

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

П. Ф. Самусенко

Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь

Монографія

Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

УДК 517.928(02)
С17

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 13.03.2023 р.)*

Рецензенти:

*В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

*Г.А. Дзюбенко, д-р фіз.-мат. наук, провід. наук. співроб.,
Інститут математики НАН України*

Самусенко П.Ф.

С 17 Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь: монографія / П.Ф.Самусенко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2023. – 202 с.

ISBN 978-966-990-068-5

Викладено методи асимптотичного інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь. Розглянуто системи звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з малим запізненням аргумента з виродженою в точці матрицею при похідних, системи диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Для спеціалістів у галузі диференціальних рівнянь, викладачів, аспірантів та студентів старших курсів математичних спеціальностей закладів вищої освіти.

УДК УДК 517.928(02)

ISBN 978-966-990-068-5

© П. Ф. Самусенко, 2023

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ФМФ), 2023

Зміст

Вступ	5
Розділ I. Побудова асимптотичних формул для розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи рівнянь	21
1.1. Постановка задачі	21
1.2. Деякі допоміжні відомості	22
1.3. Побудова формального розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи рівнянь	31
1.4. Асимптотичний характер формальних розв'язків	35
Розділ II. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь	45
2.1. Постановка задачі	45
2.2. Деякі допоміжні відомості	46
2.3. Побудова розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь	50
2.3.1. Некритичний випадок	50
2.3.2. Критичний випадок	77
2.4. Періодичні розв'язки сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь	95
2.4.1. Некритичний випадок	95
2.4.2. Критичний випадок	107
Розділ III. Побудова асимптотичних формул для розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь із малим запізненням аргументу	114
3.1. Постановка задачі	114
3.2. Побудова розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь із малим запізненням аргументу	115
3.2.1. Некритичний випадок	115
3.2.2. Критичний випадок	142
3.3. Періодичні розв'язки сингулярно збурених	

диференціально-алгебраїчних систем рівнянь із малим запізненням аргументу	160
3.3.1. Некритичний випадок	160
3.3.2. Критичний випадок	171
Список використаної літератури	179

Вступ

Різноманітні задачі теоретичних і практичних досліджень часто потребують з'ясування властивостей функцій, що є розв'язками диференціальних рівнянь з малим або великим параметром.

Одними з найбільш ефективних методів інтегрування таких рівнянь є асимптотичні. Їх суть полягає в тому, що шуканий розв'язок диференціального рівняння будують у вигляді формального ряду за степенями параметра або незалежної змінної. І хоча такі ряди, як правило, розбігаються, але наближений розв'язок, знайдений шляхом обривання формального ряду на m -му члені достатньо добре апроксимує "точний" розв'язок вихідного рівняння. Побудовані таким чином наближені розв'язки мають асимптотичний характер в тому розумінні, що вони прямують до відповідних "точних" розв'язків, коли параметр або незалежна змінна прямує до свого граничного значення при фіксованому m .

Асимптотичні методи дають змогу здобути деякий аналітичний вираз шуканого розв'язку, що відіграє важливу роль в якісній теорії диференціальних рівнянь. При цьому вже кілька перших наближень, як правило, достатньо добре описують досліджувані властивості "точного" розв'язку. Тому зароджені ще на початку XIX ст. асимптотичні методи і нині є потужним апаратом як при проведенні різноманітних фундаментальних досліджень, так і при розв'язанні багатьох задач практики.

У 1807 р. Ж. Фур'є, узагальнюючи ідеї Д. Бернуллі, запропонував оригінальний метод розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, що приводить до звичайних диференціальних рівнянь з деяким параметром. При цьому виникла необхідність дослідження асимптотичних властивостей власних значень і власних функцій відповідних лінійних диференціальних операторів.

Вперше подібні задачі почав розглядати Ж. Ліувіль у 30-х роках XIX ст. Так, використовуючи результати Ж. Штурма про коливість розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку [190], Ж. Ліувіль навів достатні умови розвинення довільної функції за фундаментальними функціями $v_k(t)$ рівняння

$$\frac{d^2 v_k}{dt^2} + (\lambda_k g(t) - r(t))v_k = 0, \quad k \in N, \quad (1)$$

λ_k – параметр, з певними крайовими умовами [183, 184]. Таким чином, фактично було побудовано асимптотичні ряди для лінійно незалежних розв’язків рівняння (1).

Класичні результати про поведінку власних значень λ_k та власних функцій $v_k(t)$, що їм відповідають, здобуті В.А. Стекловим. Зокрема, ним доведено теорему замкненості для розв’язків задачі Штурма–Ліувілля і розв’язано задачу про розвинення функції за власними функціями $v_k(t)$ з тією самою загальністю, що й для тригонометричних рядів [111].

Перші найбільш систематичні дослідження систем лінійних диференціальних рівнянь з параметром містяться в працях Л. Шле-зінгера [187], Дж. Біркгофа [154] та Я.Д. Тамаркіна [113].

Так, для розв’язків диференціального рівняння

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \rho a_{n-1}(t, \rho) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \rho^n a_0(t, \rho) = 0,$$

де $a_i(t, \rho)$, $i = \overline{0, n-1}$, – голоморфні функції параметра ρ в околі нескінченно віддаленої точки і нескінченно диференційовні за змінною t , $t \in [a; b]$, Дж. Біркгоф побудував асимптотичні формули вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^m \rho^{-k} x_k^{(i)}(t) + O(\rho^{-m}) \right) \exp \left(\rho \int_a^t \lambda_i(t) dt \right), \quad i = \overline{1, n},$$

де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, – корені відповідного характеристичного рівняння.

Я.Д. Тамаркін узагальнив результати Дж. Біркгофа для систем лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \rho A(t, \rho)x, \quad (2)$$

де $x = x(t, \rho)$ – шуканий n -вимірний вектор, $A(t, \rho)$ – квадратна матриця n -го порядку, елементи якої голоморфні за параметром ρ в околі нескінченно віддаленої точки.

Зазначимо, що проведені дослідження стосувались випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$\det(A(t, 0) - \lambda E) = 0. \quad (3)$$

Випадок кратних коренів рівняння (3) виявився дуже складним і довгий час залишався недослідженим. Лише в середині XX ст. були зроблені перші успішні кроки у розв'язанні проблеми кратного кореня. Так, в працях М. Хукухари [166], Й. Сибуйі [188], М. Івано [169, 170, 172] для систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (4)$$

де матриця $A(t, \varepsilon)$ голоморфна в деякому околі точки $(0, 0)$, та С.Ф. Феценка [120, 121] для систем з повільно змінними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \quad \tau = \varepsilon t \in [0; T], \quad (5)$$

доведено теореми про асимптотичне розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких залежать від параметра, на підсистеми меншої розмірності. Таким чином, випадок, коли характеристичне рівняння системи має кілька коренів, був зведений до більш простого випадку, коли це рівняння має лише один корінь.

Ю.Л. Далецький і С. Г. Крейн узагальнили теорію асимптотичного розщеплення, розроблену для скінченновимірних просторів, на аналогічні системи, задані в нескінченновимірних просторах [31, 32].

Сама ж проблема кратного кореня була розв'язана в працях М.І. Шкіля [137, 136, 139]. Він показав, що розв'язки системи (5) зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями ε , показники яких залежать як від кратності коренів відповідного характеристичного рівняння та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурюючих коефіцієнтів системи.

Зазначимо, що системи з великим параметром (2), сингулярно збурені системи (4) та системи з повільно змінними коефіцієнтами

(5) еквівалентні у тому розумінні, що за допомогою заміни великого параметра на малий, або заміни незалежної змінної дані системи перетворюються одна в одну.

Фундаментальний результат М.І. Шкіля надав нового імпульсу теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем і був узагальнений для різних типів диференціально-функціональних рівнянь в працях його учнів [7, 55, 105 – 107, 109, 75, 76, 143].

Важливі дослідження з теорії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем провела Г.С. Жукова. Використовуючи метод діаграм Ньютона, вона з'ясувала залежність між збурюючими матрицями системи (4) у випадку одного кратного кореня відповідного характеристичного рівняння, якому відповідає елементарний дільник тієї самої кратності і показниками степеня малого параметра, за яким слід будувати асимптотичні розвинення шуканих розв'язків [34, 35].

Результати Г.С. Жукової на випадок, коли кратному кореню характеристичного рівняння відповідає кілька елементарних дільників, узагальнив В.П. Яковець [149].

Методи теорії асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з параметром тісно пов'язані з методами інтегрування систем диференціальних рівнянь з особливими точками

$$t^h \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad h \in N. \quad (6)$$

Зокрема, в працях М. Хукухари [167, 168], Й. Сибуйі [189], М. Івано [170, 171], Е. Коддінгтона і Н. Левінсона [49], В. Вазова [16] розглядались питання про побудову розв'язку системи (6) з голоморфною в точці $t = 0$ матрицею $A(t)$ для випадку регулярної особливої точки ($h = 1$), про асимптотичне інтегрування даної системи за умови наявності іррегулярної особливої точки ($h > 1$) та про асимптотичне розщеплення системи (6). При цьому після розщеплення у випадку кратних власних значень матриці $A(0)$ для побудови формальних розв'язків системи (6) використовувалось зрізуюче перетворення, наведене Х.Л. Территінім [114].

Аналогічні дослідження для сингулярно збурених систем з особливою точкою

$$\varepsilon t^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x \quad (7)$$

були здійснені Й. Сибуйею [189] та М. Івано [171]. Зазначимо, що під час застосування зрізуючого перетворення накладалися певні додаткові умови на коефіцієнти системи (7). І лише після розв'язання М.І. Шкілем проблеми кратного кореня для системи (5) їх було усунено [141, 143, 153, 159].

Класичні результати теорії асимптотичного інтегрування лінійних рівнянь та їх систем знайшли свої узагальнення в теорії нелінійних коливань. Насамперед, слід згадати методи Ляпунова–Пуанкаре пошуку періодичних розв'язків певних типів систем диференціальних рівнянь. Припускаючи голоморфність правих частин відповідних диференціальних рівнянь, О.М. Ляпунов [60] та А. Пуанкаре [182, 79, 80] розробили ефективні алгоритми побудови періодичних розв'язків у вигляді збіжних рядів за степенями малого параметра.

Як вже зазначалось, апарат теорії Ляпунова–Пуанкаре ґрунтується на припущенні про голоморфність правих частин рівнянь, що розглядаються. Це припущення було природнім для різноманітних задач небесної механіки XIX ст. Проте, наприклад, в теорії коливань воно є доволі обмежуючим. У зв'язку з цим зупинимося на фундаментальних дослідженнях М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського та А.М. Самойленка [4 – 6, 52, 53, 65 – 67, 89], де закладено основи нелінійної механіки.

Асимптотичні методи, розроблені М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим, застосовують для описування як періодичних, так і квазіперіодичних процесів, при вивченні найбільш загальних неконсервативних систем. Зазначимо, що використовуючи "звичайні" методи пошуку розв'язку наведених систем у вигляді розвинень за степенями малого параметру, ми приходимо до необхідності оцінювання так званих секулярних членів $t^m \sin at$, $t^m \cos at$. А тому наближені формули для розв'язків відповідних рівнянь можна будувати лише на незначному часовому інтервалі.

Створені М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим асимптотичні методи приводять до наближених формул, що не містять секулярних членів. Це дає змогу вивчати коливні процеси на достатньо великому інтервалі зміни незалежної змінної.

Узагальнюючи ідеї М.М. Крилова та М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольський ефективно досліджував нестационарні коливні процеси в системах з одним та багатьма ступенями вільності.

А.М. Самойленко обґрунтував методи асимптотичного інтегрування розривних та імпульсних систем, створив чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь, побудував загальну теорію збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем [6, 89, 90].

Асимптотичні методи, розроблені М.М. Криловим, М.М. Боголюбовим та Ю.О. Митропольським, стали класичним методами нелінійної механіки і інтенсивно розвивались в працях їх учнів [57 – 59, 68, 85, 128].

Починаючи з середини ХХ ст. у зв'язку з бурхливим розвитком радіотехніки, аеродинаміки, космонавтики виникла потреба у дослідженні процесів, що описуються сингулярно збуреними системами диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, t), \quad (8)$$

де $x = x(t, \varepsilon)$, $f(x, y, t)$ – m -вимірні, а $y = y(t, \varepsilon)$, $g(x, y, t)$ – n -вимірні вектори, ε – малий параметр.

Якщо в (8) покласти $\varepsilon = 0$, то матимемо вироджену систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \bar{y}, t), \quad g(\bar{x}, \bar{y}, t) = 0, \quad (9)$$

де $\bar{y} = \varphi(\bar{x}, t)$ – ізолюваний корінь рівняння

$$g(\bar{x}, \bar{y}, t) = 0.$$

Виникає питання: чи буде розв'язок системи (8) прямувати до деякого розв'язку виродженої системи (9) коли $\varepsilon \rightarrow 0$, і якщо такий

розв'язок системи (9) існує, то якими додатковими умовами він визначається?

Фундаментальні результати в цьому напрямку були здобуті І.С. Градштейном [29, 30] та А.М. Тихоновим [115, 116]. Розглядаючи задачу Коші для системи (8), А.М. Тихонов в теоремі про граничний перехід навів достатні умови наближеності розв'язку зазначеної задачі Коші до деякого визначеного розв'язку відповідної виродженої задачі.

Задачу Коші для системи (8) у випадку суто уявних коренів відповідного характеристичного рівняння всебічно дослідив В.М. Волосов [26, 27].

А.Б. Васильєва з'ясувала, що при виконанні певних умов розв'язок системи (8) має вигляд

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \Pi z(\tau, \varepsilon) + u(t, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

де через z позначено x або y , $\bar{z}(t, \varepsilon)$ – розв'язок виродженої задачі (9), $\Pi z(\tau, \varepsilon)$ – функція типу примежевого шару, $u(t, \varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ [17 – 19].

Створений А.Б. Васильєвою метод асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь дав змогу здійснити глибокі математичні дослідження різних типів диференціально-функціональних рівнянь [15, 20 – 24, 46, 82 – 84].

У згаданих дослідженнях сингулярно збурених задач члени регулярної частини асимптотики $\bar{z}(t, \varepsilon)$ були достатньо гладкими функціями. Якщо ж вони самі мають особливість в деякій точці і порядок цієї особливості збільшується зі зростанням номера члена (бісингулярні задачі), то для побудови асимптотичних розв'язків зазначених задач можна скористатись методом "зшивання асимптотичних розвинень" [42 – 45].

Оригінальний метод асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач запропонував С.О. Ломов [56]. У розробленому ним методі регуляризації сингулярно збурена задача шляхом переходу до простору більшого виміру стає регулярно збуреною, що дає змогу шукати її розв'язок у вигляді ряду за степенями малого параметра. Зазначимо, що С.О. Ломову вдалось знайти достатні умови

збіжності асимптотичних розвинень розв'язків деяких сингулярно збурених задач.

Диференціальні рівняння з відхиленням аргументу є порівняно новим об'єктом теорії диференціальних рівнянь. Їх інтенсивне вивчення почалось із середини ХХ ст. і пов'язане з потребами механіки, фізики, біології, економіки тощо.

У працях А.Д. Мишкіса [72, 73], Л.Е. Ельсгольца і С.Б. Норкіна [74, 145], Е. Пінні [77], Р. Беллмана і Р. Кука [3], М.Н. Огюзтореллі [180], В.П. Рубаника [85], Ю.О. Митропольського і Д.І. Мартинюка [69, 70], Ю.О. Митропольського, В.Г. Самойленка і Д. Матараццо [71, 178] наведено фундаментальні результати теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу.

Оскільки диференціальні рівняння з відхиленням аргументу інтегруються у замкненій формі надзвичайно рідко, то виникла потреба у розробці наближених, зокрема, асимптотичних методів розв'язання таких рівнянь. Так, в працях Ю.О. Митропольського [67], А. Халаная [129], В.П. Рубаника [85], В.І. Фодчука [125 – 128], Д.Г. Кореневського і С.Ф. Фещенка [50] був адаптований метод усереднення Крилова–Боголюбова–Митропольського для систем із запізненням аргументу, що дало змогу ефективно досліджувати коливні процеси в системах із післядією.

А.Б. Васильєва та А.М. Родіонов з'ясували, що за асимптотичними властивостями розв'язки систем нейтрального типу з малим віхиленням аргументу близькі до розв'язків систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь [24]. Це дало їм змогу для побудови відповідних асимптотичних розвинень використовувати раніше розроблені методи теорії сингулярних збурень.

Узагальнюючи результати А.Б. Васильєвої, В.І. Рожков [82 – 84] і Г.Д. Курдеванідзе [54] розробили алгоритм побудови періодичних розв'язків системи нейтрального типу з малим відхиленням аргументу.

У працях Ю.О. Рябова [87, 88], ідеї яких походять від О.М. Ляпунова і А. Пуанкаре, доведено існування періодичних розв'язків для системи диференціальних рівнянь з малим запізненням. При цьому побудовано не лише асимптотичне розвинення вказаних

розв'язків, але й доведено збіжність знайдених рядів.

Перші результати щодо асимптотичного інтегрування лінійних систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь із запізненням аргументу були здобуті С.Ф. Феценком та Я.П. Меньком [63, 64]. Їм вдалося поширити теорію Шлезінгера–Біркгофа–Тамаркіна побудови асимптотичних розв'язків на системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)x(t - \Delta(\tau), \varepsilon). \quad (10)$$

При цьому наявність множника ε при доданку із запізненням значно спрощувала задачу, оскільки вона зводилася до задачі відшукування розв'язків відповідної системи диференціальних рівнянь без запізнення.

У працях М.І. Шкіля [123, 139] таке припущення відкинуто. А саме, М.І. Шкіль узагальнив класичні методи побудови асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами на системи вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x + B(\tau, \varepsilon)x(t - \Delta(\tau), \varepsilon), \quad (11)$$

де матриці $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ мають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε ,

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i A_i(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i B_i(\tau).$$

При цьому простому кореню характеристичного рівняння

$$\det(A_0(\tau) - \lambda E + B_0(\tau) \exp(-\Delta(\tau)\lambda)) = 0 \quad (12)$$

відповідав формальний розв'язок системи (11), асимптотичне розвинення якого будувалося за степенями ε .

Якщо ж рівняння (12) має кратний корінь кратності 2, то за певних умов відповідний розв'язок системи (11), як і системи без запізнення (5), має асимптотичне розвинення за дробовими степенями ε .

Пізніше в працях М.І.Шкіля та його учнів зазначений метод побудови асимптотичних розв'язків був поширений на більш загальні типи диференціально-функціональних рівнянь з відхиленням [75, 123, 93, 98, 135].

Під впливом практичних задач теорії оптимального керування, масового обслуговування, теорії електричних кіл, економіки, починаючи з кінця 70-х років XX ст. розпочалось інтенсивне дослідження властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних.

Нині єдиної назви для таких систем не існує. Намагаючись більш чітко окреслити об'єкт дослідження і вказати на його характерні риси, системи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних, називають диференціально-алгебраїчними системами [162, 164, 184], алгебро-диференціальними [12, 14, 134], неявними [10, 132, 157], сингулярними [9, 13, 155, 156], виродженими [11, 92, 93], дескрипторними системами [179] тощо. У даній праці зазначені системи називатимемо диференціально-алгебраїчними системами (ДАС).

Зазначимо, що ДАС зі сталими коефіцієнтами розглядалися ще в працях М.М. Лузіна. Так, для системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(D)x_j = b_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

де $x_i = x_i(t)$ – шукані функції, a_{ij} – квадратичні оператори зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$a_{ij} = L_{ij}D^2 + M_{ij}D + N_{ij}, \quad D = \frac{d}{dt},$$

М.М. Лузін знайшов необхідні та достатні умови сумісності і запропонував алгоритм побудови її розв'язків [64].

Ілюструючи застосування теорії в'язок матриць, Ф.Р. Гантмахер дослідив на сумісність лінійну неоднорідну ДАС зі сталими коефіцієнтами. Зазначимо, що підхід Ф.Р. Гантмахера за умови сталої кронекерової структури в'язки матриць $A(t) - \lambda B(t)$, може бути використаний для пошуку розв'язків лінійної системи зі змінними

коефіцієнтами [93]

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0; T]. \quad (13)$$

Перші найбільш вагомі результати дослідження системи (13) були здобуті В.О. Єременком [41] та Ю.Д. Шлапаком [144]. Розглядаючи систему (13) з періодичними коефіцієнтами, вони побудували лінійні підстановки, за допомогою яких вона зводилася до системи меншого порядку.

Різноманітні аспекти теорії диференціально-алгебраїчних систем розглядалися Ю.Є. Бояринцевим, В.О. Даниловим, А.О. Логіновим, В.Ф. Чистяковим, А.А. Щегловою [9 – 14, 133, 134], С. Кемпбеллом, Ч. Гіером, Л. Петцольд [155 – 158, 162, 163], Е. Гріпентрогом і Р. Мьорц [164], П. Кункелем і В. Мерманном [173], Р. Ріазою [185], Е. Хайрером і Г. Ваннером [165]. При цьому основна увага зверталася на пошук необхідних і достатніх умов звідності системи (13) до системи зі сталими коефіцієнтами [155, 156, 9, 11]. Так, Ю.Є. Бояринцев у регулярному випадку (існує така стала c , що $\det(A(t) - cB(t)) \neq 0, t \in [0; T]$) зводив систему (13) до системи вигляду

$$C(t)\frac{dx}{dt} = x + g(t) \quad (14)$$

з подальшим з'ясуванням достатніх умов сумісності (14).

Узагальнюючи результати своїх праць, Ю.Є. Бояринцев [13], В.Ф. Чистяков і А.А. Щеглова [134] вводять до розгляду лівий та правий регуляризуючий оператори, за допомогою яких вихідна система (13) за певних умов зводилася до системи в нормальній формі.

Однак наведені підходи до інтегрування лінійної системи (13) не давали змоги описати структуру її загального розв'язку і розробити ефективні алгоритми побудови розв'язку задачі Коші, крайових задач тощо. У зв'язку з цим розглянемо поняття центральної канонічної форми системи (13) [158]. Так називається система

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} x + h(t), \quad (15)$$

де E_s, E_{n-s} – одиничні матриці s - та $(n-s)$ -го порядків відповідно, N_s – верхньотрикутна матриця з нульовими квадратними блоками на діагоналі.

У монографії [13] для системи (13) було введено поняття загального розв'язку типу Коші

$$x(t) = X_d(t)c + \varphi(t),$$

де $\text{rank} X_d(t) = d = \text{const}$, $d \leq n$, c – n -вимірний вектор довільних сталих, а $\varphi(t)$ – частинний розв'язок (13), і показано, що система (13) має загальний розв'язок типу Коші, якщо вона задовольняє критерію "ранг–ступінь" (ранг матриці $B(t)$ сталий і дорівнює степеню многочлена $\det(A(t) - \lambda B(t))$).

Зрозуміло, що питання побудови розв'язку типу Коші лінійної системи (13) може бути зведене до пошуку її центральної канонічної форми. Тому наведемо найбільш загальний результат Ю.Є. Бояринцева [13], В.Ф. Чистякова і А.А. Щеглової [134], сформульований для системи (13) з аналітичними коефіцієнтами. Доведено, що наступні твердження еквівалентні.

1. Система (13) має загальний розв'язок типу Коші.
2. Існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$ з аналітичними елементами, за допомогою яких систему (13) можна звести до центральної канонічної форми.
3. Існує лівий регуляризуючий оператор.
4. Існує правий регуляризуючий оператор.

Зазначимо, що згадані дослідження російських математиків здебільшого мають теоретичний характер і ефективно застосовуються на практиці лише у випадку виконання критерію "ранг–ступінь".

Найбільш загальні достатні умови звідності системи (13) до центральної канонічної форми здобули А.М. Самойленко і В.П. Яковець [92, 93]. При цьому ними був розроблений алгоритм побудови відповідних перетворюючих матриць. Це дало змогу описати структуру загального розв'язку системи (13) і знайти умови коректності постановки задачі Коші.

