

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Т. В. Іваненко

ОСНОВИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 2

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика»
спеціальності Е7 Математика

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2025

Автор: *Іваненко Тетяна Вікторівна*, канд. техн. наук, доц.

Рецензент: *Беркман Л.Н.* доктор техн. наук, професор, Державний університет телекомунікацій

Відповідальний редактор: *Клесов О.І.*, доктор ф.-м. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 02.10.2025 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 10 від 01.10.2025 р.)*

І18 Іваненко Т. В. Основи фінансової математики. Частина 2. [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Страхова та фінансова математика» спец. Е7 Математика / Т. В. Іваненко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 38 с.

У частині 2 практикуму розглянуто методи розв’язування задач фінансової математики, пов’язані із потоками платежів з різними характеристиками. Наведено приклади застосування грошових потоків при складанні графіків обслуговування банківських кредитів із різними умовами погашення. При розрахунках використано фінансові функції Excel.

Практикум призначений для студентів та викладачів математичних та фінансово-економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 336(075.8)

Реєстр. № НП 24/25-055. Обсяг 1,8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Т. В. Іваненко, 2025
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

Розділ 4. Методи оцінювання грошових потоків	2
4.1 Оцінка довільних ануїтетів. Оцінка сталих грошових потоків при $m = 1, p = 1$ та $m > 1, p > 1$. Конверсія рент	7
<i>Приклади розв'язання задач</i>	7
<i>Задачі для самостійного розв'язання</i>	12
4.2 Оцінка грошових потоків у граничних випадках. Оцінка ануїтетів, що змінюються за певним законом	14
<i>Приклади розв'язання задач</i>	14
<i>Задачі для самостійного розв'язання</i>	20
Розділ 5. Застосування методів аналізу грошових потоків	22
5.1 Погашення основного боргу рівними сумами. Погашення кредиту рівними річними платежами.....	24
<i>Приклади розв'язання задач</i>	24
<i>Задачі для самостійного розв'язання</i>	30
5.2 Погашення боргу змінними річними платежами. Погашення кредиту однією сумою наприкінці кредитної угоди	31
<i>Приклади розв'язання задач</i>	31
<i>Задачі для самостійного розв'язання</i>	36
Список рекомендованої літератури:	38

Розділ 4. Методи оцінювання грошових потоків

Нарощення та дисконтування анuitетів. Ренти пренумерандо (*pre*) та постнумерандо (*post*). Визначення параметрів ренти. Конверсія рент. Анuitети з антисипативним нарахуванням відсотків. Сталі дискретні ренти із надходженнями / виплатами p разів на рік і нарахуванням відсотків m разів на рік. Сталі неперервні ренти. Сталі безстрокові анuitети (довічні ренти). Змінні дискретні ренти. Змінні неперервні ренти.

Основні формули розділу 4

Оцінка довільних грошових потоків

$PV_{pre} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{CF_k}{(1+r)^k}$	- приведена вартість ренти <i>pre</i>
$PV_{post} = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k}$	- приведена вартість ренти <i>post</i>
$PV_{pre} = PV_{post}(1+r)$	- зв'язок між PV_{post} та <i>pre</i>
$FV_{pre} = \sum_{k=0}^{n-1} CF_k(1+r)^{n-k}$	- майбутня вартість ренти <i>pre</i>
$FV_{post} = \sum_{k=1}^n CF_k(1+r)^{n-k}$	- майбутня вартість ренти <i>post</i>
$FV_{pre} = FV_{post}(1+r)$	- зв'язок між FV_{post} та <i>pre</i>
$PV_{post} = \frac{FV_{post}}{(1+r)^n}; PV_{pre} = \frac{FV_{pre}}{(1+r)^n}$	- зв'язок між PV та FV_{post} та <i>pre</i>

Оцінка сталих грошових потоків при $m = 1, p = 1$

$PV_{pre} = CF_k \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^k} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^{n-1}}$	- теперішня вартість сталої ренти <i>pre</i>
$PV_{post} = CF_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$	- теперішня вартість сталої ренти <i>post</i>

$PV_{pre} = PV_{post}(1+r)$	- зв'язок між PV_{post} та pre
$FV_{pre} = CF_k \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k} =$ $CF_k \frac{(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$	- майбутня вартість сталої ренти pre
$FV_{post} = CF_k \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r}$	- майбутня вартість сталої ренти $post$
$FV_{pre} = FV_{post}(1+r)$	- зв'язок між FV_{post} та pre
$PV_{post} = \frac{FV_{post}}{(1+r)^n}; PV_{pre} = \frac{FV_{pre}}{(1+r)^n}$	- зв'язок між PV та FV_{post} та pre
$FV_{post} = CF_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-d)^{n-k}} = CF_k \frac{1-(1-d)^n}{d(1-d)^{n-1}}$	- FV сталої ренти $post$ з антисипативним нарахуванням відсотків
$PV_{post} = CF_k \frac{1-(1-d)^n}{d} \cdot (1-d)$	- PV сталої ренти $post$ з антисипативним нарахуванням відсотків
$FV_{pre} = FV_{post} \frac{1}{1-d}$	- зв'язок між FV_{pre} та $post$
$PV_{pre} = PV_{post} \frac{1}{1-d}$	- зв'язок між PV_{pre} та $post$

Оцінка сталих грошових потоків при $m \neq 1, p \neq 1$

$FV_{post} = \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{1 - (1 + \frac{r}{m})^{nm}}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}}$	- FV сталої ренти $post$
$PV_{post} = \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{(1 + \frac{r}{m})^{-nm} - 1}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}}$	- PV сталої ренти $post$

$PV_{post} = \frac{FV_{post}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}}; PV_{pre} = \frac{FV_{pre}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}}$	- зв'язок між PV та FV ренти $post$ та pre
$FV_{pre} = FV_{post} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	- зв'язок між FV_{pre} та $post$
$PV_{pre} = PV_{post} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	- зв'язок між PV_{pre} та $post$

Конверсія рент

$CF_k^{(1)} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{(1+r)^k} = \left(CF_k^{(2)} \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{(1+r)^k} \right) \frac{1}{(1+r)^t}$	- заміна негайної ренти на відстрочену на t періодів
--	--

Оцінка грошових потоків у граничних випадках

$FV_n = \frac{CF_k \left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} - 1 \right)}{m \ln \left(1 + \frac{r}{m}\right)}$	- FV сталої неперервної ренти, $p \rightarrow \infty$
$PV = \frac{CF_k \left(1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm} \right)}{m \cdot \ln \left(1 + \frac{r}{m}\right)}$	- PV сталої неперервної ренти, $p \rightarrow \infty$
$FV_n = \frac{CF_k (e^{\delta n} - 1)}{\delta}$	- FV сталої неперервної ренти з неперервним нарахуванням відсотків, $p \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$
$PV = \frac{CF_k (1 - e^{-\delta n})}{\delta}$	- PV сталої неперервної ренти з неперервним нарахуванням відсотків, $p \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$
$PV = \frac{CF}{r}$	- PV сталої довічної ренти, $p = 1, m = 1,$ $n \rightarrow \infty$

$PV = \frac{CF_k}{p \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)}$	- PV сталої довічної ренти, $p \neq 1$, $m \neq 1$, $n \rightarrow \infty$
$PV = \frac{CF_k}{p \left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1 \right)}$	- PV сталої довічної ренти, $p \neq 1$, $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

Оцінка змінних грошових потоків, що змінюються за законом арифметичної або геометричної прогресії

$FV_n = (CF_0 + \frac{z}{r}) \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^k - \frac{nz}{r}$	- FV змінного дискретного ануїтету <i>post</i> , який змінюється за законом арифметичної прогресії
$FV_n = CF_0 \frac{(1+r)^n - x^n}{1+r-x}$	- FV змінного дискретного ануїтету <i>post</i> , який змінюється за законом геометричної прогресії
$PV = \left(CF_0 + \frac{z}{r} \right) \cdot \frac{1}{r}$	- PV довічної дискретної ренти, що змінюється за законом арифметичної прогресії
$PV = \frac{CF_0}{1+r-q}$	- PV довічної дискретної ренти, що змінюється за законом геометричної прогресії

Оцінка неперервних грошових потоків з неперервним нарахуванням відсотків

$FV_n = \int_0^n f(t) e^{\int_0^t \delta(t) dt} dt$	- FV змінного неперервного грошового потоку $CF_k = f(t)$ із неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою росту $\delta = \delta(t)$
$PV = \int_0^n f(t) e^{-\int_0^t \delta(t) dt} dt$	- PV змінного неперервного грошового потоку $CF_k = f(t)$ із неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою росту $\delta = \delta(t)$

