МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
Фізико-технічний інститут

$$T^{\,i'_1\ldots i'_p}_{\,j'_1\ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{\,i_1\ldots i_p}_{\,j_1\ldots j_q},$$

$$T = T^{\,i_1\ldots i_p}_{\,j_1\ldots j_q}\, \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{j_q}.$$

П. О. Наказной

Тензорний аналіз
Збірник задач

$$\rho\,\frac{d\epsilon}{dt} = \hat{\mathcal{F}} : \hat{D} - \operatorname{div}\boldsymbol{q},$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{ik} + \Lambda\, g_{ik}$$

КИЇВ 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

П. О. Наказной

ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Прикладна фізика»
спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 514.742.4+514.743.4(075.8)

Рецензент:	С. Й. Вільчинський, д.ф.-м.н., проф., зав. каф. квантової теорії поля КНУ імені Тараса Шевченка
Відповідальний редактор:	С. А. Смирнов, к.ф.-м.н., голова методичної комісії ФТІ

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №6 від 25.02.21) за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол №1 від 11.01.2021)

Електронне мережне навчальне видання

Наказной Павло Олександрович

ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ
ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Тензорний аналіз. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / П. О. Наказной; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 225 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 35 с.

Наведено 243 задачі з курсу «Тензорний аналіз». Задачі різного рівня складності охоплюють теми тензорного аналізу, які необхідно засвоїти кожному майбутньому фізику та деякі їх застосунки до задач різних розділів математики та фізики. До задач на обчислення подано відповіді.

Для студентів Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

Верстка тексту проведена в видавничій системі LaTeX 2_ε (компілятор XeLaTeX).

Зміст

Передмова

Важко переоцінити значення тензорного аналізу як потужного математичного апарату, який є мовою фізики при вивченні механіки суцільного середовища, теорії поля, релятивістської механіки тощо. Тому його вивчення є обов'язковим елементом розвитку не лише майбутніх математиків, але й фізиків та інженерів. У даному задачнику наведено 243 задачі з тензорного аналізу та відповіді до них. Більшість задач узято із класичних підручників та задачників (див. с. 35), деякі є авторськими. Вони відібрані за результатами викладання даної дисципліни у студентів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали» Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського та покликані допомогти у послідовному засвоєнні матеріалу в необхідному для фізиків обсязі.

Досвід показує що осмислене вивчення тензорного аналізу неможливе без ґрунтовного розуміння лінійної алгебри, яка є фундаментом для тензорного числення. Тому, незважаючи на те що курс лінійної алгебри зазвичай передує курсу тензорного аналізу, в задачнику приділено багато уваги повторенню та узагальненню відомостей про векторний та евклідів простори. Також увагу в курсі приділено векторному аналізу як складовій частині тензорного аналізу. Насправді, хоча диференціальні та інтегральні операції над векторами вивчаються в курсі математичного аналізу, оминути тут цю тему вважається недоцільним зважаючи на її значення, а також на можливість застосування тут методу згорток як одного з основних методів обчислення в тензорному аналізі.

В задачнику наведено задач більше ніж зазвичай можна розглянути на практичних заняттях. Це дозволить викладачу обрати ті з них що відповідають часовим можливостям та мірі засвоєння матеріалу під час вивчення даної дисципліни, а інші віднести до факультативного або самостійного опанування зацікавленими студентами. Деякі задачі, що вимагають для свого розв'язку громіздких обчислень або нестандартного підходу, помічені зірочкою та можуть бути пропущені без шкоди для розуміння подальшого матеріалу.

Автор висловлює подяку доценту Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського С.М. Пономаренку за допомогу у верстці цього видання.

Тема №1 | Векторний простір

Векторним (лінійним) простором L називається набір елементів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, для яких визначені операції додавання "$+$" та множення на число, що задовольняють наступним аксіомам:

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},\ \forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}\subset L$
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z},\ \forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}\subset L$
3. $\exists\,\mathbf{0}\in L:\ \boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x}\in L$ *(існування нуля)*
4. $\exists\,(-\boldsymbol{x})\in L:\ \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0},\ \forall\boldsymbol{x}\in L$ *(існування протилежного елементу)*
5. $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x}\in L$
6. $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x}\in L$
7. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x}\in L$
8. $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y},\ \forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}\subset L.$

Елементи $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ векторного простору L називаються векторами.

Лінійна комбінація векторів $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i$ називається тривіальною, якщо $\alpha_i=0$, $i=\overline{1\ldots n}$. Вектори $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ називаються лінійно незалежними тільки якщо їх тривіальна комбінація дорівнює нулю.

Векторний простір має розмірність $\dim L=n$, якщо n є максимальною кількістю його лінійно незалежних елементів. Впорядкований набір $\{\boldsymbol{e}_n\}$ з будь-яких n лінійно незалежних векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору L з розмірністю n називається його базисом. Довільний вектор з даного простору можна розвинути за цим базисом: $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}x^i\boldsymbol{e}_i\equiv x^i\boldsymbol{e}_i$, де x^i – координати вектора $\boldsymbol{x}$ в базисі $\{\boldsymbol{e}_n\}$. Тут і далі діє правило Айнштайна: за індексом підсумовування (так званим німим індексом), що повторюється один раз вгорі та один раз знизу в одній частині рівності відбувається підсумовування (так звана згортка), причому його значення послідовно приймає всі номери базисних векторів.

Векторний простір L_n утворений векторами що починаються у початку координат та описуються декартовими координатами кінців $\boldsymbol{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Для реалізації можливості відкладання вектору з довільної точки, яка *у загальному випадку відсутня у векторному просторі, вводиться поняття афінного простору $A_n = (L_n, M)$: будь-якій впорядкованій парі точок (A, B) з множини M можна поставити у відповідність єдиний вектор $\boldsymbol{x} \equiv \overrightarrow{AB} \in L_n$, причому (точки A, B, C зокрема можуть співпадати):*

1. $\forall A \in M$ *та* $\forall \boldsymbol{x} \in L_n \; \exists! B \in M : \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{x}$

2. $\forall A, B, C : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Чи утворює векторний простір сукупність наступних елементів? У випадку позитивної відповіді знайти розмірність даного векторного простору та, якщо вона більше за одиницю, будь-який базис.

1.1. Вектори на координатній площині, що починаються у початку координат, а кінці лежать у I-ій координатній чверті

1.2. Вектори на координатній площині, що починаються у початку координат, окрім тих, що колінеарні деякому вектору

1.3. Вектори на координатній площині, що починаються в початку координат, а кінці лежать на заданій прямій

1.4. Вектори простору L_n, для яких $x_1 = 0$

1.5. Вектори простору L_n, для яких $x_1 = x_2$

1.6. Вектори простору L_n, для яких $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$

1.7. Вектори простору L_n, для яких $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$

1.8. Множина, що складається з єдиного елемента – нуля

1.9. Сукупність симетричних матриць порядку n

1.10. Сукупність антисиметричних матриць порядку n

1.11. Сукупність розв'язків $\boldsymbol{x}$ однорідної системи лінійних рівнянь $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, де A – деяка матриця $n \times n$

1.12. Сукупність розв'язків $\boldsymbol{x}$ неоднорідної системи лінійних рівнянь $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$, де A – деяка матриця $n \times n$, q — деякий вектор

1.13. Сукупність розв'язків $y(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$

1.14. Сукупність усіх многочленів від t із степенем n:

1.15. Сукупність усіх многочленів від t із степенем не вище n:

1.16. Сукупність неперервних на $t \in [a, b]$ функцій $f(t)$

1.17. Множина додатних чисел, для яких операції суми та множення на число визначаються наступним чином: $a \oplus b = ab, \lambda * a = a^{\lambda}$

Чи будуть лінійно залежними наступні вектори?

