

УДК 301.17.15; 301.07.13

П.В. Лук'янов

ОДНОВИМІРНІ МОДЕЛІ КОМПАКТНИХ ВИХОРИВ**Вступ**

У природі існують два умовних типи вихрових рухів. До першого з них можна віднести ті явища, де весь об'єм рідини перебуває в обертальному русі. Для різноманітних, штучно створених людиною, пристроїв немає різниці, оскільки вся рідина в даному випадку обертається. І, як правило, рух є стаціонарним. Існує також другий тип вихрових рухів — компактні вихори. Це вихори, які мають певні просторові розміри і не досягають принаймні однієї з меж області. Такі вихори спостерігаються в атмосфері, океанах та морях і, нарешті, в лабораторних та чисельних експериментах. Фізика їх утворення різноманітна, але в рамках даної статті детально не розглядається. Компактні вихори мають досить чітко виражену зовнішню межу: поза межами певної просторової області обертальний рух частинок відсутній.

Найпростішою є модель так званого точкового вихору, або вихрової нитки. Завихреність у таких течіях сконцентрована повністю на осі обертання. Розв'язок для вказаних вихорів є автомодельним і першого роду, тобто не залежить від початкових умов. Але в природі, як правило, область ненульової завихреності має скінченні розміри, а відповідні автомодельні розв'язки вже певним чином залежать від умов створення течії. Математично це означає залежність від початкових умов, або так звану автомодельність другого роду [1].

У класі вихорів з областю завихреності скінченних розмірів відомий розв'язок, — вихор Ренкіна, — нев'язка течія. Йому відповідає також відомий вихор Лемба—Озеена, який є розв'язком задачі молекулярної дифузії вихору. Обидва вихори мають одну область завихреності сталого знака. Більшість течій у природі є тою чи іншою мірою турбулентними. Нещодавно було знайдено [2] аналог вихору Лемба—Озеена — частковий автомодельний розв'язок загального автомодельного рівняння, що описує турбулентну дифузії вихору в інерційному інтервалі турбулентності [3]. Зазначені вихори

мають компактне поле завихреності, але поле швидкості — некомпактне.

У статті [4] вказується з посиланням на [5, 6], що на відміну від моделей із сталою завихреністю дані гідрологічних спостережень над реальними вихорами є іншими. Згідно з ними завихреність спочатку змінює знак при зміні в радіальному напрямку, а потім спадає, за абсолютною величиною, до нуля. Там же робиться висновок про те, що більш правдоподібними є моделі з кусково-сталими розподілами завихреності за наявності двох та більше фронтів (розривів) цієї характеристики та за умови нульової їх сумарної інтенсивності (компенсованість).

З автомодельних рівнянь, що описують молекулярну [7] та турбулентну [3] дифузії (в інерційному інтервалі турбулентності) вихору було знайдено окремі розв'язки, які відповідають компактній природі вихору. Це розв'язки у вигляді так званого ізольованого гауссіана. Виникає цілком логічне запитання: а чи не можна знайти найпростіший розв'язок у класі нев'язких вихорів, який би відповідав ізольованому гауссіану, тобто мав дві області завихреності різного знака. Виявляється — можна. Цій проблемі, а також характеристичі більш складних автомодельних розв'язків, присвячується дана стаття.

Постановка задачі

Відомі п'ять найпростіших розв'язків, що описують одновимірні моделі вихорів. Дві пари розв'язків відповідають молекулярній та турбулентній дифузії вихору. І лише один розв'язок (вихор Ренкіна) відповідає нев'язкій моделі вихрової течії. Місце для компактного розв'язку, що відповідає нев'язкій моделі вихрової течії, є вакантним. Головна мета статті — заповнити це (вакантне) місце відповідним аналітичним розв'язком і, крім того, проаналізувати окремі автомодельні розв'язки, що відповідають високим ненульовим моментам завихреності, і зв'язати їх з експериментальними даними.