$FV_n = \frac{CF_k(e^{\int_0^n \delta(t)dt} - 1)}{\frac{1}{n} \int_0^n \delta(t)dt}$	- FV сталого неперервного грошового потоку $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою росту $\delta = \delta(t)$
$PV = \frac{CF_k(1 - e^{-\int_0^n \delta(t)dt})}{\frac{1}{n} \int_0^n \delta(t)dt}$	- PV сталого неперервного грошового потоку $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою росту $\delta = \delta(t)$
$FV_n = PV e^{\int_0^n \delta(t)dt}$	- зв'язок між PV та FV при $CF_k = f(t)$ або $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі змінною силою росту $\delta = \delta(t)$
$FV_n = \int_0^n f(t) e^{\delta(n-t)} dt$	- FV змінного неперервного грошового потоку $CF_k = f(t)$ із неперервним нарахуванням відсотків зі сталою силою росту $\delta = const$
$PV = \int_0^n f(t) e^{-\delta t} dt$	- PV змінного неперервного грошового потоку $CF_k = f(t)$ із неперервним нарахуванням відсотків зі сталою силою росту $\delta = const$
$FV_n = \frac{CF_k(e^{\delta n} - 1)}{\delta}$	- FV сталого неперервного грошового потоку $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі сталою силою росту $\delta = const$
$PV = \frac{CF_k(1 - e^{-\delta n})}{\delta}$	- PV сталого неперервного грошового потоку $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі сталою силою росту $\delta = const$
$FV_n = PV \cdot e^{\delta n}$	- зв'язок між PV та FV при $CF_k = f(t)$ або $CF_k = const$ із неперервним нарахуванням відсотків зі сталою силою росту $\delta = const$

4.1 Оцінка довільних анuitетів. Оцінка сталих грошових потоків при $m = 1, p = 1$ та $m > 1, p > 1$. Конверсія рент

Приклади розв'язання задач

Задача 4.1.1 В інвестиційний проект необхідно вкласти 10 тис. \$ на 5 років. Планується наприкінці 1-го року отримати 2 тис. \$, 2-го – 5 тис. \$, 3-го – 7 тис. \$, 4-го – 4 тис. \$ та 5-го – 1 тис. \$ Чи буде цей проект ефективним при ставці дисконтування 12%.

Розв'язання: змінний анuitет постнумерандо, знайдемо його приведену вартість. $PV_{post} = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} = \frac{2}{1,12} + \frac{5}{1,12^2} + \frac{7}{1,12^3} + \frac{4}{1,12^4} + \frac{1}{1,12^5} = \{\text{множники дисконтування елементів анuitету знаходимо за фінансовою таблицею додатку 2}\} = 2 \cdot 0,893 + 5 \cdot 0,797 + 7 \cdot 0,712 + 4 \cdot 0,636 + 1 \cdot 0,567 = 13,866 \text{ тис. \$} > 10 \text{ тис. \$},$ тому проект ефективний.

Задача 4.1.2 Розглядається інвестиційний проект, здійснивши який, можна отримувати 20 тис. £ щорічно протягом наступних трьох років. Якщо необхідна ставка доходу становить 18%, яку суму грошей потрібно інвестувати?

Розв'язання: сталий анuitет постнумерандо

1 спосіб: $PV_{post} = CF_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = CF_k \left(\frac{1}{1,18} + \frac{1}{1,18^2} + \frac{1}{1,18^3} \right) = \{\text{коефіцієнт дисконтування сталого анuitету знаходимо за фінансовою таблицею додатку 6}\} = 20 \cdot 2,174 = 43,485 \text{ (тис. £)}$

2 спосіб: $PV_{post} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} = 20 \cdot \frac{1,18^3 - 1}{0,18 \cdot 1,18^3} = 43,485 \text{ (тис. £)}$

Задача 4.1.3 Скорочення адмінперсоналу компанії вивільнить 5 тис. \$ щомісяця, які керівництво вкладе в промислові облігації з процентною ставкою 14% річних. Яку суму отримає компанія через півроку?

Розв'язання: сталий ануїтет постнумерандо, $p = 12$, $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$, елемент потоку за місяць $\frac{CF_k}{p} = 5$ тис. \$ $\Rightarrow$

$$FV_{post} = \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{1 - (1 + \frac{r}{m})^{nm}}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}} = 5 \cdot \frac{1 - 1,14^{\frac{1}{2}}}{1 - 1,14^{\frac{1}{12}}} = 5 \cdot 6,167 = 30,835 \text{ (тис. \$)}$$

Задача 4.1.4 Пропонують надати в оренду ділянку землі на три роки. Оберіть один із двох варіантів оплати оренди: а) 10 тис. £ наприкінці кожного року; б) 35 тис. £ наприкінці строку оренди. Який з варіантів вигідніший, якщо банк пропонує 12% річних по депозитах?

Розв'язання: знайдемо майбутню вартість потоку орендних платежів на кінець третього року. $FV_{post} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 10 \cdot \frac{1,12^3 - 1}{0,12} = 33,744$ тис. £ < 35 тис. £, перший варіант вигідніший орендареві.

Задача 4.1.5 Деяке підприємство планує створити фонд у розмірі 200 млн. £. З цією метою наприкінці кожного року підприємство передбачає вносити по 50 млн. £ у банк під 18% річних. Знайдіть:

- а) термін, необхідний для створення фонду;
- б) як зміниться термін, якщо внески здійснюватимуть на початку кожного року?

Розв'язання: а) $FV_{post} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Rightarrow 200 = 50 \frac{1,18^n - 1}{0,18} \Rightarrow$

$n = 3$ роки 3 місяці і 11 днів.

б) тепер $FV_{pre} = 200$ млн. £. $FV_{pre} = FV_{post}(1+r) = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r}(1+r)$

$$200 = 50 \frac{1,18^n - 1}{0,18} \cdot 1,18 \Rightarrow n = 2 \text{ роки } 10 \text{ місяці і } 16 \text{ днів.}$$

Задача 4.1.6 Негайну постійну ренту постнумерандо з $CF_k = 2$ млн. ₴ і терміном 8 років відкладено на 2 роки без зміни тривалості ренти. Складна процентна ставка - 20% річних. Необхідно знайти CF_k відкладеної ренти.

Розв'язання: конверсія ренти – відтермінування без зміни тривалості та процентної ставки. Тому формула $CF_k^{(1)} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{(1+r)^k} = \left(CF_k^{(2)} \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{(1+r)^k} \right) \frac{1}{(1+r)^t}$ набуде вигляду $CF_k^{(1)} = \frac{CF_k^{(2)}}{(1+r)^t}$, оскільки множники дисконтування ануїтетів однакові. Елемент відкладеної ренти $CF_k^{(2)} = 2 \cdot 1,2^2 = 2,88$ (млн. ₴)

Задача 4.1.7 Ренту зі щорічними платежами у 2 млн. ₴ і строком 5 років відкладено на три роки без зміни сум виплат. Знайти новий строк ренти за умови нарахування складних процентів за ставкою 8% річних.

Розв'язання: конверсія ренти – відтермінування без зміни періодичних виплат

та процентної ставки. Тому рівняння $CF_k^{(1)} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{(1+r)^k} = \left(CF_k^{(2)} \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{(1+r)^k} \right) \frac{1}{(1+r)^t}$ набуде вигляду: $\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{(1+r)^k} = \left(\sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{(1+r)^k} \right) \frac{1}{(1+r)^t}$.

Його необхідно розв'язати відносно n_2 . Це можна зробити у два способи: наближений і точний.

Наближений спосіб: $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{1,08^k} = \left(\sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{1,08^k} \right) \frac{1}{1,08^3}$. У лівій частині рівняння –

множник дисконтування ануїтету, його значення знаходимо у фінансовій таблиці додатку 6, у правій частині рівняння другий множник – це множник дисконтування одиничного платежу, його значення знаходимо у фінансовій таблиці додатку 2 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{1,08^k} = 5,0297$. Тепер у додатку 6 у стовпці для $r = 8\%$

знаходимо значення, найближче до 5,0297. Це 5,2064, що відповідає $n_2 = 7$, тому $n_2 \approx 7$ років.

Точний спосіб: множники дисконтування анuitету запишемо у формі суми n перших членів геометричної прогресії: $\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$, тоді рів-

няння набуде вигляду $\frac{1 - (1+r)^{-n_1}}{r} = \frac{1 - (1+r)^{-n_2}}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^i} \Rightarrow$

$$\frac{1 - (1,08)^{-5}}{0,08} = \frac{1 - (1,08)^{-n_2}}{0,08} \cdot \frac{1}{1,08^3} \Rightarrow n_2 = 6,6895 \text{ або } 6 \text{ років } 8 \text{ місяців та } 8 \text{ днів.}$$

Задача 4.1.8 Банк пропонує ренту постнумерандо на 15 років з піврічною виплатою 100 тис. £. Річна процентна ставка протягом усього періоду не змінюється і становить 4% річних, складні відсотки нараховуються кожний квартал. За якою ціною можна придбати цю ренту, якщо виплати будуть здійснюватися: а) негайно; б) через 3 роки?

Розв'язання: ціною ренти є її приведена вартість. $PV_{post} = \frac{CF_k}{P} \cdot \frac{(1 + \frac{r}{m})^{-nm} - 1}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}}$,

де $\frac{CF_k}{p} = \frac{CF_k}{2} = 100$ тис. £ піврічна виплата. Тоді

$$\text{а) } PV_{post} = 100 \cdot \frac{(1 + \frac{0,04}{4})^{-15 \cdot 4} - 1}{1 - (1 + \frac{0,04}{4})^{\frac{4}{2}}} = 2236,57 \text{ (тис. £);}$$

б) відкладена на 3 роки рента має таку приведену вартість:

$$PV^{(2)} = \frac{PV^{(1)}}{(1 + \frac{r}{m})^{nm}} = \frac{2236,57}{(1 + \frac{0,04}{4})^{3 \cdot 4}} = 1984,84 \text{ (тис. £).}$$

Задача 4.1.9 Страхова компанія уклала договір з деякою фірмою та отримує від неї страхові внески по 24 млн. £ наприкінці кожного кварталу протягом 5-ти років. Ці внески компанія розміщує на банківському депозиті під 16% річних. Знайти накопичену на депозиті суму, якщо відсотки нараховують: а) раз на півроку, б) щомісячно.