1.18. Один вектор

1.19. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, якщо $\boldsymbol{a}_1 = 0$

1.20. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, якщо $\boldsymbol{a}_1$ та $\boldsymbol{a}_2$ лінійно залежні

1.21. Два колінеарні вектори

1.22. Два неколінеарних вектори

1.23. Три компланарних вектори

1.24. Три некомпланарних вектори

Чи будуть лінійно залежними наступні вектори, якщо вектори $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ лінійно незалежні?

1.25. $\alpha\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

1.26. $\boldsymbol{j} + (\alpha + 1)\boldsymbol{i}, 2\boldsymbol{j}$

1.27. $\alpha\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j}$

1.28. $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}$

1.29. $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, 3\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}$

1.30. $\alpha\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

1.31. $\alpha\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \alpha\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

Чи будуть лінійно залежними наступні функції?

1.32. $\sin \alpha t, \cos \alpha t$

1.33. $\sin t, \sin\left(t + \frac{\pi}{8}\right), \sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$

1.34. $\sin^2 t, \cos^2 t, 1$

1.35. $1, \sin^2 t, \cos 2t$

1.36. $\sin^2 t, \cos^2 t, 2, t, e^t$

1.37. $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 2 + e^t$

1.38. $e^{\alpha t}, e^{\beta t}, e^{\gamma t}$

1.39. $e^{\alpha t} \sin \beta t, e^{\alpha t} \cos \beta t$

1.40. $\ln t^2, \ln 3t, 7 \ (t > 0)$

1.41. $\sqrt{t}, \sqrt{t+1}, \sqrt{t+2} \ (t \geqslant 0)$

1.42. $t, |t|, 2t + \sqrt{4t^2}$

1.43. $t^2 + 2, 3t^2 - 1, t + 4$

1.44. $t^2 - t + 3, 2t^2 + t, 2t - 4$

Тема №2 | Евклідів простір

Скінченновимірний векторний простір називається евклідовим, якщо для будь-якої пари його векторів задана дійсна функція $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, *що називається скалярним добутком та задовільняє наступним умовам* $\forall \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \subset L$:

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ *(симетричність)*

2. $(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \beta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$ *(білінійність)*

3. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0,\ x \neq 0;\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *(додатна визначеність).*

Якщо задати результат скалярного множення базисних векторів $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$, *де* g_{ij} *- додатно визначена симетрична матриця, що називається фундаментальною, то для довільних векторів* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = g_{ij} x^i y^j$.

Якщо $g_{ij} = \delta_{ij}$ *то відповідний базис у даному евклідовому просторі називається ортобазисом. Тут* δ_{ij} *– символ Кронекера, який позначає елементи одиничної матриці, тобто*

$$\delta_{ij} = \delta^i_j = \delta^j_i = \delta^{ij} = \left[\begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{array} \right.$$

В ортобазисі прийнято записувати обидва німих індекси у правилі Айнштайна знизу. Так, наприклад, скалярний добуток у просторі L_n *з ортобазисом* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} = x_i y_i$.

За допомогою скалярного добутку можна ввести поняття довжин (модулів, норм тощо), відстаней та кутів: $a \equiv \sqrt{\boldsymbol{a}^2},\ \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2},\ \cos(\boldsymbol{a}\hat{,} \boldsymbol{b}) \equiv \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab}$. *Коректність останнього означення забезпечується виконанням нерівності Коші-Буняковського-Шварца:* $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leqslant ab$. *Також, якщо заданий скалярний добуток, згідно критерію Грама, вектори* $\{\boldsymbol{e}_n\}$ *будуть лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли* $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} \neq 0.$

Чи утворює евклідів простір наступний векторний простір із вказаним законом скалярного множення?

2.1. L_n, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv xy \cos(\boldsymbol{x}\hat{,}\boldsymbol{y})$

2.2. Векторний простір, що складається з єдиного нульового елементу, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \equiv 0$

2.3. L_2, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv |x_1||y_1| + |x_2||y_2|$

2.4. L_2, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv |x_2||y_2|$

2.5. Векторний простір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, ($n$ — кількість невідомих)

2.6. Векторний простір усіх многочленів із степенем не вище 2: $(P_2(t), Q_2(t)) \equiv P_2(1)Q_2(1) + P_2(2)Q_2(2) + P_2(3)Q_2(3)$

2.7. Векторний простір усіх многочленів із степенем не вище 3: $(P_3(t), Q_3(t)) \equiv P_3(1)Q_3(1) + P_3(2)Q_3(2) + P_3(3)Q_3(3)$

2.8. Векторний простір усіх многочленів із степенем не вище n: $(P_n(t), Q_n(t)) \equiv \sum\limits_{i=0}^{n} p_i q_i$, ($p_i$ та q_i — коефіцієнти многочленів біля i-ого степеня)

2.9. Векторний простір усіх многочленів із степенем не вище n: $(P_n(t), Q_n(t)) \equiv \int\limits_{0}^{\infty} P_n(t)Q_n(t)e^{-t^2}dt$

2.10. Векторний простір функцій, що неперервні на відрізку $t \in [a, b]$, $b > a$, $(f, g) \equiv \int\limits_{a}^{b} f(t)g(t)dt$

Довести:

2.11. Нерівність Шварца: для функцій $f(t)$ та $g(t)$, що неперервні на відрізку $t \in [a, b]$: $\left(\int\limits_{a}^{b} f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_{a}^{b} f^2(t)dt\right)\left(\int\limits_{a}^{b} g^2(t)dt\right)$

2.12. Нерівність трикутника: $|a-b| \leqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant a+b$

2.13. Сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін

2.14. Для того щоб фундаментальна матриця була додатно визначена необхідно і достатньо щоб її головні мінори були додатними (для випадку матриці 2×2)

Знайти кут між векторами $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$:

2.15. $\boldsymbol{x} = \{1, 0\},\ \boldsymbol{y} = \{0, 1\},\ g_{ij} = \operatorname{diag}(1, 1)$

2.16. $\boldsymbol{x} = \{1, 0\},\ \boldsymbol{y} = \{0, 1\},$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.17. $x(t) = t^2 - 2t + 1,\ y(t) = t + 2$, скалярний добуток заданий в №2.6

2.18. $x(t) = t^2 - 2t + 1,\ y(t) = t + 2$, скалярний добуток заданий в №2.8

З'ясувати, чи будуть лінійно залежними наступні вектори або функції за допомогою критерію Грама ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — ортонормовані вектори):

2.19. $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$

2.20. $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}, 3\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}$