Фундаментальний результат А.М. Самойленка і В.П. Яковця є теоретичним підґрунтям дослідження різноманітних задач теорії

лінійних ДАС. Зокрема, на його основі знайдено умови сумісності задачі Коші [51], деяких крайових задач для диференціально-алгебраїчної системи [151], доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв'язку системи (13) з періодичними коефіцієнтами [2, 150], розроблено теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених ДАС [93].

Систему (13) у нескінченновимірних просторах розглядали С.Г. Крейн і М.І. Хазан [48], С.П. Зубова і К.І. Чернишов [38, 40], А.Г. Руткас [86, 186], А. Фавіні [160, 161], С.М. Жук [33] та ін.

Використовуючи розроблені раніше методи дослідження лінійних систем, Ю.Є. Бояринцев, В.О. Данилов, А.О. Логінов, В.Ф. Чистяков і А.А. Щеглова розглянули деякі задачі для нелінійних ДАС [13, 134]. Зокрема, вони довели існування розв'язку задачі Коші за певних умов на вектор початкових даних, розробили методику чисельного інтегрування таких систем тощо.

Із середини 80-х років ХХ ст., одночасно з дослідженням ДАС (13), почали розглядати сингулярно збурені ДАС з виродженням, тобто матрицею при похідній, яка змінює, наприклад, свій ранг, коли $\varepsilon = 0$, а саме системи вигляду

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon). \quad (16)$$

При цьому, не зважаючи на те, що теоретичною основою дослідження системи (16) є теорема про звідність ДАС до центральної канонічної форми, завдяки малому параметру при похідній розв'язки системи (16) мають ряд специфічних властивостей порівняно з розв'язками системи (13).

Перші результати про поведінку розв'язків системи (16) у випадку регулярного збурення здобув В.П. Скрипник [103]. Зокрема, він дослідив питання про збіжність розв'язку задачі Коші для системи (16) до відповідного розв'язку граничної системи (її дістають із системи (16) коли $\varepsilon = 0$).

У працях С. Кембелла та О'Меллі для однорідної системи зі сталими коефіцієнтами

$$(B_0 + \varepsilon B_1) \frac{dx}{dt} = Ax \quad (17)$$

з неособливою для всіх $\varepsilon > 0$ матрицею при похідних побудовано фундаментальну матрицю у вигляді розвинення за степенями параметра ε [155, 181].

У банаховому просторі систему (17) розглядали С.П. Зубова і К.І. Чернишов. Так, за умови, що оператор A є замкненим, лінійним, фредгольмовим, B_0 , B_1 – обмежені лінійні оператори, С.П. Зубова побудувала розв’язок задачі Коші для системи (17) та з’ясувала умови за яких цей розв’язок прямує до відповідного розв’язку граничної системи [39, 40]. К.І. Чернишов для регулярної в’язки $B_0 + \varepsilon B_1$ асимптотично розщепив систему (17) на дві підсистеми, одна яких залежить від параметра регулярно, а інша – сингулярно [130, 131].

Всі наведені дослідження стосувались, як правило, випадку, коли, незважаючи на особливість граничної матриці $B(t, 0)$, матриця $B(t, \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ залишається неособливою.

Вперше систему (16) з особливою матрицею $B(t, \varepsilon)$ почав досліджувати І.І. Старун [109, 110]. Ним було побудовано стільки лінійно незалежних формальних розв’язків однорідної системи

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (18)$$

скільки коренів з урахуванням їх кратності має відповідне характеристичне рівняння. Зазначимо, що у випадку "ранг–ступінь" кількість знайдених розв’язків достатня для визначення формальної фундаментальної матриці системи (18).

Узагальнюючи результати І.І. Старуна, В.П. Яковець з’ясував, що за певних умов, накладених на збурювальні матриці, система (18) має два типи формальних розв’язків. Розв’язки першого типу відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в’язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, а розв’язки другого типу – нескінченним. При цьому, використовуючи теорему про звідність до центральної канонічної форми, йому вдалося довести, що лінійна комбінація побудованих формальних розв’язків є загальним формальним розв’язком системи (18).

Зазначимо, що у працях Г.С. Жукової [36] та В.П. Яковця [146 – 149] на основі методу діаграм Ньютона розроблено ефективний

алгоритм визначення показників степеня малого параметра, за якими слід будувати формальні розвинення як розв'язків першої, так і другої груп.

Результати В.П. Яковця були узагальнені для лінійних сингулярно збурених ДАС інтегро-диференціальних рівнянь [37], для ДАС з періодичними коефіцієнтами [2, 150], для ДАС з іррегулярною особливою точкою [136, 152], для сингулярно збурених ДАС з імпульсним впливом [78] тощо.

Зазначимо, що в основу даної монографії покладено результати асимптотичного інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь, що опубліковані в [81, 94 – 102]. При цьому, на відміну від [102], матеріал монографії адаптовано до використання в навчальному процесі. Зокрема, розглядається лише випадок граничної регулярної в'язки матриць, достатні умови багатьох тверджень посилені, що призвело до суттєвих спрощень у доведеннях, робота доповнена значною кількістю прикладів.

Зупинимося на структурі монографії. Робота складається з трьох розділів.

У розділі I розглядається задача Коші

$$B(t) \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \in [0; T], \quad (19)$$

$$x(0) = x_0. \quad (20)$$

Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші для системи (19) відбувається за умови нескінченної диференційовності елементів $B(t)$ та компонент $f(x, t)$. Це дає змогу записати коефіцієнти системи (19) у вигляді формальних рядів за степенями незалежної змінної. Тоді, шукаючи розв'язок відповідної задачі Коші у такому ж самому вигляді, можна відмовитись від припущення про незмінність кронекерової структури граничної в'язки матриць на відрізку $[0; T]$, що присутня в працях [41, 144, 9, 11, 12, 92, 93].

Розділ II присвячено дослідженню асимптотичних властивостей розв'язку задачі Коші

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (21)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0. \quad (22)$$

Розв'язок задачі Коші для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (21) з малою нелінійністю за умови неособливої матриці $B(t, \varepsilon)$ побудував В.П. Яковець [149]. При цьому розглядався випадок простих нескінченних елементарних дільників граничної регулярної в'язки матриць, що значно спрощувало поставлену задачу. У даній роботі, використовуючи методи теорії ДАС, теорії асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь та теорії в'язок матриць, досліджено задачу Коші для системи (21) у загальному випадку.

Для системи (21) з періодичними коефіцієнтами доведено існування періодичного розв'язку і наведено його асимптотичне розв'язання. Зазначимо, що такі системи раніше не розглядались.

У розділі III здобуті вище результати узагальнюються для сингулярно збурених ДАС рівнянь з малим запізненням аргументу.

Зауважимо, що побудова розв'язку перелічених початкових задач наведеним способом можлива і у випадку, коли матриця при похідній в окремих точках змінює свій ранг.

Розділ I

Побудова асимптотичних формул для розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи рівнянь

1.1. Постановка задачі

У даному розділі досліджується задача Коші

$$B(t) \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \in [0; T], \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

де $x = x(t)$ – шуканий n -вимірний вектор, $B(t)$ – квадратна матриця n -го порядку, $f(x, t)$, x_0 – n -вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції.

1. Нехай:

а) елементи $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ мають достатню кількість похідних;

б) компоненти $f(x, t)$ на множині

$$\overline{D} = \{(x, t) : \|x\| \leq a, 0 \leq t \leq T\}, \|x_0\| < a,$$

мають достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними x та t .

Формальний розв'язок задачі (1.1), (1.2) будується у вигляді розвинення за степенями t . При цьому розроблений алгоритм суттєво залежить від кронекерової структури в'язки $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$, де $f_x(x_0, 0)$ – квадратна матриця n -го порядку, елементами якої є $\frac{\partial \{f(x, t)\}_i}{\partial x_j} \Big|_{(x, t) = (x_0, 0)}$, $i, j = \overline{1, n}$; $f(x, t) = colon(\{f(x, t)\}_1, \{f(x, t)\}_2, \dots, \{f(x, t)\}_n)$.

Зазначимо, що доведення асимптотичного характеру формального розв'язку задачі (1.1), (1.2) одночасно є доведенням існування та єдиності розв'язку цієї задачі, що має певні асимптотичні властивості.

Побудова розв'язку задачі Коші (1.1), (1.2) наведеним способом можлива і у випадку, коли ранг матриці $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ не є сталим.

1.2. Деякі допоміжні відомості

Нехай A та B – прямокутні матриці розмірів $m \times n$, елементами яких є дійсні або комплексні числа, λ – деякий параметр.

В'язку матриць $A - \lambda B$ називають регулярною, якщо мають місце наступні умови:

- 1) A та B – квадратні матриці одного порядку ($m = n$);
- 2) $\det(A - \lambda B) \neq 0$.

У решті випадків ($m \neq n$ або $m = n$, але $\det(A - \lambda B) \equiv 0$) в'язку $A - \lambda B$ називають сингулярною.

Нехай в'язка $A - \lambda B$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці P, Q , що

$$PAQ = \tilde{A} \equiv \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad PBQ = \tilde{B} \equiv \text{diag}\{J_q, E_p\}, \quad (1.3)$$

де E_q, E_p – одиничні матриці порядків q та p відповідно, $W_p = \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}$, $J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}$, $W_i, i = \overline{1, r}$, – квадратні матриці p_i -го порядку, що відповідають скінченним елементарним дільникам, $J_j, j = \overline{1, s}$, – квадратні матриці q_j -го порядку, що відповідають нескінченним елементарним дільникам, причому

$$W_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad J_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$i = \overline{1, r}; j = \overline{1, s}; \lambda_i, i = \overline{1, p}$, – корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda B) = 0, \quad (1.4)$$

$p = p_1 + \dots + p_r; q = q_1 + \dots + q_s$ [28, с. 334].

Корені рівняння (1.4) називаються власними значеннями в'язки $A - \lambda B$.

Твердження про зведення в'язки матриць до канонічного вигляду залишається справедливим і у випадку, коли елементи матриць A та B не є сталими.

Теорема 1.1. Якщо $A(t), B(t) \in C^m[0; T]$, в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна і на цьому відрізку зберігається кратність власних значень в'язки $A(t) - \lambda B(t)$ (коренів рівняння (1.4)) та її скінченних і нескінченних елементарних дільників, то існують неособливі матриці $P(t), Q(t) \in C^m[0; T]$, за допомогою яких в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ зводиться до канонічного вигляду (1.3) [93, с. 17].

Під $C^m[0; T]$ розумітимемо множину функцій, визначених на відрізку $[0; T]$, які мають на цьому відрізку неперервні похідні до m -го порядку включно.

Теорема 1.1 вимагає незмінності характеристик в'язки на проміжку визначення $A(t), B(t)$. Відповідь на питання про канонічний вигляд регулярної в'язки у випадку такої зміни дає наступна теорема.

Теорема 1.2. Нехай $A(t), B(t) \in C^m[0; T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \dots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої саме кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t), Q(t) \in C^m[0; t_0], t_0 \leq T$, що

$$P(t)A(t)Q(t) = \tilde{A}(t) \equiv \text{diag}\{E_q(t), W_p(t)\}; \quad (1.5)$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \tilde{B}(t) \equiv \text{diag}\{J_q(t), E_p(t)\}, \quad (1.6)$$

де

$$W_p(t) = \text{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\}; E_p(t) = \text{diag}\{E_1(t), \dots, E_r(t)\};$$

$$E_q(0) = E_q, E_i(0) = E_i, i = \overline{1, r}; J_q(0) = J_q \equiv \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\};$$

$$W_i(0) = W_i, i = \overline{1, r},$$

$$p = p_1 + \dots + p_r; q = q_1 + \dots + q_s.$$

Доведення. Нехай

$$A(t) = A(0) + D(t), B(t) = B(0) + F(t); \quad (1.7)$$

$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}(0) + U(t), \tilde{B}(t) = \tilde{B}(0) + V(t). \quad (1.8)$$

Тоді $D(0) = F(0) = U(0) = V(0) = 0$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що

$$A(0) = \tilde{A}(0), B(0) = \tilde{B}(0).$$

Матриці $P(t)$, $Q(t)$ визначаються із системи рівнянь

$$P(t)A(t)Q(t) = \tilde{A}(t), P(t)B(t)Q(t) = \tilde{B}(t). \quad (1.9)$$

Покладемо

$$P(t) = E + R(t), Q(t) = E + S(t), \quad (1.10)$$

де E – одинична матриця n -го порядку. За побудовою $R(0) = S(0) = 0$.

Підставляючи (1.7), (1.8), (1.10) до системи (1.9), дістаємо

$$\begin{aligned} &\tilde{A}(0)S(t) + R(t)\tilde{A}(0) + D(t) + D(t)S(t) + R(t)\tilde{A}(0)S(t) + \\ &+ R(t)D(t) + R(t)D(t)S(t) - U(t) = 0; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{B}(0)S(t) + R(t)\tilde{B}(0) + F(t) + F(t)S(t) + R(t)\tilde{B}(0)S(t) + \\ &+ R(t)F(t) + R(t)F(t)S(t) - V(t) = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Нехай

$$U(t) = \text{diag}\{U_q(t), U_p(t)\}, \quad U_p(t) = \text{diag}\{U_2(t), \dots, U_{r+1}(t)\},$$

$$V(t) = \text{diag}\{V_q(t), V_p(t)\}, \quad V_p(t) = \text{diag}\{V_2(t), \dots, V_{r+1}(t)\},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & \dots & D_{1,r+1}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & \dots & D_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{r+1,1}(t) & D_{r+1,2}(t) & \dots & D_{r+1,r+1}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & \dots & F_{1,r+1}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & \dots & F_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{r+1,1}(t) & F_{r+1,2}(t) & \dots & F_{r+1,r+1}(t) \end{pmatrix},$$

де $U_1(t) = U_q(t)$, $V_1(t) = V_q(t)$ та $U_i(t)$, $V_i(t)$, $i = \overline{2, r+1}$, – квадратні матриці відповідно q -го та p_i -го порядку; $D_{1j}(t)$, $F_{1j}(t)$ $j = \overline{2, r+1}$, та $D_{i1}(t)$, $F_{i1}(t)$, $i = \overline{2, r+1}$, – прямокутні матриці розмірів $q \times p_j$ та $p_i \times q$; $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$, $i, j = \overline{2, r+1}$, – прямокутні матриці розмірів $p_i \times p_j$.

Покладемо

$$S(t) = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}(t) & \dots & S_{1,r+1}(t) \\ S_{21}(t) & 0 & \dots & S_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{r+1,1}(t) & S_{r+1,2}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & R_{12}(t) & \dots & R_{1,r+1}(t) \\ R_{21}(t) & 0 & \dots & R_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{r+1,1}(t) & R_{r+1,2}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, r+1}$, – прямокутні матриці тих самих розмірів, що й $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$.

Тоді із системи (1.11), (1.12) дістаємо

$$\begin{aligned}
 U_i(t) &= D_{ii}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} D_{ij}(t) S_{ji}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) \tilde{A}_{jj}(0) S_{ji}(t) + \\
 &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) D_{ji}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} D_{jk}(t) S_{ki}(t), \\
 V_i(t) &= F_{ii}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} F_{ij}(t) S_{ji}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) \tilde{B}_{jj}(0) S_{ji}(t) + \\
 &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) F_{ji}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} R_{ij}(t) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} F_{jk}(t) S_{ki}(t),
 \end{aligned}$$

$i = \overline{1, r+1}$, та

$$\begin{aligned}
 &\tilde{A}_{ii}(0) S_{ij}(t) + R_{ij}(t) \tilde{A}_{jj}(0) + D_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r+1} D_{ik}(t) S_{kj}(t) + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{r+1} R_{ik}(t) \tilde{A}_{kk}(0) S_{kj}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} R_{ik}(t) D_{kj}(t) + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} R_{ik}(t) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{r+1} D_{kl}(t) S_{lj}(t) = 0; \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_{ii}(0) S_{ij}(t) + R_{ij}(t) \tilde{B}_{jj}(0) + F_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r+1} F_{ik}(t) S_{kj}(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{r+1} R_{ik}(t) \widetilde{B}_{kk}(0) S_{kj}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} R_{ik}(t) F_{kj}(t) + \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} R_{ik}(t) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{r+1} F_{kl}(t) S_{lj}(t) = 0, \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$i \neq j; i, j = \overline{1, r+1}$.

Згідно з [189] якобіан системи (1.13), (1.14) в точці $t = 0$ відмінний від нуля. А тому існує таке t_0 , $t_0 \leq T$, що система (1.13), (1.14) відносно $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, r+1}$, сумісна для всіх $t \in [0; t_0]$. При цьому $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t) \in C^m[0; t_0]$. Теорему доведено.

Припустимо, що елементи матриць $A(t)$ та $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ мають асимптотичні розвинення за степенями t , тобто

$$A(t) = \sum_{s \geq 0} A^{(s)} t^s, \quad B(t) = \sum_{s \geq 0} B^{(s)} t^s. \tag{1.15}$$

Тоді таку саму властивість матимуть елементи матриць $P(t)$ та $Q(t)$. Справді, шукатимемо $P(t)$ та $Q(t)$ у вигляді

$$P(t) = \sum_{s \geq 0} P^{(s)} t^s, \quad Q(t) = \sum_{s \geq 0} Q^{(s)} t^s, \tag{1.16}$$

з невизначеними поки що коефіцієнтами $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$, $s \geq 0$.

За побудовою

$$A(0) = A^{(0)}, \quad D(t) = \sum_{s \geq 1} A^{(s)} t^s,$$

$$B(0) = B^{(0)}, \quad F(t) = \sum_{s \geq 1} B^{(s)} t^s.$$

Нехай

$$P^{(0)} = E, \quad R(t) = \sum_{s \geq 1} P^{(s)} t^s,$$

$$Q^{(0)} = E, S(t) = \sum_{s \geq 1} Q^{(s)} t^s,$$

$$U(t) = \sum_{s \geq 1} U^{(s)} t^s, V(t) = \sum_{s \geq 1} V^{(s)} t^s.$$

Тоді, зрівнюючи в системі (1.11), (1.12) коефіцієнти при однакових степенях t , дістаємо

$$\begin{aligned} A^{(0)} Q^{(s)} + P^{(s)} A^{(0)} + A^{(s)} + \sum_{n=1}^{s-1} A^{(n)} Q^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} A^{(0)} Q^{(s-n)} + \\ + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} A^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)} A^{(l)} Q^{(s-n-l)} - U^{(s)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(0)} Q^{(s)} + P^{(s)} B^{(0)} + B^{(s)} + \sum_{n=1}^{s-1} B^{(n)} Q^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} B^{(0)} Q^{(s-n)} + \\ + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} B^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)} B^{(l)} Q^{(s-n-l)} - V^{(s)} = 0, \end{aligned}$$

де $s \in N$.

Вважаючи, що структура матриць $D(t)$, $F(t)$, $R(t)$ та $S(t)$ така сама, як в теоремі 1.2, аналогічно дістаємо

$$\begin{aligned} U_i^{(s)} = A_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} A_{ij}^{(s)} Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} A_{jj}^{(0)} Q_{ji}^{(s-n)} + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} A_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)} A_{jk}^{(l)} Q_{ki}^{(s-n-l)}, \\ V_i^{(s)} = B_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} B_{ij}^{(s)} Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} B_{jj}^{(0)} Q_{ji}^{(s-n)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} B_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)} B_{jk}^{(l)} Q_{ki}^{(s-n-l)},$$

$i = \overline{1, r+1}, s \in N, \tau a$

$$\begin{aligned} & A_{ii}^{(0)} Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)} A_{jj}^{(0)} + A_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} A_{ik}^{(n)} Q_{kj}^{(s-n)} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} A_{kk}^{(0)} Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} A_{kj}^{(s-n)} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)} A_{km}^{(l)} Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} & B_{ii}^{(0)} Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)} B_{jj}^{(0)} + B_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} B_{ik}^{(n)} Q_{kj}^{(s-n)} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} B_{kk}^{(0)} Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} B_{kj}^{(s-n)} + \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r+1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{r+1} \sum_{n=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)} B_{km}^{(l)} Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$i \neq j; i, j = \overline{1, r+1}; s \in N.$

А тому система (1.17), (1.18) відносно $Q_{ij}^{(s)}, P_{ij}^{(s)}, i \neq j; i, j = \overline{1, r+1}; s \in N$, сумісна для всіх $t \in [0; T]$ [124, с. 453 – 459].

Покладемо

$$P_m(t) = \sum_{s=0}^m P^{(s)} t^s, \quad Q_m(t) = \sum_{s=0}^m Q^{(s)} t^s.$$

За побудовою матриці $P_m(t)$, $Q_m(t)$ задовольняють систему (1.11), (1.12) з точністю $O(t^{m+1})$. Тоді з такою самою точністю задовольнятимуть зазначену систему і матриці $P(t) - P_m(t)$, $Q(t) - Q_m(t)$.

Нехай

$$\tilde{P}(t) = P(t) - P_m(t), \quad \tilde{Q}(t) = Q(t) - Q_m(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} A^{(0)}\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)A^{(0)} + D(t)\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)A^{(0)}\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)D(t) + \\ + \tilde{P}(t)D(t)\tilde{Q}(t) + O(t^{m+1}) = 0; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} B^{(0)}\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)B^{(0)} + F(t)\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)B^{(0)}\tilde{Q}(t) + \tilde{P}(t)F(t) + \\ + \tilde{P}(t)F(t)\tilde{Q}(t) + O(t^{m+1}) = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Оскільки система (1.19), (1.20) структурно ідентична системі (1.11), (1.12), то існує таке t_0 , $t_0 \leq T$, що система (1.19), (1.20) відносно $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Q}(t)$ сумісна для всіх $t \in [0; t_0]$. При цьому $\tilde{P}(t) = O(t^{m+1})$ та $\tilde{Q}(t) = O(t^{m+1})$.

Отже, на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, мають місце асимптотичні розвинення (1.16) [118, с. 15, 16].

Наслідок 1.1. Нехай елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ мають асимптотичні розвинення (1.15), в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \dots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої самої кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$, для яких справджуються рівності (1.6), (1.7). При цьому елементи $P(t)$, $Q(t)$ на відрізку $[0; t_0]$ мають асимптотичні розвинення (1.16).

Якщо деякі власні значення в'язки $A(0) - \lambda B(0)$ однакові, то аналогічно доводиться така теорема.

Теорема 1.3. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^m[0; T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$,

причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t), Q(t) \in C^m[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, що

$$P(t)A(t)Q(t) = \tilde{A}(t) \equiv \text{diag}\{E_q(t), W_p(t)\}; \quad (1.21)$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \tilde{B}(t) \equiv \text{diag}\{J_q(t), E_p(t)\}, \quad (1.22)$$

де

$$E_q(0) = E_q, E_p(0) = E_p; J_q(0) = J_q \equiv \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\};$$

$$W_p(0) = W_p \equiv \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\},$$

$$p = p_1 + \dots + p_r; q = q_1 + \dots + q_s.$$

Наслідок 1.2. Нехай елементи матриць $A(t), B(t)$ на відрізку $[0; T]$ мають асимптотичні розвинення (1.15), в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t), Q(t)$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$, для яких справджуються рівності (1.21), (1.22). При цьому елементи $P(t), Q(t)$ на відрізку $[0; t_0]$ мають асимптотичні розвинення (1.16).

Під нормою прямокутної матриці $A(t)$ розмірів $m \times n$, якщо не зазначено інше, розуміємо величину

$$\|A(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\{A(t)\}_{ij}|^2}, \quad (1.23)$$

де $\{A(t)\}_{ij}$ – відповідний елемент матриці $A(t)$.

1.3. Побудова формального розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи рівнянь

Для побудови формальних розвинень задачі (1.1), (1.2) вважаємо, що $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $f(x, t) \in C^\infty(\bar{D})$ (під $C^m(\bar{D})$ розуміємо множину функцій, визначених на $\bar{D}$, які мають на $\bar{D}$ неперервні частинні похідні за всіма змінними до m -го порядку включно).