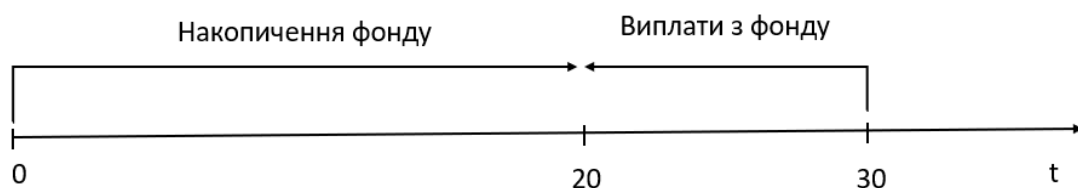
Розв'язання: $FV_{post} = \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{1 - (1 + \frac{r}{m})^{nm}}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}}$, тому

а) $FV_{post} = 24 \cdot \frac{1 - (1 + \frac{0,16}{2})^{5 \cdot 2}}{1 - (1 + \frac{0,16}{2})^{\frac{2}{4}}} = 708,99$ (млн. £);

б) $FV_{post} = 24 \cdot \frac{1 - (1 + \frac{0,16}{12})^{5 \cdot 12}}{1 - (1 + \frac{0,16}{12})^{\frac{12}{4}}} = 718,66$ (млн. £)

Задача 4.1.10 Працівник укладає з фірмою контракт, згідно з яким у випадку його постійної роботи на фірмі до виходу на пенсію (у 60 років) фірма зобов'язується на початку кожного року на рахунок працівника у банку перераховувати однакові суми, які забезпечать працівникові після виходу на пенсію наприкінці кожного року виплати у розмірі 3000 £ протягом 10 років. Яку суму щорічно має перераховувати фірма, якщо працівникові 40 років і передбачається, що банк гарантує річну процентну ставку 10%?

Розв'язання: зобразимо процес створення та використання пенсійного фонду на часовій лінії. Створення фонду планується протягом 20-ти років, а потім його витрачання протягом 10-ти років.



Першій потік платежів – ануїтет пренумерандо, знайдемо його майбутню вартість на момент $t = 20$. Другий потік – постнумерандо, обчислимо його приведену вартість на той же момент $t = 20$. $FV_{pre} = PV_{post} \Rightarrow$

$$CF_k^{(1)} \frac{(1+r)((1+r)^n - 1)}{r} = CF_k^{(2)} \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \Rightarrow$$

$$CF_k^{(1)} \frac{1,1(1,1^{20} - 1)}{0,1} = 3000 \frac{1,1^{10} - 1}{0,1 \cdot 1,1^{10}} \Rightarrow CF_k^{(1)} = \frac{3000}{(1,1^{10} + 1) \cdot 1,1^{11}} = 292,59 \text{ (€)}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1.11 Розрахувати теперішню вартість анuitету постнумерандо з елементами грошового потоку 10, 15, 18, 25 тис. €, якщо процентна ставка $r = 10\%$ і період дорівнює 1 року. Розв'язати цю задачу для анuitету пренумерандо.

(відповідь: 52,0854 тис. €; 57,294 тис. €)

Задача 4.1.12 Нехай негайна рента постнумерандо з умовами $CF_k = 2$ млн. € і терміном 8 років відтерміновується на 2 роки із зміною строку ренти до 11 років. Складна процентна ставка - 20% річних. Необхідно знайти CF_k відстроченої ренти.

(відповідь: 2,55 млн. €)

Задача 4.1.13 Яка сума забезпечить періодичні річні виплати у розмірі 10 тис. € протягом 6 років, якщо на ці внески нараховуються складні відсотки за ставкою 11% річних і виплати проводитимуться наприкінці кожного року?

(відповідь: 42,3 тис. €)

Задача 4.1.14 Ви плануєте здати квартиру в оренду на три роки. Орендна плата буде надходити у кінці кожного півріччя в сумі 5 тис. €. Суми, що надходять, ви будете вносити в банк на депозит під 20% річних, при цьому можливо: а) щорічне; б) піврічне; в) щоквартальне нарахування процентів. Розрахуйте накопичення наприкінці строку оренди за кожного з варіантів.

(відповідь: а) 38,14 тис. €; б) 38,578 тис. €; в) 38,822 тис. €)

Задача 4.1.15 Банк пропонує ренту постнумерандо на 10 років з щоквартальною виплатою 100 \$ Річна процентна ставка складає 12% та нараховується щорічно. За якою ціною можна придбати таку ренту, якщо виплати почнуть здійснюватись: а) негайно; б) через 2 роки; в) через 3,5 роки.
(відповідь: а) 2359,39 \$; б) 1880,89 \$; в) 1586,85 \$)

Задача 4.1.16 Аналізують 2 варіанти нагромадження коштів за схемою анuitета постнумерандо:

План 1: Вносити на депозит 5000 \$ кожні півроку за умови, що банк нараховує 10% річних з піврічним нарахуванням процентів.

План 2: робити щорічний внесок у розмірі 10 000 \$ За умови 9% річних при щорічному нарахуванні відсотків.

- а) Яка сума буде на рахунку через 10 років при реалізації кожного плану?
- б) Чи зміниться ваш вибір, якщо процентна ставка в плані 2 буде підвищена до 10%?

(відповідь: а) план 1: 165329,77; план 2: 151929,3 \$; б) 159374,25 \$)

Задача 4.1.17 Страхова компанія уклала на 4 роки договір з деякою фірмою та отримує від неї страхові внески по 20 млн. £ наприкінці кожного кварталу. Ці внески компанія розміщує на банківському депозиті під 12% річних. Знайти теперішню вартість суми, яку отримає страхова компанія за даним контрактом, якщо відсотки нараховуються: а) раз на півроку, б) щомісячно.
(відповідь: а) 252,08 млн. £; б) 250,64 млн. £)

Задача 4.1.18 Деяка фірма хоче створити фонд у розмірі 350 тис. £ З цією метою наприкінці кожного року фірма передбачає вносити по 60 тис. £ у банк під 28% річних. Знайти строк, необхідний для створення фонду, якщо банк нараховує складні відсотки а) щорічно; б) кожні півроку.
(відповідь: а) 10 р. 8 міс.; б) 10 р. 5 міс. 25 дн.)

Задача 4.1.19 Позичальник зобов'язаний повернути банку 4300 € через два роки і 1200 € через три роки. У рамках перегляду своїх майбутніх зобов'язань позичальник пропонує погасити свою заборгованість будь-яким з таких способів:

- а) здійсненням єдиного платежу через два роки;
- б) здійснення 24 рівних платежів з інтервалом в один місяць, перший платіж - через місяць.

Припускаючи, що річна складна процентна ставка $r = 12\%$, знайдіть відповідний одноразовий платіж для варіанту а) та відповідне щомісячне погашення для варіанту б).

(відповідь: а) 5371,43 €; б) 200,35 €)

4.2 Оцінка грошових потоків у граничних випадках. Оцінка анuitетів, що змінюються за певним законом

Приклади розв'язання задач

Задача 4.2.1 Протягом 4-ох років на банківський рахунок щоденно надходять платежі. За кожний рік їхня сума складе 100 млн. £. Визначте, яку суму буде накопичено до кінця четвертого року, якщо використовується процентна ставка 15% річних і нарахування складних відсотків здійснюється раз на півроку.

Розв'язання: оскільки кошти надходять на рахунок щоденно, але за кожний рік становить однакову суму - це неперервний сталий грошовий потік ($p \rightarrow \infty$).

$$FV_n = \frac{CF_k \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{nm} - 1 \right)}{m \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right)} \Rightarrow FV_4 = \frac{100 \left(\left(1 + \frac{0,15}{2} \right)^{4 \cdot 2} - 1 \right)}{2 \ln \left(1 + \frac{0,15}{2} \right)} = 541,67 \text{ (млн. £)}$$

Задача 4.2.2 Фірма має намір виробляти деяку продукцію протягом трьох років, отримуючи щорічно виручку у 100 млн. ₴. Передбачається, що продукція протягом року продаватиметься рівномірно. Оцініть очікувані грошові надходження, якщо застосовується неперервна ставка 20% річних.

Розв'язання: продукція протягом року продаватиметься рівномірно, щорічна виручка однакова, тому надходження від продажу створюють сталий неперервний грошовий потік. Оскільки застосовують неперервну ставку, то $p \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Оцінювати потік коштів можна як за приведеною, так і за майбутньою вартістю.

$$PV = \frac{CF_k (1 - e^{-\delta n})}{\delta} \Rightarrow PV = \frac{100(1 - e^{-0,2 \cdot 3})}{0,2} = 225,59 \text{ (млн. ₴)}$$

$$FV_n = PV \cdot e^{\delta n} \Rightarrow FV_n = 225,59 \cdot e^{0,2 \cdot 3} = 225,59 \cdot 1,822 = 411,05 \text{ (млн. ₴)}$$

Множник нарощення за неперервною ставкою можна знайти у додатку 3.