2.21. $t^2+2, 3t^2-1, t+4$

2.22. $t^2-t+3, 2t^2+t, 2t-4$

Довести:

2.23. Нерівність Бесселя:
$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \leqslant x^2,$$
де $x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i$, а набір векторів $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}\}$ ортонормований

2.24. Нерівність Бесселя стає рівністю тоді і тільки тоді, коли виконується рівність Парсеваля:
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$$

2.25*. Система функцій $1, \sin nt, \cos nt$ $(n \in N)$ утворює ортогональний базис в просторі неперервних функцій на відрізку $[-\pi, \pi]$

2.26. Для коефіцієнтів розвинення

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

функції $f(t)$, що є квадратично інтегрованою на відрізку $t \in [-\pi, \pi]$ виконується формула Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt$$

2.27. Довести наступні тотожності:
$\delta_{ij} A_{jk} = A_{ik}$; $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$; $\delta_{ii} = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \dim L$

2.28. Знайти $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j}$, $\lambda = A_{ij} x^i x^j$

2.29. Знайти рівняння площини якій належить точка $\boldsymbol{r}_0$ та що ортогональна прямій $\boldsymbol{n}$

2.30. Знайти відстань від точки $\boldsymbol{r}_0$ до площини $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \alpha$

2.31. Довести що $(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} = 0$, де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки, $\mathbf{d}$ – сталий вектор є рівнянням сфери та знайти її радіус

Тема №3 | Векторний та мішаний добутки векторів. Символ Леві-Чівіти

Векторним добутком $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *пари векторів* $\boldsymbol{a}$ *та* $\boldsymbol{b}$ *у тривимірному евклідовому просторі називається вектор, ортогональний* $\boldsymbol{a}$ *та* $\boldsymbol{b}$*, модуль якого дорівнює площі паралелограму, що побудований на* $\boldsymbol{a}$ *та* $\boldsymbol{b}$ *та з вістря якого найкоротший оберт від* $\boldsymbol{a}$ *до* $\boldsymbol{b}$ *робиться проти годинникової стрілки.*

Векторний добуток є антисиметричною операцією та рівний нулю, якщо співмножники колінеарні. Якщо задати результат векторного множення ортів у вигляді згортки із повністю антисиметричним символом Леві-Чівіти $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$*, де* $\varepsilon_{123}=1$*, то результат множення довільних векторів* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$.

Мішаним добутком трійки векторів $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ *називається скаляр* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. *Основні властивості мішаного добутку:*

1. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ — *дужки векторного добутку можна ставити двома способами*
2. *Мішаний добуток є антисиметричним за всіма своїми аргументами та не змінюється при їх циклічній перестановці*
3. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$
4. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$ *якщо* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ *компланарні*
5. $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ *дорівнює об'єму паралелепіпеду, що побудований на* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

Знайти[1]

3.1. Добуток ортів декартової системи координат
$(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)\times(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y)$

3.2. Добуток ортів циліндричної системи координат
$(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\varphi)\times(\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_z)$

[1] Скрізь окрім задачі 3.20 розглядається тривимірний простір

3.3. Добуток ортів сферичної системи координат
$(\boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\theta) \times (\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_r)$

3.4. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ в декартових, циліндричних та сферичних координатах

3.5. $\boldsymbol{a}$, якщо $a_i = \varepsilon_{ijk} t_{jk}$

3.6. Згортки: $\varepsilon_{ijk} a_j a_k$, $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk}$

3.7. A, якщо $a_{ij} \equiv (A)_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k$

Довести:

3.8. $|A| = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = |A^T|$

3.9. $|A| \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk}$

3.10. $|AB| = |A| \cdot |B|$

3.11. Для базису ортонормованої системи координат: $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$

3.12. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e} & \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{f} & \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f} \end{vmatrix}$

3.13. $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$

3.14. $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$

3.15. $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{il}$; $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

3.16. $|A| = \dfrac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{lmn} \, a_{il} \, a_{jm} \, a_{kn}$

3.17. $\dfrac{d}{dt} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$

3.18. Якщо $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ та $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ то $\dfrac{d}{dt} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$

3.19. $\dfrac{d}{dt} |A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$, де A_i – матриця, що отримана з A диференціюванням i-ого рядка

3.20*. Довести за допомогою введення n-вимірного символу Леві-Чівіти що для матриць будь-якої розмірності:
$$|AB| = |A| \cdot |B|, \ \frac{d}{dt}|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$
де A_i – матриця, що отримана з A диференціюванням i-ого рядка

Довести:

3.21. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

3.22. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = 0$ (тотожність Якобі)

3.23. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$

3.24. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

3.25. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

3.26. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

3.27. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$

3.28. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$

3.29. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = (ab)^2$

3.30. $S^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$
$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix}$, де S — площа паралелограму, що побудований на векторах $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ (тотожність Лагранжа)

3.31. Для координат векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, що лежать у одній площині
$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$

3.32. Координати вектору $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ у базисі $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ можна обрахувати за формулами: $x = \dfrac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \ y = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \ z = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}$

Знайти $\boldsymbol{x}$:

3.33. $x\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+y\,\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+z\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}$

3.34. $\begin{cases}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=p\\ \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}\end{cases}$

3.35. $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\alpha\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=\beta\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=\gamma,\end{cases}\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq 0$

3.36. $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

3.37. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

Знайти:

3.38. Поперечну та повздовжню складові $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\parallel}+a_{\perp}$ відносно напрямку, що заданий одиничним вектором $\boldsymbol{n}$

3.39. Вектор що є дзеркальним відображенням вектора $\boldsymbol{a}$ у площині з одиничною нормаллю $\boldsymbol{n}$

3.40. Рівняння площини, що паралельна $\boldsymbol{a}$ та містить точки $\boldsymbol{r}_1$ та $\boldsymbol{r}_2$

3.41. Рівняння площини, що паралельна $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ та якій належить точка $\boldsymbol{r}_1$

3.42. Рівняння площини, що проходить через точки $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ що не належать одній прямій

3.43. Рівняння прямої, що проходить через точку $\boldsymbol{r}_0$ паралельно вектору $\boldsymbol{a}$

3.44. Довжину перпендикуляру, що опущений з початку координат на пряму $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a}=0$

3.45. Відстань між непаралельними прямими $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}$

Тема №4 | Диференціювання векторів

Диференціювання векторів можна здійснювати за допомогою векторного диференціального оператора ∇ («набла» або оператора Гамільтона, інколи $\boldsymbol{\nabla}$): $\nabla \equiv \dfrac{d}{d\boldsymbol{r}} \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$. При обрахунках слід враховувати що як диференціальний оператор ∇ діє згідно правила Ляйбніца із дотриманням його векторних властивостей, наприклад:

$$\nabla(\varphi \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) + \nabla(\varphi \overset{\downarrow}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})) = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \varphi(\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})).$$

Через оператор ∇ можна представити:

- $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$
- $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$
- $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$
- $\Delta\varphi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi$.

Похідною вздовж вектору є проекція градієнта на даний вектор: $\dfrac{d}{d\boldsymbol{A}} \equiv \boldsymbol{A} \cdot \nabla$.

