МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ВСТУП ДО ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
за освітньою програмою «Інформаційні управляючі системи та технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Дослідження операцій: Вступ до дискретного програмування: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. Г. Жданова, В. Д. Попенко, М. О. Сперкач. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,47 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 47 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 31.01.2020 р.) за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки (протокол № 5 від 23.12.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ВСТУП ДО ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ
ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Жданова Олена Григорівна, канд. техн. наук, доц.*
Попенко Володимир Дмитрович, канд. техн. наук
Сперкач Майя Олегівна, канд. техн. наук

Відповідальний редактор *Писаренко А. В.,* канд. техн. наук, доцент

Рецензент *Клименко І. А.,* д.т.н., доцент, професор кафедри обчислювальної техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського

В навчальному посібнику викладено вступ до дискретного програмування. Наведена класифікація задач дискретного програмування - поширеного на практиці класу задач математичного програмування. Розглянуті умови реальних ситуацій, що приводять до дискретних моделей. Наведені математичні моделі багатьох поширених на практиці проблемних ситуацій, що приводять до оптимізаційних дискретних моделей. Практикум містить завдання для модульної контрольної роботи та самостійної роботи, які розбиті на категорії з огляду на їх складність.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності «Інформаційні системи та технології» та для тих, хто вивчає навчальну дисципліну «Дослідження операцій».

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою дослідження операцій є визначення найкращого (оптимального) способу дій при вирішенні задач організаційного управління в умовах наявності обмежень, які мають техніко-економічний характер. Використання терміну «дослідження операцій» завжди має на увазі використання математичних методів для моделювання систем та аналізу їх характеристик. Математичні моделі та методи займають центральне місце в дослідженні операцій.

Робота, що виконується в процесі операційного дослідження, складається з наступних етапів: ідентифікація проблеми; побудова моделі; вибір математичного методу; розв'язання поставленої задачі; перевірка адекватності моделі; реалізація результатів на практиці.

Ідентифікація проблеми. На цьому етапі змістовно формуються задача і цілі дослідження, визначаються властиві досліджуваній системі вимоги, умови і обмеження.

Побудова моделі. Тут з урахуванням особливостей постановки задачі будується (або обирається) модель, найбільш відповідна для адекватного опису досліджуваної системи. При побудові моделі повинні бути встановлені вирази цільової функції і обмежень у вигляді функцій від керованих параметрів.

Вибір математичного методу. У дослідженні операцій немає загального методу рішення усіх математичних моделей, які зустрічаються на практиці. Тобто, який метод буде обраний, визначається типом і складністю досліджуваної математичної моделі. Якщо розроблена модель належить відомому класу моделей дослідження операцій, то користуються відповідними математичними методами. Деякі математичні моделі можуть бути такими складними, що їх неможливо вирішити ніякими доступними точними методами оптимізації. В цьому випадку використовують наближені або евристичні методи.

Розв'язання поставленої задачі. Практично усі методи дослідження операцій не дозволяють отримати розв'язок в замкнутій формі. Навпаки, вони породжують ітераційні обчислювальні алгоритми. Це означає, що задача вирішується послідовно, коли на кожному кроці (ітерації) отримують розв'язки, що поступово сходяться до оптимального. Ітераційна природа алгоритмів зазвичай приводить до об'ємних однотипних обчислень. Саме тому ці алгоритми розробляються для реалізації за допомогою комп'ютерів.

Перевірка адекватності моделі. Модель можна вважати адекватною, якщо вона здатна достатньо надійно передбачати поведінку системи. Загальний метод перевірки адекватності системи полягає в зіставленні результатів, що будуть отримані, з характеристиками системи, які за тих же початкових умов мали місце у минулому.

Дослідження операцій як засіб вирішення задач організаційного , є одночасно і наукою і мистецтвом. Науковість підходу до формування управлінських рішень слідує з того, що при вирішенні проблем, що виникають, використовуються математичні моделі та методи. Дослідження операцій можна розглядати і як мистецтво, оскільки успішне виконання усіх етапів дослідження від його початку до реалізації рішення, отриманого за допомогою розробленої математичної моделі багато в чому визначається творчими здібностям та інтуїцією дослідника. Особливо це стосується перших двох етапів дослідження операцій – ідентифікація проблеми та побудова моделі.

Важливою для практики частиною дослідження операцій є такий його підрозділ, як дискретне програмування. Основна задача дискретного програмування – вибір найкращого варіанта з кінцевого, за часту, дуже великого їх числа. Екстремальні задачі, що виникають в економіці, плануванні, техніці та інших областях, мають ряд особливостей, які не зустрічаються в таких стандартних задачах як лінійні та опуклі задачі. Дискретність дозволяє врахувати такі фактори, як неділимість об'єктів, дискретність процесів, наявність альтернатив, фіксовані доплати і багато іншого.

Цей практикум присвячений питанням побудови дискретних економіко-математичним моделям проблемних ситуацій, опису можливих підходів та прийомів, шо використовуються при цьому.

1 КЛАССИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Визначення. Ізольована точка – це точка $x \in X \subset R^n$, яка має множину, в яку не входять ніякі інші точки множини X .

Визначення. Дискретна множина – множина, яка складається з ізольованих точок.

Дискретна множина або скінченна або злічення.

Визначення. Загальна задача дискретної оптимізації – задача знаходження точок максимумів чи мінімумів функції, визначеної на дискретній множині.

Вимога дискретності змінних в явному вигляді або в прихованій формі притаманна багатьом класам задач.

Розглянемо задачу математичного програмування:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Дана задача є **загальною задачею дискретного програмування**, якщо множина X є дискретною чи такою, що частина змінних набуває значення, яке належить дискретній множині.

Якщо $X \subset Z^n$ (Z^n – множина всіх n-вимірних векторів з цілочисловими компонентами), то дана задача є **задачею цілочислового програмування**.

Нехай $X \subset Z^{n_1} \times R^{n_2}, n_1 + n_2 = n.$ Тоді дана задача називається **частково-цілочисловою (змішаною)** задачею.

У тому випадку, якщо $X \subset B^n$ (B^n – множина всіх n – вимірних векторів з компонентами, які приймають тільки два значення 0 і 1), то задача називається **задачею булевого програмування.**

Існує множина класів практичних задач, які на перший погляд не мають нічого спільного чи зовсім слабо пов’язані з оптимізацією дискретної моделі, але які тим не менш, можна сформулювати як задачі дискретного програмування (ДП). Дійсно, вимога дискретності змінних, якщо в неявному вигляді, то в прихованій формі, притаманне багатьом практично важливим класам задач, які забезпечують широку сферу застосування ДП в багатьох теоретичних и прикладних дисциплінах.

Сфери застосування дискретного програмування:

- складання послідовності виробничих процесів;
- календарне планування роботи підприємства;
- планування і забезпечення матеріально-технічного забезпечення;
- розміщення підприємств;
- геологорозвідка;
- складання кошторису капіталовкладень;
- планування використання обладнання.

Найбільш вивченим класом задач дискретної оптимізації є **задачі цілочислового лінійного програмування (ЗЦЛП).**

2 УМОВИ, ЩО ПРИЗВОДЯТЬ ДО ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ПЛАНУВАННЯ

2.1 Задачі з неподільністю

З фізичних умов багатьох практичних задач випливає вимога цілочисельності, тобто дробове значення змінних може не мати сенсу (тобто виявитися нереалізованим).

2.1.1 Класичні дискретні задачі

Задача про рюкзак

Мандрівник, збираючись в похід, хоче укласти в свій рюкзак деяку кількість предметів: 1, 2, ... , n. Відома вага p_j і об'єм v_j кожного предмета j. Загальна вага рюкзака не повинна перевищувати величину P, а об'єм не повинен перевищувати величину V. Мандрівник, спираючись на суб'єктивні оцінки корисності предметів, кожному предмету j приписує коефіцієнт корисності (цінності) c_j. Які предмети потрібно вибрати мандрівнику, щоб сумарна цінність рюкзака була максимальною ?

Позначимо через $x_1, x_2, ..., x_n$ кількість взятих предметів. Тоді математична модель задачі така (ЗЦЛП):

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le P;$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le V;$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$x_j - \text{ціле}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Найбільш поширені окремі випадки даної задачі, коли $x_j = 0$ або $x_j = 1$ і (або) присутнім є лише одне із функціональних обмежень.

Задача про призначення

Нехай є n робочих $R_i, i=\overline{1,n}$ і n робочих місць $W_j, j=\overline{1,n}$. Для кожного призначення (R_i, W_j) відома вартість виконання відповідного виду робіт $c_{ij} \geq 0,\ i,j=\overline{1,n}$ (деякі вартості можуть бути нескінченно великими, якщо відповідне призначення неможливо). Потрібно так розподілити *n* робочих по *n* робочих місць, щоб кожен робітник був завантажений одним видом робіт, кожна робота виконувалась тільки одним робочим, а сумарні витрати на виконання всіх видів робіт були мінімальними.

Математична модель задачі:

Змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо робота } R_i \text{ призначена на робоче місце } W_j, \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases} \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}.$$

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=\overline{1,n};$$

$$x_{ij} = 1 \quad \text{або} \quad 0.$$

Приклад 2.1

Компанія, що розробляє програмне забезпечення, має чотири підрозділи, які розташовані в Житомирі, Рівному, Києві та Мюнхені. Перед головним офісом компанії стоїть завдання розподілити чотири сегменти деякого проекту між зазначеними підрозділами. Кожен підрозділ може виконувати тільки один сегмент, а кожен сегмент може виконуватися тільки одним підрозділом. Час виконання підрозділами відповідних робіт представлені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Час виконання підрозділами робіт

Сегмент j	**Час виконання** c_{ij} **(тижнів) підрозділом** i			
	Житомир	Рівне	Київ	Мюнхен
1	5	3	2	3
2	6	3	4	3
3	4	7	5	7
4	8	6	5	4

Розподілити роботу між підрозділами таким чином, щоб сумарний час виконання робіт був мінімальним.