Компактний нев'язкий компенсований вихор

Для розуміння місця даних досліджень у науці наведемо існуючі на даний момент розв'язки, про які йшлося у вступі. Почнемо з відомого вихору Ренкіна. Азимутальна швидкість V_θ та завихреність ω_z (вертикальна її складова) задаються такими виразами:

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V_0 a}{r}, & r > a, \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Аналогом (1) є вихор Лемба–Озеена [7] – розв’язок задачі молекулярної дифузії вихору:

$$V_{\theta}^I = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right) \right], \quad (2)$$

$$\omega_z^I = \frac{\Gamma}{\pi \lambda^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right),$$

де $\lambda = 2\sqrt{\nu t}$; V_{θ} , ω_z – азимутальна компонента швидкості та вертикальна компонента завихреності, відповідно; Γ – циркуляція.

Зовсім недавно було знайдено, що турбулентна (в інерційному інтервалі) дифузія вихору описується співвідношеннями, подібними до наведених у [2]:

$$V_{\theta}^I = \frac{8\omega_0}{9r} \left[1 - \exp\left(-\frac{9r^2}{16t^3}\right) \right], \quad (3)$$

$$\omega_z^I = \omega_0 t^{-3} \exp\left[-\frac{9r^2}{16t^3}\right].$$

Розв’язок (3) є частинним для рівняння турбулентної дифузії вихору, яке в автомобільних змінних ($\eta = t^{-1.5}r$, $\omega_z = t^a\Omega$) має такий вигляд [3]:

$$\frac{d^2\Omega}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{3}{2}\eta\right) \frac{d\Omega}{d\eta} + \frac{3(n+1)}{2}\Omega = 0. \quad (4)$$

Загальний розв’язок (4) запишеться так:

$$\Omega = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \eta^{k-1},$$

де

$$A_{k+2} = -\frac{3(k+n)}{2(k+1)^2} A_k, \quad k = 1, 3, \dots \quad (5)$$

Індекс “I” у виразах (2), (3) вказує на відповідність розв’язків першому ($n = 1$) ненульовому моменту завихреності [3].

Наведені моделі вихору (1)–(3) мають, однак, один важливий недолік. Розподіл швидкості в них не є компактним, а кінетична енергія в нескінченній області є нескінченною, що фізично неможливо. Альтернативою моделям (1)–(3) можуть слугувати компактні вихори. Так, у статті [3] отримано автомобільний розв’язок задачі турбулентної дифузії вихору у вигляді

$$V_{\theta}^{III} = \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{3\eta^2}{4}\right), \quad (6)$$

$$\Omega^{III} = \left(1 - \frac{3\eta^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{3\eta^2}{4}\right).$$

Індекс “III” означає відповідність третьому ($n = 3$) моменту завихреності.

Ще раніше було знайдено компактний автомобільний розв’язок задачі молекулярної дифузії вихору [7]:

$$V_{\theta}^{III} = \frac{r}{2} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad \omega_z^{III} = \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (7)$$

Фізично вихори з розподілом характеристик у вигляді (7) утворюються за допомогою розмішування [7]. У них ядро завихреності одного знака змінюється на периферійне кільце завихреності протилежного знака, що узгоджується з даними натурних спостережень [4–6].

Виникає закономірне питання: який розв’язок нев’язкого стаціонарного вихору буде відповідати (4), (5). Відповідь, як не дивно, проста. Для цього перелічимо властивості, які повинен мати шуканий вихор:

- 1) вихор нев’язкий;
- 2) вихор складається з двох областей завихреності різного знака;
- 3) область обертання рідини в такому вихорі має скінченні розміри, отже, виконується умова

$$V_{\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r \geq R \quad (8)$$

де R – горизонтальний розмір вихору;

- 4) вихор є компенсованим, тобто виконується така рівність:

$$\int_V \omega_z dV = 0. \quad (9)$$

Циліндрична область ненульової завихреності генерує обертання у вигляді вихору Ренкіна. Дійсно, це аналогічно тому, як тверде тіло у вигляді циліндра, обертаючись, приводить до руху навколишню рідину. Ядро вихору Ренкіна, в якому азимутальна швидкість має абсолютно