Довести:

4.1. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0$

4.2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$

4.3. $\operatorname{grad}(\varphi f) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad}\varphi$

4.4. $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\operatorname{grad}\varphi$

4.5. $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{A}$

4.6. $\operatorname{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$

4.7. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \dfrac{d\boldsymbol{A}}{d\boldsymbol{B}} + \dfrac{d\boldsymbol{B}}{d\boldsymbol{A}}$

4.8. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\operatorname{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \dfrac{d\boldsymbol{A}}{d\boldsymbol{B}} - \dfrac{d\boldsymbol{B}}{d\boldsymbol{A}}$

4.9. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}$

4.10. $\boldsymbol{C} \cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$

4.11. $(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A})$

4.12. $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$

4.13. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{C}$

4.14. $((\boldsymbol{A}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}$

4.15. $((\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})$

Обрахувати ($\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор у тривимірному просторі, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ тощо – сталі вектори):

4.16. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$

4.17. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}$

4.18. $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{a}}$

4.19. $\mathrm{grad}\,f(r)$

4.20. $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$

4.21. $\mathrm{grad}\left[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]$

4.22. $\mathrm{grad}\,\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$

4.23. $\mathrm{grad}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,r]$

4.24. $\mathrm{grad}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})]$

4.25. $\mathrm{grad}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,f(r)]$

4.26. $\mathrm{grad}\left[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})^2\right]$

4.27. $\mathrm{grad}\,[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(r)]$

4.28. $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}(r)\cdot\boldsymbol{B}(r))$

4.29. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(r)$

4.30. $\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\boldsymbol{r})$

4.31. $\mathrm{rot}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{A}(r)]$

4.32. $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a}r^n)$

4.33. $\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$

4.34. $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$

4.35. $\mathrm{rot}\,[r\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]$

4.36. $\mathrm{rot}\,\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$

4.37. $\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})]$

4.38. $\mathrm{rot}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}]$

4.39. $\mathrm{rot}\,[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{A}(r)]$

4.40. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(r)$

4.41. $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$

4.42. $\mathrm{div}\,[r\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]$

4.43. $\mathrm{div}\,\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$

4.44. $\mathrm{div}\left(r^2\boldsymbol{r}\right)$

4.45. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{e}_r$

4.46. $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}r^n)$

4.47. $\mathrm{div}\,[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})]$

4.48. $\mathrm{div}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}]$

4.49. $\mathrm{div}\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{A}(r)]$

4.50. $\mathrm{div}(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$

4.51. $\mathrm{div}\,[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{A}(r)]$

4.52. $\Delta\varphi(r)$

4.53. $\Delta\dfrac{\varphi(r)}{r}$

4.54. $\Delta\boldsymbol{A}(r)$

4.55. $\Delta\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r^n}$

4.56. Знайти $\varphi(r)$, якщо $\mathrm{div}(\varphi(r)\boldsymbol{r}) = 0$

4.57. Знайти $\varphi(r)$, якщо $\mathrm{div}(\varphi(r)\boldsymbol{r}) = 2\varphi(r)$

4.58. $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|$ з точністю до $O\left((r'/r)^2\right),\ r' \ll r$

4.59. $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$ з точністю до $O\left((r'/r)^2\right),\ r' \ll r$

Тема №5 | Інтегрування векторів

Для інтегрування векторів зручно використовувати узагальнені теорему Гауса-Остроградського (формула Гауса):

$$\oint\limits_S d\boldsymbol{S} \ldots = \oint\limits_V dV \nabla \ldots$$

та теорему Стокса (формула Кельвіна-Стокса):

$$\oint\limits_C d\boldsymbol{l} \ldots = \oint\limits_S d\boldsymbol{S} \times \nabla \ldots,$$

де $d\boldsymbol{S} = dS\,\boldsymbol{n}$ *— векторний елемент площі замкненої поверхні* S*, яка охоплює об'єм* V, $d\boldsymbol{l} = dl\boldsymbol{\tau}$ *— нескінченно малий дотичний вектор до контуру* C*, що є межею поверхні* S, $\boldsymbol{n}$ *— вектор зовнішньої нормалі,* τ *— дотичний вектор* $(n=\tau=1)$.

Довести за допомогою теорема Гауса:

5.1. $\int (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A})\, dS = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, dV$

5.2. $\int (\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\, \varphi\, dS = \int \Delta\varphi\, dV$

5.3. $\int x_i n_j dS = V\delta_{ij}$

5.4. $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int \operatorname{grad} r^2\, d\boldsymbol{S} = V$

5.5. $\int f \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dV$

5.6. $\int (\boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int (\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A})\, dV$

5.7. $\displaystyle\int \Delta f\, \frac{df}{d\boldsymbol{n}}\, dS = \int \Big[(\Delta f)^2 + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} \Delta f\Big]\, dV$

5.8. $\int \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, dV = \int f \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{S}$

Довести за допомогою теореми Стокса:

5.9. $\int f\, d\boldsymbol{l} = \int (\boldsymbol{n} \times \nabla)\, f\, dS$

5.10. $\int \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{l} = -\int (\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{A}\, dS$

5.11. $\int \operatorname{grad} f \cdot\, d\boldsymbol{l} = 0$

Обчислити $\boldsymbol{a}$ — сталий вектор:

5.12. $\int (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{r}\, dS$,

5.13. $\int (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}\, dS$

5.14. $\int (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{a}\, dS$

5.15. $\displaystyle\int \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\, dS$

5.16. $\displaystyle\int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a})\, f(r)\, dS$

5.17. $\int (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b})\ dS$

Тема №6 | Тензори 2-ого рангу

Тензором 2-ого рангу називається лінійний оператор, що ставить у відповідність кожному вектору $\boldsymbol{x}$ *вектор* $\boldsymbol{y}$*:* $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = T \cdot \boldsymbol{x}$.

Квадратна матриця з компонентами $a_{ij} = b_i c_j$ *називається діадним (тензорним) добутком векторів* $\boldsymbol{b}$ *та* $\boldsymbol{c}$ *або просто діадою:* $bc \equiv b \otimes c$. *Діадне множення є лінійною за обома аргументами та у загальному випадку некомутативною операцією. Для двох діад* $\boldsymbol{ab}$ *та* $\boldsymbol{cd}$ *вводяться операції скалярного добутку* $\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{ad}$, *подвійного скалярного добутку* $\boldsymbol{ab} : \boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ *та повного скалярного добутку* $\boldsymbol{ab} \circ \boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})$.[1] *Слід діади є слідом відповідної матриці, тобто* $\mathrm{sp}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Будь-який тензор 2-ого рангу у векторному просторі L_n *можна розвинути за діадним базисом:* $T = t^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = t^i{}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j = t_i{}^j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = t_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$, *де* $\{\boldsymbol{e}_n\}$ *—* n *довільних лінійно-незалежних векторів,* t^{ij} *— двічі контраваріантна,* t_{ij} *— двічі коваріантна,* $t^i{}_j$ *та* $t_i{}^j$ *— мішані компоненти тензора, що утворюють квадратні матриці порядку* n, *причому у загальному випадку* $t^{ij} \neq t_{ij} \neq t^i{}_j \neq t_i{}^j$. *Слід тензора* $\mathrm{sp}\, T = \mathrm{sp}(T_i{}^j \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_j) = T_i{}^i = T^i{}_i$.