Задача 4.2.3 Фірма має намір створити фонд для щорічної виплати матеріальної допомоги своїм працівникам наприкінці кожного року. Визначте суму, яку фірма має розмістити на банківському депозиті, щоб забезпечити отримання необмежено довго наприкінці кожного року 80 тис. \$, якщо банк нараховує:

- а) щорічно складні відсотки за ставкою 18%;
- б) щоквартально складні відсотки за ставкою 17%;
- в) неперервно проценти із силою росту 16%.

Розв'язання: грошовий потік є сталою довічною рентою ($n \rightarrow \infty$).

$$\text{а) } PV = \frac{CF}{r} \Rightarrow PV = \frac{80}{0,18} = 444,4 \text{ (тис. \$);}$$

$$\text{б) } PV = \frac{CF_k}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1} \Rightarrow PV = \frac{80}{\left(1 + \frac{0,17}{4}\right)^4 - 1} = 441,63 \text{ (тис. \$);}$$

$$\text{в) } PV = \frac{CF_k}{e^{\delta} - 1} \Rightarrow PV = \frac{80}{e^{0,16} - 1} = 461,07 \text{ (тис. \$).}$$

Задача 4.2.4 Згідно з умовами фінансової угоди на банківський рахунок протягом 6 років наприкінці року будуть надходити грошові суми, перша з яких дорівнює 5 тис. ₴, кожна наступна збільшуватиметься на 0,4 тис. ₴. Розрахуйте суму на кінець 6-го року, якщо банк застосовує процентну ставку 10% річних і складні відсотки нараховують один раз у кінці року. Як зміниться оцінка анuitету, якщо грошові суми зменшуватимуться на 0,4 тис. ₴?

Розв'язання: дискретний грошовий потік є змінною рентою, платежі змінюються за законом арифметичної прогресії. Різниця прогресії $z = 0,4$.

$$FV_n = \left(CF_0 + \frac{z}{r} \right) \frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{nz}{r} \Rightarrow FV_n = \left(5 + \frac{0,4}{0,1} \right) \frac{1,1^6 - 1}{0,1} - \frac{6 \cdot 0,4}{0,1} = 45,44 \text{ (тис. ₴)}$$

У випадку спадної арифметичної прогресії різниця $z = -0,4$:

$$FV_n = \left(5 - \frac{0,4}{0,1} \right) \frac{1,1^6 - 1}{0,1} + \frac{6 \cdot 0,4}{0,1} = 31,72 \text{ (тис. ₴)}$$

Задача 4.2.5 За умовами контракту протягом 5 років наприкінці року платежі надходять на банківський депозитний рахунок. Перший платіж складає 10 тис. \$, а кожний наступний збільшується на 15% відносно попереднього. Оцініть цей контракт, якщо на депозитний рахунок наприкінці кожного року нараховують складні відсотки за ставкою 8% річних.

Розв'язання: дискретний грошовий потік є змінною рентою, платежі змінюються за законом геометричної прогресії. Знаменник прогресії $x = 1,15$. Оцінимо цей контракт на моменти його початку та закінчення.

$$FV_n = CF_0 \frac{(1+r)^n - x^n}{1+r-x} \Rightarrow FV_n = 10 \cdot \frac{1,08^5 - 1,15^5}{1,08 - 1,15} = 77,43 \text{ (тис. \$)}$$

$$PV_{post} = \frac{FV_{post}}{(1+r)^n} \Rightarrow PV_{post} = \frac{77,43}{1,08^5} = 52,7 \text{ (тис. \$)}$$

Задача 4.2.6 Ділянку землі здано в оренду на 15 років. Орендна плата буде здійснюватись щорічно за схемою постнумерандо на таких умовах: кожні 5

років річний платіж збільшується на 1 тис. \$, починаючи з 10 тис. \$. Оцініть майбутню вартість цієї угоди, якщо процентна ставка, що використовується аналітиком, складає 12%.

Розв'язання: дискретний грошовий потік є змінною рентою, яку можна звести до суми або різниці сталих рент.

1 спосіб: представимо цей потік як суму сталої ренти з $CF_k = 10$ тис. \$, що триває з 1 по 15 рік, та двох рент з $CF_k = 1$ тис. \$, що тривають з 6 по 15 рік та з 11 по 15 рік. Множники нарощення знайдемо у фінансовій таблиці додатку 5.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } FV_{15} &= 10 \cdot \sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} + 1 \cdot \sum_{k=6}^{15} 1,12^{15-k} + 1 \cdot \sum_{k=11}^{15} 1,12^{15-k} = \\ &= 10 \cdot \sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} + 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} - \sum_{k=1}^5 1,12^{15-k} \right) + 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} - \sum_{k=1}^{10} 1,12^{15-k} \right) = \\ &= 12 \cdot \sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} - \sum_{k=1}^5 1,12^{15-k} - \sum_{k=1}^{10} 1,12^{15-k} = 12 \cdot 37,28 - 6,353 - 17,549 = 423,458 \\ & \text{(тис. \$)} \end{aligned}$$

2 спосіб: представимо цей потік як різницю сталої ренти з $CF_k = 12$ тис. \$, що триває з 1 по 15 рік, та двох рент, одна з яких має $CF_k = 1$ тис. \$, триває 5 років, її початок відкладено на 5 років. Друга має $CF_k = 2$ тис. \$, триває також 5 років, але починається негайно.

$$\begin{aligned} FV_{15} &= 12 \cdot \sum_{k=1}^{15} 1,12^{15-k} - 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^5 1,12^{15-k} \right) \cdot \underset{\substack{\text{відкладена} \\ \text{на 5 років}}}{1,12^5} - 2 \cdot \sum_{k=1}^5 1,12^{15-k} = 12 \cdot 37,28 - 6,353 \cdot \\ & 1,762 - 2 \cdot 6,353 = 423,46 \text{ (тис. \$)} \end{aligned}$$

Можна запропонувати й інші способи представлення змінної ренти сумою або різницею сталих.

Задача 4.2.7 Компанія за попередній рік виплатила 2 тис. £ за акцію. Згідно з прогнозом дивіденди за акціями цієї компанії будуть зростати на 200 £ щорічно протягом невизначено тривалого часу. Зробіть висновок щодо доцільності

купівлі акцій компанії за ціною 33 тис. ₴, якщо можна покласти гроші на банківський депозит під 12% річних. Чи зміниться ситуація, якщо дивіденди по акціях зростатимуть на 6% щорічно протягом невизначено тривалого часу?

Розв'язання: акція не має терміну погашення, відтак генерує довічну ренту. За першої умови виплати зростають у арифметичній прогресії з різницею $z = 200$ ₴, а за другої умови – у геометричній прогресії із знаменником $x = 1,06$.

$$PV = \left(CF_0 + \frac{z}{r} \right) \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow PV = \left(2 + \frac{0,2}{0,12} \right) \cdot \frac{1}{0,12} = 30,56 \text{ (тис. ₴)} - \text{менше від запро-$$

понованої ціни, тому купувати недоцільно.

$$PV = \frac{CF_0}{1 + r - q} \Rightarrow PV = \frac{2}{1,12 - 1,06} = 33,33 \text{ (тис. ₴)} - \text{більше за ціну акції, тому}$$

доцільно купити.

Задача 4.2.8 Інтенсивність відсотку $\delta(t)$ задано функцією:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,07 - 0,005t, & 0 \leq t < 5 \\ 0,06 - 0,003t, & 5 \leq t < 10 \\ 0,03, & t \geq 10 \end{cases}$$

Визначте а) сучасну вартість неперервного потоку платежів, який триває з моменту $t = 5$ до $t = 10$ з інтенсивністю платежів $f(t) = 60 - 3t$; б) накопичення на кінець 15-го року неперервного сталого потоку платежів, який щороку становить 100 тис. ₴.

Розв'язання: а) $PV = \int_0^n f(t) e^{-\int_0^t \delta(t) dt} dt \Rightarrow PV = \int_5^{10} (60 - 3t) e^{-\int_5^t (0,06 - 0,003t) dt} dt$

$$\int_5^t (0,06 - 0,003t) dt = 0,06t - 0,0015t^2 - 0,2625, \text{ тоді}$$

$$PV = \int_5^{10} (60 - 3t) e^{-0,06t + 0,0015t^2 + 0,2625} dt = \{ \text{інтегруємо методом заміни змінної, поз-}$$

$$\text{начивши новою змінною показник експоненти} \} = -1000 (e^{-0,1875} - 1) \approx 170,97 \text{ (₴)}$$

$$\text{б) } FV_n = \frac{CF_k (e^{\int_0^n \delta(t) dt} - 1)}{\frac{1}{n} \int_0^n \delta(t) dt} \Rightarrow \text{обчислимо інтеграл}$$

$$\int_0^{15} \delta(t) dt = \int_0^5 (0,07 - 0,005t) dt + \int_5^{10} (0,06 - 0,003t) dt + \int_{10}^{15} 0,03 dt = 0,625$$

$$FV_n = \frac{100(e^{0,625} - 1)}{\frac{0,625}{15}} = 2083,79 \text{ (тис. \$)}$$

Задача 4.2.9 Інтенсивність відсотку $\delta(t)$ задано функцією:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,04, & 0 < t \leq 5 \\ 0,01(t^2 - 1), & t > 5 \end{cases}$$

Визначте: а) сучасну вартість неперервного потоку платежів, що надходять неперервно за інтервал часу $0 < t \leq 5$ з інтенсивністю платежів $f(t) = e^{0,04t}$; б) сучасну вартість сталого потоку платежів у 100 грошових одиниць кожного періоду, який тривав до моменту $t = 10$.