Математична модель

Змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \; i-й \; сегмент, який \; виконується \; j-м \; підрозділом \\ 0, \; в \; іншому \; випадку \end{cases} \quad i = \overline{1,4}, \; j = \overline{1,4}.$$

Цільова функція:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Обмеження:

1) кожний сегмент може виконуватися тільки одним підрозділом:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,4};$$

2) кожен підрозділ може виконувати тільки один сегмент:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,4};$$

Остаточна математична модель

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,4};$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,4};$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i = \overline{1,4}, \; j = \overline{1,4}.$$

2.2.1 Задача про експертів

Нехай є n тематичних напрямів ($j=\overline{1,n}$), за якими необхідно дати кваліфіковані заключення. Для цього можна запросити експертів $i=1,\dots,m$ Відомо, за якими питаннями i–й експерт може дати одночасно кваліфіковане заключення, а також оплата його послуг c_i. Необхідно знайти такий набір експертів, при якому за кожним направленням буде дано заключення і при цьому витрати на послуги будуть мінімальними.

Математична модель

Змінні:

$$x_i=\begin{cases}1, \text{якщо запрошуємо } i-\text{го експерта};\\ 0, \text{якщо не запрошуємо } i-\text{го експерта}.\end{cases} \quad i=1,\dots,m.$$

Цільова функція:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot x_i \to \min$$

Обмеження:

1) за кожним напрямом повинен бути запрошений хоча б один експерт

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1,\ j=1..n.$$

Остаточна математична модель

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot x_i \to \min;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1,\ j=1..n;$$
$$\forall x_i \in B.$$

2.2 Задачі з логічними умовами

У багатьох практичних задачах є умови типу "так - ні", "або - або", "прийняти - відкинути", "все або нічого" і т.п. У математичних моделях таких ситуацій звичайно використовуються булеві змінні.

2.3 Задачі з дихотомією

Дихотомія (від грецького $\delta\iota\chi o\tau o\mu\iota\alpha$) - поділ на дві частини.

У деяких задачах допустиме рішення повинно відповідати одній із двох альтернативних умов:

$$f(x) \to \max\ ; \tag{2.1}$$

$$G(x) \leq 0\ ; \tag{2.2}$$

$$g_1(x) \leq 0 \quad \textit{або} \quad g_2(x) \leq 0. \tag{2.3}$$

Зведемо задачу до задачі дискретної оптимізації. Для цього введемо допоміжну змінну y:

$$y = \begin{cases} 0, \textit{ якщо вірна перша умова із } (2.3), \\ 1, \textit{ якщо вірна друга умова із } (2.3). \end{cases} \tag{2.4}$$

Нехай *M* досить велика (представляє собою верхню межу значень функцій $g_i(x)$, i=1,2 на всій допустимій множині рішень), тоді обмеження виду "або-або" еквівалентно наступній системі нерівностей:

$$g_1(x) \leq My;$$

$$g_2(x) \leq M(1-y); \tag{2.5}$$

$$y = 0 \quad \text{або} \quad 1.$$

Права частина однієї з нерівностей буде дорівнювати *M* і таким чином відповідне нерівність буде надлишковою. Задача (2.1) – (2.3) запишеться наступним чином (умова (2.4) не входить в модель, але неявно в ній є присутньою):

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max; \\ & G(x) \leq 0; \\ & g_1(x) \leq My; \\ & g_2(x) \leq M(1-y); \\ & y = 0 \quad \text{або} \quad 1. \end{aligned}$$

2.4 Задача з обмеженнями на розміри партій (окремий випадок задач з дихотомією)

При розробці деяких виробничих планів деякий виріб j або не повинен випускатися, або його випуск повинен бути не менше мінімально можливого розміру партії. Тобто на значення змінної x_j накладаються обмеження виду:

$$x_j = 0 \text{ або } x_j \geq l_j .$$

Подібна умова є прикладом умови "або-або" і його можна формально ввести в модель, використовуючи булеві змінні. Введемо допоміжні змінні y_j, $j = \overline{1,n}$:

$$y_j = \begin{cases} 0, \textit{ якщо виріб не випускається,} \\ 1, \textit{ якщо виріб випускається.} \end{cases}$$

Якщо M досить велика величина (представляє собою верхню межу всіх значень x_j), то обмеження виду "або-або" еквівалентно наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} x_j \leq My_j, \\ x_j \geq l_j y_j, \\ y_j \in B, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Приклад 2.4

Торгова компанія має можливість закуповувати за оптовими цінами крупу чотирьох видів з метою подальшого перепродажу. По кожному виду крупи відомий мінімальний розмір закупівельної партії (якщо приймається рішення закуповувати крупу певного виду, то обсяг закупівлі повинен бути не менше відповідного мінімального розміру закупівельної партії). Для придбання круп всіх видів компанія має в своєму розпорядженні 35000 грн. У табл. 2.2 представлені оптові закупівельні ціни, питомі величини прибутку від реалізації і мінімальні розміри закупівельних партій.

Визначити, яку крупу і в яких обсягах слід закупити, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Таблиця 2.2

Оптові закупівельні ціни

Крупа, j	**Оптова закупівельна ціна** c_j**, грн/кг**	**Прибуток від реалізації в роздріб** p_j**, грн/кг**	**Мінімальний розмір партії** N_j**, кг**
Гречана	12.35	7.84	12000
Манна	12.5	5.35	100
Перлова	11.4	7.44	10000
Пшенична	11.8	6.61	800

Математична модель

Змінні:

x_j – об'єм закупівлі j-й крупи, $j = \overline{1,4}$.

Цільова функція:

$$z = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j \to \max .$$

Обмеження:

1) обсяг закупівлі може бути $x_j = 0$ або $x_j \ge N_j$, $j = \overline{1,4}$. Введемо булеві змінні:

$$y_j = \begin{cases} 1, \textit{якщо } x_j \ge N_j; \\ 0, \textit{якщо } x_j = 0. \end{cases}$$

Отримаємо такі обмеження:

$$\begin{cases} x_j \le M y_j; \\ x_j \ge N_j y_j; \\ y_j \in B. \end{cases}$$

2) обмеження по початковому капіталу:

$$\sum_{j=1}^{4} c_j x_j \le 35000 .$$

Остаточна математична модель

$$z = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{4} c_j x_j \le 35000;$$

$$x_j \le M y_j,\ j = \overline{1,4};$$

$$x_j \ge N_j y_j,\ j = \overline{1,4};$$

$$\forall x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4};$$

$$y_j \in B,\ j = \overline{1,4}.$$

2.5 Задачі з багатократними альтернативами

У них допустиме рішення має задовольняти принаймні *k* з *m* обмежень, при цьому заздалегідь невідомо, які саме обмеження повинні виконуватися:

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Введемо *m* булевих змінних: y_i

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i^{oe} \text{ обмеження виконується} \\ 0, \text{ якщо } i^{oe} \text{ обмеження виконується} \end{cases}.$$

Якщо *M* досить велике значення, то виконання принаймні *k* з *m* розглянутих обмежень забезпечується дотриманням наступних умов:

$$g_i(x) \le M(1 - y_i),\ i = \overline{1,m}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \ge k$$

$$y_j = 0 \text{ або } 1,\quad j = \overline{1,n}.$$

Праві частини $m - k - 1$ нерівностей дорівнюватимуть *M* і таким чином ці обмеження стануть надлишковими.

Приклад 2.5

Підприємство займається випуском двох видів продукції, на виробництво яких використовується два види сировини: *А* та *Б*. Кожен вид сировини може бути закуплений у одного з двох постачальників: *П1* і *П2*. Якість сировини різних постачальників відрізняється. У табл. 2.3 представлені характеристики сировини.

Визначити, в яких обсягах слід випускати продукцію, щоб максимізувати сумарний дохід.

Таблиця 2.3

Характеристики сировини

	Кількість од. сировини, що використовується на виробництво од. продукції				**Дохід від реалізації однієї од. продукції**
	Сировина постачальника *П1*		**Сировина постачальника *П2***		
	А	Б	А	Б	
Продукція 1	3	5	4	7	25
Продукція 2	4	6	3	6	30
Максимальний обсяг сировини	500	600	550	650	–

Математична модель

Змінні:

x_j – обсяг випуску продукції $j^{ого}$ виду, $j = \overline{1,2}$.

Цільова функція:

$$z = 25x_1 + 30x_2 \to \max.$$

Обмеження:

1) на закупівлю сировини *А*:

$3x_1 + 4x_2 \le 500$ (закупівля у постачальника *П*1) або $4x_1 + 3x_2 \le 550$ (закупівля у постачальника *П2*).

2) на закупівлю сировини *Б*:

$5x_1 + 6x_2 \le 600$ (закупівля у постачальника *П1*) або $7x_1 + 6x_2 \le 650$ (закупівля у постачальника *П2*).

Введемо булеві змінні:

$$y_A = \begin{cases} 1, \text{ якщо сировина } A \text{ купується у } П1; \\ 1, \text{ якщо сировина } A \text{ купується у } П1; \end{cases}$$

$$y_A = \begin{cases} 1, \text{ якщо сировина } Б \text{ купується у } П1; \\ 1, \text{ якщо сировина } Б \text{ купується у } П1. \end{cases}$$

Остаточна математична модель

$$z = 25x_1 + 30x_2 \to \max;$$

$$3x_1 + 4x_2 - 500 \le My_A;$$

$$4x_1 + 3x_2 - 550 \le M(1 - y_А);$$
$$5x_1 + 6x_2 - 600 \le My_Б;$$
$$7x_1 + 6x_2 - 650 \le M(1 - y_Б);$$
$$x_1, x_2 \ge 0 .$$

2.6 Задачі з постійними елементами витрат

Цілочислове програмування відкриває можливості приведення "некоректних" задач до стандартного вигляду задач математичного програмування. Використання спеціальних прийомів дозволяє отримати рішення в ряді випадків, коли вирішити задачу за допомогою прямих методів вкрай важко.