Нехай в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник. Тоді існують такі неособливі матриці P, Q , що

$$Pf_x(x_0, 0)Q = \tilde{f}_x(x_0, 0) \equiv \text{diag}\{1, W_{n-1}\},$$

$$PB(0)Q = \tilde{B}(0) \equiv \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

$W_{n-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, λ_i , $i = \overline{1, n-1}$, – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)) = 0. \quad (1.24)$$

Покладаючи $x(t) = Qy(t)$, з (1.1), (1.2) дістаємо

$$\tilde{B}(t) \frac{dy}{dt} = g(y, t), \quad (1.25)$$

$$y(0) = y_0, \quad (1.26)$$

де $\tilde{B}(t) = PB(t)Q$, $g(y, t) = Pf(Qy, t)$, $y_0 = Q^{-1}x_0$.

Розв'язок задачі (1.25), (1.26) шукаємо у вигляді

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k t^k. \quad (1.27)$$

Запишемо функції $\tilde{B}(t)$ та $g(y(t), t)$ у вигляді формальних рядів за степенями t

$$\tilde{B}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k t^k, \quad g(y(t), t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k.$$

Тут, зокрема,

$$\tilde{B}_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k \tilde{B}(0)}{dt^k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$g_0 = g(y_0, 0),$$

$$g_k = g_y(y_0, 0)y_k + \bar{g}_k, \quad k \in N,$$

вектори $\bar{g}_k$ певним чином виражаються через y_s , $s < k$.

Підставимо (1.27) в (1.25) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях t :

$$\tilde{B}_0 y_1 = g(y_0, 0), \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} k \tilde{B}_0 y_k + (k-1) \tilde{B}_1 y_{k-1} &= g_y(y_0, 0) y_{k-1} - \\ &- \sum_{i=1}^{k-2} i \tilde{B}_{k-i} y_i + \bar{g}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.29)$$

Надалі припускаємо виконання наступних умов.

2. $\{g(y_0, 0)\}_1 = 0$.
3. $(k-1)(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 1$, $k = 2, 3, \dots$, де $\tilde{\varphi}$ та $\tilde{\psi}$ – елементи нуль-простору матриць $\tilde{B}_0$ та $\tilde{B}_0^*$ ($\tilde{B}_0^*$ – матриця, спряжена до $\tilde{B}_0$) відповідно. Для визначеності $\tilde{\varphi}$ та $\tilde{\psi}$ вважаються одиничними векторами.

Тоді

$$\{y_1\}_i = \{g(y_0, 0)\}_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Першу компоненту вектора y_1 знаходимо із системи (1.29), коли $k = 2$:

$$\{y_1\}_1 = -\frac{1}{\{\tilde{B}_1\}_{11} - 1} \left(\sum_{j=2}^n \{\tilde{B}_1\}_{1j} \{y_1\}_j + \{\bar{g}_1\}_1 \right).$$

Аналогічно із останніх $n-1$ рівнянь системи (1.29), коли $k = l$, знаходимо $\{y_l\}_i$, $i = \overline{2, n}$, а із першого рівняння (1.29) на наступному кроці ($k = l+1$) визначаємо $\{y_l\}_1$. Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 1.4. Якщо $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $f(x, t) \in C^\infty(\overline{D})$, в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n-1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник, а також виконуються умови 2, 3, то задача Коші (1.1), (1.2) має формальний розв'язок

$$x(t) = Q \left(y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k t^k \right). \quad (1.30)$$

Зауваження 1.1. Якщо у системі (1.1) $f(x, t) = A(t)x$, то для визначеної кронекерової структури в'язки $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ умова 2 набуває вигляду $\{y_0\}_1 = 0$, що є однією з достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних [12, с. 165].

Нехай тепер регулярна в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ має один скінченний і один нескінченний елементарні дільники, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , $p + q = n$. Тоді, як і в попередньому випадку, приходимо до системи (1.28) (1.29), в якій

$$g_y(y_0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad \tilde{B}_0 = \text{diag}\{J_q, E_p\},$$

де $W_p = \lambda_0 E_p + J_p$, λ_0 – корінь рівняння (1.24).

Нехай виконуються такі умови:

4. Нехай $\{g(y_0, 0)\}_q = 0$.
5. $(k-1)(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - \delta_{1q} \neq 0$, $k = 2, 3, \dots$, де δ_{1q} – символ Кронекера.

Тоді система (1.28), (1.29) сумісна. Таким чином, справджується теорема.

Теорема 1.5 Якщо $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $f(x, t) \in C^\infty(\overline{D})$, в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ регулярна, має один скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , $p + q = n$, а також виконуються умови 4, 5, то задача Коші (1.1), (1.2) має формальний розв'язок (1.30).

Розглянемо загальний випадок для регулярної в'язки. Отже, нехай в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді

$$g_y(y_0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad \tilde{B}_0 = \text{diag}\{J_q, E_p\},$$

де $W_p = \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}$, $J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

Для сумісності систем (1.28), (1.29) мають виконуватися наступні умови.

6. $\{g(y_0, 0)\}_{q_1 + \dots + q_j} = 0$, $j = \overline{1, s}$.

7.

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \delta_{1q_1} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{s1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \delta_{1q_2} & \dots & \alpha_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1s} & \alpha_{2s} & \dots & \alpha_{ss} - \delta_{1q_s} \end{pmatrix} \neq 0,$$

де $\alpha_{ij} = (k-1)(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_j)$, $k = 2, 3, \dots$; $i, j = \overline{1, s}$; $\tilde{\varphi}_j$ та $\tilde{\psi}_j$, $j = \overline{1, s}$, – одиничні вектори, які є елементами нуль-простору матриць $\tilde{B}_0$ та $\tilde{B}_0^*$ відповідно.

Теорема 1.6. Якщо $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $f(x, t) \in C^\infty(\overline{D})$, в'язка $f_x(x_0, 0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $q_j \geq 2$, $j = \overline{1, s}$, $p+q = n$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$, а також виконуються умови 6, 7, то задача Коші (1.1), (1.2) має формальний розв'язок (1.30).

1.4. Асимптотичний характер формальних розв'язків

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованих вище формальних розв'язків задачі Коші (1.1), (1.2).

Нехай мають місце умови теореми 1.4. Покладемо

$$y(t) = y_{m+1}(t) + z(t),$$

де

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{m+1} y_k t^k.$$

За побудовою вектор-функція $z(t)$ має бути розв'язком задачі

$$\tilde{B}(t) \frac{dz}{dt} = g_y(y_0, 0)z + h(z, t), \quad (1.31)$$

$$z(0) = 0, \quad (1.32)$$

де

$$h(z, t) = g(y_{m+1}(t) + z, t) - \tilde{B}(t) \frac{dy_{m+1}(t)}{dt} - g_y(y_0, 0)z.$$

Зазначимо, що $h(0, t) = O(t^{m+2})$, $t \in [0; T]$.

Згідно із структурою в'язки $g_y(y_0, 0) - \lambda \tilde{B}_0$ існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Q}(t)$, що

$$\tilde{P}(t)g_y(y_0, 0)\tilde{Q}(t) = \tilde{g}_y(y_0, t) \equiv \text{diag}\{e(t), W_{n-1}(t)\},$$

$$\tilde{P}(t)\tilde{B}(t)\tilde{Q}(t) = \tilde{\tilde{B}}(t) \equiv \text{diag}\{b(t), E_{n-1}(t)\},$$

$t \in [0; t_1]$, $t_1 \leq T$, де $b(0) = 0$; $E_{n-1}(0) = E_{n-1}$, $e(0) = 1$; $W_{n-1}(0) = W_{n-1}$.

Нехай $z(t) = \tilde{Q}(t)u(t)$. Тоді задача (1.31), (1.32) еквівалентна задачі

$$\tilde{\tilde{B}}(t) \frac{du}{dt} = \tilde{g}_y(y_0, t)u + w(u, t), \quad (1.33)$$

$$u(0) = 0, \quad (1.34)$$

де $w(u, t) = \tilde{P}(t)h(\tilde{Q}(t)u, t) - \tilde{\tilde{B}}(t)\tilde{Q}^{-1}(t)Q'(t)u$.

Позначимо через u_1 та w_1 перші компоненти векторів u та w , а через u_2 та w_2 вектори, що містять решту компонент u та w . Тоді система (1.33) набуде вигляду

$$b(t) \frac{du_1}{dt} = e(t)u_1 + w_1(u, t); \quad (1.35)$$

$$E_{n-1}(t) \frac{du_2}{dt} = W_{n-1}(t)u_2 + w_2(u, t). \quad (1.36)$$

Нехай $(\tilde{B}_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ (випадок А). Тоді існує таке t_2 , $t_2 \leq t_1$, що $b(t) = tc(t)$, $c(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$; $e(t) \neq 0$ і $\det E_{n-1}(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$.

Запишемо систему інтегральних рівнянь, еквівалентну (1.35), (1.36), (1.34), на відрізьку $[0; t_2]$:

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau c(\tau)} \exp \left(\int_\tau^t \frac{e(s)}{sc(s)} ds \right) w_1(u, \tau) d\tau; \quad (1.37)$$

$$u_2(t) = \int_0^t E_{n-1}^{-1}(\tau) (W_{n-1}(\tau)u_2 + w_2(u, \tau)) d\tau. \quad (1.38)$$

Нехай $\operatorname{Re} \frac{e(t)}{c(t)} \leq 0, t \in [0; t_2]$. Оскільки

$$\begin{aligned} w(v_1, t) - w(v_2, t) &= \tilde{P}(t)(h(\tilde{Q}(t)v_1, t) - h(\tilde{Q}(t)v_2, t)) - \\ &- \tilde{\tilde{B}}(t)\tilde{Q}^{-1}(t)Q'(t)(v_1 - v_2) = \tilde{P}(t)(g(y_{m+1}(t) + \tilde{Q}(t)v_1, t) - \\ &- g(y_{m+1}(t) + \tilde{Q}(t)v_2, t) - g_y(y_0, 0)\tilde{Q}(t)(v_1 - v_2)) - \\ &- \tilde{\tilde{B}}(t)\tilde{Q}^{-1}(t)Q'(t)(v_1 - v_2) = \\ &= \tilde{P}(t)(g'_y(y_{m+1}(t) + \tilde{Q}(t)v_1 + \theta_{ij}\tilde{Q}(t)(v_1 - v_2), t) - g_y(y_0, 0)) \times \\ &\times \tilde{Q}(t)(v_1 - v_2) - \tilde{\tilde{B}}(t)\tilde{Q}^{-1}(t)Q'(t)(v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$0 < \theta_{ij} < 1; i, j = \overline{1, n}$, то з урахуванням структури $\tilde{\tilde{B}}(t)$ існує така стала $k_0 > 0$, що

$$|w_1(v_1, t) - w_1(v_2, t)| \leq k_0 t \|v_1 - v_2\|; \quad (1.40)$$

$$\|w_2(v_1, t) - w_2(v_2, t)\| \leq k_0 \|v_1 - v_2\| \quad (1.41)$$

для всіх $v_1, v_2 \in S_{m+1}$,

$$S_{m+1} = \{u(t) \in C[0; t_0] : \|u(t)\| \leq k_1 t^{m+1}\}, \quad t_0 \leq t_2,$$

де k_1 – деяка стала.

Нехай

$$t_0 < \min \left\{ 1, \frac{2}{M_1(1 + k_0)} \right\},$$

де

$$\max_{t \in [0; t_2]} \left\{ \frac{1}{|c(t)|}, \|E_{n-1}^{-1}(t)\|, \|E_{n-1}^{-1}(t)W_{n-1}(t)\| \right\} \leq M_1.$$

Тоді для достатньо великих k_1 оператор, що визначений за допомогою (1.37), (1.38), відображає множину S_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (1.37), (1.38) на множині S_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 1.7. Нехай $B(t) \in C^{m+1}[0; T]$, $f(x, t) \in C^{m+1}(\overline{D})$, а також виконуються умови теореми 1.4, причому $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ і $\operatorname{Re} \frac{e(t)}{c(t)} \leq 0$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$. Тоді задача Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$, для якого

$$||x(t) - x_m(t)|| \leq ct^{m+1}, \quad t \in [0; t_0], \quad (1.42)$$

де $x_m(t) = Qy_m(t)$.

Зауваження 1.2. Теорема 1.7 містить достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$, що має певну асимптотичну оцінку. Оскільки, взагалі кажучи, $t_0 \leq T$, то для побудови асимптотичного розв'язку зазначеної задачі на відрізку $[0; T]$, припускаючи, наприклад, що кронекерева структура в'язки $A(t) - \lambda B(t)$ залишається незмінною для всіх $t \in [t_0; T]$, можна скористатись методами [9, 11, 13, 93].

Нехай $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0$, але існує таке $k \geq 2$, що $(\tilde{B}_k \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ (випадок В). Тоді $b(t) = t^l c(t)$, $c(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$, $2 \leq l \leq k$.

У системі (1.25) покладемо

$$y(t) = y_{m+1}(t) + z(t),$$

де

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{m+1} y_k t^k.$$

Рівняння, аналогічне до (1.37), має вигляд

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau^l c(\tau)} \exp \left(\int_\tau^t \frac{e(s)}{s^l c(s)} ds \right) w_1(u, \tau) d\tau. \quad (1.43)$$

Припустимо, що $\operatorname{Re} \frac{e(t)}{c(t)} < 0$, $t \in [0; t_2]$. Тоді, інтегруючи частинами (1.43), показуємо існування такого t_0 , $t_0 \leq t_2$, що оператор, заданий за допомогою (1.43), (1.38) на множині S_{m+1} задовольняє умови теореми про існування та єдиність нерухомої точки [47, с. 609].

Наслідок 1.3. Нехай $B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, t) \in C^{m+2}(\overline{D})$, а також виконуються умови теореми 1.4, причому для деякого $k \geq 2$ $(\tilde{B}_k \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ і $\operatorname{Re} \frac{e(t)}{c(t)} < 0$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$. Тоді задача Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$, для якого справджується оцінка (1.42).

Зауваження 1.3. Взагалі кажучи, для фіксованого m , $t_0 = t_0(t)$. Але $\inf_{t \in [0; t_0]} t_0(t) \geq c > 0$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості такого твердження.

Наслідок 1.4. Нехай виконуються умови теореми 1.7, причому $b(t) \equiv 0$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$ (випадок С). Тоді задача Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$, для якого справджується оцінка (1.42).

Зауваження 1.4. Якщо елементи матриці $\tilde{B}(t)$ в околі точки $t = 0$ можна розкласти в ряд Тейлора, то випадки А, В, С вичерпують всі можливі варіанти.

Нехай мають місце умови теореми 1.5. Тоді існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Q}(t)$, що

$$\tilde{P}(t)g_y(y_0, 0)\tilde{Q}(t) = \tilde{g}_y(y_0, t) \equiv \operatorname{diag}\{E_q(t), W_p(t)\},$$

$$\tilde{P}(t)\tilde{B}(t)\tilde{Q}(t) = \tilde{\tilde{B}}(t) \equiv \operatorname{diag}\{J_q(t), E_p(t)\},$$

$t \in [0; t_1]$, де $J_q(0) = J_q$, $E_p(0) = E_p$, $E_q(0) = E_q$, $W_p(0) = W_p$.

У даному випадку у системі (1.25) покладемо

$$y(t) = y_{m+l}(t) + z(t),$$

де $y_{m+l}(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{m+l} y_k t^k$, число $l \in N \cup \{0\}$ визначається пізніше.

Позначимо через u_1 та w_1 вектори, що містять q перших компонент векторів u та w , а через u_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент u та w . Тоді система, аналогічна (1.35), (1.36), має вигляд

$$J_q(t) \frac{du_1}{dt} = E_q(t)u_1 + w_1(u, t); \quad (1.44)$$

$$E_p(t) \frac{du_2}{dt} = W_p(t)u_2 + w_2(u, t). \quad (1.45)$$

Нехай $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$. Тоді існує таке t_2 , $t_2 \leq T$, що $\{J_q(t)\}_{q1} = tj(t)$, $j(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$; $\det E_q(t) \neq 0$ і $\det E_p(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$.

Запишемо систему інтегральних рівнянь, еквівалентну (1.44), (1.45), (1.34), на відрізок $[0; t_2]$:

$$u_1(t) = \int_0^t J_q^{-1}(\tau) (E_q(\tau)u_1 + w_1(u, \tau)) d\tau; \quad (1.46)$$

$$u_2(t) = \int_0^t E_p^{-1}(\tau) (W_p(\tau)u_2 + w_2(u, \tau)) d\tau, \quad (1.47)$$

де $u(t) \in S_{m+l+1}$, $S_{m+l+1} = \{u(t) \in C[0; t_2] : \|u(t)\| \leq k_1 t^{m+l+1}\}$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\max_{t \in [0; t_2]} \{t \|J_q^{-1}(t)E_q(t)\|, \|E_p^{-1}(t)W_p(t)\|\} \leq M_2, \quad (1.48)$$

$$\|diag\{J_q^{-1}(t), E_p^{-1}(t)\}(w(v_1, t) - w(v_2, t))\| \leq k_0 \|v_1 - v_2\|, \quad (1.49)$$

$$\max_{t \in [0; t_2]} \{t \|J_q^{-1}(t)w_1(0, t)\|, \|E_p^{-1}(t)w_2(0, t)\|\} \leq M_3 t^{m+l+1}, \quad (1.50)$$

для всіх $v_1, v_2 \in S_{m+l+1}$.

Для доведення існування та єдиності розв'язку задачі (1.46), (1.47) на відрізок $[0; t_2]$ скористаємось методом послідовних наближень. Визначимо останні за формулами

$$u^{(0)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0; t_2],$$

$$u_1^{(k)}(t) = \int_0^t J_q^{-1}(\tau) \left(E_q(\tau) u_1^{(k-1)} + w_1(u^{(k-1)}, \tau) \right) d\tau; \quad (1.51)$$

$$u_2^{(k)}(t) = \int_0^t E_p^{-1}(\tau) \left(W_p(\tau) u_2^{(k-1)} + w_2(u^{(k-1)}, \tau) \right) d\tau, \quad k \in N. \quad (1.52)$$

Якщо число l підібрати так, щоб $\sigma = \frac{M_2 + k_0}{m + l + 1} < 1$, то для достатньо великих k_1 $u^{(k)}(t) \in S_{m+l+1}$, $k \in N$.

За побудовою

$$\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\| \leq \sigma^{k-1} k_1 t^{m+l+1}, \quad k \in N.$$

А тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t))$ на відрізку $[0; t_2]$ збігається рівномірно та абсолютно. Позначимо його суму через $u(t)$. Оскільки

$$u^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^k (u^{(i)}(t) - u^{(i-1)}(t)),$$

то $u^{(k)}(t) \rightarrow u(t)$, $t \in [0; t_2]$, $k \rightarrow \infty$.

Враховуючи неперервність наближень $u^{(k)}(t)$, $k \in N$ (в точці $t = 0$ підінтегральну функцію у (1.51) можна довизначити за неперервністю), приходимо до висновку, що функція $u = u(t)$ є розв'язком (1.46), (1.47), причому $u(t) \in S_{m+l+1}$.

Покажемо, що система (1.46), (1.47) на множині S_{m+l+1} має єдиний розв'язок. Для цього скористаємось методом доведення від супротивного.

Запишемо систему (1.46) у координатній формі

$$\{u_1(t)\}_1 = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{q-1} (\{J_q^{-1}(\tau) E_q(\tau)\}_{1j} \{u_1\}_j + \{J_q^{-1}(\tau)\}_{1j} \{w_1(u, \tau)\}_j) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \{J_q^{-1}(\tau)E_q(\tau)\}_{1q} \int_0^\tau \sum_{j=1}^q (\{J_q^{-1}(s)E_q(s)\}_{qj} \{u_1\}_j + \\
& + \{J_q^{-1}(s)\}_{qj} \{w_1(u, s)\}_j) ds + \{J_q^{-1}(\tau)\}_{1q} \{w_1(u, \tau)\}_q \Big) d\tau; \quad (1.53)
\end{aligned}$$

$$\{u_1(t)\}_i = \int_0^t \sum_{j=1}^q (\{J_q^{-1}(\tau)E_q(\tau)\}_{ij} \{u_1\}_j + \{J_q^{-1}(\tau)\}_{ij} \{w_1(u, \tau)\}_j) d\tau, \quad (1.54)$$

$i = \overline{2, q}$.

Нехай $u = u(t)$ та $v = v(t)$ – розв'язки (1.53), (1.54), (1.47) причому $u(t), v(t) \in S_{m+l+1}$. Вважатимемо, що $u(t) \not\equiv v(t)$, $t \in [0; t_2]$. Нехай $u(t) \not\equiv v(t)$, $t \in [0; \delta]$, де δ – як завгодно мале число.

Покладемо

$$\theta = \max_{t \in [0; \delta]} \|u(t) - v(t)\|,$$

тобто для деякого $t^* \in [0; \delta]$

$$\|u(t^*) - v(t^*)\| = \theta.$$

Тоді з (1.53), (1.54), (1.47) дістаємо

$$\theta \leq (2qM_2 + (2q + 1)k_0 + (M_2 + k_0)M_2q)\delta\theta.$$

Таким чином,

$$\delta \geq \frac{1}{2qM_2 + (2q + 1)k_0 + (M_2 + k_0)M_2q},$$

що суперечить вибору δ .

Якщо ж $u(t) \equiv v(t)$, $t \in [0; \delta]$, то потрібно розглянути відрізок $[\alpha; \beta] \subset [0; t_2]$ такий, що $u(t) \equiv v(t)$, $t \in [0; \alpha]$, і $u(t) \not\equiv v(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, причому число β – як завгодно мале.

Таким чином, задача (1.46), (1.47), а тому й задача (1.31), (1.32) на множині S_{m+l+1} має єдиний розв'язок. Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 1.8. Нехай $B(t) \in C^{m+1}[0; T]$, $f(x, t) \in C^{m+1}(\overline{D})$, а також виконуються умови теореми 1.5, причому $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$. Тоді задача Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t)$, для якого

$$\|x(t) - x_{m+l}(t)\| \leq ct^{m+l+1}, \quad t \in [0; t_0], \quad (1.55)$$

де $x_{m+l}(t) = Qy_{m+l}(t)$.

Розглянемо загальний випадок для регулярної в'язки матриць. При цьому припускаємо виконання умов теореми 1.6. У даному випадку

$$J_q(0) = J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}; \quad E_q(0) = E_q, \quad E_p(0) = E_p;$$

$$W_p(0) = W_p \equiv \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}.$$

Нехай $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j) \neq 0$, $j = \overline{1, s}$. Тоді

$$\{J_q(t)\}_{j_{q_1+\dots+q_i, q_1+\dots+q_{i-1}+1}} = t j_{q_1+\dots+q_i, q_1+\dots+q_{i-1}+1}(t), \quad i = \overline{1, s},$$

де $j_{q_1+\dots+q_i, q_1+\dots+q_{i-1}+1}(t) \neq 0$, $t \in [0; t_2]$, $i = \overline{1, s}$.

При розщепленні дістанемо одну систему типу (1.46) та p систем типу (1.47). Оскільки і у цьому випадку мають місце оцінки (1.48) – (1.50), то справедливою є така теорема.

Теорема 1.9. Нехай $B(t) \in C^{m+1}[0; T]$, $f(x, t) \in C^{m+1}(\overline{D})$, а також виконуються умови теореми 1.6, причому $(\tilde{B}_1 \tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j) \neq 0$, $j = \overline{1, s}$. Тоді задача Коші (1.1), (1.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t)$, для якого справджується оцінка (1.55).