Розв'язання: а) $PV = \int_0^n f(t) e^{-\int_0^t \delta(t) dt} dt$. Оскільки протягом періоду $0 < t \leq 5$ неперервна ставка не змінювалась, PV можна обчислити за простішою формулою:

$$PV = \int_0^n f(t) e^{-\delta t} dt \Rightarrow PV = \int_0^5 e^{0,04t} e^{-0,04t} dt = 5 \text{ (гр. од.)}$$

$$\text{б) } PV = \frac{CF_k (1 - e^{-\int_0^n \delta(t) dt})}{\frac{1}{n} \int_0^n \delta(t) dt}. \text{ Обчислимо інтеграл:}$$

$$\int_0^n \delta(t) dt = \int_0^5 0,04 dt + \int_5^{10} 0,01(t^2 - 1) dt = 0,04 \cdot 5 + 2,867 \approx 3,067$$

$$PV = \frac{100(1 - e^{-3,067})}{0,3067} = 310,87 \text{ (гр. од.)}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.2.10 Визначити поточну вартість безстрокового анuitету із щомісячними надходженнями 520 £, якщо відсоток нараховують неперервно із силою росту 13% річних.

(відповідь: 47740 £)

Задача 4.2.11 За 6 років необхідно накопичити 30 тис. \$ Яким має бути перший внесок, якщо передбачається щороку збільшувати величину грошового надходження на 800 \$, процентна ставка дорівнює 8% річних. Грошові надходження та нарахування складних відсотків здійснюються в кінці року. Визначте, на яку величину необхідно збільшувати щорічне грошове надходження, якщо перший внесок складає 2 тис. \$

(відповідь: 2,268 тис. \$; на 918 \$)

Задача 4.2.12 Фінансова компанія згідно зі своїми зобов'язаннями має виплачувати вкладникам по 200 млн. £ щороку протягом 5-ти років. Яка сума має бути у розпорядженні компанії, щоб вона мала можливість виконати свої зобов'язання, якщо норма дохідності складає 10% за рік і виплати відбуваються постійно та рівномірно?

(відповідь: 1303 млн. £)

Задача 4.2.13 Компанія гарантує виплату дивідендів у розмірі 60 тис. £ на акцію наприкінці кожного року протягом тривалого часу. Чи має сенс купити акції цієї компанії за ціною 350 тис. £, якщо можна розмістити ці кошти на депозит під 15% річних?

(відповідь: так)

Задача 4.2.14 За 10 років необхідно нагромадити 60 тис. \$. Яким має бути перший внесок, якщо передбачається щорічно збільшувати грошові

надходження на 2%, процентна ставка складає 15% річних, грошові надходження і нарахування складних відсотків здійснюються наприкінці року. Визначте, у скільки разів необхідно збільшувати щорічно грошові надходження, якщо перший внесок складе 5 тис. \$, а необхідна сума потрібна вже через 3 роки.

(відповідь: 2,76 тис. \$; у 2,74 рази)

Задача 4.2.15 Інтенсивність відсотку $\delta(t)$ задано функцією:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,05, & 0 < t \leq 10 \\ 0,006t, & 10 < t \leq 20 \\ 0,003t + 0,0002t^2, & t > 20 \end{cases}$$

Визначте а) сучасну вартість суми коштів, яка на момент $t = 25$ становила 1000 ₴; б) сучасну вартість неперервного потоку платежів, який триває з моменту $t = 0$ до $t = 5$ з інтенсивністю $f(t) = e^{-0.03t}$.

(відповідь: а) 105,84 ₴; б) 3,616₴)

Розділ 5. Застосування методів аналізу грошових потоків

Погашення основного боргу рівними сумами. Погашення кредиту рівними річними платежами. Погашення боргу змінними річними платежами. Погашення кредиту водночас (однією сумою наприкінці кредитної угоди).

Основні формули розділу 5

Погашення основного боргу рівними сумами

$R = \frac{D}{n} = \text{const}$	- сума щорічного погашення основного боргу
$I_k = (D - (k-1)\frac{D}{n})r$	- процентний платіж k -го року
$Y_k = \frac{D}{n} + (D - (k-1)\frac{D}{n})r$	- виплата k -го року
$D_k = D - k\frac{D}{n} = D_{k-1} - \frac{D}{n} = D_{k-1}\frac{n-k}{n-(k-1)}$	- залишок боргу на кінець k -го року

Погашення кредиту рівними річними платежами

$R_k = R_l(1+r)^{k-l}$	- сума погашення основного боргу у k -ий рік
$I_k = Y - R_l(1+r)^{k-l}$	- процентний платіж k -го року
$Y = \frac{D}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k}} = \frac{Dr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$	- щорічна виплата
$D_k = D - R_l \sum_{i=0}^{k-1} (1+r)^i =$ $= D - (Y - Dr) \frac{(1+r)^k - 1}{r}$	- залишок боргу на кінець k -го року

**Погашення боргу платежами, що змінюються у геометричній прогресії,
 q - річний темп приросту платежів**

$R_k = Yq^{k-1} - I_k$	- сума погашення основного боргу у k -ий рік
$I_k = D_{k-1} \cdot r$	- процентний платіж k -го року
$Y = D \frac{1+r-q}{1-\left(\frac{q}{1+r}\right)^n},$	- перший платіж
$Y_k = Yq^{k-1}$	- виплата k -го року
$D_k = D(1+r)^k - Y \sum_{i=0}^{k-1} q^i \cdot (1+r)^{k-1-i}$	- залишок боргу на кінець k -го року

Погашення кредиту водночас зі створенням погашувального фонду

$G = \frac{D}{\sum_{k=1}^n (1+g)^{n-k}} = \frac{Dg}{(1+g)^n - 1}$	- річний внесок до погашувального фонду, на який нараховують депозитний відсоток за ставкою g
$Y = D \left(r + \frac{g}{(1+g)^n - 1} \right)$	- щорічна виплата за умови простої кредитної ставки r , процентні платежі здійснюють щорічно
$Y_k = D \left((1+r)^{k-1} r + \frac{g}{(1+g)^n - 1} \right)$	- виплата k -го року за умови складної кредитної ставки r , процентні платежі здійснюють щорічно
$Y = \frac{D(1+r)^n}{\sum_{k=1}^n (1+g)^{n-k}} = \frac{D(1+r)^n g}{(1+g)^n - 1}$	- виплата за умови складної кредитної ставки r , процентний платіж здійснюють разом з погашенням кредиту наприкінці терміну однією сумою

5.1 Погашення основного боргу рівними сумами. Погашення кредиту рівними річними платежами

Приклади розв'язання задач

Задача 5.1.1 Підприємцю запропоновано два варіанти кредитної угоди:

- 1) Кредит у розмірі 350 тис. ₴ з погашенням протягом 10 років рівними річними виплатами;
- 2) Кредит у розмірі 450 тис. ₴ з погашенням протягом 9 років рівними частинами основного боргу.

Ставка за кредитом дорівнює 11%. Складіть графіки погашення кредиту для кожного варіанту.

Розв'язання:

1 варіант. Виплати за кредитом – сталий ануїтет постнумерандо (виплати здійснюють наприкінці кожного року), PV – це сума кредиту. Суму виплати

$$(CF_k) \text{ знайдемо за формулою: } PV_{post} = CF_k \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \Rightarrow 350 = CF_k \frac{1,11^{10} - 1}{0,11 \cdot 1,11^{10}}$$

$$\Rightarrow CF_k = 59,43 \text{ (тис. ₴).}$$

Розрахунки проведемо за допомогою таблиці Excel, у 3-ій стовпець вносимо отримане значення річної виплати, яка є сталою протягом усього терміну кредиту. Початковий борг – це сума кредиту, процентна виплата у перший рік становить $350 \cdot 0,11 = 38,5$ (тис. ₴). Частина виплати, що йде на погашення основного боргу, складає $59,43 - 38,5 = 20,93$ (тис. ₴). Тоді залишок боргу на кінець року $350,0 - 20,93 = 329,07$ (тис. ₴), він же складає суму кредиту на початок другого року. Протягуємо введені формули до кінця таблиці.