Нехай планується виробництво n видів промислової продукції. Витрати на виробництво продукції виду j складаються з постійних витрат в обсязі K_j, що не залежить від кількості виробленої продукції, і поточних витрат c_j на виробництво одиниці продукції.

На практиці це має місце в наступних випадках:

- отримання ліцензії;
- закупівля нового обладнання;
- налагодження або переналагодження обладнання;
- перенавчання персоналу.

Таким чином, якщо x_j – обсяг випуску продукції j, то функція витрат має вигляд (рис.2.4),

$$C_j(x_j) = \begin{cases} K_j + c_j x_j, \; x_j > 0, \\ 0, \qquad\qquad x_j = 0. \end{cases}$$

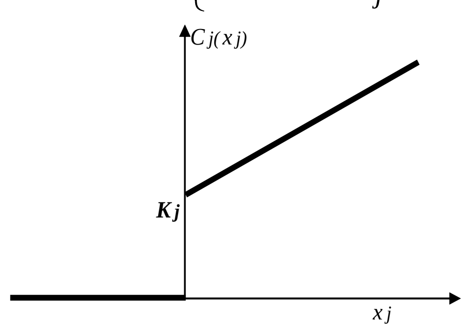


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація функції витрат

Тоді цільова функція має вигляд: $z = \sum_{j=1}^{n} C_j(x_j)$.

Нехай на вектор x накладені наступні обмеження: $Ax=B,\ x\geq 0$.

Розглянутий критерій не є лінійним по x_j внаслідок розриву на початку координат. Введемо додаткові булеві змінні, які дозволять перетворити задачу до лінійного вигляду. Нехай

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ , якщо } & x_j > 0 \\ 0 \text{ , якщо } & x_j = 0 \end{cases}. \tag{2.6}$$

Тепер введемо ці обмеження в неявному вигляді в математичну модель.

З урахуванням (2.6) справедлива наступна нерівність:

$$x_j \leq M y_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{2.7}$$

де M – досить велике, щоб умова $x_j \leq M$ виконувалася для всіх допустимих обсягів випуску продукції.

Тепер вихідну задачу (частково- цілочислова задача з булевими змінними) можна сформулювати наступним чином:

$$\begin{aligned} & z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + K_j y_j); \\ & Ax = B; \\ & 0 \leq x_j \leq M y_j, \quad j = \overline{1,n}; \\ & y_j = 0 \ \textit{або}\ 1 \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Розглянемо докладніше обмеження $x_j \leq My_j$.

З урахуванням того задача на мінімум, то неможливо одночасне виконання двох наступних умов: $x_j<0$ і $y_j=1$.

З (2.7) випливає, що якщо $x_j>0$ то $y_j=1$ і K_j включається в ЦФ. Якщо $x_j = 0$, то $y_j = 1$ або $y_j = 0$ ($x_j \leq My_j$ виконується в будь-якому випадку), але оскільки $K_j > 0$ і z потрібно мінімізувати, то , звичайно, y_j має бути і буде дорівнювати нулю.

Відзначимо, що вихідна задача не має ніякого відношення до цілочислового програмування. Проте, "перетворена" задача являє собою частково-цілочислову задачу с булевими змінними.

Приклад 2.6

Велика закордонна фірма вирішує питання про відкриття в Україні трьох заводів косметичної продукції. На кожному з цих заводів передбачається використовувати сировину *A*, річна квота ввезення в Україну якого становить 1000 т. У табл. 2.5 представлені початкові витрати, пов’язані з придбанням обладнання для нових заводів і ліцензуванням їх діяльності, потужність заводів, величини витрат сировини і передбачуваного прибутку.

Таблиця 2.5

Початкові витрати, пов’язані з придбанням обладнання

Завод, j	**Початкові витрати** P_j**, од. вартості**	**Максимальна потужність** N_j **заводу, т**	**Споживання** a_j **сировини** A **на 1 тонну продукції, т/т**	**Передбачуваний прибуток** c_j**, од. вартості/т**
1	700000	450	0.50	80
2	1200000	400	0.55	100
3	900000	300	0.60	90

Визначити, в яких обсягах слід випускати продукцію, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Математична модель

Змінні:

x_j – обсяг випуску продукції на $j^{ом}$ заводі, $j = \overline{1,3}$.

Цільова функція:

$$c_j(x_j) = \begin{cases} -P_j + c_j x_j, \text{ якщо } x_j > 0, \\ 0, \text{ якщо } x_j = 0. \end{cases} \quad j = \overline{1,3}.$$

Обмеження:

1) по обсягу сировини:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j \leq 10,$$

2) по потужності:

$$x_j \le N_j, \; j = \overline{1,3}$$

Остаточна математична модель

$$\sum_{j=1}^{3} (b_j y_j + c_j x_j) \to \min;$$

$$x_j \le M_j y_j, \; j = \overline{1,3};$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le 100;$$

$$x_j \le N_j, \; j = \overline{1,3};$$

$$y_j \in B, \; j = \overline{1,3};$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,3}$$

2.7 Мінімаксні и максимінні задачі

2.7.1 Мінімізація максимуму

Нехай маємо таку задачу:

$$\max\{ f_1(x),\; f_2(x), \dots f_k(x)\} \to \min, \quad x \in X \tag{2.8}$$

У цій задачі цільова функція нелінійна та недиференційована. Для позбавлення цього рекомендується використовувати наступний підхід.

Введемо додаткову змінну: $y = \max\{ f_1(x), f_2(x), \dots f_k(x)\}$. Змінна y задовольняє такій системі рівнянь:

$$\begin{gathered} y \ge f_1(x), \\ y \ge f_2(x), \\ \dots. \\ y \ge f_k(x). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Для того, щоб змінна y точно прийняла максимальне із значень $f_i(x), i = \overline{1,k}$, необхідно вимагати, щоб вона, задовольняючи умовам (2.9), приймала мінімальне з можливих значень, тобто $y \to \min$.

Таким чином, задача (2.8) еквівалентна задачі

$$\begin{aligned}
&y \to \min\\
&y \ge f_1(x),\\
&y \ge f_2(x),\\
&....\\
&y \ge f_k(x),\\
&x \in X
\end{aligned}$$

У залежності від властивостей функції $f_1(x),...,f_k(x)$ та множини X змінна y може приймати дискретне або неперервне значення. Але такого роду цільова функція часто зустрічається в задачах, де X – дискретна множина.

2.4.2 Максимізація мінімуму

Розглянемо задачу:

$$\begin{gathered}
\min\{ f_1(x),\ f_2(x),... f_k(x)\} \to \max,\\
x \in X
\end{gathered} \qquad (2.10)$$

Введемо додаткову змінну: $y = \min\{ f_1(x), f_2(x),... f_k(x)\}$. Змінна y задовольняє такій системі рівнянь:

$$\begin{aligned}
&y \le f_1(x),\\
&y \le f_2(x),\\
&\quad ....\\
&y \le f_k(x).
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Отже, задача (2.10) може бути замінена задачею:

$$\begin{cases}
y \to \max\\
y \le f_1(x),\\
....\\
y \le f_k(x),\\
x \in X
\end{cases}$$

2.4.3 Задача про призначення за критерієм часу (задача про призначення на вузькі місця)

2.4.3.1 Змістовна постановка задачі

Дано n працівників і n робіт, які працівники повинні виконати. Відомі величини t_{ij} - час виконання працівником i роботи j ($i, j = \overline{1,n}$). Необхідно розподілити роботи між працівниками таким чином, щоб загальний (кінцевий) час виконання робіт був мінімальним. (При цьому кожен з працівників може виконувати тільки одну роботу, кожна робота виконується тільки одним працівником).

2.4.3.2 Математична модель задачі

Змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \; i - \text{й працівник виконує виконує } j - \text{у роботу} \\ 0, \; \text{інакше} \end{cases}.$$

Обмеження:

$$\sum_j x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}.$$

Цільова функція:

$$T = \max_{ij \,/\, x_{ij}=1} \{t_{ij}\} \to \min \qquad \text{або} \qquad T = \max_{ij} \{t_{ij} x_{ij}\} \to \min .$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

$$T_{\max} = \max_{ij} \{t_{ij} x_{ij}\} \to \min \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}; \tag{2.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}; \tag{2.14}$$

$$x_{ij} \in B, \; i, j = \overline{1,n}. \tag{2.15}$$

Позбавившись від мінімаксності в цільовій функції, замінимо задачу (2.12)-(2.15) на таку модель:

$$
\begin{aligned}
&T \to \min \\
&T \ge t_{11}x_{11}; \\
&.... \\
&T \ge t_{nn}x_{nn}; \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = \overline{1,n}; \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = \overline{1,n}; \\
&x_{ij} \in B, \; i, j = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

2.4.3.3 Завдання для самостійної роботи

Розглянемо таку задачу (яка відрізняється від задачі (2.12)-(2.15) цільовою функцією):

$$T_{\min} = \min_{ij / x_{ij}=1} \{t_{ij}\} \to \max; \tag{2.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = \overline{1,n}; \tag{2.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = \overline{1,n}; \tag{2.18}$$

$$x_{ij} \in B, \; i, j = \overline{1,n}. \tag{2.19}$$

У цьому випадку не можна перейти до цільової функції $T_{\min} = \min\{t_{ij}x_{ij}\} \to \max$, оскільки матриця $\{x_{ij}\}$ завжди містить $(n^2 - n)$ нульових елементів і $T_{\min}$ завжди буде дорівнювати нулю.