Тензор T^T, *що називається транспонованим даному тензору* T, *визначається рівністю* $\boldsymbol{y} \cdot T \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot T^T \cdot \boldsymbol{y}$ *для будь-яких векторів* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Подвійний та повний скалярні добутки тензорів T *та* P *вводяться відповідно як* $T : P = \mathrm{sp}(T \cdot P) = P : T$ *та* $T \circ P = \mathrm{sp}(T \cdot P^T) = T : P^T$.

За допомогою тензора T *для вектора* $\boldsymbol{x}$, *а також для пари векторів* $\boldsymbol{x}$ *та* $\boldsymbol{y}$ *можна утворити відповідно квадратичну* $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot T \cdot \boldsymbol{x}$ *та білінійну форми* $T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot T \cdot \boldsymbol{y}$.

Власні значення λ *тензора* T *знаходяться з умови що рівняння* $T \cdot \boldsymbol{t} = \lambda \boldsymbol{t}$ *має розв'язки для власних векторів* $\boldsymbol{t} \neq 0$.

Знайти тензор T за відомим результатом відповідного лінійного відображення:

6.1. Оператор проектування вздовж $\boldsymbol{u}$*:* $\boldsymbol{x}_{\parallel} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \ u = 1$

[1] Інколи в літературі останні два означення міняються місцями

6.2. $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = x^i \boldsymbol{e}'_i$

6.3. $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$

6.4. Довести що рівняння $T(\boldsymbol{r}) = 1$, де квадратична форма $T(\boldsymbol{r})$ відповідає тензору T, що заданий в ортобазисі діагональною матрицею $T_{ij} = \mathrm{diag}(a, b, c)$, $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор є рівнянням еліпсоїда

6.5. Довести що будь-який тензор A_{ij} можна представити у вигляді суми симетричного $A_{\{ij\}}$ та антисиметричного $A_{[ij]}$ тензорів

6.6. Довести що для симетричного тензора A_{ik} та антисиметричного B_{ik} : $A_{ik}B_{ik}=0$

6.7. Довести що $A_{ij}b_ib_j = A_{(ij)}b_ib_j$

6.8. Довести що якщо $A_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$ то A_{ij} – симетричний тензор

6.9. Довести що для антисиметричного тензора A_{ik} та дуального йому вектора $a_i = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$ виконується: $A_{ik} = \varepsilon_{ikj}a_j$. Знайти явний вигляд A через компоненти $\boldsymbol{a}$

6.10. Нехай ортобазис обертається відносно нерухомого ортобазису за законом $\boldsymbol{e}'_i(t) = S_{ij}(t)\boldsymbol{e}_j$. Довести що тензор кутової швидкості $\Omega_{ij} \equiv \omega_{ij}$, що визначається із рівняння $\dot{\boldsymbol{e}}'_i = \omega'_{ij}\boldsymbol{e}'_j$ дорівнює $\Omega' = \dot{S} \cdot S^T$ та довести що він є антисиметричним

6.11. Довести що $\boldsymbol{e}'_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_i$, де $\boldsymbol{\omega} = \omega'_i\, \boldsymbol{e}'_i$

Довести:

6.12. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

6.13. $(T^n)^T = \left(T^T\right)^n$

6.14. $\mathrm{sp}(A \cdot B \cdot C) = \mathrm{sp}(B \cdot C \cdot A) = \mathrm{sp}(C \cdot A \cdot B)$

6.15. $(T \times \boldsymbol{a})^T = -\boldsymbol{a} \times T^T$

6.16. $T_{\{\}} \circ T_{[]} = 0$

6.17. $T_b \circ T_d = 0$, де T_b та T_d – відповідно кульова та девіаторна частини тензора T: $T_b = 1/3\,\mathrm{sp}(T)\hat{1}$, $T_d = T - 1/3\,\mathrm{sp}(T)\hat{1}$

6.18. $T : (\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}) = T \circ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = T\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

6.19. Знайти $D\colon F$ та $D \circ F$, для тензорів $D = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + 5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ та $F = 4\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + 6\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$

Знайти власні значення та власні вектори:

6.20.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.21.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

6.22.

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

6.23. Знайти B^4 за допомогою теореми Гамільтона-Келі,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6.24*. Знайти $\sqrt{B}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Тема №7 | Заміна базису. Вступ до тензорного аналізу у криволінійних координатах

Набір n незалежних величин $\{x^n\}$*, що однозначно визначають радіус-вектор* $\boldsymbol{r}(x^1 \dots x^n)$ *довільної точки* M *з області векторного простору* L_n*, називаються криволінійними координатами. Сукупність точки* M *та векторів*

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$$

називається локальним базисом.

Метричним тензором в точці M *називається тензор*

$$g_{ij}(M) = \boldsymbol{E}_i(M) \cdot \boldsymbol{E}_j(M).$$

За його допомогою визначається елемент відстані

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Довжина базисного вектора називається параметром Ламе:

$$H_i = |\boldsymbol{E}_i| = \sqrt{g_i i}.$$

Використовуючи її вводяться одиничні базисні вектори:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i} \boldsymbol{E}_i.$$

Компоненти вектора $\boldsymbol{A}$ *у базисі* $\{\boldsymbol{e}_n\}$ *називаються фізичними компонен-*

тами:

$$A^{*i} = A^i \sqrt{g_{ii}},\ A^*_i = A_i \sqrt{g^{ii}}\ (\not\sum_i).$$

Для тензорів фізичні компоненти будуються аналогічно. Наприклад, для мішаної компоненти тензору 2-ого рангу:

$$T^{*i}_j = T^i_j \sqrt{g_{ii} g^{jj}}.$$

При перетворенні криволінійних координат $\{x^n\}$ *в* $\{x^{n'}\}$ *компоненти тензору довільного рангу перетворюються як:*

$$T^{\,i'_1 \dots i'_p}_{\,j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}.$$

При паралельному перенесенні вектора $\boldsymbol{A}$ *його контраваріантні компоненти змінюються за рахунок зміни локального базису криволінійних координат:*

$$dA^i = -\Gamma^i_{kj} a^k dx^j,$$

де Γ^i_{kj} *— коефіцієнти зв'язності (символи Крістофеля 2-ого роду) визначаються з рівності:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_j}{\partial x^k} = \Gamma^i_{kj} \boldsymbol{E}_i.$$

Коваріантні компоненти вектора $\boldsymbol{A}$ *при паралельному перенесенні змінюються:*

$$dA_i = \Gamma^k_{ij} A_k dx^j.$$

Абсолютним диференціалом контраваріантної компоненти вектора DA^i *називається*

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kj} A^k dx^j \equiv A^i_{;j}\, dx^j,$$

де $A^i_{;j}$ *— контраваріантна похідна:*

$$A^i_{;j} \equiv \nabla_j A^i = dA^i + \Gamma^i_{kj} A^k dx^j$$

Абсолютним диференціалом DA_i *коваріантної компоненти вектора (ко-*

вектора) називається

$$DA_i = dA^i - \Gamma^k_{ij} a_k \equiv A_{i\,;j}\, dx^j,$$

де $A_{i\,;j}$ *— коваріантна похідна:*

$$A_{i\,;j} \equiv \nabla_j A_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} A_k.$$

Диференціальні операції визначаються наступним чином:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \varphi_{\,;i},\;\; \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = A^i_{\,;i},\;\; (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(A_{k;i} - A_{i;k}).$$

Матриця A *перетворення базису* $\boldsymbol{e}_{i'} = \boldsymbol{A}^i_{i'} \boldsymbol{e}_i$*, що зберігає його ортонормованість називається ортогональною та задовільняє співвідношенню:* $A^{-1} = A^T$.

