

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА ФРЕНЕЛЯ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

І.С. ЛАСКІН, О.Г. ВІЛИЙ

У курсі «Вища математика» в освітньому компоненті МА-3 в КПІ на багатьох факультетах, наприклад, РТФ, ФЕЛ, ІСЗІ та інших, досить повно й детально розглядається тема інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа: їх застосування, переваги та недоліки. Однак на спеціальних дисциплінах не менш активно використовуються й інші інтегральні перетворення, ознайомлення студентів із якими було б дуже корисним і в загальному курсі МА-3. Розглянемо деякі інтегральні перетворення та покажемо, де і як вони ефективно застосовуються.

1. Інтегральне перетворення Гільберта. Продемонструємо його застосування на прикладі аналізу дійсного модульованого сигналу, знаходження його амплітудних, фазових та частотних характеристик. Нехай $u_1(t)$ — дійсний модульований сигнал зі спектральною щільністю $G_1(\omega)$. Побудуємо відповідний йому комплексний сигнал

$$u(t) = u_1(t) + iu_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

спектральна щільність якого $G(\omega) = 2G_1(\omega)\eta(\omega)$, де $\eta(\omega)$ — одинична функція Хевісайда. Тут $G_2(\omega) = 2G_1(\omega)(\eta(\omega) - \frac{1}{2}) = 2G_1(\omega)\gamma(\omega)$, де $\gamma(\omega)$ — функція стрибка. Оскільки функції $G_1(\omega)$ відповідає сигнал $u_1(t)$, а для $\gamma(\omega)$ відповідає сигнал $\frac{1}{2\pi t}$, то за теоремою про згортку маємо, що щільності $G_2(\omega)$ відповідає сигнал $u_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(\tau)}{t-\tau} d\tau$ (інтеграл у сенсі головного значення). Це і є інтегральне перетворення Гільберта сигналу $u_1(t)$. Але $G_1(\omega) = G_2(\omega) \cdot \frac{1}{2\gamma(\omega)} = G_2(\omega) \cdot 2\gamma(\omega)$, тому

$$u_1(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2(\tau)}{t-\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

— обернене перетворення Гільберта. Таким чином, $u(t) = u_1(t) + iu_2(t) = |u(t)| \cdot e^{i\varphi(t)}$, де $A(t) = |u(t)|$ — амплітуда, $\varphi(t) = \arg u(t) = \arctan \frac{u_2(t)}{u_1(t)}$ — фаза, $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ — частота.

У випадку, якщо $u_1(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$, маємо для спектральної щільності $G_1(\omega)$: $G_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 t}{t} e^{-i\omega t} dt = \pi(\eta(\omega + \omega_0) - \eta(\omega - \omega_0))$. Тоді обернене перетворення Фур'є від $G_1(\omega)$ лише по додатних частотах дає $u(t) =$

$\pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\eta(\omega + \omega_0) - \eta(\omega - \omega_0)) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\omega_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\omega_0 t} - 1}{it}$, тобто $u(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t} + i \frac{1 - \cos \omega_0 t}{t} = \frac{2}{t} \sin \frac{\omega_0 t}{2} e^{i \frac{\omega_0 t}{2}}$, звідки $A(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} = 2 \left| \frac{\sin(\omega_0 t/2)}{t} \right|$, $\varphi(t) = \arctan \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{\omega_0 t}{2}$, $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{2}$ — знайдено основні спектральні характеристики сигналу. Тобто $u(t)$ будуємо так, що $u_1(t)$ — дійсна його частина, а уявна частина $u_2(t)$ — це інтегральне перетворення Гільберта цієї дійсної частини.

2. Інтегральне перетворення Френеля. Визначається наступним чином:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i \frac{(x-\xi)^2}{2}} d\xi; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{i \frac{(x-\xi)^2}{2}} d\xi.$$

Це інтегральне перетворення застосовується у радіооптиці також часто й ефективно як і перетворення Фур'є для розв'язання різного роду задач.

Реальний фізичний простір взаємодіє з хвилями, що розповсюджуються в ньому, саме узгоджено з цими інтегральними перетвореннями. Якщо, наприклад, на пластинку в просторі у вибраній площині XOY падає плоска електромагнітна хвиля в напрямку OZ , то простір за пластиною по координаті Z можна розділити на дві частини. Одна, ближча до пластини — це область Френеля, і тут електромагнітне поле після взаємодії з пластинкою описується перетворенням Френеля, а далі, після певної межі, йде область Фраунгофера, де поле діє згідно з перетворенням Фур'є. Для опису дифракції на щілині або на краю екрана застосовуються також $\sin$ - та $\cos$ -інтеграли Френеля та спіраль Корню. Перетворення Френеля має багато цікавих прикладів застосування і в інших галузях науки та техніки.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Білий О.Г., Іваненко Т.В., Крошко Н.В., Білий В.О. *Підготовка та проведення математичних олімпіад. Навчальний посібник*. [Електронний ресурс], — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. — 247 с.
- [2] Литвиненко О.Н. *Основи радіооптики*. — Київ: Техніка, 1974. — 208 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: laskin100@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com
URL: <https://matan.kpi.ua/uk/people/beliy/>