Самостійно, позбавитись від максимінності ЦФ задачі.

2.4.3.4 Приклад задачі, яка зводиться до задачі про призначення на вузькі місця

Змістовна постановка задачі

На зібранні директорів інвестиційної компанії приймається рішення щодо утворення нового пайового фонду акцій відкритого типу. Проаналізувавши ринок акцій було виділено n найбільш перспективних галузей для вкладу інвестицій. В кожній галузі було обрано найбільш ліквідні та прибуткові підприємства та розбито їх на m груп ризику (до кожної групи ризику відноситься по декілька підприємств з кожної галузі). Зазвичай підприємства, які відносяться до більш ризикованих груп, приносять більший дохід (є більша ймовірність все втратити). Підприємства ж, які відносяться до менш ризикованих груп, навпаки приносять менший дохід (і є менша ймовірність все втратити). Для забезпечення мінімального захисту від повних втрат, потрібно з кожної групи ризику та з кожної галузі вибрати хоча б одну групу підприємств, акції яких будуть включені до пайового фонду. Потрібно вибрати такі групи підприємств, при вкладі в акцій яких буде реалізований найбільший можливий прибуток по заданим вище умовам.

Математична постановка задачі

Сформулюємо математичну модель задачі вибору набору підприємств, акції яких будуть формувати пайовий інвестиційний фонд. Нехай:

n – кількість галузей виробництва, які були обрані експертами;

m – кількість груп ризику ($m \le n$);

y_{ij} – змінна, рівна 1, якщо група підприємств з i-ї галузі виробництва вибрана з j-ї групи ризику і рівна 0 в протилежному випадку;

s_{ij} – очікуваний процентний прибуток акцій з групи підприємств i-ї галузі та j-ї групи ризику ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$).

Задача полягає в знаходженні такого переліку підприємств, для якого величина мінімального очікуваного процентного прибутку була б максимально можливою. Отже, цільова функція моделі матиме такий вигляд:

$$\min_{ij}(s_{ij}y_{ij}) \to \max \quad . \tag{2.20}$$

Із врахування диверсифікації випливають наступні обмеження:

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1, \quad i=\overline{1,n} \quad ; \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \geq 1, \quad j=\overline{1,m} \quad ; \tag{2.22}$$

$$\forall y_{ij} \in \mathrm{B} \quad . \tag{2.23}$$

Задача (2.16)-(2.19) є задачею про призначення на вузькі місця.

2.4.4 Транспортна задача за критерієм часу

Відрізняється від класичної ТЗЛП цільовою функцією: необхідно перевезти всю продукцію від виробників до споживачів за мінімальний час, а обмеження задачі мають стандартний вигляд.

$$T_{\max} = \max_{ij / x_{ij} > 0} \{t_{ij}\} \to \min ; \tag{2.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,n}; \tag{2.25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n}; \tag{2.26}$$

$$\forall x_{ij} \geq 0, \; i,j=\overline{1,n}. \tag{2.27}$$

2.4.4.1 Зведення задачі до ЗЦЛП

Математичну модель даної задачі, яка має нелінійну та недиференційну цільову функцію можна звести до лінійної, шляхом введення *mn* бульових змінних з метою позбавлення умови «якщо $x_{ij} > 0$»:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, x_{ij} > 0, \\ 0, x_{ij} = 0, i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{2.28}$$

З урахуванням (2.28) можна замінити цільову функцію $\max_{ij / x_{ij} > 0} \{t_{ij}\} \to \min$ на систему:

$$\begin{cases} \max_{ij} \{t_{ij} y_{ij}\} \to \min \\ x_{ij} \leq M y_{ij}, i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n} \\ y_{ij} \in \mathrm{B}, i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{2.29}$$

де M – достатньо велике число, таке, що нерівності $x_{ij} \le M, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ виконуються на усій множині розв’язків. Щоб позбавитися від мінімаксності цільової функції, введемо змінну

$$y = \max_{ij}\{t_{ij} y_{ij}\}. \qquad (2.30)$$

Це дозволить перейти до задачі пошуку мінімуму лінійної функції однієї змінної:

$$\begin{cases} y \to \min, \\ y \ge t_{ij} y_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (2.31)$$

Таким чином математична модель вихідної задачі (2.24)-(2.27) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
&y \to \min \\
&y \ge t_{ij} y_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}; \\
&x_{ij} \le M y_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}; \\
&\sum_j x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}; \\
&\sum_i x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}; \\
&x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \\
&y_{ij} \in \mathrm{B},\quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}
\end{aligned}$$

2.8 Завдання домашньої роботи

Задача 1. Деяке підприємство має можливість виробляти три види продукції: *ПР*1, *ПР*2, *ПР*3. На виготовлення цієї продукції використовується два види сировини: *С*1 і *С*2. Підприємство володіє запасами сировини *С*1 об’ємом 1000 од., а сировину *С*2 воно може придбати у одного з поставників: *А* і *Б*. У поставника *А* є 800 од. даної сировини, у *Б* – 950 од. За деякими параметрами сировина *С*2 різних поставників відрізняється одне від одного. У табл. 2.6 вказані питомий прибуток і кількість сировини, що використовується на виробництво продукції кожного виду.

Таблиця 2.6

Питомий прибуток і кількість сировини

Продукція		**Витрата сировини на одиницю продукції, од. сировини/од. продукції**

	Питомий прибуток c_j, од. вартості	$C1$, a_j	$C2$	
			від постачальника A, d_j	від постачальника $Б$, f_j
$ПР1$	5	3	2	3
$ПР2$	6	3	4	3
$ПР3$	8	6	5	4

Визначити об'єми випуску продукції, за яких досягається максимум прибутку за умови, що сировина $C2$ може бути закуплена тільки у одного їх поставника і може вироблятися не більше двох видів продукції.

Побудувати математичну модель.

Задача 2. Побудувати математичну модуль задачі максимізації функції $z = 5x_1 + 10x_2$ в області, зображеній на рисунку 2.7:

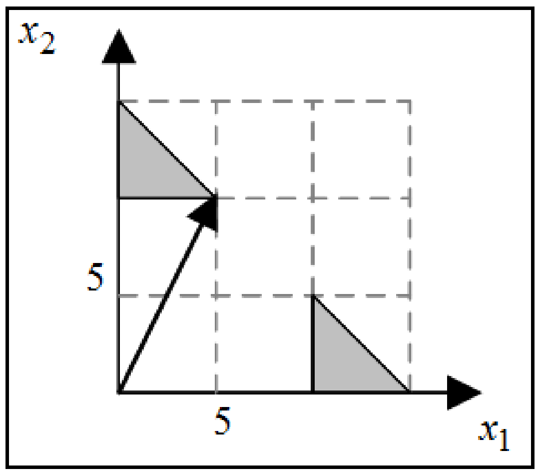


Рис. 2.7. Математична модуль задачі

Підказка для побудови математичної моделі

Область рішень складається з двох незв'язаних частин, отже, X може належати або верхній частині області, але нижній. Кожна область описується своєю системою нерівностей. Введемо булеву змінну, яка буде це враховувати:

$$y = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \text{ належить верхній області} \\ 1, \text{якщо } x \text{ належить нижній області} \end{cases}.$$

Задача 3. Фірма «Світле майбутнє» виробляє три види лампочок: великі, середні і маленькі. Для виготовлення продукції необхідно два види ресурсів: скло і метал.

На виробництво однієї великої лампочки використовується 4 г скла, однієї середньої – 3 г, а на виробництво маленької лампочки – 2 г. Добовий запас скла складає 1200 кг.

На передвиробничій стадії метал може піддаватися загартовуванню. При цьому на виробництво:

- однієї великої лампочки використовується 7 г незагартованого металу або 3 г загартованого;
- однієї середньої лампочки використовується 4 г незагартованого металу або 2 г загартованого;
- однієї маленької лампочки використовується 3 г незагартованого металу або 1 г загартованого.

Добові поставки металу рівні 1000 кг. В процесу загартовування відходи металу складають 10%. Якщо проводиться загартовування металу – то в повному об’ємі. Вартість процесу загартовування складає 5000 од. вартості.

Визначити, яка кількість лампочок кожного виду варто випускати за добу, щоб максимізувати прибуток фірми, якщо прибуток від випуску однієї великої лампочки дорівнює 7 од. вартості, однієї середньої – 5 од. вартості, а однієї маленької – 3 од. вартості.

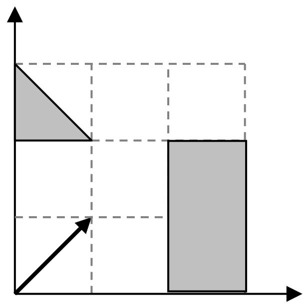
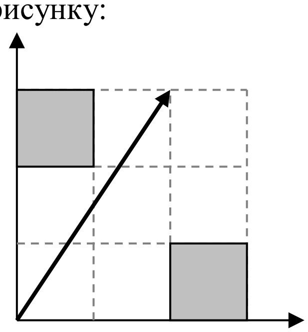
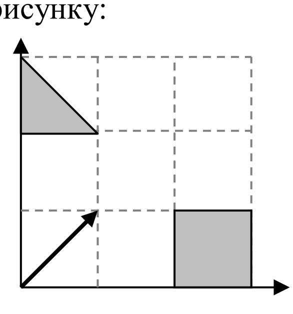
Побудувати математичну модель.