Довести (φ, Φ — скаляри, A — вектор, $\hat{T}$ — тензор):

7.1. $\Gamma^{i'}_{k'j'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{kj} + \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}$

7.2. $dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik}$

7.3. $g^{ij}\Gamma^k_{ij} = -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(g^{kl}\sqrt{|g|}\right)_{,l}$

7.4. $g^{ij}\varphi_{;ij} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|} g^{ij}\varphi_{,j}\right)_{,i}$

7.5. $A_{i;k} - A_{k;i} = A_{i,k} - A_{k,i}$

7.6. $A^i{}_{;i} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|} A^i\right)_{,i}$

7.7. $A_i^{\;j}{}_{;j} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_k \left(\sqrt{|g|}\, T_i^{\;k}\right) - \Gamma^l_{ik} T_l^{\;k}$

7.8. $A^{ik}_{\;;k} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|} A^{ik}\right)_{,k}$
$A^{ik} = -A^{ki}$

7.9. Записати $\mathrm{grad}\,\Phi, \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ у циліндричних та сферичних координатах

7.10. Записати скалярний оператор Лапласа у циліндричних та сферичних координатах

7.11. Записати векторний оператор Лапласа у циліндричних та сферичних координатах

7.12. Записати рівняння неперервності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

у циліндричній (r, φ, z) та сферичній (r, θ, φ) системах координат

7.13. Знайти вектор $\boldsymbol{a}$ при якому матриця перетворення базису буде ортогональною: $a_{ij} = 2a_i a_j - \delta_{ij}$

7.14. Знайти α при якому дане перетворення координат, буде описувати обертання базису та знайти матрицю відповідного перетворення:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = \alpha(x - y) \\ z' = \alpha(x + y) \end{cases}$$

7.15. Знайти матрицю перетворення базису, що відповідає обертанню навколо осі Ox^1 на кут φ

7.16. Знайти матрицю перетворення базису, що відповідає дзеркальному відображенню в площині x^1Ox^3

7.17. Знайти матрицю перетворення базису, що описується кутами Ейлера та є комбінацією послідовних обертань:

1 – Обертання навколо осі $\mathbf{e_3}$ на кут φ : $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) \to (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e_3})$ (пряма що задається $\mathbf{e'_1}$ називається лінією вузлів)

2 – Обертання навколо осі $\mathbf{e'_1}$ на кут θ : $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e_3}) \to (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e''_2}, \mathbf{e'_3})$

3 – Обертання навколо осі $\mathbf{e'_3}$ на кут ψ : $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e''_2}, \mathbf{e'_3}) \to (\mathbf{e''_1}, \mathbf{e'''_2}, \mathbf{e'_3})$

Перевірити що отримується у випадку $\theta = 0$.

Для заданого перетворення декартових координат (x^1, x^2, x^3) знайти пряме та обернене перетворення базису та координат векторів, метричний тензор та квадрат елементу довжини в нових координатах:

7.18. Циліндричні координати (ρ, φ, z):

$$x^1 = \rho\cos\varphi,\ \ x^2 = \rho\sin\varphi,\ \ x^3 = z\ \ (\rho \geqslant 0)$$

7.19. Сферичні координати (r, θ, φ):

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, x^3 = r\cos\theta \ (r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

7.20. Параболічні координати (τ, σ, φ):

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, y = \sigma\tau\sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \ (\sigma, \tau \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

7.21. Параболічні циліндричні координати (σ, τ, z):
$x^1 = \sigma\tau, \ x^2 = \dfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), x^3 = z \ (\tau, \sigma \geqslant 0)$

7.22. Еліптичні циліндричні координати (μ, φ, z):
$x^1 = \operatorname{ch}\mu\cos\varphi, x^2 = \operatorname{sh}\mu\sin\varphi, x^3 = z \ (\mu \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$

7.23. Знайти метричний тензор та квадрат елементу відстані в псевдосферичних координатах (ρ, χ, φ) у тривимірному просторі Мінковського з метричним тензором $g_{ij} = diag(1, -1, -1)$*:*

$$x^0 = \rho\operatorname{ch}\chi, \ x^1 = \rho\operatorname{sh}\chi\cos\varphi, \ x^2 = \rho\operatorname{sh}\chi\sin\varphi \ (\rho \in R, \ \chi \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Зіставити отримані результати із результатами №(7.19)

