено понятие решения – вместо условия сильной коэрцитивности введено условие слабой коэрцитивности, доказана его разрешимость в R^l.

M.M. Kukharchuk, M.I. Yaremenko

ON SOLVABILITY OF THE QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH GILBARG-SERRIN MATRIX

The present paper articulates the second-order quasilinear elliptic equations with slow increasing coefficients in the whole Euclidean space R^l, $l \geq 3$. Furthermore, we deviate from the traditional point of view on the admissible class of the generalized solutions of the second-order elliptic equations, where the uniqueness theorem of Dirichlet problem is not exploited “in the small”. Instead, we prove the probability of the solution of the elliptic equations with Gilbarg-Serrin matrix.

1. *Кухарчук Н.М.* Разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с умеренными медленно растущими коэффициентами в пространствах $W_1^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2, l \geq 3$. – К.: Ин-т математики, 1988. – 52 с.
2. *Кухарчук М.М.* Про розв’язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в R^l // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 2. – С. 145–158.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
4. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про однозначну розв’язність рівняння $(\lambda - ad^2)u = f$ // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2007. – № 3. – С. 150–156.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
26 жовтня 2007 року