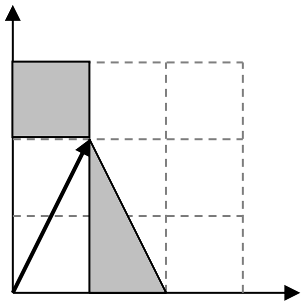
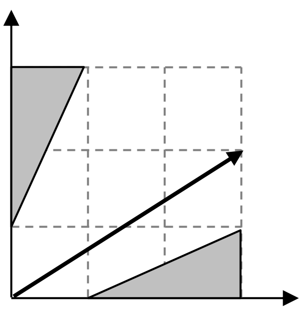
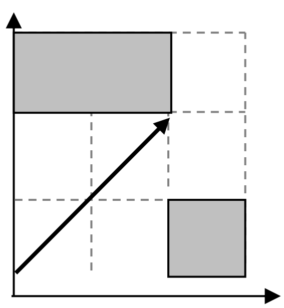
3 ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

У таблиці 3.1. наведені умови задач модульної контрольної роботи (МКР).

Таблиця 3.1

Умови задач модульної контрольної роботи

№	Умова
Завдання типу 1 (5 балів)	
3.1.1.	Побудувати математичну модель задачі максимізації $z=x_1+x_2$ в області, зображеної на рисунку: 
3.1.2.	Побудувати математичну модель задачі максимізації $z=2x_1+3x_2$ в області, зображеній на рисунку: 
3.1.3.	Побудувати математичну модель задачі максимізації $z=x_1+x_2$ в області, зображеній на рисунку: 

№	Умова
3.1.4.	Побудувати математичну модель задачі максимізації $z=x_1+2x_2$ в області, зображеній на малюнку: 
3.1.5.	Побудувати математичну модель задачі мінімізації $z=3x_1+2x_2$ в області, зображеній на рисунку: 
3.1.6.	Побудувати математичну модель задачі оптимізації $z=2x_1+2x_2$ в області, зображеній на рисунку: 
	Завдання типу 2 (5 балів)
3.2.1.	Звести до лінійної дискретної моделі: $2x_1+2x_2 \to \max$ $\left.\begin{array}{l} 3x_1+6x_2 \le 320 \\ 1x_1+5x_2 \le 220 \\ 6x_1+2x_2 \le 150 \\ 6x_1+2x_2 \le 300 \end{array}\right]$ - повинні виконуватись **принаймні два** з 4-х обмежень. $4x_1-2x_2 \ge 20$

№	Умова
3.2.2.	Звести до лінійної дискретної моделі: $3x_1 + 2x_2 \to \max$ $3x_1 + 4x_2 \ge 40$, $4x_1 + 5x_2 \le 100$, $5x_1 + 4x_2 \le 110$, $x_1, x_2 \ge 0$, При цьому, якщо $x_1 > 0$, то ЦФ зменшується на 55, якщо $x_2 > 0$, то ЦФ зменшується на 60.
3.2.3.	Звести до лінійної дискретної моделі: $2x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + 6x_2 \ge 120$ $6x_1 + 3x_2 \ge 220$ $2x_1 + 5x_2 \le 320$ $6x_1 - x_2 \le 150$ $6x_1 + 4x_2 \le 600$ - повинні виконуватися **не більше трьох** з 5-ти обмежень.
3.2.4.	Звести до лінійної дискретної моделі: $2x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + 5x_2 \le 420$ $5x_1 - 2x_2 \le 100$ $2x_1 + 3x_2 \ge 120$ $-2x_1 + 3x_2 \ge 50$ $5x_1 + 4x_2 \le 500$ - повинні виконуватися **не менше двох** з 5-ти обмежень
	Завдання типу 3 (7 балів)
3.3.1.	Звести до **лінійної** дискретної моделі: $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $2x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 \ge 120$, $2x_1 + 4x_2 - 2x_1 + 3x_2 \le 400$, $x_1, x_2 \ge 0$ в якій **щонайменше дві** змінні x_j повинні бути рівними 0.
3.3.2.	Звести до лінійної дискретної моделі: $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max$ $Ax = b$ $x \ge 0$, $(x \in R^5)$ і, **щонайменше дві** змінні x_j повинні бути рівні 0.
3.3.3.	Звести до лінійної дискретної моделі: $3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 4x_6 \to \max$ $Ax = b$ $x \in Z^+ (x \in R^6)$

№	Умова
	і, **щонайменше**, три змінні x_j повинні бути рівні 0.
Завдання типу 4 (5 балів)	
3.4.1.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\max\{5x_1 - x_2; 3x_1 + 2x_2; 2x_1 + 4x_2\} \to \min$ $3x_1 + 6x_2 \geq 220$, $3x_1 + 5x_2 \leq 150$ або $5x_1 + 3x_2 \leq 180$, $x_1, x_2 \in Z^+$
3.4.2.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\min\{2x_1 + x_2; 3x_1 - x_2\} \to \max$ $5x_1 + 2x_2 \leq 20$, $-2x_1 + 5x_2 \geq 10$, $x_1, x_2 \in Z^+$
3.4.3.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\max\{3x_1 + 5x_2; x_1 + 7x_2\} \to \min$ $5x_1 + 6x_2 \geq 600$, $6x_1 + 5x_2 \geq 500$ $3x_1 - 4x_2 \leq 200$, $x_1, x_2 \in Z^+$
3.4.4.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\min\{x_1; x_2; 3x_1 - 2x_2\} \to \max$ $2x_1 + 3x_2 \leq 120$, $-x_1 + 4x_2 \geq 20$, $x_1, x_2 \in Z^+$
3.4.5.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\max\{3x_1 + 5x_2; x_1 + 7x_2\} \to \min$ $5x_1 + 6x_2 \geq 600$, $6x_1 + 5x_2 \geq 500$ $3x_1 - 4x_2 \leq 200$, $x_1, x_2 \in Z^+$
3.4.6.	Звести до лінійної дискретної моделі: $\min\{4x_1 + x_2; 2x_1 + 2x_2; 5x_1 - x_2\} \to \max$ $6x_1 + 4x_2 \leq 120$, $4x_1 - 2x_2 \geq 20$, $x_1, x_2 \in Z^+$.
Завдання типу 5 (8 балів)	
3.5.1.	Загальну суму капіталовкладень K необхідно розподілити між q об’єктами (k=1, …, q), потреби яких вимірюються сумами b_1, …, b_k, …, b_q, а очікувані прибутки c_1, …, c_i, …, c_q. На кожен об’єкт капіталовкладень або виділяється необхідна сума, або зовсім не виділяється зовсім. Скласти модель задачі цілочислового програмування, що полягає в оптимальному розподілі капіталовкладень.

№	Умова
3.5.2.	Фірма AMD має намір розробити нові процесори Athlon–3000, Athlon–3300, Athlon–3500, Athlon–4000. Процес розробки і впровадження у виробництво процесорів дуже науко- та трудоміскткий, тому вигідно тільки крупносерійне виробництво: – або не випускати, або випускати не менше 40 000 шт. Athlon–3000; – або не випускати, або випускати не менше 35 000 шт. Athlon–3300; – або не випускати, або випускати не менше 23 000 шт. Athlon–3500; – або не випускати, або випускати не менше 10 000 шт. Athlon–4000. Виробничі потужності фірми такі. Що вона може випускати не більше 500 тис. процесорів усіх видів на рік. Оптові ціни продажів процесорів на ринку такі: – $999 за Athlon–3000; $1299 за Athlon–3300; – $1999 за Athlon–3500; $2999 за Athlon–4000. Скласти модель задачі дискретного програмування по визначенню найбільш вигідного асортименту продукції, що випускається.
3.5.3.	Фабрика може виробляти n різних продуктів (k=1, …, n), маючи для цього s видів ресурсів у кількості a_1, …, a_i, …, a_s. Для виробництва продуктів можуть бути використані m технологічних способів (j=1, …, m). Задані величини a^j_{ik}, що характеризують норми витрат i-го ресурсу на одиницю k-го продукту при виготовленні його j-м способом, і ціни p_k одиниці k-го продукту. Скласти модель задачі по визначенню оптимального набору продуктів і способів їх виробництва з умови максимізації прибутку від продажів товарної продукції при додатковій умові, згідно якій будь-який k-й продукт або повинен вироблятися у кількості, не меншій за d_k, або зовсім не вироблятися.
3.5.4.	У звичайній збалансованій транспортній задачі з ресурсами a_i (i=1, …, p), потребами b_j (j=1, .. q) і матрицею витрат (c_{ij}) вводиться умова, згідно якій вводиться додаткова плата за експлуатацію кожного маршруту (i—j) в розмірі постійної величини d_{ij}, якщо x_{ij}>0, і рівна 0, якщо x_{ij}=0. Побудувати математичну модель знаходження плану перевезень, при якому досягаються мінімальні сумарні витрати.
3.5.5.	Для задоволення попиту n споживачів, у кількості b_1, …, b_k, …, b_n одиниць продукції можуть бути частково використані m_1 наявних підприємств-поставників і частково підприємства, реконструйовані або знову побудовані (таких всього m_2). Реальні або спроектовані виробничі потужності цих підприємств складають a_1, …, a_i, …, a_m (m=m_1+m_2). Задана матриця (c_{ij}) транспортних витрат на доставку продукції і вектор P=(p_1, …, p_i, …, p_m), де p_i – виробничі витрати i-го підприємства на одиницю продукції. Крім того, маються ще «фіксовані» витрати d_i, пов'язані з реконструкцією або будівництвом нових підприємств (доля загальних капіталовкладень, розрахована на запланований період, виходячи із загального строку окупності). Ці фіксовані витрати d_i=0, якщо a_i=0, тобто, якщо i-й поставник в плані не передбачений, і d_i>0, якщо a_i>0. Для наявних підприємств відповідні d_i=0, незалежно від a_i. Скласти модель задачі по визначенню оптимального плану розміщення виробництва і транспортування продукції з умови мінімізації сумарних витрат.
Завдання типу 6 (10 балів)	