Відповіді

1.1. Ні **1.2.** Ні **1.3.** Якщо пряма проходить через початок координат, 1

1.4. Так, $n-1, n \geqslant 2 : \boldsymbol{e}_1 = \{0,1,0,\dots,0\},\dots,\boldsymbol{e}_{n-1} = \{0,0,\dots,0,1\}$
1.5. Так, $n-1, \boldsymbol{e}_1 = \{1,1,0,\dots,0\}$,
$\boldsymbol{e}_2 = \{0,0,1,\dots,0\}\dots\boldsymbol{e}_{n-1} = \{0,\dots,0,1\}$
1.6. Так, $n-1, n \geqslant 2 :\ \boldsymbol{e}_1 = \{1,0,\dots,0,-1\}$,
$\boldsymbol{e}_2 = \{0,1,\dots,0,-1\}\dots\boldsymbol{e}_{n-1} = \{0,\dots,0,1,-1\}$ **1.7.** Ні **1.8.** Так, 0
1.9. Так, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ **1.10.** Так, $\dfrac{n(n-1)}{2}$
1.11. Якщо $|A| = 0$: $\operatorname{rang} A$, фундаментальна система розв'язків; якщо $|A| = 0$ — векторний простір складається лише з нульового елементу, 0
1.12. Ні окрім випадку коли $\boldsymbol{q} = 0$, коли розв'язок зводиться до №1.11
1.13. Так, $n, \boldsymbol{e}_i = y_i, y_i$ – частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння
1.14. Ні **1.15.** Так, $n+1, \boldsymbol{e}_i = t^i$ **1.16.** Так, $\infty, \boldsymbol{e}_i = t^i$
1.17. Так,1, будь-яке додатне $a \neq 1$ **1.18.** Якщо він нульовий **1.19.** Так
1.20. Так **1.21.** Так **1.22.** Ні **1.23.** Так **1.24.** Ні **1.25.** Якщо $\alpha = -2$
1.26. Якщо $\alpha = -1$ **1.27.** Якщо $\alpha = \pm 1$ **1.28.** Ні **1.29.** Так
1.30. Якщо $\alpha = -2$ **1.31.** Якщо $\alpha = 7/5$ **1.32.** Якщо $\alpha = 0$ **1.33.** Так
1.34. Так **1.35.** Так **1.36.** Так **1.37.** Ні
1.38. Якщо два коефіцієнти рівні **1.39.** Якщо $\beta = 0$ **1.40.** Так **1.41.** Ні
1.42. Так **1.43.** Ні **1.44.** Так **2.1.** Так **2.2.** Так **2.3.** Ні **2.4.** Ні
2.5. Так **2.6.** Так **2.7.** Ні **2.8.** Так **2.9.** Так **2.10.** Так **2.15.** $\pi/2$
2.16. $\pi/4$ **2.17.** $\arccos(24/(5\sqrt{34}))$ **2.18.** $\pi/2$ **2.19.** Ні **2.20.** Так
2.21. Ні **2.22.** Так **2.28.** $A_{ij} + A_{ji}$ **2.29.** $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0$ **2.30.** $\dfrac{|\alpha - \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}|}{n}$
2.31. $d/2$ **3.1.** $-\boldsymbol{e}_y$ **3.2.** $\boldsymbol{e}_z$ **3.3.** $-\boldsymbol{e}_\theta$
3.4. $(a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_j + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e}_z$,
$(a_\varphi b_z - a_z b_\varphi)\boldsymbol{e}_\rho + (a_z b_\rho - a_\rho b_z)\boldsymbol{e}_\varphi + (a_\rho b_\varphi - a_\varphi b_\rho)\boldsymbol{e}_z$,
$(a_\theta b_\varphi - a_\varphi b_\theta)\boldsymbol{e}_r + (a_\varphi b_r - a_r b_\varphi)\boldsymbol{e}_\theta + (a_r b_\theta - a_\theta b_r)\boldsymbol{e}_\varphi$
3.5. $(t_{23} - t_{32}, t_{31} - t_{13}, t_{12} - t_{21})$ **3.6.** $0, 0$ **3.7.** $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$
3.33. $x = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\ y = \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\ z = \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$ **3.34.** $\dfrac{1}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}(p\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q})$

3.35. $\boldsymbol{x} = \dfrac{\alpha \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$

3.36. $\dfrac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2a^2)}\left(\alpha^2\boldsymbol{b}+\alpha\beta\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\beta^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}\right)$ **3.37.** $\dfrac{1}{1+b^2}\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}\right)$

3.38. $\boldsymbol{a}_\parallel = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})$ **3.39.** $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}$

3.40. $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$ **3.41.** $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$

3.42. $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$

3.43. $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{a} = 0$ **3.44.** $\dfrac{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{a}|}{a}$ **3.45.** $\dfrac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$ **4.16.** 3

4.17. 0 **4.18.** $\boldsymbol{a}$ **4.19.** $f'(r)\boldsymbol{e}_r = f'(r)\boldsymbol{r}/r$ **4.20.** $\boldsymbol{a}$ **4.21.** $2\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}$

4.22. $\dfrac{\boldsymbol{a}}{r^3} - 3\,\dfrac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}$ **4.23.** $\boldsymbol{a}r + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_r$ **4.24.** $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$

4.25. $\boldsymbol{a}f(r) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,f'(r)\boldsymbol{e}_r$ **4.26.** $2a^2\boldsymbol{r} - 2\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}$

4.27. $\boldsymbol{A}(r)\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{A}')\,\boldsymbol{e}_r$ **4.28.** $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}')\;\boldsymbol{e}_r$ **4.29.** $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{A}'(r)$

4.30. 0 **4.31.** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(r) + \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}'(r)}{r}$ **4.32.** $nr^{n-2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$

4.33. $(\varphi/r)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}') + (\varphi'/r)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})$ **4.34.** $2\boldsymbol{a}$

4.35. $3\boldsymbol{a}r - \boldsymbol{e}_r\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ **4.36.** $\dfrac{3\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) - r^2\boldsymbol{a}}{r^5}$ **4.37.** $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ **4.38.** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$

4.39. $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}'(r))\,\boldsymbol{e}_r]$

4.40. $\boldsymbol{A'(r)}\cdot\boldsymbol{e}_r$ **4.41.** 0 **4.42.** 0 **4.43.** 0 **4.44.** $5r^2$ **4.45.** $\dfrac{2}{r}$

4.46. $nr^{n-2}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ **4.47.** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ **4.48.** $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$

4.49. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(r) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{A}'(r)\cdot\boldsymbol{e}_r)$ **4.50.** $\varphi\,(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{e}_r) + \varphi'\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_r)$

4.51. $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{a}r - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{A}'(r)$ **4.52.** $\varphi'' + 2\dfrac{\varphi}{r}$ **4.53.** $\dfrac{\varphi''}{r}$

4.54. $\boldsymbol{A}'' + 2\dfrac{\boldsymbol{A}'}{r}$ **4.55.** $n(n-3)\,\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r^{n+2}}$ **4.56.** C/r^3 **4.57.** C/r

4.58. $r - \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r'} + \left(r'^2 - (\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r'})^2\right)/(2r) + O\left((r'/r)^3\right)$

4.59. $\dfrac{1}{r} + \dfrac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r'}}{r^2} + \dfrac{3(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r'})^2 - r'^2}{2r^3} + O\left((r'/r)^3\right)$ **5.12.** $V\boldsymbol{a}$ **5.13.** $V\boldsymbol{a}$

5.14. $3\,V\boldsymbol{a}$ **5.15.** $2\,V\boldsymbol{a}$ **5.16.** $\int\left(f'(r)\left[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{a}r\right] - 2\boldsymbol{a}f\right)dV$

5.17. $-2\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,V$ **6.1.** $\boldsymbol{uu}$ **6.2.** $\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}^i$ **6.3.** $\boldsymbol{cb}-\boldsymbol{bc},\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

6.5. $A_{(ij)} = \dfrac{1}{2}\,(A_{ij}+A_{ji}),\ A_{[ij]} = \dfrac{1}{2}\,(A_{ij}-A_{ji})$ **6.9.** $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$

6.19. $D\colon F = 20,\ D\circ F = 17$

6.20. $\lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{t}_1 = C_1(1,1,-1)^T,\ \lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{t}_2 = C_1(1,0,0)^T + C_2(0,1,0)^T$

6.21. $\lambda_1 = 0,\ \boldsymbol{t}_1 = C_1(2,1,-1)^T,\ \lambda_2 = -1,\ \boldsymbol{t}_2 = C_2(1,1,-4/3)^T$
6.22. $\lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{t}_1 = (-3/(5\sqrt{2}), 1/\sqrt{2}, -4/(5\sqrt{2}))^T,\ \lambda_2 = 7,$
$\boldsymbol{t}_2 = (4/5, 0, -3/5)^T, \lambda_3 = 12,\ \boldsymbol{t}_3 = (3/(5\sqrt{2}), 1/\sqrt{2}, 4/(5\sqrt{2}))^T$