Приклад 1.1. Розглянемо задачу Коші

$$\tilde{B}(t) \frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad t \in [0; 1],$$

$$y(0) = y_0,$$

де

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{pmatrix}, \quad g(y, t) = \begin{pmatrix} y_1 + y_1^3 y_2^2 - 1 - t \\ y_2 + y_2^3 + y_1 t \\ y_3^2 + y_1 y_3 t^2 \end{pmatrix},$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно алгоритму, наведеного в теоремі 1.4, дістаємо

$$y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у даному випадку $b(t) = -t$, $e(t) = 1$ та

$$w_1(u, t) = \left(1 - \frac{t}{2} + u_1\right)^3 \left(\frac{1}{2}t^2 + u_2\right)^2 - t,$$

тобто виконуються умови теореми 1.7, то задана задача Коші на відрізьку $[0; t_0]$, $t_0 \leq 1$, має єдиний розв'язок $y = y(t)$, для якого

$$\|y(t) - y_2(t)\| \leq ct^3, \quad t \in [0; t_0],$$

де $y_2(t) = y_0 + ty_1 + t^2y_2$.

Розділ II

Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь

2.1. Постановка задачі

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (2.1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad (2.2)$$

де $x = x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $B(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця n -го порядку, $f(x, t, \varepsilon)$, x_0 – n -вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, – малий параметр.

1. Нехай:

а) елементи $B(t, \varepsilon)$ на множині

$$\overline{K} = \{(t, \varepsilon) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

мають достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними t та ε ;

б) компоненти $f(x, t, \varepsilon)$ на множині

$$\overline{G} = \{(x, t, \varepsilon) : \|x\| \leq a, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}, \quad \|x_0\| < a,$$

мають достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними x , t та ε .

Формальний розв'язок задачі (2.1), (2.2) будемо у вигляді суми

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon)$ (регулярна частина асимптотики) та $\Pi x(\tau, \varepsilon)$ (сингулярна частина асимптотики) – розвинення за степенями ε [22, с. 48].

Зазначимо, що, як і в розділі I, побудова розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2) викладеним нище способом можлива і у випадку, коли ранг матриці $B(t, \varepsilon)$ на відрізку $[0; T]$ не є сталим.

У цьому розділі також доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв'язку системи (2.1) у випадку, коли її коефіцієнти періодичні за змінною t з періодом T .

2.2. Деякі допоміжні відомості

Узагальнимо теореми п. 1.2 про зведення в'язки матриць зі змінними елементами до канонічного вигляду.

Теорема 2.1. Нехай $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon) \in C^m(\bar{K})$, в'язка $A(0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \dots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої саме кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t, \varepsilon), Q(t, \varepsilon) \in C^m(\bar{K}_1)$ ($((0, 0) \in \bar{K}_1 \subset \bar{K})$, що

$$P(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\}, \quad (2.4)$$

$$W_p(t, \varepsilon) = \text{diag}\{W_1(t, \varepsilon), \dots, W_r(t, \varepsilon)\};$$

$$P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\}, \quad (2.5)$$

$$E_p(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_1(t, \varepsilon), \dots, E_r(t, \varepsilon)\},$$

де

$$E_q(0, 0) = E_q, \quad E_i(0, 0) = E_i, \quad i = \overline{1, r};$$

$$J_q(0,0) = J_q \equiv \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}; \quad W_i(0,0) = W_i, \quad i = \overline{1, r},$$

$$p = p_1 + \dots + p_r, \quad q = q_1 + \dots + q_s.$$

Доведення. Скористаємося схемою доведення теореми 1.2. Отже, нехай

$$A(t, \varepsilon) = A(0,0) + D(t, \varepsilon), \quad B(t, \varepsilon) = B(0,0) + F(t, \varepsilon);$$

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = \tilde{A}(0,0) + U(t, \varepsilon), \quad \tilde{B}(t, \varepsilon) = \tilde{B}(0,0) + V(t, \varepsilon).$$

Тоді $D(0,0) = F(0,0) = U(0,0) = V(0,0) = 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$A(0,0) = \tilde{A}(0,0), \quad B(0,0) = \tilde{B}(0,0).$$

Покладемо

$$P(t, \varepsilon) = E + R(t, \varepsilon), \quad Q(t, \varepsilon) = E + S(t, \varepsilon).$$

Як і раніше, матриці $R(t, \varepsilon)$, $S(t, \varepsilon)$ визначаються із системи рівнянь

$$P(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, \varepsilon), \quad P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Вважаючи, що матриці $R(t, \varepsilon)$ та $S(t, \varepsilon)$ мають таку саме структуру, що й в теоремі 1.2, аналогічно показуємо сумісність системи (2.6) на множині $\overline{K}_1$. Теорему доведено.

Якщо деякі власні значення в'язки $A(0,0) - \lambda B(0,0)$ однакові, то аналогічно доводиться така теорема.

Теорема 2.2. Нехай $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(0,0) - \lambda B(0,0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників кратності $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K}_1)$ ($(0,0) \in \overline{K}_1 \subset \overline{K}$), що

$$P(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\}; \quad (2.7)$$

$$P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\}, \quad (2.8)$$

де

$$E_q(0,0) = E_q, E_p(0,0) = E_p; J_q(0,0) = J_q \equiv \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\};$$

$$W_p(0,0) = W_p \equiv \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\},$$

$$p = p_1 + \dots + p_r, q = q_1 + \dots + q_s.$$

Нехай тепер кронекерова структура в'язки $A(t,0) - \lambda B(t,0)$ залишається незмінною на відрізку $[0; T]$. Тоді справедливим є таке твердження.

Наслідок 2.1. Нехай $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(t,0) - \lambda B(t,0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \dots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої саме кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t, \varepsilon), Q(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K}_2)$,

$$\overline{K}_2 = \{(t, \varepsilon) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1\}, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

для яких мають місце рівності (2.4), (2.5).

Доведення. Покладемо

$$A(t, \varepsilon) = A(t, 0) + D(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon) = B(t, 0) + F(t, \varepsilon);$$

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = \tilde{A}(t, 0) + U(t, \varepsilon), \tilde{B}(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, 0) + V(t, \varepsilon).$$

Тоді $D(t,0) = F(t,0) = U(t,0) = V(t,0) = 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$A(t,0) = \tilde{A}(t,0), B(t,0) = \tilde{B}(t,0),$$

де

$$\tilde{A}(t,0) = \text{diag}\{E_q, W_p(t)\}, \tilde{B}(t,0) = \text{diag}\{J_q, E_p\},$$

$$W_p(t) = \text{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\}, W_i(t) = \lambda_i(t)E_i + J_i, i = \overline{1, r}.$$

Поклавши

$$P(t, \varepsilon) = E + R(t, \varepsilon), Q(t, \varepsilon) = E + S(t, \varepsilon)$$

і вважаючи, що матриці $R(t, \varepsilon)$ та $S(t, \varepsilon)$ мають таку саме структуру, що й в теоремі 1.2, аналогічно показуємо сумісність системи (2.6) на множині $\overline{K}_2$.

Наслідок 2.2. Нехай на множині $\overline{K}$ елементи $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} A_s(t) \varepsilon^s, \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} B_s(t) \varepsilon^s$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m -го порядку включно, в'язка $A(t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \dots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої самої кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \dots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, $(t, \varepsilon) \in \overline{K}_2$, для яких справджуються рівності (2.4), (2.5). При цьому компоненти $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$ на множині $\overline{K}_2$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} P_s(t) \varepsilon^s, \quad Q(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} Q_s(t) \varepsilon^s,$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m -го порядку включно.

Наслідок 2.3. Нехай $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(t, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K}_2)$, для яких мають місце рівності (2.7), (2.8).

Наслідки 2.1, 2.3 можна узагальнити на випадок періодичних елементів вихідних матриць.

Функцію $f(t, \varepsilon)$, періодичну за змінною t з періодом T , називатимемо T -періодичною.

Наслідок 2.4. Нехай виконуються умови наслідку 2.2 і елементи матриць $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ T -періодичні. Тоді існують неособливі T -періодичні матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K}_2)$, для яких мають місце рівності (2.4), (2.5).

Наслідок 2.5. Нехай виконуються умови наслідку 2.3 і елементи матриць $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ T -періодичні. Тоді існують неособливі T -періодичні матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^m(\overline{K}_2)$, для яких мають місце рівності (2.7), (2.8).

2.3. Побудова розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь

2.3.1. Некритичний випадок. Будуючи формальний розв'язок задачі (2.1), (2.2), вважатимемо, що $B(t, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{G})$.

2. Нехай рівняння $f(x, t, 0) = 0$ відносно x має розв'язок $x = \overline{x}_0(t)$, який задовольняє умови:

а) $\overline{x}_0(t) \in C[0; T]$;

б) точки $(\overline{x}_0(t), t) \in \overline{D}$, коли $t \in [0; T]$;

в) корінь $x = \overline{x}_0(t)$ є ізолюваним на відрізку $[0; T]$, тобто існує таке $\eta > 0$, що $f(x, t, 0) \neq 0$ коли $0 < \|x - \overline{x}_0(t)\| < \eta$, $t \in [0; T]$.

Припустимо, що в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник. Тоді існують такі неособливі матриці P , Q , що

$$Pf_x(\overline{x}_0(0), 0, 0)Q = \text{diag}\{1, W_{n-1}\}, \quad PB(0, 0)Q = \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, λ_i , $i = \overline{1, n-1}$, – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(\overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)) = 0. \quad (2.9)$$

У системі (2.1) покладемо $x(t, \varepsilon) = Qy(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на P . Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = g(y, t, \varepsilon), \quad (2.10)$$

де $\tilde{B}(t, \varepsilon) = PB(t, \varepsilon)Q$, $g(y, t, \varepsilon) = Pf(Qy, t, \varepsilon)$.

Початкова умова (2.2) при цьому набуде вигляду

$$y(0, \varepsilon) = Q^{-1}x_0 \equiv y_0, \quad (2.11)$$

Надалі розглядаємо задачу (2.10), (2.11).

Формальний розв'язок задачі (2.10), (2.11) шукаємо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \quad (2.12)$$

де $\bar{y}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{y}_s(t)$ – регулярна частина асимптотики; $\Pi y(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s y(\tau)$ – сингулярна частина асимптотики, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ [22, с. 48].

Підставимо (2.12) до системи (2.10)

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{d\bar{y}}{dt} + \tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) \frac{d\Pi y}{d\tau} = g(\bar{y} + \Pi y, t, \varepsilon) \quad (2.13)$$

і подамо $g(\bar{y} + \Pi y, t, \varepsilon)$ у вигляді

$$g(\bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), t, \varepsilon) = \bar{g}(t, \varepsilon) + \Pi g(\tau, \varepsilon),$$

де

$$\bar{g}(t, \varepsilon) = g(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$\Pi g(\tau, \varepsilon) = g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Зобразимо вектор-функції $\bar{g}(t, \varepsilon)$ та $\Pi g(\tau, \varepsilon)$ у вигляді формальних рядів за степенями ε :

$$\begin{aligned} \bar{g}(t, \varepsilon) &= g(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = g(\bar{y}_0(t), t, 0) + \\ &+ \varepsilon(\bar{g}_y(t)\bar{y}_1(t) + g_1(t)) + \dots + \varepsilon^s(\bar{g}_y(t)\bar{y}_s(t) + g_s(t)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{g}_s(t), \end{aligned}$$

де елементи матриці $\bar{g}_y(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,n}$ обчислюються в точці $(\bar{y}_0(t), t, 0)$, а вектори $g_s(t)$ певним чином виражаються через $\bar{y}_k(t)$, $k < s$;

$$\Pi g(\tau, \varepsilon) = g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) =$$

$$= g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0) - g(\bar{y}_0(0), 0, 0) + \varepsilon(g_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + G_1(\tau)) + \\ + \dots + \varepsilon^s(g_y(\tau)\Pi_s y(\tau) + G_s(\tau)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s g(\tau),$$

де елементи матриці $g_y(\tau)$ обчислюються в точці $(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, а вектори $G_s(\tau)$ певним чином виражаються через $\Pi_k y(\tau)$, $k < s$.

Аналогічним чином записуємо матрицю $\tilde{B}(t, \varepsilon)$,

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{1}{s!} \frac{\partial^s \tilde{B}(t, 0)}{\partial \varepsilon^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{B}_s(t),$$

$$\tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{i=0}^s \frac{1}{i!(s-i)!} \frac{\partial^s \tilde{B}(0, 0)}{\partial t^{s-i} \partial \varepsilon^i} \tau^{s-i} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s B(\tau).$$

У системі (2.13) зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ :

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{g}(t, \varepsilon); \quad (2.14)$$

$$\tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) \frac{d\Pi y}{d\tau} = \Pi g(\tau, \varepsilon). \quad (2.15)$$

У тотожностях (2.14), (2.15) зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε . Зокрема, при ε^0 маємо

$$g(\bar{y}_0(t), t, 0) = 0; \quad (2.16)$$

$$\tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0, 0) - g(\bar{y}_0(0), 0, 0). \quad (2.17)$$

Згідно із припущенням 2, система (2.16) має розв'язок $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t)$. А тому система (2.17) набуде вигляду

$$\tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0, 0). \quad (2.18)$$

Позначимо через $\Pi_{01} y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, y_{01} перші компоненти векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$

та y_0 відповідно, а через $\Pi_{02}y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, y_{02} – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 .

Надалі робимо такі припущення.

3. Рівняння $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0y, 0, 0) = 0$ має розв'язок $\Pi_{01}y = \Pi_{01}y(\Pi_{02}y)$, неперервний в області зміни параметра $\Pi_{02}y$, для якого виконуються умови:

- а) $\Pi_{01}y(\Pi_{02}y) \rightarrow 0$, $\Pi_{02}y \rightarrow 0$;
- б) $\Pi_{01}y(y_{02} - \bar{y}_{02}(0)) = y_{01} - \bar{y}_{01}(0)$.

4. Система

$$\frac{d\Pi_{02}y}{d\tau} = g_2(\bar{y}_{01}(0) + \Pi_{01}y(\Pi_{02}y), \bar{y}_{02}(0) + \Pi_{02}y, 0, 0),$$

здобута з (2.17), згідно з припущенням 3, має розв'язок $\Pi_{02}y = \Pi_{02}y(\tau)$, що задовольняє початкову умову $\Pi_{02}y(0) = y_{02} - \bar{y}_{02}(0)$, причому:

- а) $\Pi_{02}y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$;
- б) $\|Q(\bar{y}_0(t) + \Pi_0y(t/\varepsilon))\| < a$, $t \in [0; T]$.
- 5. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n-1}$.
- 6. $\{g_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(\tau), 0, 0)\}_{11} \neq 0$, $\tau \geq 0$, тобто за умов, накладених на $\Pi_0y(\tau)$, для деякої сталої $c > 0$ виконується нерівність

$$|\{g_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(\tau), 0, 0)\}_{11}| \geq c, \quad \tau \geq 0.$$

Зазначимо, що з умов 3, 4, 6 випливає, що $\Pi_0y(\tau) \in C^\infty[0; \infty)$ [124, с. 452 – 454]. Крім того, існують сталі $c_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ для яких

$$\|\Pi_0y(\tau)\| \leq c_0 \exp(-\alpha_0\tau), \quad \tau \geq 0$$

[22, с. 57 – 65].

За побудовою має місце рівність

$$\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(0) = y_0. \quad (2.19)$$

Зрівнюючи в (2.14), (2.15) коефіцієнти при ε^s , $s \in N$, дістаємо

$$\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}}{dt} = \bar{g}_y(t) \bar{y}_s + g_s(t); \quad (2.20)$$

$$\tilde{B}(0,0) \frac{d\Pi_s y}{d\tau} = g_y(\tau) \Pi_s y + F_s(\tau), \quad (2.21)$$

$$\text{де } F_s(\tau) = G_s(\tau) - \sum_{i=1}^s \Pi_i B(\tau) \frac{d\Pi_{s-i} y(\tau)}{d\tau}.$$

За умови 5 існує таке t_0 , $t_0 \leq T$, що $\det \bar{g}_y(t) \neq 0$, $t \in [0; t_0]$.
Отже,

$$\bar{y}_s(t) = (\bar{g}_y(t))^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}(t)}{dt} - g_s(t) \right), \quad s \in N.$$

За побудовою $g_y(\tau) \rightarrow g_y(\bar{y}_0(0), 0, 0)$, $\tau \rightarrow \infty$. Якщо

$$g_y(\tau) = \begin{pmatrix} C_1(\tau) & C_2(\tau) \\ C_3(\tau) & C_4(\tau) \end{pmatrix},$$

де $C_4(\tau)$ – квадратна матриця $(n-1)$ -го порядку, то систему (2.21) запишемо у вигляді

$$C_1(\tau) \Pi_{s1} y = -C_2(\tau) \Pi_{s2} y - F_{s1}(\tau); \quad (2.22)$$

$$\frac{d\Pi_{s2} y}{d\tau} = C_4(\tau) \Pi_{s2} y + C_3(\tau) \Pi_{s1} y + F_{s2}(\tau). \quad (2.23)$$

Структура $\Pi_{s1} y(\tau)$, $F_{s1}(\tau)$ та $\Pi_{s2} y(\tau)$, $F_{s2}(\tau)$ аналогічна відповідно структурі $\Pi_{01} y(\tau)$ та $\Pi_{02} y(\tau)$.

7. Нехай $\bar{y}_{s1}(0) + \Pi_{s1} y(0) = 0$, $s \in N$.

Тоді можна вимагати, щоб виконувалась умова

$$\bar{y}_s(0) + \Pi_s y(0) = 0, \quad s \in N. \quad (2.24)$$

Справді, початкову умову для розв'язку системи (2.23) знаходимо з рівності (2.24):

$$\Pi_{s2} y(0) = -\bar{y}_{s2}(0). \quad (2.25)$$

Запишемо систему рівнянь, еквівалентну (2.22), (2.23), (2.25),

$$\Pi_{s1} y(\tau) = -\frac{1}{C_1(\tau)} (C_2(\tau) \Pi_{s2} y(\tau) + F_{s1}(\tau)); \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{s2}y(\tau) = & -\Phi_{n-1}(\tau)\bar{y}_{s2}(0)+ \\ & + \int_0^\tau \Phi_{n-1}(\tau)\Phi_{n-1}^{-1}(p)\left(F_{s2}(p) - \frac{C_3(p)}{C_1(p)}F_{s1}(p)\right)dp, \end{aligned} \quad (2.27)$$

де $\Phi_{n-1}(\tau)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної системи

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = \left(C_4(\tau) - \frac{C_3(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)}\right)\Pi_{s2}y, \quad \Phi_{n-1}(0) = E_{n-1}.$$

Згідно з [22, с. 57 – 63] існують такі сталі $d_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, що

$$\|\Phi_{n-1}(\tau)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0\tau), \quad \tau \geq 0,$$

$$\|\Phi_{n-1}(\tau)\Phi_{n-1}^{-1}(p)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0(\tau - p)), \quad 0 \leq p \leq \tau.$$

За побудовою

$$\|F_1(\tau)\| \leq d_1\tau \exp(-\alpha_0\tau), \quad d_1 > 0,$$

тобто

$$\|F_1(\tau)\| \leq d_1 \exp(-\gamma\tau), \quad 0 < \gamma < \alpha_0,$$

із деякою, взагалі кажучи, іншою сталою d_1 .

Нехай $\kappa_0 = \min\{\beta_0, \gamma\}$. Тоді із (2.26), (2.27) для $s = 1$ маємо

$$\|\Pi_1y(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha_1\tau), \quad \tau \geq 0, \quad 0 < \alpha_1 < \kappa_0.$$

Аналогічно показуємо існування додатних сталих c_s , α_s , $s = \overline{2, m}$, для яких мають місце нерівності

$$\|\Pi_sy(\tau)\| \leq c_s \exp(-\alpha_s\tau), \quad \tau \geq 0, \quad s = \overline{2, m}.$$

Зауваження 2.1. Наведемо достатні умови виконання умови 7. Нехай

$$\frac{\partial^s \{\tilde{B}(0,0)\}_{1i}}{\partial \varepsilon^s} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial^s g_1(y_0, 0, 0)}{\partial \varepsilon^s} = 0, \quad s \in N.$$

Тоді, якщо $\bar{y}_i(t)$ та $\Pi_i y(\tau)$, $i = \overline{1, s}$, визначені і виконується (2.25), то, додаючи почленно тотожності (2.20), (2.21), з урахуванням розвинень для $g_i(t)$, $G_i(\tau)$, $i = \overline{1, k}$, переконуємось у виконанні умови 7.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2).

Для цього в системі (2.10) зробимо заміну

$$y(t, \varepsilon) = y_{m+1}(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (2.28)$$

де

$$y_{m+1}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)),$$

а $z(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dz}{dt} = g_y(t, \varepsilon)z + h(z, t, \varepsilon), \quad (2.29)$$

де

$$g_y(t, \varepsilon) = g_y(\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau), t, \varepsilon),$$

$$h(z, t, \varepsilon) = g(y_{m+1} + z, t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy_{m+1}}{dt} - g_y(t, \varepsilon)z.$$

Доведемо існування розв'язку системи (2.29), що задовольняє початкову умову

$$z(0, \varepsilon) = 0. \quad (2.30)$$

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G})$. Тоді згідно з теоремою 2.1 існують такі неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K}_1)$,

$$\bar{K}_1 = \{(t, \varepsilon) : 0 \leq t \leq t_1, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1\}, \quad t_1 \leq t_0, \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

що

$$P(t, \varepsilon) \bar{g}_y(t) Q(t, \varepsilon) = \tilde{g}_y(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{e(t, \varepsilon), W_{n-1}(t, \varepsilon)\}; \quad (2.31)$$

$$P(t, \varepsilon) \tilde{B}(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{\tilde{B}}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{b(t, \varepsilon), E_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.32)$$

де

$$e(0,0) = 1, E_{n-1}(0,0) = E_{n-1}; b(0,0) = 0; W_{n-1}(0,0) = W_{n-1}.$$

Зауваження 2.2. Для доведення даної теореми та інших аналогічних тверджень зменшення величин t_0, ε_1 відбуватиметься деяку скінченну кількість разів. Тому писатимемо відповідно t_0 та ε_1 замість $t_1, t_2, \dots$ та $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$.

Зробимо в системі (2.29) заміну $z(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t, \varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{du}{dt} = \tilde{D}(t, \varepsilon)u + \tilde{w}(u, t, \varepsilon),$$

де

$$\tilde{D}(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)g_y(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon),$$

$$\tilde{w}(u, t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)h(Q(t, \varepsilon)u, t, \varepsilon),$$

або

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = D_1(t, \varepsilon)u_1 + D_2(t, \varepsilon)u_2 + w_1(u, t, \varepsilon); \quad (2.33)$$

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_4(t, \varepsilon)u_2 + D_3(t, \varepsilon)u_1 + w_2(u, t, \varepsilon), \quad (2.34)$$

де

$$D(t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{D}(t, \varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) \\ D_3(t, \varepsilon) & D_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$w(u, t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{w}(u, t, \varepsilon),$$

$D_4(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця $(n-1)$ -го порядку, u_1 та w_1 – перші компоненти векторів u та w відповідно, u_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент u та w .

Зазначимо, що існує така стала $c > 0$, що

$$|D_1(t, \varepsilon) - e(t, \varepsilon)| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$$||D_i(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = 2, 3,$$

$$||D_4(t, \varepsilon) - W_{n-1}(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$t \in [0; t_0], \varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$.

Зауваження 2.3. Стала c в попередніх оцінках, взагалі кажучи, не така як в умові 6. Але оскільки у даному випадку важливий факт обмеженості, а не величина відповідної сталої, то для спрощення запису використовується одна й та сама літера c . Аналогічне зауваження має місце і для решти сталих.

Припускаємо виконання таких умов.

8. $b(t, \varepsilon) = \varepsilon^k t b_1(t, \varepsilon)$, $k \geq 0$, де $b_1(t, \varepsilon) \neq 0$ і $\operatorname{Re} \frac{D_1(t, \varepsilon)}{b_1(t, \varepsilon)} \leq \eta < 0$,
 $t \in [0; t_0], \varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$.

9. $|\tilde{w}_1(0, t, \varepsilon)| \leq c \varepsilon^{m+1} t$, $t \in [0; t_0], \varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$.