<table>
<tr><th>№</th><th>Умова</th></tr>
<tr><td>3.6.1.</td><td>Фірма “Кроун” займається дрібнооптовими поставками вино-горілчаних виробів, пива, цукру, тютюнових виробів. При веденні торгівлі обраними товарами фірма “Кроун” щомісячно повинна сплачувати акцизний збір за торгівлю кожним видом товару:
– $350 за торгівлю вино-горілчаними виробами;
– $100 за торгівлю пивом;
– $200 за цукор;
– $250 за торгівлю тютюновими виробами.
Закупівлі товарів здійснюються цілими партіями, для доставки однієї партії необхідний один захід вантажівки. Для доставки закуплених товарів фірма може виділяти вантажівку не більше семи разів на місяць.
Прибуток, отриманий при продажі однієї партії товару, складає: $600 для вино-горілчаних виробів, $400 для пива, $300 для цукру і $560 для тютюнових виробів. Визначити, які товари і в яких кількостях варто закупляти, щоб сумарний прибуток торгової фірми був максимальним.</td></tr>
<tr><td>3.6.2.</td><td>Видавницька фірма планує випуск друкованої продукції. Собівартість одиниць продукції кожного виду залежить від тиражу:
<table>
<tr><td rowspan="2">Продукція</td><td rowspan="2">Витрати паперу на 1 екз. (кг)</td><td colspan="3">Собівартість (у.о.) при тиражу</td><td rowspan="2">Питомий дохід (у.о.)</td></tr>
<tr><td>[t_{min}—t_1] екз.</td><td>(t_1—t_2] екз.</td><td>(t_2—t_{max}] екз.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>l_1</td><td>s_1^1</td><td>s_1^2</td><td>s_1^3</td><td>p_1</td></tr>
<tr><td colspan="6">. . . . . .</td></tr>
<tr><td>n</td><td>l_n</td><td>s_n^1</td><td>s_n^2</td><td>s_n^3</td><td>p_n</td></tr>
</table>
Місячний запас паперу складає B кг. Множина $N' \subset N = \{1,2,..n\}$ —множина номерів продукції, що являється навчальною. У відповідності з інвестиційними умовами фірма зобов’язана випустити 10000 одиниць навчальної літератури.
Скласти лінійну модель задачі дискретного програмування для визначення об’ємів випуску кожної продукції для максимізації місячного прибутку.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Завдання типу 7 (10 балів)</td></tr>
<tr><td>3.6.3.</td><td>Маються n пунктів споживання, потреби яких у деякому продукті вимірюються величинами b_1, …, b_k, …, b_q. Для задоволення цих потреб можуть бути використані m пунктів ($i = \overline{1,m}$) можливого виробництва продукту. Задана матриця (c_{ik}) витрат на перевезення одиниці продукту з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання.
На відміну від звичайної транспортної задачі, припускається, що в кожному i-му пункті можливі m_i взаємовиключних виробництва з об’ємами a_{i1},…, a_{ik},…, a_{imi}. Визначити оптимальний план розміщення виробництва за умови мінімізації витрат на транспортування продукту.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Завдання типу 8 (10 балів)</td></tr>
<tr><td>3.7.1.</td><td>Olympus займається випуском цифрових диктофонів SVR-825, V-90, DS-150 і VN-180. Прибуток від продажів складає:
$79 для SVR-825;
$113 для V-90;
$73 для DS-150;
$105 для VN-180.</td></tr>
</table>

№	Умова
	Olympus заключила вигідний контракт з дилерами на поставку 35 000 диктофонів. Як максимізувати прибуток на виробництво і при цьому виконати зобов'язання перед клієнтами, якщо по технологічним причинам фірма може виробляти не більше двох видів продукції. Скласти модель задачі дискретного програмування
3.7.2.	GIGA-BYTE TECHNOLOGY CO, LTD має великий асортимент материнських плат – 6WXM, 6BA, 6BXS, 6BXU, 6ZXC. Прибуток від випуску одиниці продукції складає: $130 для 6WXM; $143 для 6BA; $86 для 6BXS; $65 для 6BXU; $79 для 6ZXC. Сумарний попит на плати не більше 20 000 шт., при цьому попит на будь-яку дешеву плату (до $100) не менше ніж у три рази вище, ніж на будь-яку дорогу (більше $100). Через обмежену кількість складальних технологічних ліній, фірма може випускати не більше трьох різних видів продукції. Які плати і в якій кількості найбільш вигідно випускати?
3.7.3.	Western Digital планує випустити нові вінчестери EIDE ємністю 323GB, 379GB, 415GB і 530GB загальною кількість не більше 100 тис. штук. Для випуску нової продукції варто мати: — технологію 1 для вінчестерів 323GB і 379GB; — технологію 2 для вінчестерів 415GB і 530GB; — технологію 3 для вінчестерів 323GB і 530GB. На розробку першої технології потрібно витратити $7,5 млн., а на другу - $14 млн, на третю - $9 млн. При цьому прибуток від продажів одного вінчестера складе $73 для 323GB, $99 для 379GB , $124 для 415GB і $177 для 530GB. Які 2 з трьох нових технологій варто розробити, щоб прибуток від виробництва був максимальним?
3.7.4.	На підприємстві можна організувати 2 види виробництва офісного паперу та 2 види обгорткового паперу. Усі види виробництва мають спільні ресурси целюлози та спільні верстати. Витрати целюлози і затрати часу верстатів на партію продукції кожного виду вказані у таблиці: (див. таблицю нижче) Яку кількість партій продукції кожного виду варто виробляти при 8-годинному робочому дні, якщо запас целюлози обмежений 100 кг на день, і, за технологічними причинами, виробництву вигідно випускати тільки 1 вид офісного та 1 вид обгорткового паперу.

	Офісний папір		Обгортковий папір	
	I	**II**	**I**	**II**
Целюлози, кг на партію	3	5	6	7
Час роботи верстатів, годин на партію	0.2	0.3	0.1	0.4
Виручка за партію, у.о.	10	15	13	17

	Завдання типу 9 (10 балів)
3.8.1.	На лінгвістичному факультеті диплом отримали m (i=1..m) студентів. Видавництву "Либідь" потрібно перекласти n (j=1..n) книг з різних мов. В пошуках дешевої робочої сили видавництво звертає свою увагу на молодих спеціалістів. З'ясувалося, що i-й студент може перекласти кілька книжок (a_{ij} =1, якщо i-й студент може перекласти j-у книгу, a_{ij} =0 у іншому випадку) і вимагає за переклад усіх книг, які він може перекласти, суму c_i. Необхідно вибрати випускників так, щоб були перекладені усі книги і витрати були мінімальними.

<table>
<tr><th>№</th><th>Умова</th></tr>
<tr><td>3.8.2.</td><td>Перед великим потопом Ной здійснює комплектацію ковчега. В природі існує n (i=1..n) тварин. Цілком логічно, що якщо Ной візьме з собою кішку і мишку, то мишка потоп не переживе, таким чином маємо: a_{ij}=1, якщо i-й звір може знаходитися у одному приміщенні з j-м, і не один з них не буде з'їдений іншим, a_{ij}=0 в іншому випадку. Скласти математичну модель задачі, яку необхідно вирішити Ноєю, щоб врятувати як можна більше тварин.</td></tr>
<tr><td>3.8.3.</td><td>Агенту 007 належить виконати складну місію. Йому доведеться подолати n видів перешкод. На складі наявні m суперсучасних приладів. a_{ij}=1, якщо i-й прилад може впоратися з j-ю перешкодою, a_{ij}=0 у іншому випадку. Щоб виконати місію, агенту потрібно подолати усі перешкоди, по можливості не привертаючи уваги, тобто кількість приладів повинна бути мінімальною. Які прилади йому необхідно взяти?</td></tr>
<tr><td>3.8.4.</td><td>У викладача музики n ($i=\overline{1,m}$) учнів. Заняття з усіма проводяться щоденно з 14:00 в індивідуальному порядку. В залежності від здібностей, урок i -го учня триває t_i хвилин.
Після i-го учня викладач τ_{ij} приводить себе до почуття і готовиться до прийому j-го учня.
Скласти розклад таким чином, щоб викладач як можна раніше приходив додому.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Завдання типу 10 (5 балів)</td></tr>
<tr><td>3.9.1.</td><td>Експериментальна несиметрична комп'ютерна система складається з трьох мікропроцесорів АА, D7, KM. Кількість тактів, за яку кожен з процесорів виконує операції додавання, множення та ділення, наведені у таблиці:
<table>
<tr><th>Процесор</th><th>Додавання</th><th>Множення</th><th>Ділення</th></tr>
<tr><td>AA</td><td>12</td><td>39</td><td>57</td></tr>
<tr><td>D7</td><td>11</td><td>27</td><td>68</td></tr>
<tr><td>KM</td><td>13</td><td>35</td><td>53</td></tr>
</table>
Як найкращим чином розподілити три арифметичні операції (одне додавання, одне множення і одне ділення) в системі, щоб кожна операція виконувалася тільки на одному процесорі і кожен процесор виконував тільки одну операцію, щоб швидкість їх виконання була максимальною (сумарна кількість тактів мінімальною)?</td></tr>
<tr><td>3.9.2.</td><td>Мається шість різних модемів 3Com, IDC, Zyxel, USR, Acer і Gateway і стільки ж, різних за пропускною здатністю, ліній (Лінія 1, Лінія 2,…). Відомо, що для кожного модему, підключеного до даної лінії, пропускна здатність c_{ij} Kbps. Необхідно розподілити усі модеми по усім лініям, щоб кожен модем був підключений до однієї і тільки однієї лінії, а сумарна пропускна здатність була максимальною.
Пропускні здатності, Kbps:
<table>
<tr><th></th><th colspan="6">Модеми</th></tr>
<tr><th></th><th>3Com</th><th>IDC</th><th>Zyxel</th><th>USR</th><th>Acer</th><th>Gateway</th></tr>
<tr><td>Лінія 1</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Лінія 2</td><td>7</td><td>1,4</td><td>2</td><td>3</td><td>5,6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Лінія 3</td><td>7</td><td>5</td><td>2,6</td><td>4,7</td><td>4,7</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Лінія 4</td><td>4,5</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>3</td><td>3,3</td></tr>
<tr><td>Лінія 5</td><td>3</td><td>7</td><td>8</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Лінія 6</td><td>6,2</td><td>2</td><td>7</td><td>4,6</td><td>8</td><td>7</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

У таблиці 3.2 наведено розподіл задач за варіантами МКР.