Графік погашення кредиту за 1 варіантом

(у тис. ₴)

Роки	Залишок боргу на початок року, Dk-1	Річна виплата, Yk	Погашення тіла кредиту, Rk	% виплата, Ik	Залишок боргу на кінець року, Dk
1	2	3	4	5	6
1	350,00	59,43	20,93	38,50	329,07
2	329,07	59,43	23,23	36,20	305,84
3	305,84	59,43	25,79	33,64	280,05
4	280,05	59,43	28,62	30,81	251,43
5	251,43	59,43	31,77	27,66	219,65
6	219,65	59,43	35,27	24,16	184,38
7	184,38	59,43	39,15	20,28	145,24
8	145,24	59,43	43,45	15,98	101,78
9	101,78	59,43	48,23	11,20	53,55
10	53,55	59,43	53,54	5,89	0,01

Якщо потрібно дізнатись будь-яку інформацію по кредиту на визначений момент часу, не складаючи графік або у випадку, коли графік не доступний, можна скористатись формулами. Наприклад, визначимо суму, яку буде зараховано на погашення основного боргу у 4-му році:

$$R_k = R_1(1+r)^{k-1} = 20,93 \cdot 1,11^3 = 28,62 \text{ (тис. ₴)}.$$

Виплата по процентах за кредит у 5-му році:

$$I_k = Y - R_1(1+r)^{k-1} = 59,43 - 20,93 \cdot 1,11^4 = 27,66 \text{ (тис. ₴)}.$$

$$\text{Залишок боргу на кінець 8-го року: } D_k = D - (Y - Dr) \frac{(1+r)^k - 1}{r} =$$

$$= 350 - (59,43 - 350 \cdot 0,11) \frac{1,11^8 - 1}{0,11} = 101,78 \text{ (тис. ₴)}.$$

2 варіант. Основний борг погашається рівними частинами, а процентні виплати зменшуються. Тому загальні виплати за кредитом щороку зменшуються.

$$\text{Знайдемо } R = \frac{D}{n} = \frac{450}{9} = 50 \text{ (тис. ₴)}. \text{ Процентний платіж 1-го року } 450 \cdot 0,11 =$$

$$49,5 \text{ (тис. ₴)}. \text{ Повний платіж першого року складе } 50 + 49,5 = 99,5 \text{ (тис. ₴)}.$$

$$\text{Залишок боргу на кінець першого року та початок другого року } 450 - 50 = 400 \text{ (тис. ₴)}. \text{ Протягуємо формули до кінця таблиці:}$$

Графік погашення кредиту за 2 варіантом

(у тис. ₴)

Роки	Залишок боргу на початок року, D_{k-1}	Річна виплата, Y_k	Погашення тіла кредиту, R_k	% виплата, I_k	Залишок боргу на кінець року, D_k
1	2	3	4	5	6
1	450	99,5	50	49,5	400
2	400	94	50	44	350
3	350	88,5	50	38,5	300
4	300	83	50	33	250
5	250	77,5	50	27,5	200
6	200	72	50	22	150
7	150	66,5	50	16,5	100
8	100	61	50	11	50
9	50	55,5	50	5,5	0

За допомогою формул визначимо залишок боргу на кінець 4-го року

$$D_k = D - k \frac{D}{n} = 450 - 4 \cdot \frac{450}{9} = 250 \text{ (тис. ₴).}$$

Виплата за 6-ий рік складе:

$$Y_k = \frac{D}{n} + (D - (k - 1) \frac{D}{n})r = \frac{450}{9} + (450 - (6 - 1) \frac{450}{9}) \cdot 0,11 = 72 \text{ (тис. ₴).}$$

Сума відсотків за 7-ий рік:

$$I_k = (D - (k - 1) \frac{D}{n})r = (450 - (7 - 1) \frac{450}{9}) \cdot 0,11 = 16,5 \text{ (тис. ₴).}$$

Задача 5.1.2 Припустимо, ви вирішили придбати автомобіль у кредит. Банк пропонує такі умови:

Умови кредитування авто з пробігом

Власний внесок	від 30% вартості автомобіля
Період кредитування	від 1 до 4 років
Процентна ставка	від 6,5 до 21% річних
Сума кредиту	від 100 000 до 800 000 грн
Разова комісія за видачу кредиту	від 1 до 2% від суми кредиту
Схема погашення кредиту	ануїтет
Вид застави	автомобіль, що оформлюється в кредит
Страховання КАСКО в акредитованих банком страхових компаніях (щороку)	від 6,2 до 6,41% від вартості забезпечення залежно від віку автомобіля

Складіть графік обслуговування кредиту, якщо після сплати початкового внеску у 30% сума кредиту складає 200 тис. ₴, ви плануєте погашати кредит протягом 4-ох років із щомісячною виплатою та кредитною ставкою 18% річних.

Розв'язання: розрахуємо графік погашення кредиту за допомогою фінансових функцій ПЛТ, ОСПЛТ та ПРПЛТ.

Графік погашення кредиту

Місяці	Платіж, Y_k (ПЛТ)	Погашення основного боргу, R_k (ОСПЛТ)	Погашення %, I_k (ПРПЛТ)	Залишок боргу на початок періоду, D_{k-1}	Залишок боргу на кінець періоду, D_k
1	5 875,00 ₴	2 875,00 ₴	3 000,00 ₴	200 000,00 ₴	197 125,00 ₴
2	5 875,00 ₴	2 918,12 ₴	2 956,88 ₴	197 125,00 ₴	194 206,88 ₴
3	5 875,00 ₴	2 961,90 ₴	2 913,10 ₴	194 206,88 ₴	191 244,98 ₴
4	5 875,00 ₴	3 006,33 ₴	2 868,67 ₴	191 244,98 ₴	188 238,65 ₴
5	5 875,00 ₴	3 051,42 ₴	2 823,58 ₴	188 238,65 ₴	185 187,23 ₴
6	5 875,00 ₴	3 097,19 ₴	2 777,81 ₴	185 187,23 ₴	182 090,04 ₴
7	5 875,00 ₴	3 143,65 ₴	2 731,35 ₴	182 090,04 ₴	178 946,39 ₴
8	5 875,00 ₴	3 190,80 ₴	2 684,20 ₴	178 946,39 ₴	175 755,59 ₴
9	5 875,00 ₴	3 238,67 ₴	2 636,33 ₴	175 755,59 ₴	172 516,92 ₴

10	5 875,00 ₴	3 287,25 ₴	2 587,75 ₴	172 516,92 ₴	169 229,68 ₴
11	5 875,00 ₴	3 336,55 ₴	2 538,45 ₴	169 229,68 ₴	165 893,12 ₴
12	5 875,00 ₴	3 386,60 ₴	2 488,40 ₴	165 893,12 ₴	162 506,52 ₴
13	5 875,00 ₴	3 437,40 ₴	2 437,60 ₴	162 506,52 ₴	159 069,12 ₴
14	5 875,00 ₴	3 488,96 ₴	2 386,04 ₴	159 069,12 ₴	155 580,15 ₴
15	5 875,00 ₴	3 541,30 ₴	2 333,70 ₴	155 580,15 ₴	152 038,86 ₴
16	5 875,00 ₴	3 594,42 ₴	2 280,58 ₴	152 038,86 ₴	148 444,44 ₴
17	5 875,00 ₴	3 648,33 ₴	2 226,67 ₴	148 444,44 ₴	144 796,10 ₴
18	5 875,00 ₴	3 703,06 ₴	2 171,94 ₴	144 796,10 ₴	141 093,05 ₴
19	5 875,00 ₴	3 758,60 ₴	2 116,40 ₴	141 093,05 ₴	137 334,44 ₴
20	5 875,00 ₴	3 814,98 ₴	2 060,02 ₴	137 334,44 ₴	133 519,46 ₴
21	5 875,00 ₴	3 872,21 ₴	2 002,79 ₴	133 519,46 ₴	129 647,25 ₴
22	5 875,00 ₴	3 930,29 ₴	1 944,71 ₴	129 647,25 ₴	125 716,96 ₴
23	5 875,00 ₴	3 989,25 ₴	1 885,75 ₴	125 716,96 ₴	121 727,71 ₴
24	5 875,00 ₴	4 049,08 ₴	1 825,92 ₴	121 727,71 ₴	117 678,63 ₴
25	5 875,00 ₴	4 109,82 ₴	1 765,18 ₴	117 678,63 ₴	113 568,81 ₴
26	5 875,00 ₴	4 171,47 ₴	1 703,53 ₴	113 568,81 ₴	109 397,34 ₴
27	5 875,00 ₴	4 234,04 ₴	1 640,96 ₴	109 397,34 ₴	105 163,30 ₴
28	5 875,00 ₴	4 297,55 ₴	1 577,45 ₴	105 163,30 ₴	100 865,75 ₴
29	5 875,00 ₴	4 362,01 ₴	1 512,99 ₴	100 865,75 ₴	96 503,74 ₴
30	5 875,00 ₴	4 427,44 ₴	1 447,56 ₴	96 503,74 ₴	92 076,29 ₴
31	5 875,00 ₴	4 493,86 ₴	1 381,14 ₴	92 076,29 ₴	87 582,44 ₴
32	5 875,00 ₴	4 561,26 ₴	1 313,74 ₴	87 582,44 ₴	83 021,18 ₴
33	5 875,00 ₴	4 629,68 ₴	1 245,32 ₴	83 021,18 ₴	78 391,49 ₴
34	5 875,00 ₴	4 699,13 ₴	1 175,87 ₴	78 391,49 ₴	73 692,37 ₴
35	5 875,00 ₴	4 769,61 ₴	1 105,39 ₴	73 692,37 ₴	68 922,75 ₴
36	5 875,00 ₴	4 841,16 ₴	1 033,84 ₴	68 922,75 ₴	64 081,59 ₴
37	5 875,00 ₴	4 913,78 ₴	961,22 ₴	64 081,59 ₴	59 167,82 ₴
38	5 875,00 ₴	4 987,48 ₴	887,52 ₴	59 167,82 ₴	54 180,33 ₴
39	5 875,00 ₴	5 062,29 ₴	812,71 ₴	54 180,33 ₴	49 118,04 ₴
40	5 875,00 ₴	5 138,23 ₴	736,77 ₴	49 118,04 ₴	43 979,81 ₴
41	5 875,00 ₴	5 215,30 ₴	659,70 ₴	43 979,81 ₴	38 764,51 ₴
42	5 875,00 ₴	5 293,53 ₴	581,47 ₴	38 764,51 ₴	33 470,97 ₴
43	5 875,00 ₴	5 372,94 ₴	502,06 ₴	33 470,97 ₴	28 098,04 ₴
44	5 875,00 ₴	5 453,53 ₴	421,47 ₴	28 098,04 ₴	22 644,51 ₴
45	5 875,00 ₴	5 535,33 ₴	339,67 ₴	22 644,51 ₴	17 109,18 ₴
46	5 875,00 ₴	5 618,36 ₴	256,64 ₴	17 109,18 ₴	11 490,81 ₴
47	5 875,00 ₴	5 702,64 ₴	172,36 ₴	11 490,81 ₴	5 788,18 ₴
48	5 875,00 ₴	5 788,18 ₴	86,82 ₴	5 788,18 ₴	0,00 ₴
РАЗОМ:		200 000,00 ₴	82 000,00 ₴		