подібний (лінійний) розподіл, що і в твердому тілі, також приводить до обертання зовнішню (потенційну) область. Аналог вихору Ренкіна, реально існуючий у природі, – вихор Лемба–Озеена, – пов’язують із стоком та джерелом (sink vortex) [7]. Але в природі існує ще і другий тип вихорів ($n = 3$), так звані вихори розмішування (stirring vortex). Такі вихори вже не пов’язані з джерелом чи стоком [7]. Природа має досить прикладів таких вихорів, де поле швидкості різко обривається. Чого варті торнадо – урагани: пошкоджуючи об’єкти на своєму шляху, вони не завдають ніяких пошкоджень поряд стоячим. Таким чином, у природі існують компактні вихори, в яких поле швидкості різко обривається на нульовому значенні. І це також відноситься до вихорів в океанах, морях, водоймищах, а також в експериментальних установках. Наприклад, при вивченні “дорожки Кармана” в течії поза циліндром з успіхом використовується модель компактного вихору (7) [8].

Аналітичні викладки приводять до таких тверджень. Якщо виконати умову (9) із врахуванням (1), то отримуємо вихор з кусково-сталою завихреністю. Назвемо його компактным компенсованим вихором. Математично він задається у вигляді

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ V_0 a \left[\frac{1}{r} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right) \right], & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (10)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (11)$$

На рис. 1, a , b зображено розподіли азимутальної компоненти швидкості та завихреності, які записані виразами (10), (11). Для простоти було взято значення швидкості $V_0 = 1$ та значення $a = 1$ і $R = 3$. Дійсно, підставляючи роз-

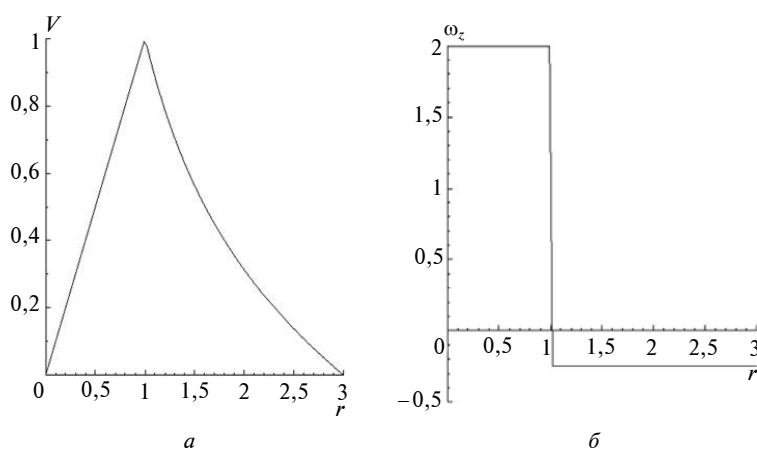


Рис. 1. Приклад компактного компенсованого вихору: a – азимутальна складова швидкості; b – вертикальна компонента завихреності

поділ для ω_z у формулу

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \int_0^r r \omega_z dr,$$

отримуємо

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{2V_0}{a} \int_0^r r dr = -\frac{V_0 r}{a}, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{2V_0}{a} \int_0^a r dr = \frac{V_0 a}{r}, \quad r > a,$$

(вихор Ренкіна) та

$$V_{\theta} = \frac{V_0 a}{r} - \frac{1}{r} \frac{2V_0 a}{R^2 - a^2} \int_a^R r dr =$$

$$= \frac{V_0 a}{r} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right), \quad a \leq r \leq R, \quad V_{\theta} = 0, \quad r \geq R$$

(формула (10)).