Запишемо систему інтегральних рівнянь, еквівалентну (2.33), (2.34) з нульовими початковими умовами

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \times \\ \times (D_2(s, \varepsilon) u_2 + w_1(u, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.35)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon) (D_3(s, \varepsilon) u_1 + w_2(u, s, \varepsilon)) ds, \quad (2.36)$$

де $\Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної системи

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_4(t, \varepsilon) u_2, \quad \Psi_{n-1}(s, s, \varepsilon) = E_{n-1},$$

причому

$$||\Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon)|| \leq d \exp \left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon} \right), \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0, \quad \beta > 0$$

[23, с. 53, 54].

Підставляючи (2.35) у (2.36), дістаємо

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon) (D_3(s, \varepsilon) \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \frac{1}{b(p, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_p^s \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) (D_2(p, \varepsilon) u_2 + \right. \\ \left. + w_1(u, p, \varepsilon)) dp \right) + w_2(u, s, \varepsilon)) ds,$$

або

$$u_2(t, \varepsilon) = \int_0^t K_2(t, s, \varepsilon) u_2(s, \varepsilon) ds + q_2(u, s, \varepsilon), \quad (2.37)$$

де

$$K_2(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \Psi_{n-1}(t, p, \varepsilon) \frac{D_3(p, \varepsilon)}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^p \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \times \\ \times D_2(s, \varepsilon) dp, \\ q_2(u, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon) (D_3(s, \varepsilon) \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \frac{1}{b(p, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_p^s \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) w_1(u, p, \varepsilon) dp + w_2(u, s, \varepsilon)) ds.$$

За побудовою

$$\|K_2(t, s, \varepsilon)\| \leq c \left(\frac{1}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{\alpha_0 s}{\varepsilon} \right) + 1 \right); \quad (2.38)$$

$$\|q_2(0, t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{m+1} t, \quad (2.39)$$

$$0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
 & w(v_1, t, \varepsilon) - w(v_2, t, \varepsilon) = \\
 & = P(t, \varepsilon)(h(Q(t, \varepsilon)v_1, t, \varepsilon) - h(Q(t, \varepsilon)v_2, t, \varepsilon)) = \\
 & = P(t, \varepsilon)(g(y_m(t) + Q(t, \varepsilon)v_1, t, \varepsilon) - g(y_m(t) + Q(t, \varepsilon)v_2, t, \varepsilon) - \\
 & \quad - g_y(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon)(v_1 - v_2)) = P(t, \varepsilon) \times \\
 & \quad \times (g_y(y_m(t) + Q(t, \varepsilon)v_1 + \theta_{ij} \times \\
 & \quad \times Q(t, \varepsilon)(v_1 - v_2), t, \varepsilon) - g_y(t, \varepsilon))Q(t, \varepsilon)(v_1 - v_2),
 \end{aligned}$$

$0 < \theta_{ij} < 1$, $i, j = \overline{1, n}$, то існує така стала $k'_0 > 0$, що

$$||w(v_1, t, \varepsilon) - w(v_2, t, \varepsilon)|| \leq \varepsilon k'_0 ||v_1 - v_2||$$

для всіх $v_1, v_2 \in T_{m+1}$,

$$T_{m+1} = \{u(t, \varepsilon) \in C[0; t_0] : ||u(t, \varepsilon)|| \leq k_1 \varepsilon^{m+1} t\}, \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_1].$$

А тому існує стала $k''_0 > 0$, для якої

$$||q_2(v_1, t, \varepsilon) - q_2(v_2, t, \varepsilon)|| \leq \varepsilon k''_0 ||v_1 - v_2||, \quad (2.40)$$

$v_1, v_2 \in T_{m+1}$.

Позначимо через $R_2(t, s, \varepsilon)$ резольвенту ядра $K_2(t, s, \varepsilon)$. Для неї має місце така сама оцінка, що й для ядра. Справді,

$$R_2(t, s, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(t, s, \varepsilon),$$

де

$$M_1(t, s, \varepsilon) = K_2(t, s, \varepsilon),$$

$$M_i(t, s, \varepsilon) = \int_s^t M_1(t, p, \varepsilon) M_{i-1}(p, s, \varepsilon) dp, \quad i \geq 2,$$

$0 \leq s \leq t \leq t_0$.

Тоді

$$||M_1(t, s, \varepsilon)|| \leq c \left(\frac{1}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{\alpha_0 s}{\varepsilon} \right) + 1 \right) \equiv A(s, \varepsilon),$$

$$||M_2(t, s, \varepsilon)|| \leq A(s, \varepsilon) \int_s^t A(p, \varepsilon) dp \equiv A(s, \varepsilon) F_1(t, s, \varepsilon),$$

$$||M_{i+1}(t, s, \varepsilon)|| \leq A(s, \varepsilon) F_i(t, s, \varepsilon), \quad i \geq 2,$$

де

$$F_i(t, s, \varepsilon) = \int_s^t A(p, \varepsilon) F_{i-1}(p, s, \varepsilon) dp, \quad i \geq 2.$$

Використовуючи [117, с. 21 – 24], дістаємо

$$F_i(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{i!} F_1^i(t, s, \varepsilon).$$

Оскільки

$$0 \leq F_1(t, s, \varepsilon) \leq k_2,$$

то

$$0 \leq F_i(t, s, \varepsilon) \leq \frac{1}{i!} k_2^i, \quad i \geq 2,$$

для всіх $0 \leq s \leq t \leq t_0$.

Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} ||M_i(t, s, \varepsilon)||$ збігається рівномірно для всіх $0 \leq s \leq t \leq t_0$. Причому для його суми має місце оцінка (2.38).

Підставляючи (2.36) у (2.35), дістаємо

$$u_1(t, \varepsilon) = \int_0^t K_1(t, s, \varepsilon) u_1(s, \varepsilon) ds + q_1(u, t, \varepsilon), \quad (2.41)$$

де

$$K_1(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \frac{D_2(p, \varepsilon)}{b(p, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_p^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \Psi_{n-1}(p, s, \varepsilon) \times \\ \times D_3(s, \varepsilon) dp,$$

$$q_1(u, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) (D_2(s, \varepsilon) \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \Psi_{n-1}(t, p, \varepsilon) w_2(u, p, \varepsilon) dp + w_1(u, s, \varepsilon)) ds.$$

Позначимо через $R_1(t, s, \varepsilon)$ резольвенту ядра $K_1(t, s, \varepsilon)$. Оскільки для $K_1(t, s, \varepsilon)$ та $q_1(t, s, \varepsilon)$ справедливі оцінки (2.38) – (2.40) відповідно, то для $R_1(t, s, \varepsilon)$ має місце (2.38).

За допомогою резольвент $R_i(t, s, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, замінимо систему (2.37), (2.41) на еквівалентну

$$u_1(t, \varepsilon) = \int_0^t R_1(t, s, \varepsilon) q_1(u, s, \varepsilon) ds + q_1(u, s, \varepsilon); \quad (2.42)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \int_0^t R_2(t, s, \varepsilon) q_2(u, s, \varepsilon) ds + q_2(u, s, \varepsilon). \quad (2.43)$$

Тоді для достатньо великих k_1 ,

$$k_1 > k_3 \left(\frac{c}{\alpha_0} + \frac{ct_0}{2} + 1 \right),$$

де $\|q(0, t, \varepsilon)\| \leq k_3 \varepsilon^{m+1} t$, $t \in [0; t_0]$, оператор, що визначений за допомогою (2.42), (2.43), відображає множину T_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.42), (2.43) на множині T_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 2.3. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G})$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 2 – 9 (умова 7 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{m+1}, \quad t \in [0; t_0], \quad (2.44)$$

де $x_m(t, \varepsilon) = Qy_m(t, \varepsilon)$.

Приклад 2.1. Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon \tilde{B}(t) \frac{dy}{dt} = g(y, t), \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right],$$

$$y(0, \varepsilon) = y_0,$$

де

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(y, t) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2^2 \\ -y_2 + a_2 + b_2 t \\ -2y_3 + a_3 + b_3 t \end{pmatrix},$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} -c_2^2 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

$a_i, b_i, c_i, i = 2, 3$, – довільні сталі.

Тоді

$$\bar{y}_0(t) = \begin{pmatrix} -(a_2 + b_2 t)^2 \\ a_2 + b_2 t \\ \frac{1}{2}(a_3 + b_2 t) \end{pmatrix},$$

$$\Pi_0 y(\tau) = \begin{pmatrix} -2a_2(c_2 - a_2) \exp(-\tau) - (c_2 - a_2)^2 \exp(-2\tau) \\ (c_2 - a_2) \exp(-\tau) \\ (c_3 - \frac{a_3}{2}) \exp(-2\tau) \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}_1(t) = \begin{pmatrix} -2tb_2(a_2 + b_2 t) + 2b_2(a_2 + b_2 t) \\ -b_2 \\ -\frac{b_3}{4} \end{pmatrix},$$

$$\Pi_1 y(\tau) = \begin{pmatrix} a(\tau) \\ b_2 \exp(-\tau) \\ \frac{b_3}{4} \exp(-2\tau) \end{pmatrix},$$

де

$$a(\tau) = (-4a_2b_2 + 2b_2c_2 + \tau(2a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2a_2c_2 + 2a_2^2)) \exp(-\tau) +$$

$$+(2a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2\tau(c_2 - a_2)^2) \exp(-2\tau).$$

Оскільки

$$g_y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 2(a_2 + b_2t + (c_2 - a_2) \exp(-\frac{t}{\varepsilon})) & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

то використовуємо перетворюючі матриці

$$P(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2t(a_2 + b_2t)}{t-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2(a_2 + b_2t)}{t-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

дістаємо

$$\tilde{D}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2(c_2 - a_2)}{t-1} \exp(-\frac{t}{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

За побудовою

$$\bar{y}_{11}(0) = 2a_2b_2, \quad \Pi_{11}y(0) = -2a_2b_2$$

та

$$b(t, \varepsilon) = -\varepsilon t, \quad D_1(t, 0) = 1, \quad |\tilde{w}_1(0, t, \varepsilon)| \leq d\varepsilon t, \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right],$$

тобто виконуються умови 7 – 9. А тому згідно теореми 2.3 задана задача Коші на відрізку $[0; \frac{1}{2}]$ має єдиний розв'язок $y = y(t, \varepsilon)$, для якого

$$\|y(t, \varepsilon) - y_0(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon, \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right],$$

де $y_0(t, \varepsilon) = \bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)$.

Доведемо твердження, аналогічне теоремі 2.3, для системи

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon). \quad (2.45)$$

У даному випадку $\bar{y}_0(t) \equiv 0, t \in [0; T]; \Pi_{01}y(\tau) \equiv 0, \tau \in [0; \infty)$.
 10. Нехай $y_{01} = 0$.

Тоді, повторюючи міркування, використані при доведенні теореми 2.3, переконуємось у справедливості наступного твердження.

Наслідок 2.6. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T], f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G})$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 5, 7 – 10 (умова 7 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; t_0], t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Зауваження 2.4. У даному випадку достатньою умовою виконання умови 7 є така:

$$\frac{\partial^s g_1(y_0, 0, 0)}{\partial \varepsilon^s} = 0, s = 0, 1, \dots$$

Теорема 2.3 та наслідок 2.6 мають локальний характер. Якщо на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має $n - 1$ попарно різне власне значення, то згідно з [93, с. 17] існують неособливі достатньо гладкі матриці $P(t), Q(t)$, для яких мають місце рівності

$$P(t)f_x(\bar{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \text{diag}\{1, W_{n-1}(t)\},$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1}(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$, $\lambda_i(t)$ – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)) = 0. \quad (2.46)$$

Зробимо у системі (2.1) заміну $x(t, \varepsilon) = Q(t)y(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t)$. Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = g(y, t, \varepsilon), \quad (2.47)$$

де

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = P(t)B(t, \varepsilon)Q(t),$$

$$g(y, t, \varepsilon) = P(t)f(Q(t)y, t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t)Q'(t).$$

Початкова умова (2.2) при цьому набуде вигляду

$$y(0, \varepsilon) = Q^{-1}(0)x_0 \equiv y_0. \quad (2.48)$$

11. Нехай $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$.

Формальний розв'язок задачі (2.47), (2.48) шукаємо у вигляді (2.12). Як і раніше, приходимо до системи (2.20), (2.21). Причому, враховуючи структуру $\bar{g}_y(t)$, із (2.20) дістаємо

$$\bar{y}_s(t) = (\bar{g}_y(t))^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}(t)}{dt} - g_s(t) \right), \quad t \in [0; T], \quad s \in N.$$

Сингулярна частина асимптотики визначається за формулами (2.26), (2.27).

Тоді мають місце такі твердження.

Теорема 2.4. Припустимо, що $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G})$, в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n-1$ попарно різне власне значення і виконуються умови 2 – 4, 6 – 9, 11 (умова 7 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.7. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G})$, в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n-1$ попарно різне власне значення і виконуються умови 7 – 11 (умова 7 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.44).

Зауваження 2.5. В умовах теореми 2.4, наслідку 2.7 та інших тверджень про існування та єдиність розв'язку відповідної задачі Коші на відрізку $[0; T]$ вважається, що $t_0 = T$. Наприклад, у теоремі 2.4 припускається, що умова 8 має місце для всіх $t \in [0; T]$.

Розглянемо тепер випадок, коли в'язка $f_x(\bar{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має один скінченний і один нескінченний елементарний

дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , причому $p + q = n$. Тоді, як і раніше, приходимо до системи (2.10), в якій

$$g_y(\bar{y}_0(0), 0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad \tilde{B}(0, 0) = \text{diag}\{J_q, E_p\}, \quad (2.49)$$

де $W_p = \lambda_0 E_p + J_p$, λ_0 – корінь рівняння (2.9).

Позначимо через $\Pi_{01}y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, y_{01} вектори, що містять q перших компонент векторів $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 відповідно, а через $\Pi_{02}y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_{02}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, y_{02} – вектори, що містять решту компонент $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 .

Припускається виконання наступних умов.

12. Система

$$J_q \frac{d\Pi_{01}y}{d\tau} = g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y, 0, 0)$$

має розв'язок $\Pi_{01}y = \Pi_{01}y(\Pi_{02}y, \tau)$, причому:

а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$, для яких

$$\|\Pi_{01}(\Pi_{02}y, \tau)\| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01}\tau), \quad \tau \geq 0;$$

б) $\Pi_{01}y(y_{02} - \bar{y}_{02}(0), 0) = y_{01} - \bar{y}_{01}(0)$.

13. $\text{Re } \lambda_0 < 0$.

14. $\frac{\partial^2 \{g(y, 0, 0)\}_k}{\partial y_i \partial y_j} = 0$, $k, i, j = \overline{1, n}$, для всіх таких y , що

$$\|y - \bar{y}_0(0)\| \leq c_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon}\right), \quad t \in [0; t_0].$$

Регулярні члени асимптотики $\bar{y}_s(t)$, $s \in N$, і у цьому випадку визначаються із співвідношення (2.20).

Сингулярні члени асимптотики знаходимо із системи (2.21). Оскільки з умови 14 випливає, що $g_y(\tau) = \bar{g}_y(0)$, $\tau \geq 0$, то система (2.21) набуде вигляду

$$J_q \frac{d\Pi_{s1}y}{d\tau} = \Pi_{s1}y + F_{s1}(\tau); \quad (2.50)$$

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = W_p \Pi_{s2}y + F_{s2}(\tau), \quad (2.51)$$

де структура $\Pi_{s1}y(\tau)$, $F_{s1}(\tau)$ та $\Pi_{s2}y(\tau)$, $F_{s2}(\tau)$ аналогічна відповідно структурі $\Pi_{01}y(\tau)$ та $\Pi_{02}y(\tau)$.

Отже,

$$\Pi_{s1}y(\tau) = - \sum_{i=0}^{q-1} J_q^i \frac{d^i F_{s1}(\tau)}{d\tau^i}.$$

Система інтегральних рівнянь, що еквівалентна (2.51) з відповідною початковою умовою, має вигляд, аналогічний (2.27). Враховуючи це, дістаємо наступну оцінку:

$$\|\Pi_s y(\tau)\| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \quad \tau \geq 0, \quad \alpha_s > 0, \quad s = \overline{1, m+l},$$

де число l визначимо пізніше.

Покажемо, що, як і у випадку простих елементарних дільників, побудований формальний розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) має асимптотичний характер.

Для цього у системі (2.10) зробимо заміну

$$y(t, \varepsilon) = y_{m+l}(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (2.52)$$

де

$$y_{m+l}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+l} \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)),$$

$z(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Як і раніше, приходимо до системи (2.29), в якій

$$g_y(t, \varepsilon) = g_y \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), t, \varepsilon \right).$$

За побудовою мають місце оцінки

$$\|h(0, t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{m+l+1}, \quad t \in [0; t_0];$$

$$\|h(v_1, t, \varepsilon) - h(v_2, t, \varepsilon)\| \leq k_0 \varepsilon^{l+1} \|v_1 - v_2\|,$$

для всіх $v_1(t, \varepsilon)$, $v_2(t, \varepsilon) \in C[0; t_0]$ таких, що $\|v_1(t, \varepsilon)\| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $\|v_2(t, \varepsilon)\| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $t \in [0; t_0]$.

Згідно з теоремою 2.1 існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, що

$$P(t, \varepsilon)g_y(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{g}_y(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\}; \quad (2.53)$$

$$P(t, \varepsilon)\tilde{B}(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\}, \quad (2.54)$$

де $E_q(0, 0) = E_q$, $E_p(0, 0) = E_p$, $J_q(0, 0) = J_q$, $W_p(0, 0) = W_p$.

Міркуючи аналогічно викладеному вище випадку простих елементарних діленьків, замість системи (2.33), (2.34) матимемо

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))u_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)u_2 + w_1(u, t, \varepsilon); \quad (2.55)$$

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))u_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)u_1 + w_2(u, t, \varepsilon), \quad (2.56)$$

де $\tilde{D}(t, \varepsilon) = -\tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon)$,

$$D(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_q, E_p^{-1}(t, \varepsilon)\}\tilde{D}(t, \varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) \\ D_3(t, \varepsilon) & D_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$D_1(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця q -го порядку, u_1 та w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів u та w відповідно, а u_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент u та w .

15. Нехай $\det J_q(t, \varepsilon) \neq 0$, $t \in (0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, причому:

а)

$$\|\Psi_q(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\varepsilon}\right),$$

$\kappa \geq 0$, для всіх $0 \leq s \leq t \leq t_0$, де $\Psi_q(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))u_1, \quad \Psi_q(s, s, \varepsilon) = E_q;$$

б)

$$\|\Psi_q(t, s, \varepsilon)J_q^{-1}(s, \varepsilon)w_1(0, s, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l-\gamma+1}, \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0;$$

$$\|\Psi_q(t, s, \varepsilon)J_q^{-1}(s, \varepsilon)(w_1(v_1, s, \varepsilon) - w_1(v_2, s, \varepsilon))\| \leq k_0\varepsilon^{l-\gamma+1}\|v_1 - v_2\|,$$

$\gamma \in N \cup \{0\}$, для всіх $v_1(s, \varepsilon), v_2(s, \varepsilon) \in C[0; t_0]$ таких, що $\|v_1(s, \varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}, \|v_2(s, \varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}, 0 \leq s \leq t \leq t_0$.

Вважатимемо, що $l = \gamma + 1$.

Запишемо систему інтегральних рівнянь, еквівалентну системі (2.55), (2.56) з нульовими початковими умовами:

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_q(t, s, \varepsilon)J_q^{-1}(s, \varepsilon)(\varepsilon D_2(s, \varepsilon)u_2 + w_1(u, s, \varepsilon))ds; \quad (2.57)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_p(t, s, \varepsilon)(\varepsilon D_3(s, \varepsilon)u_1 + w_2(u, s, \varepsilon))ds, \quad (2.58)$$

де $\Psi_p(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))u_2, \quad \Psi_p(s, s, \varepsilon) = E_p.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\|\Psi_p(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

Підставляючи (2.57) у (2.58), дістаємо

$$u_2(t, \varepsilon) = \int_0^t K_2(t, s, \varepsilon)u_2(s, \varepsilon)ds + q_2(u, s, \varepsilon), \quad (2.59)$$

де

$$K_2(t, s, \varepsilon) = \int_s^t \Psi_p(t, p, \varepsilon)D_3(p, \varepsilon)\Psi_q(p, s, \varepsilon)J_q^{-1}(s, \varepsilon)D_2(s, \varepsilon)dp,$$

$$q_2(u, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_p(t, s, \varepsilon) \times \\ \times \left(D_3(s, \varepsilon) \int_0^s \Psi_q(s, p, \varepsilon) J_q^{-1}(p, \varepsilon) w_1(u, p, \varepsilon) dp + w_2(u, s, \varepsilon) \right) ds.$$

За побудовою

$$\|K_2(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d^2 r}{\beta}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (2.60)$$

де $\|D_3(t, \varepsilon)\| \|J_q^{-1}(t, \varepsilon) D_2(t, \varepsilon)\| \leq r, \quad t \in [0; T];$

$$\|q_2(0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}, \quad t \in [0; t_0]; \quad (2.61)$$

$$\|q_2(v_1, t, \varepsilon) - q_2(v_2, t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon k_0 \|v_1 - v_2\|, \quad (2.62)$$

$v_1, v_2 \in D_{m+1},$

$$D_{m+1} = \{u(t, \varepsilon) \in C[0; t_0] : \|u(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \varepsilon^{m+1}\}, \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_1].$$

Позначимо через $R_2(t, s, \varepsilon)$ резольвенту ядра $K_2(t, s, \varepsilon)$. Як і раніше, показуємо обмеженість $R_2(t, s, \varepsilon)$. Нехай

$$\|R_2(t, s, \varepsilon)\| \leq d_0, \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

Підставляючи (2.58) у (2.57), дістаємо

$$u_1(t, \varepsilon) = \int_0^t K_1(t, s, \varepsilon) u_1(s, \varepsilon) ds + q_1(u, t, \varepsilon), \quad (2.63)$$

де

$$K_1(t, s, \varepsilon) = \int_s^t \Psi_q(t, p, \varepsilon) J_q^{-1}(p, \varepsilon) D_2(p, \varepsilon) \Psi_p(p, s, \varepsilon) D_3(s, \varepsilon) dp,$$

$$q_1(u, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (D_2(s, \varepsilon) \times \\ \times \int_0^s \Psi_p(s, p, \varepsilon) w_2(u, p, \varepsilon) dp + w_1(u, s, \varepsilon)) ds.$$

Позначимо через $R_1(t, s, \varepsilon)$ резольвенту ядра $K_1(t, s, \varepsilon)$. Оскільки для $K_1(t, s, \varepsilon)$ та $q_1(t, s, \varepsilon)$ справедливими є відповідно оцінки (2.60) – (2.62), то

$$\|R_1(t, s, \varepsilon)\| \leq d_0, \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

За допомогою резольвент $R_i(t, s, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, замінимо систему (2.59), (2.63) еквівалентною

$$u_1(t, \varepsilon) = \int_0^t R_1(t, s, \varepsilon) q_1(u, s, \varepsilon) ds + q_1(u, s, \varepsilon); \quad (2.64)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \int_0^t R_2(t, s, \varepsilon) q_2(u, s, \varepsilon) ds + q_2(u, s, \varepsilon). \quad (2.65)$$

Тоді для достатньо великих k_1 ,

$$k_1 > k_2(d_0 t_0 + 1),$$

де $\|q(0, t, \varepsilon)\| \leq k_2 \varepsilon^{m+1}$, $t \in [0; t_0]$, оператор, що визначений за допомогою (2.64), (2.65), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.64), (2.65) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 2.5. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{G})$, в'язка $f_x(x_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має один скінченний і один нескінченний елементарний дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , $p + q = n$, і виконуються умови 2, 4, 7, 12 –

15 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справеджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.8. Нехай $A(t), B(t) \in C^{(m+l)q}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{G})$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має один скінченний і один нескінченний елементарний дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , $p + q = n$, і виконуються умови 7, 10, 13, 15 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.44).