Таблиця 3.2

Розподіл задач за варіантами МКР

Варіант	№ задач
1	3.1.1, 3.2.1, 3.3.3, 3.4.6, 3.7.4, 3.8.3, 3.5.3
2	3.1.2, 3.2.2, 3.4.1, 3.5.1, 3.9.1, 3.5.4
3	3.1.3, 3.2.3, 3.4.2, 3.7.1, 3.5.2, 3.5.5
4	3.1.4, 3.3.2, 3.4.3, 3.6.1, 3.8.1, 3.6.2
5	3.1.5, 3.2.4, 3.4.4, 3.7.2, 3.9.2, 3.8.4
6	3.1.6, 3.3.1, 3.4.5, 3.7.3, 3.8.2, 3.6.3

4 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Студент X любить раціонально використовувати власний час. Він планує прогуляти пари з таких предметів як ММДО, теорія алгоритмів та соціологія. В курсі ММДО 18 пар, а за кожну пропущену X отримує 3 очка задоволення, з теорії алгоритмів 16 пар і відповідно 4 очка, з соціології – 6 пар та 5 очок. Щоб не бути виключеним з університету потрібно мати сумарно не більше 20 пропусків. Окрім того, студент X хоче отримати хоча б одну п’ятірку, для цього необхідно відвідати всі пари з відповідного предмету. Яку кількість пар з кожного предмету доцільно прогуляти, щоб отримати найбільше задоволення?

2. Сталеливарний завод випускає сплави 2-х типів: *А* і *Б*. Для створення сплаву необхідні металічні руди 3-х типів (a, b, c), які видобувають на різних m родовищах. При чому, у зв’язку із витратами на перевезення руди завод може використовувати тільки n родовищ. Для створення сплаву *А* необхідно a_i і b_i кг руд виду a і b відповідно. Для створення сплаву *Б* необхідно a_i і c_i кг руд виду a і c відповідно. У кожного родовища своя концентрація металу в руді, тому і кількість руди різна. Об’єм складів для зберігання руди обмежений і рівний D. Ринкова ціна продажу 1 кг сплаву *А* дорівнює C_A, сплаву *Б* – $C_Б$. Максимізувати прибуток підприємства.

3. Ексцентричний мільярдер приїхав до країни зі сприятливим інвестиційний кліматом і хоче заробити грошей. Влада запропонували йому чотири можливі проекти, кожен тривалістю три роки. Наш мільярдер планує свої витрати наперед, при цьому кожен рік може інвестувати не більше сум, що вказані у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Дані до розрахунків

Проект	Прибуток від проекту (млрд.)	Необхідні вкладення (млрд.)		
		1-й рік	2-й рік	3-й рік
Виведення черепах	20	0,5	0,3	0,2
Виведення страусів	30	1	0,8	0,2
Виведення коней	50	1,5	1,5	0,3
Виведення свиней	10	0,1	0,4	0,1
Кошти у наявності (млрд.)		3,1	2,5	0,4

Які проекти потрібно обрати мільярдеру, щоб отримати максимальний прибуток?

4. Нехай в заданому регіоні на людину діють M шкідливих факторів навколишнього середовища, що характеризуються значеннями $f_1, f_2, ..., f_M$. Вважається, що здоров'я людини не страждає, коли кожен з цих факторів знаходиться в певному допустимому діапазоні, встановленому державними стандартами:

$$\begin{cases} a_1 \le f_1 \le b_1 \\ a_2 \le f_2 \le b_2 \\ \ldots \\ a_M \le f_M \le b_M \end{cases}$$

У розпорядженні людини є N засобів захисту. Для кожного із засобів захисту відома його вартість $c_i, i=\overline{1,N}$, а також на скільки цей засіб знижує дію кожного з шкідливих факторів $d_{ij}, i=\overline{1,N}, j=\overline{1,M}$. Необхідно визначити найбільш доступний набір засобів захисту, який забезпечує безпеку людини.

Вважати, що серед доступних засобів захисту немає взаємовиключних.

5. Фірма Gnusmas_Ukraine виробляє три види телевізорів: плазмові, настільні, автомобільні. Для виготовлення телевізорів використовується два типи мікросхем: TN і PVA. Фірма володіє запасами мікросхем для матриць TN в об'ємі 12000 од., а мікросхеми для матриць PVA вона може придбати у однієї з двох фірм-партнерів: ASUS и ACER. У поставника ASUS наявні 9600 од. цих матриць, у ACER – 11400 од. За параметрами збірки мікросхеми матриць PVA різних поставників відрізняються одне від одного. У таблиці 4.2 вказані питомий прибуток і кількість мікросхем двох видів, що використовуються на виробництві одного телевізору кожного виду.

Таблиця 4.2

Дані до розрахунків

Продукція	**Питомий прибуток c_j, $**	**Витрати сировини на одиницю продукції, од. сировини / од. продукції**		
		TN, a_j	**PVA**	
			Від фірми ASUS, d_j	**Від фірми ACER, f_j**
Плазмові	60	36	24	36
Настільні	72	36	48	36
Автомобільні	96	72	60	48

Визначити об’єми випуску телевізорів, при яких досягається максимум прибутку за умови, що мікросхеми для матриць PVA можуть бути закуплені лише у однієї з фірм і може бути вироблено не більше двох видів телевізорів.

6. Армія країни *X* має можливість закупити в країни *Z* за оптовими цінами військову техніку для ведення бойових дій з країною *Y*. Країна *Z* згодна продавати техніку тільки більше певного мінімального об’єму. Для придбання усієї техніки країна має 15000 млн. грн. Також кожен рік на утримання одиниці техніки витрачається певна кількість грошей, що наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

Дані до розрахунків

Техніка, j	**Ціна c_j, млн грн/од. техн.**	**Витрати на утримання r_j, млн грн/од. техн. на рік**	**Середній строк служби t_j, років**	**Кількість уражених одиниць противника p_j, од. прот./од. техн.**	**Мінімальна кількість техніки N_j, од. техн.**
Танк	15.3	0.7	10	20	500
БТР	6.7	0.3	8	8	1000
Бомбардувальник	30.1	1.3	20	40	100
Гвинтокрил	20	1	15	31	300

Визначити, яку техніку і в яких об’ємах потрібно закупити, щоб нанести противнику максимальну шкоду.

7. Агентство має влаштувати дитячий день народження. Згідно із замовленням йому потрібно закупити кульки, їжу, салют, найняти клоуна чи акробатів. Кожен із перелічених пунктів вимірюється у одиницях веселості, що наведені у таблиці 4.4, але при цьому має і свою ціну.

Таблиця 4.4

Дані до розрахунків

Замовлення	**Одиниці веселості**	**Ціна**
Святкова їжа	10	50
Салют	45	200
Кульки	20	50
Клоун	60	400
Акробати	90	650

При цьому порцій їжі має бути не менше 100 (у таблиці 4.4 веселість та ціна – за одну порцію). Замовник вирішив, щоб на дні народження обов'язково були або кульки, або салют, а також або клоуни, або акробати. При чому клоунів чи акробатів має бути менше 5, а кульок чи салютних ракет – менше 100.

Максимізувати веселість на святі, якщо у розпорядженні агентства є 100000 одиниць готівки.

8. Мебельна фабрика займається випуском трьох видів меблів. Для їх виготовлення фабрика закуповує деревину і клеючі матеріали. Фабрика має можливість закупати деревину у двох лісництв, кожне з яких пропонує деревину різної якості. Перше – кращої якості за вищою ціною, а друге – гіршої якості за середньою ціною. Якість деревини впливає на відходи при виготовленні меблів. Відповідні витрати на кожен вид меблів приведені у таблиці. Бюджет фабрики дозволяє закупити 120 кубометрів деревини у першого лісництва і 160 у другого. Клеючі матеріали фабрика також може закуповувати у двох поставників також різної якості. Витрати клеючих матеріалів на кожен вид меблів приведені у таблиці. Кошти за закупівлю клеючих матеріалів виділяються незалежно від коштів на деревину і дозволяють закупити 100 кубометрів клеючих матеріалів у одного поставника і 75 у другого. Також відомо, що обладнання на фабриці не дозволяє випускати за добу більше ніж 90 одиниць меблів.

Визначити, яку кількість меблів кожного виду варто випускати за добу, щоб максимізувати прибуток фірми, ціни реалізації кожного виду приведені у таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

Дані до розрахунків

Вид меблів	Витрати деревини 1-го лісництва	Витрати деревини 2-го лісництва	Витрати клеючих матеріалів 1-го постачальника	Витрати клеючих матеріалів 2-го постачальника	Питомий прибуток за одиницю товару
1-й	4	7	8	5	15
2-й	3	5	6	3	10
3-й	4	9	3	1	12

9. Майстер виробляє деякі вироби з дерева, продаючи їх потім в сувенірний магазин. Але за магазин купує лише великі партії товарів, тому для майстра встановлена

мінімальна квота на кількість виробів кожного виду l_j. На кожен виріб йде певна кількість дерева, і коштують вироби по-різному. Майстер може використати максимум 20 000 г дерева на місяць. Затрати дерева, прибуток від реалізації та мінімальна квота на одиницю кожного виробу представлені в таблиці 4.6:

Таблиця 4.6

Дані до розрахунків

Вид товару	**Витрата дерева, г**	**Мінімальний розмір партії l_j, шт**	**Прибуток від реалізації, грн**
1	25	500	20
2	30	600	15
3	50	550	25

Визначити, який товар і в якій кількості слід виготовляти, щоб максимізувати сумарний прибуток.