Розв’язок (10) задовольняє рівність (9) для довільних розмірів a і R , $a < R$. Таким чином, компактний вихор, що задається (10), завжди є компенсованим. Саме компенсованість забезпечує його компактність. Можливо, існують і інші розподіли швидкості та завихреності, що задовольняють (9), але (10) – найпростіші з них. Простіші за сталі функції завихреності не існують. Вірогідність (10) також підтверджується тим, що другий доданок у формулі для швидкості, який генерується зовнішньою областю завихреності, повністю збігається з розв’язком задачі про рух рідини між двома циліндрами у випадку обертання внутрішнього циліндра. Мається на увазі такий вираз:

Таблиця. Найпростіші одновимірні моделі вихрів

Тип вихору	Нев'язкий розв'язок	Молекулярна дифузія вихору	Турбулентна дифузія вихору
$N = 1$	Вихор Ренкіна (1)	Вихор Лемба–Озеена (2) [7]	Розв'язок (3) [2]
$N = 3$	Компактний компенсований вихор (10)	Ізольований гауссіан (7) [7]	Розв'язок (6) [3]

$$V_0 = \frac{\omega^2 a(b^2 - r^2)}{r(b^2 - a^2)}. \quad (12)$$

У формулі (12) a, b — відповідно радіуси внутрішнього (нерухомого) і зовнішнього циліндрів, ω — кутова швидкість обертання внутрішнього циліндра. Після всього сказаного, логічно навести таблицю вихрових течій.

Компактні вихори з трьома та більше областями завихреності одного знака

У вступі було зазначено, що вихори можуть мати більш ніж дві області сталої завихреності. Було проведено подальші дослідження класу автомодельних розв'язків задачі турбулентної дифузії вихору. Коротко наведемо основні результати. Розподіл поля азимутальної швидкості є компактним при будь-якому значенні $n > 1$ у рівнянні (4). У той же час функції завихреності компактні при будь-якому $n > 0$. Сказаному відповідає рис. 2, а, б.

При збільшенні параметра n спостерігається таке. При $n = 4$ отримуються розподіли, наведені на рис. 3. Звернемо увагу на те, що ядро вихору (внутрішня область завихреності одного знака) відповідає безрозмірній координаті $r = 1$, а областей завихреності одного знака — вже три, хоча і третя область дуже слабо виражена. У той же час, азимутальна швидкість поводить себе вже інакше, ніж при $n \leq 3$. З'являється периферійна область протитечії

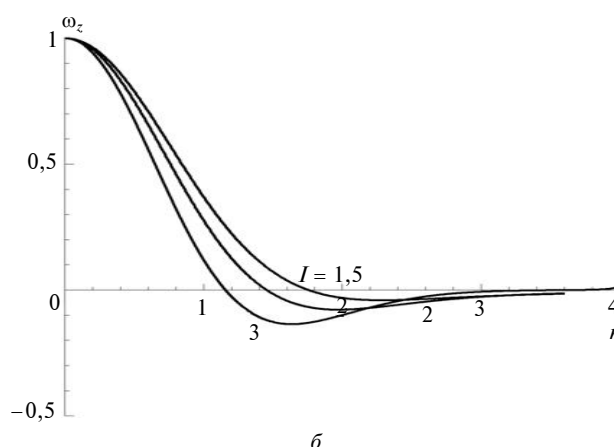
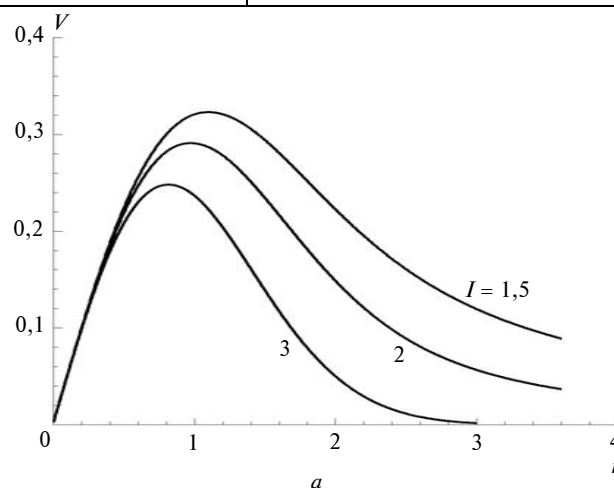
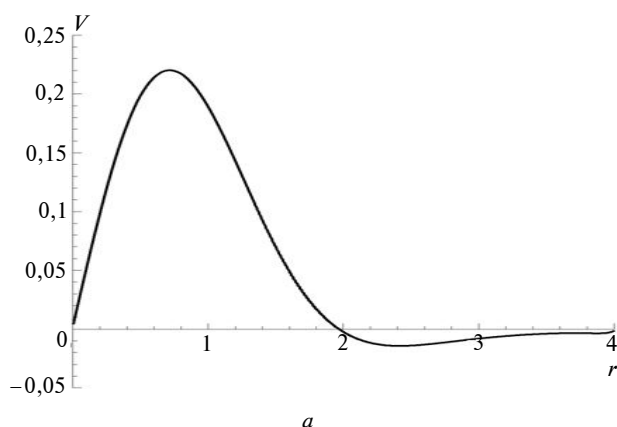