Приклад 2.2. Нехай у системі (2.55) $q = 2$,

$$J_2(t, \varepsilon) \equiv J_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, E_2(t, \varepsilon) \equiv E_2, D_1(t, \varepsilon) \equiv 0, (t, \varepsilon) \in \overline{K}_1.$$

Тоді

$$\Psi_2(t, s, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ -\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \cos \frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}, 0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

А тому, враховуючи, що за побудовою

$$J_2^{-1}(\varepsilon)D_2(t, \varepsilon) = O(1), t \in [0; t_0],$$

та

$$\Psi_2(t, s, \varepsilon)J_2^{-1}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) & O(\frac{1}{\varepsilon}) \\ O(1) & O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) \end{pmatrix},$$

приходимо до висновку про справедливість умови 15 зі сталою $\gamma = 1$ для відповідних $\Psi_{n-2}(t, s, \varepsilon)$ та $w(u, t, \varepsilon)$

Зауваження 2.6. Замість пункту а) умови 15 можна вимагати існування такого $\zeta \in N$, що

$$\|\Psi_q(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon\zeta} \exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\varepsilon\zeta}\right), \kappa > 0, \quad (2.66)$$

для всіх $0 \leq s \leq t \leq t_0$.

Приклад 2.3. Нехай у системі (2.55) $q = 3$,

$$J_3(t, \varepsilon) \equiv J_3(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -6\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 60\varepsilon^3 & -11\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3(t, \varepsilon) \equiv E_3, \quad D_1(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad (t, \varepsilon) \in \overline{K}_1.$$

Тоді власними значеннями матриці $J_3(\varepsilon)$ будуть

$$\lambda_1 = -\varepsilon, \quad \lambda_2 = -2\varepsilon, \quad \lambda_3 = -3\varepsilon.$$

Нехай $T(\varepsilon)$ – така квадратна матриця третього порядку, що

$$T^{-1}(\varepsilon)J_3(\varepsilon)T(\varepsilon) = W_3(\varepsilon), \quad W_3(\varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

тобто

$$T(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5\varepsilon} & \frac{1}{4\varepsilon} & \frac{1}{3\varepsilon} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\varepsilon & -2\varepsilon & -3\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Psi_3(t, s, \varepsilon) = T(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} W_3^{-1}(\varepsilon)(t - s) \right) T^{-1}(\varepsilon),$$

то існує стала $d > 0$, для якої має місце оцінка

$$\|\Psi_3(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon^2} \exp \left(-\frac{t-s}{3\varepsilon^2} \right), \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0.$$

А тому виконується умова (2.66).

Нехай тепер в'язка $f_x(\bar{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді, як і раніше, приходимо до системи (2.10), в якій

$$g_y(\bar{y}_0(0), 0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad \tilde{B}(0, 0) = \text{diag}\{J_q, E_p\}, \quad (2.67)$$

де $W_p = \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}$, $W_i = \lambda_i E_i + J_i$, $i = \overline{1, r}$, λ_i – корені рівняння (2.9), $J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

Позначимо через $\Pi_{01}y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, y_{01} вектори, що містять q перших компонент векторів $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 відповідно, а через $\Pi_{02}y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_{02}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, y_{02} – вектори, що містять решту компонент $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 .

16. Нехай $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, r}$.

Тоді за умов 2, 4 та 12 визначаємо $\bar{y}_0(0)$, $\Pi_{01}y(\tau)$.

Регулярні члени асимптотики $\bar{y}_i(t)$, $i \in N$, і у цьому випадку знаходимо із співвідношення (2.20).

Сингулярні члени асимптотики знаходимо із системи (2.21).
Покладемо

$$\Pi_{i1}y(\tau) = \text{col}(\Pi_{i11}y(\tau), \dots, \Pi_{i1s}y(\tau));$$

$$\Pi_{i2}y(\tau) = \text{col}(\Pi_{i21}y(\tau), \dots, \Pi_{i2r}y(\tau)),$$

де $\Pi_{i1j}y(\tau)$, $i \in N$, – q_j -вимірний вектор, $j = \overline{1, s}$, а $\Pi_{i2l}y(\tau)$, $i \in N$, – p_l -вимірний вектор, $l = \overline{1, r}$. Так само запишемо $F_{i1}(\tau)$ та $F_{i2}(\tau)$, $i \in N$.

Тоді система, що аналогічна (2.50), (2.51), матиме вигляд

$$J_j \frac{d\Pi_{i1j}y}{d\tau} = \Pi_{i1j}y + F_{i1j}(\tau), \quad j = \overline{1, s}; \quad (2.68)$$

$$\frac{d\Pi_{i2l}y}{d\tau} = W_l \Pi_{i2l}y + F_{i2l}(\tau), \quad l = \overline{1, r}. \quad (2.69)$$

Отже,

$$\Pi_{i1j}y(\tau) = - \sum_{k=0}^{q_j-1} J_j^k \frac{d^k F_{i1j}(\tau)}{d\tau^k}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Таким чином, переконуємось у справедливості наступної оцінки

$$\|\Pi_i y(\tau)\| \leq c_i \exp(-\alpha_i \tau), \quad \tau \geq 0, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, m+l}.$$

Міркуючи, як і у попередньому випадку, з'ясовуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2).

Теорема 2.6. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G})$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, регулярна в'язка $f_x(x_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 2, 4, 7, 12, 14 – 16 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.9. Нехай $A(t), B(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G})$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких дорівнюють відповідно $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 7, 10, 15, 16 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.44).

Нехай на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$. Тоді згідно з [93, с. 17] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t), Q(t)$, що

$$P(t)f_x(\overline{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \text{diag}\{E_q, W_p(t)\},$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \text{diag}\{J_q, E_p\},$$

де $W_p(t) = \text{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\}$, $W_i(t) = \lambda_i(t)E_i + J_i$, $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, – корені рівняння (2.46).

17. Нехай $\text{Re } \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, r}$.

Тоді мають місце такі твердження.

Теорема 2.7. Припустимо, що $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G})$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 2, 4, 7, 12, 14, 15, 17 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.10. Нехай $A(t), B(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G})$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких дорівнюють відповідно $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 7, 10, 15, 17 (умова 7 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

2.3.2. Критичний випадок. Надалі припускаємо виконання таких умов:

18. Рівняння $f(x, t, 0) = 0$ відносно x має розв'язок $x = \overline{x}_0(t, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_k^{(0)})$ – k -вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) функція $\overline{x}_0(t, \alpha)$ має достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними t та α на множині $\overline{D}(t, \alpha)$, $\overline{D}(t, \alpha) = [0; T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів $\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_k^{(0)}$;

б) ранг матриці $\overline{x}_{0\alpha}(t, \alpha)$ дорівнює k для всіх $(t, \alpha) \in \overline{D}(t, \alpha)$.

19. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{k+1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, та λ_i , $i = \overline{k+1, n-1}$, – корені відповідно рівнянь (2.46) та (2.9).

Нехай в'язка $f_x(\overline{x}_0(0, \alpha), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ – регулярна, має $n-1$ скінченний і один нескінченний елементарний дільник. Тоді $W_{n-1} = \operatorname{diag}\{0, \dots, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{n-1}\}$.

Як і у некритичному випадку, приходимо до задачі (2.10), (2.11).

Формальний розв'язок задачі (2.10), (2.11) шукаємо у вигляді (2.12). Вектор-функції $\bar{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s = 0, 1, \dots$, визначаємо з тотожностей (2.14), (2.15), зрівнюючи у них коефіцієнти при однакових степенях ε .

Зокрема, $\bar{y}_0(t)$ знаходимо із системи

$$g(\bar{y}_0(t), t, 0) = 0. \quad (2.70)$$

Згідно з припущенням 18 система (2.70) має розв'язок $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t, \alpha(t))$, де $\alpha(t)$ – довільний k -вимірний вектор, який буде визначено далі.

Диференціюючи тотожність (2.70), коли $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t, \alpha(t))$, за змінною α , дістаємо

$$f_x(\bar{x}_0(t, \alpha), t, 0)\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha) \equiv 0, \quad (t, \alpha) \in \bar{D}(t, \alpha),$$

тобто стовпці матриці $\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha)$ є власними векторами матриці $f_x(\bar{x}_0(t, \alpha), t, 0)$, що відповідають нульовому власному значенню.

Функцію $\Pi_0 y(\tau)$ знаходимо із системи

$$\tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = g(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, 0, 0). \quad (2.71)$$

Позначимо через $\Pi_{01} y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, y_{01} перші компоненти векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 відповідно, через $\Pi_{02} y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, y_{02} – вектори, що містять k компонент, починаючи з другої, векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 відповідно, а через $\Pi_{03} y(\tau)$, $g_3(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{03}(0)$, y_{03} – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 .

Надалі припускаємо.

20. Рівняння $g_1(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, 0, 0) = 0$ має розв'язок $\Pi_{01} y = \Pi_{01} y(\Pi_{02} y, \Pi_{03} y)$, неперервний в області зміни параметрів $\Pi_{02} y$, $\Pi_{03} y$, для якого $\Pi_{01} y(y_{02} - \bar{y}_{02}(0), y_{03} - \bar{y}_{03}(0)) = y_{01} - \bar{y}_{01}(0)$.

21. Система

$$\frac{d\Pi_{0i} y}{d\tau} = g_i(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, 0, 0), \quad i = 2, 3,$$

здобута з (2.71), має розв'язок $\Pi_{0i}y = \Pi_{0i}y(\tau)$, $i = 2, 3$, який задовольняє початкову умову $\Pi_{0i}y(0) = y_{0i} - \bar{y}_{0i}(0)$, $i = 2, 3$, причому:

а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$ та $c_{02} > 0$, $\alpha_{02} > 0$, для яких

$$||\Pi_{01}(\Pi_{02}y(\tau), \Pi_{03}y(\tau))|| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01}\tau),$$

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq c_{02} \exp(-\alpha_{02}\tau), \tau \geq 0;$$

б) $\Pi_{03}y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$;

в) $||Q(\bar{y}_0(t) + \Pi_0y(t/\varepsilon))|| < a$, $t \in [0; T]$.

Тоді має місце рівність

$$\bar{y}_0(0) + \Pi_0y(0) = y_0. \quad (2.72)$$

Зазначимо, що з умов 6, 20, 21 випливає існування сталих $c_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, для яких

$$||\Pi_0y(\tau)|| \leq c_0 \exp(-\alpha_0\tau), \tau \geq 0$$

[22, с. 57 – 65].

Зрівнюючи в (2.14), (2.15) коефіцієнти при ε , дістаємо

$$\bar{g}_y(t)\bar{y}_1 = \tilde{B}(t, 0) \frac{d\bar{y}_0}{dt} - g_1(t); \quad (2.73)$$

$$\tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_1y}{d\tau} = g_y(\tau)\Pi_1y + F_1(\tau), \quad (2.74)$$

Для того, щоб система (2.73) була розв'язною відносно $\bar{y}_1(t)$, необхідно і достатньо, щоб її права частина була ортогональною до всіх власних векторів $k_j(t)$, $j = \overline{1, k}$, матриці $(\bar{g}_y(t))^*$, що відповідають нульовому власному значенню, де $(\bar{g}_y(t))^*$ – матриця, спряжена до $\bar{g}_y(t)$. Тобто

$$\left(k_j(t), \tilde{B}(t, 0) \frac{d\bar{y}_0}{dt} - g_\varepsilon(\bar{y}_0(t), t, 0) \right) = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Останній вираз можна розглядати як систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектор-функції $\alpha(t)$.

Позначимо через $K(t)$ прямокутну $(k \times n)$ -матрицю, рядками якої є вектори $k_j(t)$. Тоді

$$K(t)\tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t,\alpha)\frac{d\alpha}{dt} = K(t)\left(g_\varepsilon(Q^{-1}\bar{x}_0(t,\alpha(t)),t,0) - \right. \\ \left. - \tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0t}(t,\alpha)\right). \quad (2.75)$$

При цьому початкова умова

$$\alpha(0) = \alpha^{(0)} \quad (2.76)$$

для шуканої вектор-функції $\alpha(t)$ визначається згідно з умовами 20, 21.

Квадратна матриця k -го порядку $K(t)\tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t,\alpha(t))$ неособлива для всіх $t \in [0; t_0]$. Справді, якщо припустити, що для деякого $t = t^* \det K(t^*)\tilde{B}(t^*,0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t^*,\alpha(t^*)) = 0$, то

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i(k_j(t^*), \tilde{B}(t^*,0)\varphi_i(t^*)) = 0, \quad j = \overline{1,k}, \quad \gamma_i \in C,$$

або

$$(k_j(t^*), \tilde{B}(t^*,0) \sum_{i=1}^k \bar{\gamma}_i \varphi_i(t^*)) = 0, \quad j = \overline{1,k},$$

де $\varphi_i(t^*)$, $i = \overline{1,k}$, – стовпці матриці $Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t^*,\alpha(t^*))$.

Оскільки $\varphi(t^*) = \sum_{i=1}^k \bar{\gamma}_i \varphi_i(t^*)$ – власний вектор матриці $\bar{g}_y(t^*)$

відносно $\tilde{B}(t^*,0)$, що відповідає нульовому власному значенню і

$$(k_j(t^*), \tilde{B}(t^*,0)\varphi(t^*)) = 0, \quad j = \overline{1,k},$$

то алгебраїчна система

$$\bar{g}_y(t^*)z = \tilde{B}(t^*,0)\varphi(t^*)$$

розв'язна відносно z . А тому матриця $\bar{g}_y(t^*)$ має $\tilde{B}$ -приєднані вектори, які відповідають нульовому власному значенню. Це суперечить тому, що елементарні дільники, які відповідають нульовому власному значенню матриці $\bar{g}_y(t^*)$ є прості. Таким чином, $\det K(t)\tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t,\alpha(t)) \neq 0$, $t \in [0; t_0]$. Отже, система (2.75) набуде вигляду

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t), \quad (2.77)$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)\tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t,\alpha))^{-1}K(t)(g_\varepsilon(Q^{-1}\bar{x}_0(t,\alpha(t)), t, 0) - \tilde{B}(t,0)Q^{-1}\bar{x}_{0t}(t,\alpha)).$$

22. Нехай задача (2.77), (2.76) на відрізку $[0; t_0]$ має розв'язок $\alpha = \alpha(t)$.

Тоді загальний розв'язок системи (2.73) можна записати у вигляді

$$\bar{y}_1(t) = Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t,\alpha(t))\beta(t) + \tilde{y}_1(t),$$

де $\beta(t)$ – довільна k -вимірна вектор-функція, а $\tilde{y}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок (2.73).

Нехай

$$g_y(\tau) = \begin{pmatrix} C_1(\tau) & C_2(\tau) & C_3(\tau) \\ C_4(\tau) & C_5(\tau) & C_6(\tau) \\ C_7(\tau) & C_8(\tau) & C_9(\tau) \end{pmatrix},$$

де $C_5(\tau)$ та $C_9(\tau)$ – квадратні матриці відповідно k - та $(n-k-1)$ -го порядків. Зазначимо, що $g_y(\tau) \rightarrow g_y(\bar{y}_0(0), 0, 0)$, $\tau \rightarrow \infty$.

Тоді систему (2.74) можна записати у вигляді

$$C_1(\tau)\Pi_{11}y = -C_2(\tau)\Pi_{12}y - C_3(\tau)\Pi_{13}y - F_{11}(\tau); \quad (2.78)$$

$$\frac{d\Pi_{12}y}{d\tau} = C_5(\tau)\Pi_{12}y + C_4(\tau)\Pi_{11}y + C_6(\tau)\Pi_{13}y + F_{12}(\tau); \quad (2.79)$$

$$\frac{d\Pi_{13}y}{d\tau} = C_9(\tau)\Pi_{13}y + C_7(\tau)\Pi_{11}y + C_8(\tau)\Pi_{12}y + F_{13}(\tau), \quad (2.80)$$

де структура $\Pi_{11}y(\tau)$, $F_{11}(\tau)$, $\Pi_{12}y(\tau)$, $F_{12}(\tau)$ та $\Pi_{13}y(\tau)$, $F_{13}(\tau)$ аналогічна структурі $\Pi_{01}y(\tau)$, $\Pi_{02}y(\tau)$ та $\Pi_{03}y(\tau)$ відповідно.

Згідно з умовою 6 система (2.78) – (2.80) набуде вигляду

$$\frac{d\Pi_{12}y}{d\tau} = a_1(\tau)\Pi_{12}y + a_2(\tau)\Pi_{13}y + b_1(\tau); \quad (2.81)$$

$$\frac{d\Pi_{13}y}{d\tau} = a_4(\tau)\Pi_{13}y + a_3(\tau)\Pi_{12}y + b_2(\tau), \quad (2.82)$$

де

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= C_5(\tau) - \frac{C_4(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)}, \quad a_2(\tau) = C_6(\tau) - \frac{C_4(\tau)C_3(\tau)}{C_1(\tau)}, \\ a_3(\tau) &= C_8(\tau) - \frac{C_7(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)}, \quad a_4(\tau) = C_9(\tau) - \frac{C_7(\tau)C_3(\tau)}{C_1(\tau)}, \\ b_1(\tau) &= F_{12}(\tau) - \frac{C_4(\tau)}{C_1(\tau)}F_{11}(\tau), \quad b_2(\tau) = F_{13}(\tau) - \frac{C_7(\tau)}{C_1(\tau)}F_{11}(\tau). \end{aligned}$$

За побудовою $a_i(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, 3}$, де 0 – нульова матриця відповідних розмірів; $a_4(\tau) \rightarrow W_{n-k-1} = \text{diag}\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{n-1}\}$, $\tau \rightarrow \infty$.

Вимагатимемо, щоб

$$\bar{y}_{1k}(0) + \Pi_{1k}y(0) = 0, \quad k = 2, 3. \quad (2.83)$$

Тоді згідно із структурою $\bar{g}_y(0)$ дістаємо

$$\Pi_{12}y(0) = -\beta(0) - \tilde{y}_{12}(0), \quad \Pi_{13}y(0) = -\tilde{y}_{13}(0). \quad (2.84)$$

Позначимо через $\Phi_k(\tau)$ та $\Phi_{n-k-1}(\tau)$ відповідно фундаментальні матриці систем

$$\frac{d\Pi_{12}y}{d\tau} = a_1(\tau)\Pi_{12}y, \quad \Phi_k(0) = E_k,$$

та

$$\frac{d\Pi_{13}y}{d\tau} = a_4(\tau)\Pi_{13}y, \quad \Phi_{n-k-1}(0) = E_{n-k-1}.$$

Оскільки за побудовою $|a_1(\tau)| \leq c \exp(-\alpha_0\tau)$, $\tau \geq 0$, то матриця $\Phi_k(\tau)$ має наступні властивості:

- 1) існує $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_k(\tau) = \Phi_k(\infty)$;
- 2) $\det \Phi_k(\infty) \neq 0$;
- 3) $\|\Phi_k(\tau) - \Phi_k(\infty)\| \leq c \exp(-\alpha_0\tau)$ [23, с. 44, 45].

Нехай

$$\|\Phi_k(\tau)\| \leq d_0, \quad \tau \geq 0,$$

$$\|\Phi_k(\tau)\Phi_k^{-1}(s)\| \leq d_0, \quad 0 \leq s \leq \tau,$$

та

$$\|\Phi_{n-k-1}(\tau)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0\tau), \quad \tau \geq 0, \quad \beta_0 > 0,$$

$$\|\Phi_{n-k-1}(\tau)\Phi_{n-k-1}^{-1}(s)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0(\tau - s)), \quad 0 \leq s \leq \tau.$$

За побудовою

$$\|a_i(\tau)\| \leq d_1 \exp(-\alpha_0\tau), \quad \tau \geq 0, \quad i = 2, 3,$$

$$\|b_i(\tau)\| \leq d_1 \exp(-\gamma\tau), \quad \tau \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \gamma < \alpha_0.$$

Система інтегральних рівнянь, що еквівалентна (2.81), (2.82), (2.84), має вигляд

$$\begin{aligned} \Pi_{12}y(\tau) = & -\Phi_k(\tau) \left(\beta(0) + \tilde{y}_{12}(0) - \right. \\ & \left. - \int_0^\tau \Phi_k^{-1}(s)(a_2(s)\Pi_{13}y(s) + b_1(s))ds \right); \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{13}y(\tau) = & -\Phi_{n-k-1}(\tau)\tilde{y}_{13}(0) + \\ & + \int_0^\tau \Phi_{n-k-1}(\tau)\Phi_{n-k-1}^{-1}(s)(a_3(s)\Pi_{12}y(s) + b_2(s))ds. \end{aligned} \quad (2.86)$$

З умови $\Pi_{12}y(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$, дістаємо

$$\beta(0) = -\tilde{y}_{12}(0) + \int_0^{\infty} \Phi_k^{-1}(s)(a_2(s)\Pi_{13}y(s) + b_1(s))ds \equiv \beta^{(0)}.$$

Таким чином, формула (2.85) набуде вигляду

$$\Pi_{12}y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \Phi_k(\tau)\Phi_k^{-1}(s)(a_2(s)\Pi_{13}y(s) + b_1(s))ds. \quad (2.87)$$

Розглядатимемо (2.86), (2.87) на множині Γ_0 , де

$$\Gamma_0 = \{(\Pi_{12}y(\tau), \Pi_{13}y(\tau)) \in C[0; \infty) : \|\Pi_{1i}y(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha_1 \tau)\}.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\beta_0 > \alpha_0$.

23. Нехай $d_0 d_1 \min \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0 - \alpha_0} \right\} < 1$.

Тоді, покладаючи $\alpha_1 = \min\{\alpha_0, \beta_0, \gamma\}$ показуємо, що оператор, визначений за допомогою (2.86), (2.87), відображає множину Γ_0 в себе і є оператором стиску. А тому система (2.86), (2.87) на множині Γ_0 має єдиний розв'язок [47, с. 609].

Таким чином, існують сталі c_1, α_1 , для яких має місце нерівність

$$\|\Pi_{1i}y(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha_1 \tau), \tau \geq 0.$$

Зрівнюючи у (2.14) коефіцієнти при ε^2 , дістаємо

$$\bar{g}_y(t)\bar{y}_2 = \bar{B}_0(t)\frac{d\bar{y}_1}{dt} + \bar{B}_1(t)\frac{d\bar{y}_0}{dt} - g_2(t). \quad (2.88)$$

Аналогічно до $\alpha(t)$ вектор-функція $\beta(t)$ визначається з умови сумісності системи (2.88) відносно $\bar{y}_2(t)$. При цьому

$$\frac{d\beta}{dt} = q_1(\beta, t), \quad (2.89)$$

де компоненти $q_1(\beta, t)$ є многочленами другого степеня відносно β .

24. Нехай система (2.89) з початковою умовою $\beta(0) = \beta^{(0)}$ на відрізьку $[0; t_0]$ має розв'язок $\beta = \beta(t)$.

Таким чином, $\overline{y}_1(t)$ та $\Pi_1 y(\tau)$ визначені. Решта членів асимптотики $\overline{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s = 2, 3, \dots$, визначаються аналогічно. При цьому на i -му кроці $\overline{y}_i(t)$ міститиме довільну k -вимірну вектор-функцію $\gamma(t)$, початкове значення якої $\gamma(0) = \gamma^{(0)}$ визначається з умови $\Pi_i y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$. Із умови сумісності алгебраїчної системи відносно $\overline{y}_{i+1}(t)$ дістаємо

$$\frac{d\gamma}{dt} = q_i(\gamma, t), \quad (2.90)$$

де компоненти $q_i(\gamma, t)$, $i = 2, 3, \dots$, – лінійні функції відносно γ .

Зазначимо, що існують додатні сталі c_s , α_s , $s = \overline{2, m}$, для яких мають місце нерівності

$$||\Pi_s y(\tau)|| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \quad \tau \geq 0, \quad s = \overline{2, m+1}. \quad (2.91)$$

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2).