10. Деяка продукція може автономно вироблятись на трьох різних станках. Кожен станок використовує деяку кількість сировини *А* і сировини *Б*, причому обидва види сировини можуть закупатись у одного з двох поставників: *П*1 і *П*2. Але оскільки якість сировини від різних поставників різна, для видобутку одиниці продукції станок використовує різну кількість сировини певного виду від різних поставників. Станки ще не запущені, їх треба налаштувати, що також потребує додаткових коштів. Якість продукції, що випускається різними станками, різна. В таблиці 4.7 представлені затрати на налаштування станків, а також характеристики сировини і виручка від реалізації готової продукції:

Таблиця 4.7

Дані до розрахунків

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th rowspan="3">Затрати на налашту-вання</th><th colspan="4">Кількість сировини, що використовується на випуск одиниці продукції</th><th rowspan="3">Прибуток</th></tr>
<tr><th colspan="2">Сировина поставщика П1</th><th colspan="2">Сировина поставщика П2</th></tr>
<tr><th>А</th><th>Б</th><th>А</th><th>Б</th></tr>
<tr><td>Станок 1</td><td>1000</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Станок 2</td><td>1250</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Станок 3</td><td>1050</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Максимальний об'єм сировини</td><td>-</td><td>300</td><td>200</td><td>250</td><td>230</td><td></td></tr>
</table>

Визначити, в яких об’ємах потрібно закупати сировину, які станки запускати і в яких об’ємах потрібно випускати продукцію на кожному з працюючих станків, щоб максимізувати сумарний прибуток.

11. В саду ростуть ромашки, нарциси, тюльпани, троянди, айстри та жоржини. Для кожного виду квітів хазяйці варто обрати клумбу для прийдешньої виставки. Але час пересадження у кожну клумбу для кожного виду квітів різний, що представлено у таблиці 4.8. Для кожного виду квітів потрібно визначити вид клумби і для кожної клумби – вид квітів, щоб у підсумку час на підготовку до виставки був мінімальним.

Таблиця 4.8

Дані до розрахунків

Квіти\Клумби	**Клумба 1**	**Клумба 2**	**Клумба 3**	**Клумба 4**	**Клумба 5**	**Клумба 6**
Ромашки	2	3	4	5	12	34
Нарциси	44	5	6	7	8	34
Тюльпани	12	33	32	22	12	45
Троянди	43	65	33	12	54	66
Айстри	12	12	12	12	12	12
Жоржини	4	5	61	23	11	2

12. Старий турист дядько Василь займається пошивкою похідних рюкзаків двох видів у підвалі на Борщагівці. Для рюкзаків він використовує матеріали Cordura 1000 і Oxford 600D, при чому для кожного виду рюкзаків він використовує тільки відповідний матеріал. Вартість погонного метра Cordura 1000 складає 60 грн/метр, а Oxford 600D - 50 грн/метр. Довжина мінімального рулону Cordura 1000 складає 100 метрів, а Oxford 600D – 150 метрів, при чому на складі є тільки 500 і 600 метрів тканин відповідно. На рюкзак першого виду необхідно 4 метри Cordura 1000, а на рюкзак другого виду - 5 метрів Oxford 600D. Вартість рюкзаків – 400 и 350 грн відповідно. Природно, дядько Василь хоче якнайбільше збагатитися, тому необхідно знайти такий план випуску рюкзаків першого і другого видів, при якому досягається максимізація прибутку, при цьому треба враховувати, що бюджет дядька Василя обмежений 20000 грн.

13. Компанія закуповує сервери двох видів для надання послуг хостингу.

Вартість сервера 1-го виду – 800 одиниць вартості, 2-го – 900 од. варт. Кожен сервер повинен бути оптимізований під Linux або Windows хостинг, при цьому Linux обійдеться в 50 од., а Windows – 100 од. вартості. Відомо також те, що сервера 1-го типу під Linux приносять 100 од. варт., а під Windows – 150 од. варт., сервера 2-го типу під Linux приносять 175 од. варт., а під Windows – 250 од. варт. Закуплені сервери будуть розташовані в офісах компанії, місця в яких може вистачити не більше ніж на 15 серверів. Також компанія має обмежений бюджет в 15000 од. варт.

Визначити, скільки серверів якого виду компанія повинна придбати, щоб максимізувати свій подальший прибуток. Але за умови, що усі сервери будуть оптимізовані тільки під Linux або Windows хостинг.

14. Фотолабораторія для друку фото використовує мінілаб NORITSU QSS-3202. Мінілаб може друкувати лише на одному з двох типів паперу: на глянцевому або матовому. Щоб переналагодити мінілаб на друк глянцевого фото потрібно 15 хвилин, а на друк матового – 10 хвилин, в грошовому еквіваленті це відповідно 75 та 50 гривень. За добу мінілаб може роздрукувати 10 000 глянцевих фото та 12 000 матових. Прибуток від 1000 глянцевих фото складає 150 гривень, а від 1000 матових – 120 гривень. Визначити, яку кількість глянцевих та матових фото має друкувати мінілаб щодоби, щоб прибуток фотолабораторії був максимальним.

15. Піцерія оформлює замовлення клієнтів на доставку піци. Піцерія має 3 філії в Києві (в кожній філії працює 1 кур'єр) та 4 місць замовлень по місту. В кожній філії готує відповідно {10; 15; 25} піц та отримує {5; 10; 20; 15} замовлень. Час, що витрачається на доставку піци з *i*-ої філії в *j*-ий пункт замовлення, наведено в табл. 4.9:

Таблиця 4.9

Дані до розрахунків

	1-а точка замовлення	**2-а точка замовлення**	**3-я точка замовлення**	**4-а точка замовлення**
1-а філія	8	3	5	2
2-а філія	4	1	6	7
3-я філія	1	9	4	3

Загальний час доставки замовлень має бути мінімальним. Який буде оптимальний план доставки піци для кур'єра?

16. На виробництво молочних сирків трьох видів (*С*1, *С*2, *С*3) в якості сировини можуть закуповувати кефір і ряжанку у одного з трьох різних поставників (*П*1, *П*2, *П*3). Кожен з поставників може продати не більше певної кількості своєї продукції. Так як сировина має різну якість, на виробництві використовуються її різні об'єми, що наведено в таблиці 4.10:

Таблиця 4.10

Дані до розрахунків

	*П*1		*П*2		*П*3		**Дохід від реалізації**
	Кефір	**Ряжанка**	**Кефір**	**Ряжанка**	**Кефір**	**Ряжанка**	
Сирок 1	4	1	6	4	3	7	40
Сирок 2	2	4	7	4	8	8	35
Сирок 3	5	7	9	5	1	9	25
Максимальний об'єм	200	250	300	270	400	170	-

В яких об'ємах варто випускати продукцію, щоб максимізувати сумарний дохід від реалізації?

ВИСНОВКИ

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності «Інформаційні системи та технології» та для тих, хто вивчає навчальну дисципліну «Дослідження операцій».

Важливою для практики частиною дослідження операцій є такий його підрозділ, як дискретне програмування. Основна задача дискретного програмування – вибір найкращого варіанта з кінцевого, за часту, дуже великого їх числа. Екстремальні задачі, що виникають в економіці, плануванні, техніці та інших областях, мають ряд особливостей, які не зустрічаються в таких стандартних задачах як лінійні та опуклі задачі. Дискретність дозволяє врахувати такі фактори, як неділимість об'єктів, дискретність процесів, наявність альтернатив, фіксовані доплати і багато іншого.

У навчальному посібнику викладено вступ до дискретного програмування. Наведена класифікація задач дискретного програмування. Розглянуті умови реальних ситуацій, що приводять до дискретних моделей планування. Наведені математичні моделі багатьох поширених на практиці проблемних ситуацій, що приводять до оптимізаційних дискретних моделей. Розглянуто задачі з неподільністю, класичні дискретні задачі, задача про експертів, задачі з логічними умовами, з дихотомією, з обмеженнями на розміри партій, задачі з багатократними альтернативами та з постійними елементами витрат, мінімаксні та максимінні задачі, задача про призначення за критерієм часу, транспортна задача за критерієм часу.

Також практикум містить завдання для домашньої роботи, модульної контрольної роботи та самостійної роботи, які розбиті на категорії з огляду на їх складність.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций [Текст] // М.: Мир, 1971. – 533 с.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. – 340 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3-х т. [Текст] // М.: Мир, 1973. – Т. 2. – 501 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. – 208 с.
5. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения) [Текст] // М.: Физматгиз, 1961. – 125 с.
6. Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций [Текст] / Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. // К.: Вища шк., 1978. – 312 с.
7. Исследование операций: В 2-х т. Т. 1. Методологические основы и математические методы [Текст] /Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. // М.: Мир, 1981. – 712 с.
8. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование [Текст] // М. Высш. шк., 1967. – 428 с.
9. Кофман А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование [Текст] / Анри-Лабодер А. // М.: Мир, 1977. – 432 с.
10. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование [Текст] / Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. // К.: Вища шк., 1975. – 372 с.
11. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х т. [Текст] // М.: Мир, 1985.