Рис. 2. Автомодельні компактні розв'язки, що відповідають моментам завихреності I , які дорівнюють 1,5, 2 і 3: а — азимутальна компонента швидкості; б — вертикальна компонента завихреності

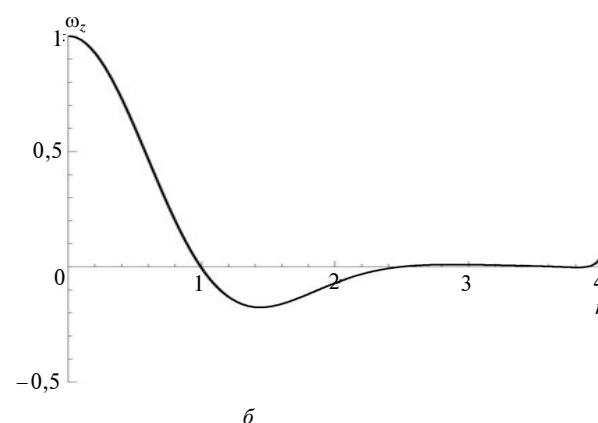


Рис. 3. Розподіли азимутальної компоненти швидкості (а) та вертикальної компоненти завихреності (б) при $n = 4$

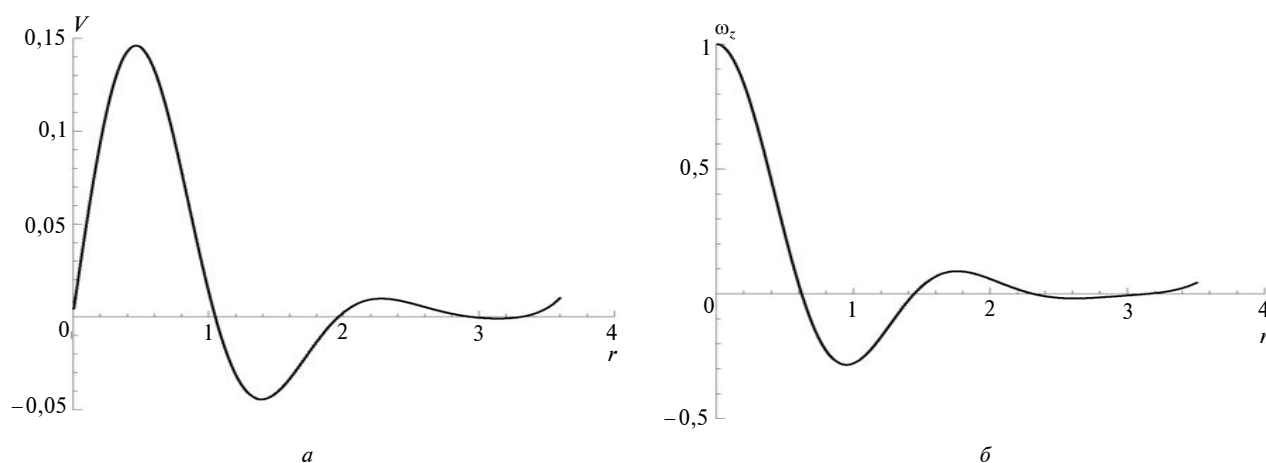


Рис. 4. Приклад автомодельного розв'язку, що відповідає 10-му моменту завихреності: *a* — азимутальна компонента швидкості; *б* — вертикальна компонента завихреності

($V_\theta < 0$ на рис. 3, *a*). Цей розв'язок фізично відповідає компактному вихору, оточеному кільцевою областю протитечії. Розподіл вихору з трьома областями завихреності спостерігається в чисельних експериментах і є складовою частиною більш загальних тривимірних задач.