Для цього в системі (2.10) зробимо заміну (2.28). Приходимо до системи (2.29), в якій

$$g_y(t, \varepsilon) = g_y \left(\sum_{s=0}^1 \varepsilon^s (\overline{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), t, \varepsilon \right).$$

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G})$. Тоді згідно з теоремою 2.1 існують такі неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K}_1)$, що

$$P(t, \varepsilon) \overline{g}_y(t) Q(t, \varepsilon) = \tilde{g}_y(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{e(t, \varepsilon), W_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.92)$$

$$W_{n-1}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{W_k(t, \varepsilon), W_{n-k-1}(t, \varepsilon)\};$$

$$P(t, \varepsilon) \tilde{B}(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{\tilde{B}}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{b(t, \varepsilon), E_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.93)$$

$$E_{n-1}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_k(t, \varepsilon), E_{n-k-1}(t, \varepsilon)\},$$

де

$$e(0,0) = 1, E_k(0,0) = E_k, E_{n-k-1}(0,0) = E_{n-k-1}; b(0,0) = 0;$$

$$W_k(0,0) = 0, W_{n-k-1}(0,0) = W_{n-k-1}.$$

Міркуючи аналогічно, викладеному вище в п. 2.3.1, замість системи (2.33), (2.34) маємо

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = D_1(t, \varepsilon)u_1 + D_2(t, \varepsilon)u_2 + D_3(t, \varepsilon)u_3 + w_1(u, t, \varepsilon); \quad (2.94)$$

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_5(t, \varepsilon)u_2 + D_4(t, \varepsilon)u_1 + D_6(t, \varepsilon)u_3 + w_2(u, t, \varepsilon); \quad (2.95)$$

$$\varepsilon \frac{du_3}{dt} = D_9(t, \varepsilon)u_3 + D_7(t, \varepsilon)u_1 + D_8(t, \varepsilon)u_2 + w_3(u, t, \varepsilon), \quad (2.96)$$

де

$$D(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) & D_3(t, \varepsilon) \\ D_4(t, \varepsilon) & D_5(t, \varepsilon) & D_6(t, \varepsilon) \\ D_7(t, \varepsilon) & D_8(t, \varepsilon) & D_9(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$D_5(t, \varepsilon)$, $D_9(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці відповідно k - та $(n-k-1)$ -го порядку, u_1 та w_1 – перші компоненти векторів u та w , u_2 та w_2 – k -вимірні вектори, що містять k компонент u та w , починаючи з другої, u_3 та w_3 – $(n-k-1)$ -вимірні вектори, що містять решту компонент u та w .

За побудовою існує така стала $c > 0$, що

$$|D_1(t, \varepsilon) - e(t, \varepsilon)| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$$||D_i(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = \overline{2, 8},$$

$$||D_9(t, \varepsilon) - W_{n-k-1}(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$$t \in [0; t_0], \varepsilon \in (0; \varepsilon_1].$$

За умов 8, 9 запишемо систему інтегральних рівнянь, що еквівалентна (2.94) – (2.96) з нульовими початковими умовами

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) (D_2(s, \varepsilon)u_2 + \\ + D_3(s, \varepsilon)u_3 + w_1(u, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.97)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_k(t, s, \varepsilon) (D_4(s, \varepsilon)u_1 + D_6(s, \varepsilon)u_3 + w_2(u, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.98)$$

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon) (D_7(s, \varepsilon)u_1 + D_8(s, \varepsilon)u_2 + w_3(u, s, \varepsilon)) ds, \quad (2.99)$$

де $\Psi_k(t, s, \varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці однорідних систем

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_5(t, \varepsilon)u_2, \quad \Psi_k(s, s, \varepsilon) = E_k,$$

$$\varepsilon \frac{du_3}{dt} = D_9(t, \varepsilon)u_3, \quad \Psi_{n-k-1}(s, s, \varepsilon) = E_{n-k-1},$$

причому

$$\|\Psi_k(t, s, \varepsilon)\| \leq d, \quad \|\Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp \left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon} \right), \quad \beta > 0,$$

для всіх $0 \leq s \leq t \leq t_0$ [23, с. 53, 54].

За побудовою

$$\|w(0, t, \varepsilon)\| \leq k'_0 \varepsilon^{m+2},$$

$$\|w(v_1, t, \varepsilon) - w(v_2, t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 k''_0 \|v_1 - v_2\|$$

для всіх $v_1, v_2 \in T_{m+1}$, де k_0 – деяка відома стала.

25. Нехай $\frac{2c}{|\eta| \min_{0 \leq t \leq t_0} |b_1(t, \varepsilon)|} < 1$ та $cd \max \left\{ \frac{2}{\alpha_0} + t_0, \frac{2}{\beta} \right\} < 1$, де η

– стала з умови 8.

Тоді оператор, що визначений за допомогою (2.97) – (2.99) відображає множину T_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.97) – (2.99) на множині T_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2.8. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G})$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 6 – 9, 18 – 25 (умова 7 для $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Доведемо твердження, аналогічне теоремі 2.8, для системи (2.45). У даному випадку

$$\overline{y}_0(t) = \Theta(t)\alpha(t), \quad t \in [0; T],$$

де $\Theta(t)$ – прямокутна матриця розмірів $n \times k$, що складена з власних векторів матриці $\tilde{A}(t)$, $\tilde{A}(t) = PA(t)Q$, які відповідають нульовому власному значенню, а $\alpha(t)$ – довільна k -вимірний вектор-функція.

Згідно із структурою в'язки $\tilde{A}(0) - \lambda \tilde{B}(0)$ дістаємо

$$\Pi_{01}y(\tau) \equiv 0, \quad \tau \in [0; \infty),$$

$$\Pi_{02}y(\tau) = c_{02}, \quad \Pi_{03}y(\tau) = \exp(W_{n-k-1}\tau)c_{03},$$

де c_{02} та c_{03} – вектори довільних сталих відповідної розмірності.

Припускаючи виконання умови 10, покладемо $c_{02} = 0$. Тоді, якщо

$$\alpha(0) = y_{02}, \quad c_{03} = y_{03},$$

то має місце рівність (2.72).

26. Нехай система

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t),$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)\tilde{B}(t)\Theta(t))^{-1}K(t)\left(g(\Theta(t)\alpha(t), t, 0) - \right. \\ \left. - \tilde{B}(t)\Theta'(t)\alpha(t)\right),$$

$K(t)$ – прямокутна $(k \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці $(\tilde{A}(t))^*$, які відповідають нульовому власному значенню, на відрізку $[0; t_0]$ має розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, що задовольняє умову (2.76).

Тоді вектор-функції $\bar{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s \in N$, визначаються аналогічно випадку, що розглядався раніше.

При цьому довільні k -вимірні вектор-функції з $\bar{y}_s(t)$, $s \in N$, знаходять з лінійних систем, починаючи вже з першого кроку.

Наслідок 2.11. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G})$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 7 – 10, 19, 23, 25, 26 (умова 7 для $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Зауваження 2.7. При доведенні наслідку 2.11 умови 23 і 25 записуємо для системи (2.45). Вважаємо, що відповідні умови в аналогічних твердженнях сформульовано з урахуванням даного зауваження.

Теорема 2.8 та наслідок 2.11 мають локальний характер.

27. Нехай $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{k+1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, – корені рівняння (2.46).

Тоді, якщо на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний і один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність, то згідно з [93, с. 17] існують неособливі достатньо гладкі матриці $P(t)$, $Q(t)$, для яких мають місце рівності

$$P(t)f_x(\bar{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \operatorname{diag}\{1, W_{n-1}(t)\},$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \operatorname{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1}(t) = \text{diag}\{0, \dots, 0, \lambda_{k+1}(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$.

Як і раніше, приходимо до задачі (2.47), (2.48). Формальний розв'язок задачі (2.47), (2.48) шукаємо у вигляді (2.12). Члени асимптотики $\bar{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s \in N$, знаходять аналогічно. При цьому вектор-функції $\bar{y}_s(t)$ будуть визначені на відрізку $[0; T]$. Тоді мають місце такі твердження.

Теорема 2.9. Припустимо, що $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G})$, в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність і виконуються умови 6 – 9, 18, 20 – 25, 27 (умова 7 для $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.12. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G})$, в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n - 1$ простий скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність і виконуються умови 7 – 10, 23, 25 – 27 (умова 7 для $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Розглянемо тепер випадок, коли в'язка $f_x(\bar{x}_0(0, \alpha), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, один скінченний елементарний дільник кратності p і один нескінченний елементарний дільник кратності q , $k + p + q = n$.

28. Нехай $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\text{Re } \lambda_0 < 0$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, – корені рівняння (2.46), а λ_0 – корінь рівняння (2.9).

Тоді

$$g_y(\bar{y}_0(0), 0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_{k+p}\}, \quad \tilde{B}(0, 0) = \text{diag}\{J_q, E_{k+p}\}, \quad (2.100)$$

де $W_{k+p} = \text{diag}\{0, W_p\}$, 0 – квадратна матриця k -го порядку, $W_p = \lambda_0 E_p + J_p$.

Як і раніше, регулярна частина асимптотики задачі (2.10), (2.11) визначається із систем (2.70), (2.73) та аналогічних до них.

Вектор-функцію $\Pi_0 y(\tau)$ знаходять із системи (2.71). Для цього позначаємо через $\Pi_{01} y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, y_{01} вектори, що містять q перших компонент векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 відповідно, через $\Pi_{02} y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, y_{02} – вектори, що містять k компонент, починаючи з $(q+1)$ -ї, векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 , а через $\Pi_{03} y(\tau)$, $g_3(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_{03}(0)$, y_{03} – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та y_0 .

29. Нехай система

$$J_q \frac{d\Pi_{01} y}{d\tau} = g_1(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, 0, 0)$$

має розв'язок $\Pi_{01} y = \Pi_{01} y(\Pi_{02} y, \Pi_{03} y, \tau)$, причому:

а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$, для яких

$$\|\Pi_{01}(\Pi_{02} y, \Pi_{03} y, \tau)\| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01} \tau), \quad \tau \geq 0;$$

б) $\Pi_{01} y(y_{02} - \bar{y}_{02}(0), y_{03} - \bar{y}_{03}(0), 0) = y_{01} - \bar{y}_{01}(0)$.

Якщо мають місце умови 14 та 21, решту сингулярних членів асимптотики визначаємо із систем:

$$J_q \frac{d\Pi_{s1} y}{d\tau} = \Pi_{s1} y + F_{s1}(\tau); \quad (2.101)$$

$$\frac{d\Pi_{s2} y}{d\tau} = F_{s2}(\tau); \quad (2.102)$$

$$\frac{d\Pi_{s3} y}{d\tau} = W_p \Pi_{s3} y + F_{s3}(\tau); \quad (2.103)$$

$s \in N$, де структура $\Pi_{s1} y(\tau)$, $F_{s1}(\tau)$, $\Pi_{s2} y(\tau)$, $F_{s2}(\tau)$ та $\Pi_{s3} y(\tau)$, $F_{s3}(\tau)$ аналогічна структурі $\Pi_{01} y(\tau)$, $\Pi_{02} y(\tau)$ та $\Pi_{03} y(\tau)$ відповідно.

Тоді

$$\Pi_{s1} y(\tau) = - \sum_{j=0}^{q-1} J_q^j \frac{d^j F_{s1}(\tau)}{d\tau^j}; \quad (2.104)$$

$$\Pi_{s2}y(\tau) = -\beta(0) - \tilde{y}_{s2}(0) + \int_0^{\tau} F_{s2}(v)dv; \quad (2.105)$$

$$\Pi_{s3}y(\tau) = -\Phi_{n-k-q}(\tau)\tilde{y}_{s3}(0) + \int_0^{\tau} \Phi_{n-k-q}(\tau)\Phi_{n-k-q}^{-1}(v)F_{s3}(v)dv, \quad (2.106)$$

$\Phi_{n-k-q}(0) = E_{n-k-q}$, де $\Phi_{n-k-q}(\tau)$ – фундаментальна матриця однорідної системи, що відповідає (2.103).

Із умови $\Pi_{s2}y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, дістаємо

$$\beta(0) = -\tilde{y}_{s2}(0) + \int_0^{\infty} F_{s2}(v)dv \equiv \beta^{(0)}.$$

Тоді формула (2.105) набуде вигляду

$$\Pi_{s2}y(\tau) = \int_{\infty}^{\tau} F_{s2}(v)dv. \quad (2.107)$$

Таким чином, існують додатні сталі c_s , α_s , $s = \overline{2, m+l}$, для яких мають місце нерівності

$$\|\Pi_s y(\tau)\| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \quad \tau \geq 0, \quad s = \overline{2, m+l}.$$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) має асимптотичний характер.

Згідно з теоремою 2.1 існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, що

$$P(t, \varepsilon)g_y(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{g}_y(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_{k+p}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.108)$$

$$W_{k+p}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{W_k(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\};$$

$$P(t, \varepsilon)\tilde{B}(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{\tilde{B}}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_{k+p}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.109)$$

$$E_{k+p}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_k(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\},$$

де

$$\begin{aligned} E_q(0, 0) &= E_q, \quad E_{k+p}(0, 0) = E_{k+p}, \quad J_q(0, 0) = J_q, \\ W_k(0, 0) &= 0, \quad W_p(0, 0) = W_p. \end{aligned}$$

У системі (2.10) зробимо заміну (2.52). Міркуючи аналогічно до викладеного в п. 2.3.1, приходимо до системи

$$\begin{aligned} \varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} &= (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))u_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)u_2 + \\ &+ \varepsilon D_3(t, \varepsilon)u_3 + w_1(u, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_2}{dt} &= (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))u_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)u_1 + \\ &+ \varepsilon D_6(t, \varepsilon)u_3 + w_2(u, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_3}{dt} &= (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))u_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon)u_1 + \\ &+ \varepsilon D_8(t, \varepsilon)u_2 + w_3(u, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.112)$$

де $\tilde{D}(t, \varepsilon) = -\tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} D(t, \varepsilon) &= \text{diag}\{E_q, E_{k+p}^{-1}(t, \varepsilon)\}\tilde{D}(t, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) & D_3(t, \varepsilon) \\ D_4(t, \varepsilon) & D_5(t, \varepsilon) & D_6(t, \varepsilon) \\ D_7(t, \varepsilon) & D_8(t, \varepsilon) & D_9(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$D_1(t, \varepsilon)$, $D_5(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці відповідно q - та k -го порядку;
 u_1 , w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів u та w ;
 u_2 , w_2 – вектори, що містять k компонент u та w , починаючи з $(q+1)$ -ї; u_3 , w_3 – вектори, що містять решту компонент u та w .

30. Припустимо, що $\text{Re } \lambda_i(t, \varepsilon) \leq 0$, $i = \overline{1, k}$, $(t, \varepsilon) \in \overline{K}_1$, де $\lambda_i(t, \varepsilon)$ – власні значення матриці $W_k(t, \varepsilon)$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що для фундаментальних матриць $\Psi_k(t, s, \varepsilon)$ та $\Psi_p(t, s, \varepsilon)$ відповідно систем

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))u_2, \quad \Psi_k(s, s, \varepsilon) = E_k,$$

та

$$\varepsilon \frac{du_3}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))u_3, \quad \Psi_p(s, s, \varepsilon) = E_p$$

мають місце оцінки

$$\begin{aligned} \|\Psi_k(t, s, \varepsilon)\| &\leq d, \\ \|\Psi_p(t, s, \varepsilon)\| &\leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

Нехай $l = \gamma + 1$. Система інтегральних рівнянь, що еквівалентна (2.110) – (2.112) з нульовими початковими умовами, має вигляд

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (\varepsilon D_2(s, \varepsilon)u_2 + \\ &+ \varepsilon D_3(s, \varepsilon)u_3 + w_1(u, s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_k(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_4(s, \varepsilon)u_1 + \varepsilon D_6(s, \varepsilon)u_3 + w_2(u, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.114)$$

$$u_3(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Psi_p(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_7(s, \varepsilon)u_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon)u_2 + w_3(u, s, \varepsilon)) ds. \quad (2.115)$$

31. Нехай $\frac{cd}{\kappa} < 1$ та $cdt_0 < 1$, де

$$\|diag\{J_q^{-1}(t, \varepsilon), E_{k+p}\}D(t, \varepsilon)\| \leq c, \quad t \in [0; t_0].$$

Тоді оператор, що визначений за допомогою (2.113) – (2.115), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.113) – (2.115) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609].

Теорема 2.10. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{K})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{G})$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, один скінченний елементарний дільник кратності p і один нескінченний елементарний дільник кратності q , $k + p + q = n$, і виконуються умови 6, 7, 14, 15, 18, 21, 22, 24, 28 – 31 (умови 7 та 15 відповідно для $s = \overline{1, m+l}$ та $\kappa > 0$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.1), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.44).

Наслідок 2.13. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{(m+l)q}[0; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q}(\overline{G})$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, один скінченний елементарний дільник кратності p і один нескінченний елементарний дільник кратності q , $k + p + q = n$, і виконуються умови 7, 10, 15, 26, 28, 30, 31 (умови 7 та 15 відповідно для $s = \overline{1, m+l}$ та $\kappa > 0$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача Коші (2.45), (2.2) на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.44).

Зауваження 2.8. В умовах теореми 2.10, наслідку 2.13 та інших аналогічних твердженнях вважаємо, що ступінь гладкості $\overline{x}_0(t, \alpha)$ такий самий, як і ступінь гладкості коефіцієнтів заданої системи диференціальних рівнянь.

2.4. Періодичні розв'язки сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь

2.4.1. Некритичний випадок. Тут ми розглянемо алгоритм побудови періодичного розв'язку системи (2.1) з періодичними коефіцієнтами.

Нехай

$$\overline{M} = \{(t, \varepsilon) : -T \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

$$\bar{U} = \{(x, t) : \|x\| \leq a, -T \leq t \leq T\},$$

$$\bar{V} = \{(x, t, \varepsilon) : \|x\| \leq a, -T \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

Як і раніше, під час побудови формального розв'язку системи (2.1), вважаємо, що $B(t, \varepsilon) \in C^\infty(\bar{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^\infty(\bar{V})$.

Надалі припускаємо виконання таких умов:

39. Компоненти матриці $B(t, \varepsilon)$ та вектор-функції $f(x, t, \varepsilon)$ T -періодичні відповідно на множинах $\bar{M}$ та $\bar{V}$.

40. Рівняння $f(x, t, 0) = 0$ відносно x має T -періодичний розв'язок $x = x_0(t)$, який задовольняє умови:

а) $x_0(t) \in C[0; T]$;

б) точки $(x_0(t), t) \in \bar{U}$ при $t \in [0; T]$;

в) корінь $x = x_0(t)$ є ізольованим на відрізку $[0; T]$.

41. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник.

42. $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (2.46).

Формальний розв'язок системи (2.1) з періодичними коефіцієнтами шукаємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s x_s(t). \quad (2.116)$$

Вектор-функцію $f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ подамо як формальний ряд за степенями ε

$$\begin{aligned} f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= f(x_0(t), t, 0) + \varepsilon(f_x(t)x_1(t) + f_1(t)) + \\ &+ \dots + \varepsilon^s(f_x(t)x_s(t) + f_s(t)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{f}_s(t), \end{aligned}$$

в якому елементи матриці $f_x(t)$ обчислюються в точці $(x_0(t), t, 0)$, а вектори $f_s(t)$ певним чином виражаються через $x_k(t)$, $k < s$.

Аналогічним чином записуємо матрицю

$$B(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{1}{s!} \frac{\partial^s B(t, 0)}{\partial \varepsilon^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{B}_s(t).$$

Підставимо (2.116) у систему (2.1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε . Зокрема, при ε^0 маємо

$$f(x_0(t), t, 0) = 0. \quad (2.117)$$

Згідно з умовами 40, 42 рівняння (2.117) має T -періодичний розв'язок $x_0 = x_0(t) \in C^\infty[-T; T]$.

Вектор-функції $x_s(t)$, $s \in N$, визначаємо із рівнянь

$$\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{dx_{s-i}}{dt} = f_x(t)x_s + f_s(t). \quad (2.118)$$

А тому

$$x_s(t) = (f_x(t))^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{dx_{s-i}(t)}{dt} - f_s(t) \right), \quad s \in N.$$

Зазначимо, що вектор-функції $x_s(t)$, $s \in N$, є T -періодичними.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (2.1).

Для цього в системі (2.1) зробимо заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (2.119)$$

де

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s x_s(t),$$

а $y(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = f_x(t, \varepsilon)y + h(y, t, \varepsilon), \quad (2.120)$$

де

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x(x_0(t), t, \varepsilon),$$

$$h(y, t, \varepsilon) = f(x_m + y, t, \varepsilon) - \varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx_m}{dt} - f_x(t, \varepsilon)y.$$

За побудовою $\|h(0, t, \varepsilon)\| \leq c_0 \varepsilon^{m+1}$, $t \in [0; T]$.

Доведемо існування T -періодичного розв'язку $y = y(t, \varepsilon)$ системи (2.120), який задовольняє умову $\|y(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}$, $t \in [0; T]$.

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{V})$. Тоді, згідно з наслідком 2.4 існують такі неособливі T -періодичні матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{M}_1)$,

$$\overline{M}_1 = \{(t, \varepsilon) : -T \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

що

$$P(t, \varepsilon)f_x(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{f}_x(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{e(t, \varepsilon), W_{n-1}(t, \varepsilon)\}; \quad (2.121)$$

$$P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{b(t, \varepsilon), E_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.122)$$

де

$$e(t, 0) = 1, \quad E_{n-1}(t, 0) = E_{n-1}, \quad b(t, 0) = 0,$$

$$W_{n-1}(t, 0) = W_{n-1}(t) \equiv \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}, \quad t \in [0; T].$$

Зробимо в системі (2.120) заміну $y(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)z(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t, \varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dz}{dt} = (\tilde{f}_x(t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{D}(t, \varepsilon))z + \tilde{w}(z, t, \varepsilon),$$

де

$$\tilde{D}(t, \varepsilon) = -\tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon),$$

$$\tilde{w}(z, t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)h(Q(t, \varepsilon)z, t, \varepsilon),$$

або

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = e(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_1(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)z_2 + w_1(z, t, \varepsilon); \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_2}{dt} = & W_{n-1}(t)z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)z_1 + (E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)W_{n-1}(t, \varepsilon) - W_{n-1}(t) + \\ & + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))z_2 + w_2(z, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.124)$$

де

$$D(t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{D}(t, \varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) \\ D_3(t, \varepsilon) & D_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$w(z, t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{w}(z, t, \varepsilon),$$

$D_4(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця $(n-1)$ -го порядку; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w .

43. Нехай $b(t, \varepsilon) = \varepsilon^k b_1(t, \varepsilon)$, $k > 0$, причому $\text{Re } b_1(t, 0) \neq 0$, $t \in [0; T]$.

Із системи (2.123), (2.124) дістаємо

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} \frac{1}{b(s, \varepsilon)} (\Psi_1(s, \varepsilon) (\Psi_1^{-1}(T, \varepsilon) - 1) \Psi_1^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ & \times (\varepsilon D_1(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + w_1(z, s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_{n-1}(s, \varepsilon) (\Psi_{n-1}^{-1}(T, \varepsilon) - E_{n-1}) \Psi_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ & \times (\varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_1 + (E_{n-1}^{-1}(s, \varepsilon) W_{n-1}(s, \varepsilon) - W_{n-1}(s) + \varepsilon D_4(s, \varepsilon)) z_2 + \\ & + w_2(z, s, \varepsilon)) ds, \end{aligned} \quad (2.126)$$

де $\Psi_1(t, \varepsilon)$ – розв'язок задачі Коші

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = e(t, \varepsilon) z_1, \quad \Psi_1(0, \varepsilon) = 1,$$

а $\Psi_{n-1}(t, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = W_{n-1}(t) z_2, \quad \Psi_{n-1}(0, \varepsilon) = E_{n-1}.$$

За побудовою

$$\Psi_1(t, \varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right),$$

$$\Psi_{n-1}(t, \varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t W_{n-1}(t) dt \right).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) - 1 \right)^{-1} \times \\ &\times \int_t^{t+T} \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) u(z, s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W_{n-1}(t) dt \right) - E_{n-1} \right)^{-1} \times \\ &\times \int_t^{t+T} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t W_{n-1}(t) dt \right) v(z, s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (2.128)$$

де

$$\begin{aligned} u(z, s, \varepsilon) &= \varepsilon D_1(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + w_1(z, s, \varepsilon), \\ v(z, s, \varepsilon) &= \varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_1 + (E_{n-1}^{-1}(s, \varepsilon) W_{n-1}(s, \varepsilon) - W_{n-1}(s) + \\ &+ \varepsilon D_4(s, \varepsilon)) z_2 + w_2(z, s, \varepsilon). \end{aligned}$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$W_{n-1}(t) = \text{diag}\{W_+(t), W_-(t)\},$$

де $W_+(t)$ та $W_-(t)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W_{n-1}(t)$ відповідно з додатними та

від'ємними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re} \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} > 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$.