6.23. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}$ **6.24.** $\begin{pmatrix} 1/2(\sqrt{5}+1) & 1/2(\sqrt{5}-1) & 0 \\ 1/2(\sqrt{5}-1) & 1/2(\sqrt{5}+1) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7.9. $\nabla\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$

$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$

$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \rho\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\dfrac{\partial A_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \dfrac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z =$

$= \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta +$

$+ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$

7.10. $\Delta\Phi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} =$

$= \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

7.11. $\left(\Delta A_\rho - \dfrac{A_\rho}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\Delta A_\varphi - \dfrac{A_\varphi}{\rho^2} + \dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \Delta A_z\boldsymbol{e}_z =$

$= \left[\Delta A_r - \dfrac{2}{r^2}\left(A_r + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\boldsymbol{e}_r +$

$+ \left[\Delta A_\theta + \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} - \dfrac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta +$

$+ \left[\Delta A_\varphi + \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\left(\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right)\right]\boldsymbol{e}_\varphi$

7.12. $r\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \dfrac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi} + r\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0,$

$r^2\sin^2\theta\,\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \sin\theta\,\dfrac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} + r\,\dfrac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + r\,\dfrac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi} = 0$ **7.13.** $a = 1$

7.14. $\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

7.15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

7.16. $A = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$

7.17. $\begin{pmatrix} \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\varphi - \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{s}\,\varphi + \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & \mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{s}\,\theta \\ -\mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\varphi - \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & -\mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{s}\,\varphi + \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{s}\,\theta \\ \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{s}\,\varphi & -\mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{c}\,\varphi & \mathrm{c}\,\theta \end{pmatrix}$

(В відповіді до цього прикладу вжито позначення: $\sin \equiv \mathrm{s}$, $\cos \equiv \mathrm{c}$)

7.18. $\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \\ \mathbf{e_z} = \mathbf{k} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathbf{i} = \cos\varphi\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} = \sin\varphi\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} = \mathbf{e_z} \end{cases}$

$$\begin{cases} a_\rho = \cos\varphi a_1 + \sin\varphi a_2 \\ a_\varphi = -\sin\varphi a_1 + \cos\varphi a_2 \\ a_z = a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \cos\varphi a_\rho - \sin\varphi a_\varphi \\ a_2 = \sin\varphi a_\rho + \cos\varphi a_\varphi \\ a_3 = a_z \end{cases}$$

$g_{ik} = \mathrm{diag}(1, \rho^2, 1)$, $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$

7.19. Тут і далі наводяться лише вирази для перетворення базисів, перетворення координат вектора звідси знаходиться відомим чином

$$\begin{cases} \mathbf{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e_r} + \cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_\theta - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} = \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e_r} + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_\theta + \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} = \cos\theta\mathbf{e_r} - \sin\theta\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

$g_{ik} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$, $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$, $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$

7.20. $\begin{cases} \mathbf{e}_\tau = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}(\sigma(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) + \tau\mathbf{k}) \\ \mathbf{e}_\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}(\tau(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) - \sigma\mathbf{k}) \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \dfrac{\sigma\cos\varphi}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\mathbf{e}_\tau + \dfrac{\tau\cos\varphi}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}\mathbf{e}_\sigma - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} = \dfrac{\sigma\sin\varphi}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\mathbf{e}_\tau + \dfrac{\tau\sin\varphi}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}\mathbf{e}_\sigma + \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} = \dfrac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\mathbf{e}_\tau - \dfrac{\sigma}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}\mathbf{e}_\sigma \end{cases}$$

$g_{ik} = \mathrm{diag}(\sigma^2+\tau^2, \sigma^2+\tau^2, \tau\sigma),\ dl^2 = (\sigma^2+\tau^2)(d\tau^2+d\sigma^2) + \tau\sigma d\varphi^2$

7.21. $$\begin{cases} \mathbf{e}_\sigma = \dfrac{\tau\mathbf{i}-\sigma\mathbf{j}}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} \\ \mathbf{e}_\tau = \dfrac{\sigma\mathbf{i}+\tau\mathbf{j}}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ \mathbf{e}_\mathbf{z} = \mathbf{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{i} = \dfrac{\tau\mathbf{e}_\sigma+\sigma\mathbf{e}_\tau}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} \\ \mathbf{j} = \dfrac{-\sigma\mathbf{e}_\sigma+\tau\mathbf{e}_\tau}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}} \\ \mathbf{k} = \mathbf{z} \end{cases}$$

$g_{ik} = \mathrm{diag}(\tau^2+\sigma^2, \tau^2+\sigma^2, 1),\ dl^2 = (\tau^2+\sigma^2)(d\sigma^2+d\tau^2) + dz^2$

7.22. $$\begin{cases} \mathbf{e}_\mu = \dfrac{\operatorname{sh}\mu\cos\varphi\mathbf{i} + \operatorname{ch}\mu\sin\varphi\mathbf{j}}{\sqrt{\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu}} \\ \mathbf{e}_\varphi = \dfrac{-\operatorname{ch}\mu\sin\varphi\mathbf{i} + \operatorname{sh}\mu\cos\varphi\mathbf{j}}{\sqrt{\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu}} \\ \mathbf{e}_\mathbf{z} = \mathbf{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{i} = \dfrac{\operatorname{sh}\mu\cos\varphi\mathbf{e}_\mu - \operatorname{ch}\mu\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu}} \\ \mathbf{j} = \dfrac{\operatorname{ch}\mu\sin\varphi\mathbf{e}_\mu + \operatorname{sh}\mu\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu}} \\ \mathbf{k} = \mathbf{e}_\mathbf{z} \end{cases}$$

$g_{ik} = \mathrm{diag}(\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu, \sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu, 1),\ dl^2 = (\sin^2\varphi+\operatorname{sh}^2\mu)(d\mu^2+d\varphi^2)+dz^2$

7.23. $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, -\rho^2, -\rho^2\operatorname{sh}^2\chi),\ dl^2 = d\rho^2 - \rho^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2)$

Література

1. *Разумова М. А.*, *Хотяїнцев В. М.* Основи векторного і тензорного аналізу. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2011.
2. Збірник задач з векторного та тензорного числення / М. Ф. Ледней, М. А. Разумова, О. В. Романенко, В. М. Хотяїнцев. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2010.
3. *Келлер И. Э.* Тензорное исчисление. — М. : Лань, 2012.
4. *Анчиков А. М.* Основы векторного и тензорного анализа. — Казань : Изд. Казанского ун-та, 1988.
5. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. — М. : Наука, 1986.
6. *Бортаковский А. С.*, *Пантелеев А. В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. — М. : Высшая школа, 2005.
7. *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.*, *Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. Том 1. — М. : Эдиториал УРСС, 2001.
8. *Павленко Ю. Г.* Лекции по теоретической механике. — М. : Физматлит, 2002.
9. *Мейз Д.* Теория и задачи механики сплошных сред. — Мир, 1974.
10. *Ландау Л. Д.*, *Лившиц Е. М.* Теория поля. — М. : Физматлит, 2006.
11. *Irgens F.* Tensor Analysis. — Springer, 2019.
12. *De Souza Sánchez Filho E.* Tensor Calculus for Engineers and Physicists. — Springer, 2016.