Якісно новий результат для поля завихреності отримується при $n > 4$ (рис. 4). Тепер вже вихор складається з чотирьох областей завихреності одного знака: двох додатних та двох від'ємних, а також вже трьох областей швидкості.

Крім сказаного вище, на захист існування автомодельних розв'язків для великих моментів завихреності (n) можна назвати статтю [9], де йдеться про отримання в лабораторних експериментах так званих квадратних вихорів, що відповідають 7-му моменту.

Висновки

У статті показано, що разом із найпростішою моделлю невязкого вихору з областю завихреності скінченного розміру (вихор Ренкі-

на) існує модель компактного вихору, в якого не тільки область завихреності, але і область швидкості має скінченні розміри. Цей вихор є найпростішим невязким наближенням відомого компактного вихору — ізольованого гауссіана. Кінетична енергія такого вихору є скінченною, що узгоджується із законом збереження енергії: не можна утворити будь-який рух із нескінченною енергією.

Компактність вихору зумовлена компенсуванням в ньому поля завихреності, і це відповідає існуючим у природі течіям.

З посиланням на експериментальні дані зазначено про можливість існування автомодельних розв'язків задачі дифузії вихору, що відповідають високим номерам моментів завихреності.

Перспективою подальших досліджень є знаходження аналогів автомодельних розв'язків, що відповідають високим моментам завихреності та узгоджуються з експериментальними даними.

Результати роботи можуть бути використані в різноманітних галузях фізики, зокрема в гідромеханіці, фізиці атмосфери та океану.

П.В. Лукьянов

ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ВИХРЕЙ

В работе представлена невязкая модель компактного вихря. Этот вихрь состоит из двух областей завихренности разных знаков и является компенсированным: суммарная завихренность в нем равна нулю. Компенсированность вихря обу-

P.V. Lukianov

ONE-DIMENSIONAL MODELS OF COMPACT VORTICES

The paper presents a non-viscous model of the compact vortex which consists of two domains that have different signs of vorticity. This vortex is compensated: the overall vorticity equals zero in it. The

славливает компактность поля скорости. Анализируются также автомодельные решения задачи турбулентной диффузии вихря, которые соответствуют высоким моментам завихренности.

vortex compensation causes compactness of the velocity field. The study further analyzes self-similar solutions of the vortex turbulent diffusion problem that corresponds to high vorticity moments.

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 256 с.
2. Лукьянов П.В. Об автомодельно-аналитических решениях задач молекулярной и турбулентной диффузии вихря // Прикл. гідромеханіка. — 2008. — **10** (82), № 4. — С. 52–57.
3. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Там же. — 2006. — **8** (80), № 3. — С. 63–77.
4. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Изв. РАН, ФАО. — 1992. — **28**, № 6. — С. 615–624.
5. Newton J.L., Aagaard K., Coachman L.K. Baroclinic eddies in the Arctic Ocean // Deep-Sea Res. — 1974. — **21**, N 9. — P. 707–720.
6. Joyce T.M., Kennelly M.A. Upper-ocean velocity structure of Gulf-Stream warm-core ring 82B // J. Geophys. Res. — 1985. — **90**, N C5. — P. 8839–8844.
7. Hopfinger E.J., Heijst G.J.F. Vortices in rotating fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1993. — **25**. — P. 241–289.
8. Горшков К.А., Соустова И.А., Сергеев Д.А. Об устойчивости вихревых дорожек в стратифицированной жидкости // Изв. РАН, ФАО. — 2007. — **43**, № 6. — С. 851–860.
9. Carnevale G.F., Kloosterziel R.C. Emergence and evolution of triangular vortices // J. Fluid Mech. — 1994. — **259**. — P. 305–331.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
18 травня 2010 року