Задача 5.1.3 Підприємство отримав кредит у 300 тис. ₴ під 20% річних, які нарахувують за схемою складних відсотків на непогашений залишок. Згідно з кредитною угодою позичальник буде погашати кредит рівними сумами по 102 тис. ₴ наприкінці кожного року. Складіть план погашення боргу.

Розв'язання: з умови задачі зрозуміло, що передбачено ануїтетний спосіб по-

гашення кредиту. Визначимо термін кредиту: $n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{D}{Y} \cdot r\right)}{\ln(1+r)} \Rightarrow$

$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{300}{102} \cdot 0,2\right)}{\ln 1,2} = 4,867$ роки або 4 роки 10 місяців. Тепер розрахуємо за-

лишок боргу на кінець четвертого року. $D_k = D - (Y - Dr) \frac{(1+r)^k - 1}{r} \Rightarrow$

$D_4 = 300 - (102 - 300 \cdot 0,2) \frac{1,2^4 - 1}{0,2} = 74,544$ (тис. ₴). За 10 місяців п'ятого року

підприємець має заплатити таку суму відсотків: $I_5 = D_4 \left((1+r)^{\frac{t}{T}} - 1 \right) \Rightarrow$

$I_5 = 74,544 \cdot \left(1,2^{\frac{5}{6}} - 1 \right) = 12,23$ (тис. ₴). Складемо графік обслуговування кре-

диту:

Графік обслуговування кредиту

(у тис. ₴)

Рік	Залишок боргу на початок року, D_{k-1}	Сума річного платежу, Y	У тому числі		Залишок боргу на кінець року, D_k
			Погашення тіла кредиту, R_k	Процентні платежі, I_k	
1	2	3	4	5	6
1	300	102	42	60	258
2	258	102	50,4	51,6	207,6
3	207,6	102	60,48	41,52	147,12
4	147,12	102	72,58	29,42	74,54
5	74,54	86,77	74,54	12,23	0

Задача 5.1.4 Кредитор уклав контракт, згідно з яким позичальник зобов'язується виплатити 600 тис. £ за 5 років рівними сумами наприкінці кожного року, причому на непогашений залишок кожні півроку нараховуються складні відсотки за процентною ставкою 24% річних. За якою ціною кредитор може продати цей контракт банку, який на кредитні кошти щоквартально нараховує 28% річних?

Розв'язання: порівняємо PV грошового потоку за умовами кредитора й банку.

$$PV_{post} = CF_k \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-nm} - 1}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m}} \Rightarrow PV_{post} = 120 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,24}{2}\right)^{-10} - 1}{1 - \left(1 + \frac{0,24}{2}\right)^{-2}} = 319,82 \text{ (тис. £)}$$

– приведена вартість грошового потоку за кредитом за умовами кредитора.

$$PV_{post} = 120 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{-20} - 1}{1 - \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{-4}} = 286,33 \text{ (тис. £)} - \text{приведена вартість контракту за}$$

умовами банку.

Висновок: кредитору буде вигідно продати контракт, якщо банк запропонує ціну, вищу за 319,82 тис. £.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1.5 Банк надав кредит у 800 тис. £ під 25% річних, що нараховують за схемою складних процентів на непогашений залишок. Повертати кредит необхідно рівними щорічними платежами протягом 4 років. Визначте суму річного платежу і складіть план погашення заборгованості.

(відповідь: $Y = 338,755$ тис. £)

Задача 5.1.6 Іпотечний кредит у 300 тис. £ наданий на 20 років під 12% річних. Погашення щомісячне однаковими платежами. Визначте суму платежу та залишок боргу на кінець 10-го року.

(відповідь: $Y = 3,176$ тис. € , $D_{10} = 262,94$ тис. €)

Задача 5.1.7 За умовою задачі 5.1.6 після 10 років виплат позичальник вирішив перекредитуватись в іншому банку під 8 % річних на 7 років. Визначте суму щомісячного платежу нової угоди.

(відповідь: $Y = 4,062$ тис. €)

Задача 5.1.8 Фермер придбав трактор вартістю 60 тис. € у кредит під 15% річних. Заборгованість перед банком фермер має погасити за 4 роки. Погашати кредит необхідно однаковими щоквартальними платежами. Якою має бути величина такого платежу? Складіть план погашення кредиту.

(відповідь: $Y = 4,982$ тис. €)

Задача 5.1.9 Складіть графік погашення кредиту за умовою задачі 5.1.8, якщо позичальник має погасити кредит за 5 років рівними сумами основного боргу, платежі він буде здійснювати кожні півроку, а відсотки банк нараховує на залишок заборгованості.

5.2 Погашення боргу змінними річними платежами. Погашення кредиту однією сумою наприкінці кредитної угоди

Приклади розв'язання задач

Задача 5.2.1 Кредит на купівлю квартири на суму 400 тис. € наданий на 20 років під складну ставку 18% річних за умови щорічного зростання виплат на 1 тис. € . Платежі необхідно вносити наприкінці кожного року. Знайдіть розмір першої виплати.

Розв'язання: платежі змінюються за законом арифметичної прогресії. Потік платежів за кредитом має приведену вартість, що дорівнює сумі кредиту.

$$PV = \frac{FV_n}{(1+r)^n} = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\left(CF_0 + \frac{z}{r} \right) \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^k - \frac{nz}{r} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^n} \left(\left(CF_0 + \frac{z}{r} \right) \frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{nz}{r} \right) \Rightarrow 400 = \frac{1}{1,18^{20}} \left(\left(CF_0 + \frac{1}{0,18} \right) \frac{1,18^{20} - 1}{0,18} - \frac{20}{0,18} \right) \Rightarrow$$

$CF_0 = 69,93$ (тис. ₴) – перша виплата за кредитом.

Задача 5.2.2 Кредит у 200 тис. \$ має бути сплачений за 5 років. Кредитна ставка простих відсотків складає 15% річних. Проценти за кредит нараховуються на залишок боргу на початок року, а сплачуються наприкінці року. Суми з погашення основного боргу щороку збільшуються на 10%. Складіть план амортизації кредиту.

Розв’язання: платежі R_k змінюються за законом геометричної прогресії. Знай-

демо першу виплату з погашення основного боргу: $CF_0 \cdot \frac{1 - 1,1^5}{1 - 1,1} = 200 \Rightarrow$

$R_1 = CF_0 = 32,76$ (тис. \$)

План амортизації кредиту

(у тис. \$)

Рік	Залишок боргу на початок року, D_{k-1}	Сума річного платежу, Y	У тому числі		Залишок боргу на кінець року, D_k
			Погашення тіла кредиту, R_k	Процентні платежі, I_k	
1	2	3	4	5	6
1	200	62,76	32,76	30	167,24
2	167,24	61,13	36,04	25,09	131,2
3	131,2	59,32	39,64	19,68	91,56
4	91,56	57,33	43,60	13,73	47,96
5	47,96	55,15	47,96	7,19	0

Задача 5.2.3 Будівельна компанія може виконати будівництво об'єкту для замовника на суму 100 млн. ₴. Для цього вона пропонує кредит на 6 років, на залишок боргу нараховує раз на рік складні відсотки за ставкою 16% річних, кредит має бути погашений рівними піврічними платежами. Компанія погоджується надати пільговий період у 2 роки, протягом якого основний борг не погашають. Складіть плани погашення кредиту для двох варіантів:

- а) протягом пільгового періоду сплачують відсоткові платежі кожні півроку;
- б) протягом пільгового періоду відсотки нараховують, але не сплачують.

Розв'язання: а) Піврічний процентний платіж складе $100 \cdot (1,16^{1/2} - 1) = 7,7$ (млн. ₴), тоді на початок третього року сума боргу залишиться 100 млн. ₴. Знайдемо подальші виплати за формулою, де PV дорівнює сумі кредиту на по-

чаток 3-го року, $p = 2$, $m = 1$, $n = 4$:
$$PV_{post} = \frac{CF_k}{p} \cdot \frac{(1 + \frac{r}{m})^{-nm} - 1}{1 - (1 + \frac{r}{m})^{-\frac{m}{p}}} \Rightarrow$$

$$100 = \frac{CF_k}{2} \cdot \frac{(1,16)^{-4} - 1}{1 - \sqrt{1,16}} \Rightarrow \frac{CF_k}{2} \approx 17,21 \text{ (млн. ₴) – піврічний платіж.}$$

б) сума боргу на початок 3-го року становитиме $100 \cdot 1,16^2 = 134,56$ (млн. ₴),

тоді подальші виплати мають бути такими:
$$134,56 = \frac{CF_k}{2} \cdot \frac{(1,16)^{-4} - 1}{1 - \sqrt{1,16}} \Rightarrow$$

$$\frac{CF_k}{2} \approx 23,15 \text{ (млн. ₴).}$$

Графіки обслуговування кредиту (у млн. ₴)

Піврічні періоди	Платежі за варіантом а)	Платежі за варіантом б)
1	7,70	0,00
2	7,70	0,00
3	7,70	0,00
4	7,70	0,00
5	17,20	23,15
6	17,20	23,15
7	17,20	23,15
8	17,20	23,15
9	17,20	23,15
10	17,20	23,15
11	17,20	23,15
12	17,20	23,15

Задача 5.2.4 Банк надав підприємству два кредити: перший на 2 млн. ₴ під 8% річних, має погашатись рівними піврічними виплатами протягом 6 років. Проценти нараховують кожні півроку. Другий – на 1,5 млн. ₴ під 12% річних, що нараховують раз на рік, має погашатись однаковими щорічними платежами протягом 4 років. Через два роки обидва кредити об'єднують в один із терміном погашення 8 років під 14% річних. Погашення здійснюється рівними піврічними виплатами, капіталізація щоквартальна. Скласти план погашення нового кредиту.

Розв'язання: знайдемо залишки заборгованості по кожному кредиту на кінець другого року. Залишок заборгованості за першим кредитом на кінець четвертого піврічного періоду D_k знайдемо за формулою:

$$D_k = D - \left(Y - D \frac{r}{m} \right) \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{k \cdot m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}}}, \text{ де } Y - \text{піврічна виплата.}$$

$$Y = D \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{p}}}{\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{-n \cdot m} - 1} \Rightarrow Y = 2000 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{\frac{2}{2}}}{\left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{-6 \cdot 2} - 1} = 213,11 \text{ (тис. ₴),}$$

$$\text{тоді } D_4 = 2000 - \left(213,106 - 2000 \frac{0,08}{2} \right) \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{4 \cdot 2}}{1 - \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{\frac{2}{2}}} = 773,53 \text{ (тис. ₴)}$$

За другим кредитом виплати здійснюють раз на рік, тому платіж складе

$$Y = D \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \Rightarrow Y = 1500 \cdot \frac{0,12}{1 - (1,12)^{-4}} = 493,85 \text{ (тис. ₴), а залишок боргу}$$

$$D_k = D - (Y - Dr) \cdot \frac{(1 + r)^k - 1}{r} \Rightarrow$$

$$D_2 = 1500 - (493,85 - 1500 \cdot 0,12) \cdot \frac{1,12^2 - 1}{0,12} = 834,64 \text{ (тис. ₴)}$$

Консолідований борг на кінець 2-го року $D = 1608,17$ (тис. ₴). Тепер складемо графік амортизації об'єднаного кредиту за допомогою Excel за умови $p = 2$, $m = 4$.

Графік обслуговування об'єднаного кредиту

(у тис. ₴)

				(у тис. грн)
Піврічні періоди	Платежі (ПЛТ)	Погашення тіла кредиту (ОСПЛТ)	Погашення % за кредитом (ПРПЛТ)	Залишок заборгованості на кінець періоду
1	132,97 ₴	76,69 ₴	56,29 ₴	1 531,48 ₴
2	132,97 ₴	79,37 ₴	53,60 ₴	1 452,12 ₴
3	132,97 ₴	82,15 ₴	50,82 ₴	1 369,97 ₴
4	132,97 ₴	85,02 ₴	47,95 ₴	1 284,95 ₴
5	132,97 ₴	88,00 ₴	44,97 ₴	1 196,95 ₴
6	132,97 ₴	91,08 ₴	41,89 ₴	1 105,87 ₴
7	132,97 ₴	94,27 ₴	38,71 ₴	1 011,60 ₴
8	132,97 ₴	97,57 ₴	35,41 ₴	914,04 ₴
9	132,97 ₴	100,98 ₴	31,99 ₴	813,06 ₴
10	132,97 ₴	104,51 ₴	28,46 ₴	708,54 ₴
11	132,97 ₴	108,17 ₴	24,80 ₴	600,37 ₴
12	132,97 ₴	111,96 ₴	21,01 ₴	488,41 ₴
13	132,97 ₴	115,88 ₴	17,09 ₴	372,54 ₴
14	132,97 ₴	119,93 ₴	13,04 ₴	252,60 ₴
15	132,97 ₴	124,13 ₴	8,84 ₴	128,47 ₴
16	132,97 ₴	128,47 ₴	4,50 ₴	-0,00 ₴

Задача 5.2.5 Фірма отримала кредит у 5 млн. ₴ на 10 років під 8% складних річних у банку А. Кредитна угода передбачає погашення боргу одним платежем, а відсоткові платежі сплачують щорічно. Одночасно з отриманням кредиту фірма почала створювати погашувальний фонд, для чого відкрила рахунок у банку Б, який нараховує 10% річних складних. Визначте щорічні видатки фірми з амортизації боргу за умови, що у погашувальний фонд щорічно вносяться однакові суми.

Розв'язання: щорічні видатки фірми розрахуємо за формулою

$$Y_k = D \cdot (1 + r)^{k-1} r + D \cdot \frac{g}{(1 + g)^n - 1}, \text{ де перший доданок – це відсотковий платіж за кредитом, а другий – відрахування до погашувального фонду. Внесок у}$$

погашувальний фонд щороку однаковий і становить

$$G = D \cdot \frac{g}{(1+g)^n - 1} = 5000 \cdot \frac{0,1}{1,1^{10} - 1} = 313,73 \text{ (тис. \$)}$$

План створення погашувального фонду та процентні виплати за кредит

(у тис. \$)

Роки	Сума річного платежу	Відсоткові платежі	Внесок у погашувальний фонд	Накопичення фонду на кінець року (БС)
1	713,73	400,00	313,73	739,75
2	745,73	432,00	313,73	672,50
3	780,29	466,56	313,73	611,37
4	817,61	503,88	313,73	555,79
5	857,92	544,20	313,73	505,26
6	901,46	587,73	313,73	459,33
7	948,48	634,75	313,73	417,57
8	999,26	685,53	313,73	379,61
9	1 054,10	740,37	313,73	345,10
10	1 113,33	799,60	313,73	313,73
	Разом:	5 794,62	3 137,27	5 000,00

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.2.6 Кредит на купівлю квартири на суму 550 тис. \$ наданий на 15 років під складну ставку 20% річних за умови щорічного зростання виплат на 5%. Сплачувати необхідно на початку кожного року. Знайти розмір першої виплати.

(відповідь: $Y = 79,474$ тис. \$)

Задача 5.2.7 Кредит у 200 тис. \$ має бути сплачений за 5 років. Кредитна ставка простих відсотків складає 10% річних. Проценти за кредит нараховуються на залишок боргу на початок року, а сплачуються наприкінці року. Суми

з погашення основного боргу щороку зменшуються на 5000 \$. Скласти план амортизації кредиту.

Задача 5.2.8 Фермер придбав трактор вартістю 60 тис. £ у кредит під 15% річних. Заборгованість перед банком фермер має погасити за 4 роки. Визначити розмір річної сплати, якщо вона має збільшуватись на 10% щороку та складіть план погашення кредиту.

(відповідь: $Y = 18,417$ тис. £)

Задача 5.2.9 Кредит у 40 тис. \$ наданий на 5 років під 6% річних. Його необхідно погашати рівними річними виплатами наприкінці кожного року. Відсотки нараховують на залишок заборгованості. Після виплати третього платежу між кредитором і позичальником було досягнуто згоди про збільшення терміну кредиту на 3 роки із підвищенням кредитної ставки до 10% річних з моменту пролонгації. Скласти графік погашення кредиту за нових умов.

Список рекомендованої літератури:

1. Іваненко Т.В. Основи фінансової математики: підручник для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Страхова та фінансова математика» / Т. В. Іваненко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 267 с.
2. Основи фінансової математики. Частина 1. [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Страхова та фінансова математика» спец. 111 Математика / Т. В. Іваненко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 51 с.
<https://ela.kpi.ua/items/76fda3a4-6cf5-4974-b67b-1a562b810ada>
3. Капустян В.О., Пасенченко Ю.А. Фінансова математика: Навч. посіб. – 2-е вид., доп. – К.: Принт-Сервіс. 2013. – 216 с.
4. Борисенко О.Д., Мишура Ю.С., Радченко В.М., Шевченко Г.М. Збірник задач з фінансової математики. – К.: Техніка, 2007. – 254 с.
5. Гадецька С.В., Савченко Г.О. Фінансова математика: навчальний посібник / С.В. Гадецька, Г.О. Савченко. - Львів, «Новий Світ – 2000», 2014. – 214с.
6. Долінський Л.Б. Фінансова математика: навчальний посібник / Л.Б. Долінський. – К.: КНЕУ, 2009. – 265 с.