Тоді систему (2.127), (2.128) подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) - 1 \right)^{-1} \times \\ & \times \int_0^T \frac{1}{b(t+s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s}^t \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) u(z(t+s, \varepsilon), t+s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} z_{2+}(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W_+(t) dt \right) - E_+ \right)^{-1} \times \\ & \times \int_0^T \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s}^t W_+(t) dt \right) v_+(z(t+s, \varepsilon), t+s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} z_{2-}(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \left(E_- - \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W_-(t) dt \right) \right)^{-1} \times \\ & \times \int_0^T \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s-T}^t W_-(t) dt \right) v_-(z(t+s, \varepsilon), t+s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (2.131)$$

де

$$v(z, t, \varepsilon) = \operatorname{col}(v_+(z, t, \varepsilon), v_-(z, t, \varepsilon)),$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \operatorname{col}(z_{2+}(t, \varepsilon), z_{2-}(t, \varepsilon)),$$

причому розмірності векторів $v_+(z, t, \varepsilon)$, $z_{2+}(t, \varepsilon)$ та $v_-(z, t, \varepsilon)$, $z_{2-}(t, \varepsilon)$ відповідно дорівнюють порядку матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$; E_+ та E_- – одиничні матриці відповідного порядку.

Оскільки

$$\|w(v_1, t, \varepsilon) - w(v_2, t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon k_0 \|v_1 - v_2\|$$

для всіх $v_1, v_2 \in P_{m+1}$, де

$$P_{m+1} = \{z(t, \varepsilon) \in C[0; T] : z(t+T, \varepsilon) = z(t, \varepsilon), \|z(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \varepsilon^{m+1}\},$$

$\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, то для достатньо великих k_1 оператор, що визначений за допомогою (2.129) – (2.131), відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.129) – (2.131) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 2.13. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39 – 43. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.1) на відрізьку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}, \quad t \in [0; T]. \quad (2.132)$$

Наслідок 2.16. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+1}[-T; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 41 – 43. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.45) на відрізьку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справед-
жується оцінка (2.132).

Приклад 2.4. Розглянемо систему диференціально-алгебраїчних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; 2\pi],$$

де

$$B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\sin t + 2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$f(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1 - \cos t + 2 + \varepsilon x_2^2 \\ x_2^2 - x_1 x_2 + \varepsilon x_1 (\cos t + 1) \\ x_2^2 x_1 + 2x_3 + \sin t + \varepsilon x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \cos t \\ -\frac{1}{4} \cos t \end{pmatrix}.$$

За теоремою 2.13 задана система має єдиний періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^2, \quad t \in [0; 2\pi],$$

де $x_1(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.

Нехай тепер замість умов 41, 42 виконуються наступні умови:

44. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має один скінченний і один нескінченний елементарний дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , $p + q = n$.

45. $\operatorname{Re} \lambda_0(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, де $\lambda_0(t)$ – корінь рівняння (2.46).

Тоді, як і раніше, формальний розв'язок системи (2.1) шукаємо у вигляді (2.116).

Покажемо, що, як і у випадку простих елементарних дільників, побудований формальний розв'язок системи (2.1) має асимптотичний характер. Для цього у системі (2.1) зробимо заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_{m+l}(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (2.133)$$

де

$$x_{m+l}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+l} \varepsilon^s x_s(t),$$

$y(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, число l визначається пізніше. Як і раніше, приходимо до системи (2.120), в якій

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s x_s(t), t, \varepsilon \right).$$

За побудовою $\|h(0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l+1}$, $t \in [0; T]$.

У даному випадку

$$P(t, \varepsilon) f_x(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{f}_x(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\}; \quad (2.134)$$

$$P(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\}, \quad (2.135)$$

де

$$E_q(t, 0) = E_q, \quad E_p(t, 0) = E_p, \quad J_q(t, 0) = J_q,$$

$$W_p(t, 0) = W_p(t) \equiv \lambda_0(t) E_p + J_p, \quad t \in [0; T].$$

Міркуючи аналогічно, замість системи (2.123), (2.124) маємо

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon)) z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon) z_2 + w_1(z, t, \varepsilon); \quad (2.136)$$

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon) W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)) z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon) z_1 + w_2(z, t, \varepsilon), \quad (2.137)$$

де z_1 та w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w .

Покладемо

$$Z_q(t, s, \varepsilon) = (\Psi_q(s, \varepsilon) (\Psi_q^{-1}(T, \varepsilon) - E_q) \Psi_q^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_p(t, s, \varepsilon) = (\Psi_p(s, \varepsilon) (\Psi_p^{-1}(T, \varepsilon) - E_p) \Psi_p^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

де $\Psi_q(t, \varepsilon)$ та $\Psi_p(t, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці відповідно однорідних систем

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon)) z_1, \quad \Psi_q(0, \varepsilon) = E_q,$$

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon) W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)) z_2, \quad \Psi_p(0, \varepsilon) = E_p.$$

Припускаємо виконання таких умов:

46. $\det J_q(t, \varepsilon) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, причому

$$\|Z_q(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon} \exp\left(\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad \beta > 0,$$

$$\|J_q^{-1}(s, \varepsilon)w_1(0, s, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l-\gamma+1}, \quad t \leq s \leq t+T, \quad t \in [0; T],$$

$$\|J_q^{-1}(s, \varepsilon)(w_1(v_1, s, \varepsilon) - w_1(v_2, s, \varepsilon))\| \leq k_0\varepsilon^{l-\gamma+1}\|v_1 - v_2\|,$$

$\gamma \in N \cup \{0\}$, для всіх $v_1(s, \varepsilon), v_2(s, \varepsilon) \in C[0; t]$ таких, що $\|v_1(s, \varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}, \|v_2(s, \varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}, t \leq s \leq t+T, t \in [0; T]$.

$$47. \frac{dr}{\beta} < 1, \text{ де } \|\text{diag}\{J_q^{-1}(t, \varepsilon), E_{n-q}\}D(t, \varepsilon)\| \leq r, \quad t \in [0; T].$$

Тоді, вважаючи $l = \gamma + 1$, показуємо, що оператор, який визначений за допомогою формул

$$z_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (\varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + w_1(z, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.138)$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_p(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_1 + w_2(z, s, \varepsilon)) ds, \quad (2.139)$$

відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.138), (2.139) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609].

Теорема 2.14. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 40, 44 – 47. Тоді існує таке $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справеджується оцінка (2.132).

Наслідок 2.17. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+l+1}[-T; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 44 – 47. Тоді існує таке $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.45) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.132).

Приклад 2.5. Нехай у системі (2.136) $q = 2$,

$$J_2(t, \varepsilon) \equiv J_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, E_2(t, \varepsilon) \equiv E_2, D_1(t, \varepsilon) \equiv 0, (t, \varepsilon) \in \overline{M}.$$

Тоді

$$\Psi_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{11}(t, \varepsilon) & \psi_{12}(t, \varepsilon) \\ \psi_{21}(t, \varepsilon) & \psi_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t, \varepsilon) &= \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{12}(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{21}(t, \varepsilon) &= -\sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{22}(t, \varepsilon) &= \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

А тому, враховуючи, що

$$\|Z_2(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad t \leq s \leq t+T, \quad t \in [0; T],$$

приходимо до висновку про справедливість умови 46 для відповідної вектор-функції $w(z, t, \varepsilon)$.

Зазначимо, що у даному випадку оператор, що визначається (2.138), (2.139) буде задовольняти умови теореми про існування та єдиність нерухомої точки без виконання умови 47.

Розглянемо загальний випадок. Отже, нехай мають місце такі умови:

48. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p+q = n$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

49. $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, r}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (2.46).

Тоді справджуються такі твердження.

Теорема 2.15. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 40, 46 – 49. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.1) на відрізку $[0; T]$

має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.132).

Наслідок 2.18. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+l+1}[-T; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\bar{V})$ і виконуються умови 39, 46 – 49. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.45) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.132).

2.4.2. Критичний випадок. Надалі припускаємо виконання таких умов:

50. Рівняння $f(x, t, 0) = 0$ відносно x має T -періодичний розв'язок $x = x_0(t, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – k -вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) $x_0(t, \alpha) \in C^{m+2}(\bar{D}(t, \alpha))$, $\bar{D}(t, \alpha) = [-T; T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_k$;

б) ранг матриці $x_{0\alpha}(t, \alpha)$ дорівнює k для всіх $(t, \alpha) \in \bar{D}(t, \alpha)$.

51. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{k+1, n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{k+1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, – корені рівняння (2.46).

Припускаючи виконання умови 41, розв'язок системи (2.1) шукаємо у вигляді (2.116). Тоді $x_0(t, \alpha)$ знаходимо з рівняння (2.117). Вектор-функцію $x_1(t)$ визначаємо з (2.118) при $s = 1$

$$f_x(t)x_1 = B(t, 0) \frac{dx_0}{dt} - f_1(t). \quad (2.140)$$

Оскільки система (2.140) з точністю до позначень така сама, що й система (2.73), то критерієм існування періодичного розв'язку системи (2.140) є виконання наступної умови.

52. Нехай система (2.77) має T -періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [-T; T]$.

Тоді загальний розв'язок системи (2.140) має вигляд

$$x_1(t) = x_{0\alpha}(t, \alpha(t))\beta(t) + \tilde{x}_1(t), \quad (2.141)$$

де $\beta(t)$ – довільна k -вимірна вектор-функція, а $\tilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок (2.140).

Вектор-функція $\beta(t)$ визначається з умови сумісності системи (2.118) при $s = 2$.

53. Нехай система (2.89) має T -періодичний розв'язок $\beta = \beta(t)$, $t \in [-T; T]$.

За умови 53 $x_2(t)$ має вигляд (2.141). Решту членів асимптотики $x_s(t)$, $s = \overline{3, m}$, визначають аналогічно. При цьому на i -му кроці функція $x_i(t)$ містить довільну k -вимірну вектор-функцію $\gamma_i(t)$, що визначається з умови сумісності відповідної алгебраїчної системи відносно $x_{i+1}(t)$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = q_{i+1}(\gamma_i, t). \quad (2.142)$$

54. Нехай система (2.142) має T -періодичний розв'язок $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [-T; T]$, $i = \overline{2, m}$.

Зазначимо, що компоненти $q_i(\gamma_i, t)$, $i = \overline{2, m}$, – лінійні функції відносно $\gamma_i(t)$.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (2.1).

Для цього в системі (2.1) зробимо заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_{m+1}(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (2.143)$$

де $x_{m+1}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon^s x_s(t)$. Приходимо до системи (2.120), в якій

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon).$$

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{V})$. Тоді згідно з наслідком 2.4 існують такі неособливі T -періодичні матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{M}_1)$, що

$$P(t, \varepsilon) f_x(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{f}_x(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{e(t, \varepsilon), W_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.144)$$

$$W_{n-1}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{W_k(t, \varepsilon), W_{n-k-1}(t, \varepsilon)\};$$

$$P(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{b(t, \varepsilon), E_{n-1}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.145)$$

$$E_{n-1}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_k(t, \varepsilon), E_{n-k-1}(t, \varepsilon)\},$$

де

$$e(t, 0) = 1, E_k(t, 0) = E_k, E_{n-k-1}(t, 0) = E_{n-k-1},$$

$$b(t, 0) = 0, W_k(t, 0) = 0,$$

$$W_{n-k-1}(t, 0) = W_{n-k-1}(t) \equiv \text{diag}\{\lambda_{k+1}(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}, t \in [0; T].$$

Тоді замість системи (2.123), (2.124) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = e(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_1(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon) z_3 + \\ + w_1(z, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon) W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon)) z_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(t, \varepsilon) z_3 + \\ + w_2(z, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_3}{dt} = W_{n-k-1}(t) z_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(t, \varepsilon) z_2 + \\ + (E_{n-k-1}^{-1}(t, \varepsilon) W_{n-k-1}(t, \varepsilon) - W_{n-k-1}(t) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon)) z_3 + w_3(z, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.148)$$

де z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w , z_2 та w_2 – k -вимірні вектори, що містять k компонент z та w , починаючи з другої, z_3 та w_3 – $(n - k - 1)$ -вимірні вектори, що містять решту компонент z та w ; $D_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 9}$, – прямокутні матриці відповідних розмірів.

Припускаючи виконання умови 43, із системи (2.146) – (2.148) дістаємо

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} \frac{1}{b(s, \varepsilon)} (\Psi_1(s, \varepsilon) (\Psi_1^{-1}(T, \varepsilon) - 1) \Psi_1^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ \times (\varepsilon D_1(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_3 + w_1(z, s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} (\varepsilon D_4(s, \varepsilon) z_1 + \\ + \varepsilon D_6(s, \varepsilon) z_3 + w_2(z, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.150)$$

$$z_3(t, \varepsilon) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_{n-k-1}(s, \varepsilon) (\Psi_{n-k-1}^{-1}(T, \varepsilon) - E_{n-k-1}) \Psi_{n-k-1}^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ \times (\varepsilon D_7(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon) z_2 + (E_{n-k-1}^{-1}(s, \varepsilon) W_{n-k-1}(s, \varepsilon) - \\ - W_{n-k-1}(s) + \varepsilon D_9(s, \varepsilon)) z_3 + w_3(z, s, \varepsilon)) ds, \quad (2.151)$$

де функція $\Psi_1(t, \varepsilon)$ визначена раніше, $\Psi_k(t, \varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці відповідно систем

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon) W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon)) z_2$$

та

$$\varepsilon \frac{dz_3}{dt} = W_{n-k-1}(t) z_3.$$

Надалі припускаємо:

55. $\|(\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1}\| \leq d, t \leq s \leq t + T, t \in [0; T]$.

56. $cdT < 1$, де $\|D(t, \varepsilon)\| \leq c, t \in [0; T]$.

Тоді, як і при доведенні теореми 2.8, показуємо, що оператор, який визначений за допомогою (2.149) – (2.151), відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.149) – (2.151) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 2.16. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{V})$, і виконуються умови 39, 41, 43, 50 – 56. Тоді існує таке $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.132).

Надалі припускаємо виконання таких умов:

57. Система

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t),$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)B(t)\Theta(t))^{-1}K(t)(f(\Theta(t)\alpha(t), t, 0) - B(t)\Theta'(t)\alpha(t)),$$

$K(t)$ – прямокутна $(k \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці $A^*(t)$, що відповідають нульовому власному значенню; $\Theta(t)$ – прямокутна $(n \times k)$ -матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $A(t)$, що відповідають нульовому власному значенню, має T -періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [-T; T]$.

58. Система

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = q_i(\gamma_i, t), \quad i = \overline{1, m},$$

що утворена аналогічно (2.90), (2.142) для системи (2.45), має T -періодичний розв'язок $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [-T; T]$, $i = \overline{1, m}$.

Наслідок 2.19. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{m+2}[-T; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{V})$, і виконуються умови 39, 41, 43, 55 – 58. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.45) на відріжку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.132).

Нехай тепер замість умов 41, 51 виконуються наступні умови.

59. На відріжку $[0; T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, один скінченний і один нескінченний елементарний дільник, кратності яких дорівнюють відповідно p і q , причому $k + p + q = n$.

60. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_0(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, $\lambda_0(t)$ – корені рівняння (2.46).

Тоді, як і раніше, формальний розв'язок системи (2.1) шукаємо у вигляді (2.116). Щоб довести асимптотичну оцінку (2.132) у системі (2.1) зробимо заміну (2.133). Оскільки

$$P(t, \varepsilon)f_x(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{f}_x(t, \varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\{E_q(t, \varepsilon), W_{k+p}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.152)$$

$$W_{k+p}(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{W_k(t, \varepsilon), W_p(t, \varepsilon)\};$$

$$P(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) = \tilde{B}(t, \varepsilon) \equiv \text{diag}\{J_q(t, \varepsilon), E_{k+p}(t, \varepsilon)\}, \quad (2.153)$$

$$E_{k+p}(t, \varepsilon) = \text{diag}\{E_k(t, \varepsilon), E_p(t, \varepsilon)\},$$

де

$$E_q(t, 0) = E_q, \quad E_{k+p}(t, 0) = E_{k+p}, \quad J_q(t, 0) = J_q,$$

$$W_k(t, 0) = 0, \quad W_p(t, 0) = W_p(t) \equiv \lambda_0(t)E_p + J_p, \quad t \in [0; T],$$

то замість систем (2.136), (2.137) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} &= (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)z_3 + \\ &+ w_1(z, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_2}{dt} &= (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))z_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_6(t, \varepsilon)z_3 + \\ &+ w_2(z, t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_3}{dt} &= (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))z_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_8(t, \varepsilon)z_2 + \\ &+ w_3(z, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.156)$$

де z_1, w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів z та w ; z_2, w_2 – вектори, що містять k компонент z та w , починаючи з $(q+1)$ -ї; z_3, w_3 – вектори, що містять решту компонент z та w .

Покладемо

$$Z_k(t, s, \varepsilon) = (\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_q(t, s, \varepsilon) = (\Psi_q(s, \varepsilon) (\Psi_q^{-1}(T, \varepsilon) - E_q) \Psi_q^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_p(t, s, \varepsilon) = (\Psi_p(s, \varepsilon) (\Psi_p^{-1}(T, \varepsilon) - E_p) \Psi_p^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

де матриці $\Psi_k(t, \varepsilon)$, $\Psi_q(t, \varepsilon)$ визначено раніше, а $\Psi_p(t, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))z_2.$$

61. Нехай

$$\frac{dr}{\beta} < 1, \quad cdT < 1,$$

де стала d взята з умови 46 і

$$\|J_q^{-1}(t, \varepsilon)(D_2(t, \varepsilon), D_3(t, \varepsilon))\| \leq r, \quad \|D(t, \varepsilon)\| \leq c, \quad t \in [0; T].$$

Тоді вважаючи, що $l = \gamma + 1$ і припускаючи виконання умови 55, показуємо, що оператор, який визначений за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (\varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_3 + \\ + w_1(z, s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_k(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_4(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(s, \varepsilon) z_3 + w_2(z, s, \varepsilon)) ds; \quad (2.158)$$

$$z_3(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_p(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_7(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon) z_2 + w_3(z, s, \varepsilon)) ds, \quad (2.159)$$

для достатньо великих m відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (2.157) – (2.159) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609].

Теорема 2.17. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{M})$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 46, 50, 52 – 55, 59 – 61. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.1) на відрізьку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (2.132).

Наслідок 2.20. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+l+1}[-T; T]$, $f(x, t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V})$ і виконуються умови 39, 46, 55, 57 – 61. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (2.45) на відрізьку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (2.132).

Розділ III

Побудова асимптотичних формул для розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь із малим запізненням аргументу

3.1. Постановка задачі

Розглянемо основну початкову задачу

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x(t, \varepsilon), x(t - \varepsilon, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad t \in [\varepsilon; T], \quad (3.1)$$

$$x(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} = \varphi(t), \quad (3.2)$$

де $x = x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $B(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця n -го порядку, $f(x(t, \varepsilon), x(t - \varepsilon, \varepsilon), t, \varepsilon)$, $\varphi(t)$ – n -вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, – малий параметр.

1. Нехай:

- а) елементи $B(t, \varepsilon)$ на множині $\overline{K}$ мають достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними t та ε ;
- б) компоненти $\varphi(t)$, $\|\varphi(t)\| < a$, $t \in [0; \varepsilon]$, достатньо гладкі на відрізьку $[0; \varepsilon]$;
- в) компоненти $f(x, [x], t, \varepsilon)$ ($[x(t, \varepsilon)] = x(t - \varepsilon, \varepsilon)$) на множині

$$\overline{G}_1 = \{(x, [x], t, \varepsilon) : \|x\| \leq a, \|[x]\| \leq a, \varepsilon \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

мають достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними x , $[x]$, t та ε .

Формальний розв'язок задачі (3.1), (3.2) будується у вигляді суми

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (3.3)$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon)$ (регулярна частина асимптотики) та $Px(\tau, \varepsilon)$ (сингулярна частина асимптотики) – розвинення за степенями ε [22, с. 248].

Зазначимо, що побудова розв'язку основної початкової задачі (3.1), (3.2) наведеним нижче способом можлива і у випадку, коли ранг матриці $B(t, \varepsilon)$ на відрізку $[0; T]$ не є сталим.

Із використанням розробленого алгоритму, у даному розділі доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв'язку системи (3.1) у випадку, коли її коефіцієнти періодичні за змінною t з періодом T .

3.2. Побудова розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи рівнянь із малим запізненням аргументу

3.2.1. Некритичний випадок. Під час побудови формального розв'язку задачі (3.1), (3.2) вважаємо, що $B(t, \varepsilon) \in C^\infty(\bar{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^\infty(\bar{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^\infty[0; \varepsilon]$.

2. Нехай рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ відносно x має такий розв'язок $x = \bar{x}_0(t)$, що:

а) $\bar{x}_0(t) \in C[0; T]$;

б) точки $(\bar{x}_0(t), t) \in \bar{D}$ коли $t \in [0; T]$;

в) корінь $x = \bar{x}_0(t)$ є ізолюваним на відрізку $[0; T]$, тобто існує $\eta > 0$ таке, що $f(x, x, t, 0) \neq 0$, коли $0 < \|x - \bar{x}_0(t)\| < \eta$, $t \in [0; T]$.

Припустимо, що в'язка $f_x(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник. Тоді існують такі неособливі матриці P , Q , що

$$Pf_x(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0)Q = \text{diag}\{1, W_{n-1}\},$$

$$PB(0, 0)Q = \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, λ_i , $i = \overline{1, n-1}$, – корені характерис-

тичного рівняння

$$\det(f_x(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)) = 0. \quad (3.4)$$

У системі (3.1) покладемо $x(t, \varepsilon) = Qy(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на P . Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = g(y, [y], t, \varepsilon), \quad (3.5)$$

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = PB(t, \varepsilon)Q, \quad g(y, [y], t, \varepsilon) = Pf(Qy, Q[y], t, \varepsilon).$$

Початкова умова (3.2) при цьому набуває вигляду

$$y(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} = Q^{-1}\varphi(t) \equiv \psi(t). \quad (3.6)$$

Надалі розглядається задача (3.5), (3.6).

Формальний розв'язок задачі (3.5), (3.6) шукаємо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \quad (3.7)$$

де $\bar{y}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{y}_s(t)$ – регулярна частина асимптотики; $\Pi y(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s y(\tau)$ – сингулярна частина асимптотики, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ [22, с. 248].

Підставимо (3.7) до системи (3.5)

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{d\bar{y}}{dt} + \tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) \frac{d\Pi y}{d\tau} = g(\bar{y} + \Pi y, [\bar{y} + \Pi y], t, \varepsilon) \quad (3.8)$$

і подамо $g(\bar{y} + \Pi y, [\bar{y} + \Pi y], t, \varepsilon)$ у вигляді

$$g(\bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), [\bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon)], t, \varepsilon) = \bar{g}(t, \varepsilon) + \Pi g(\tau, \varepsilon),$$

де

$$\bar{g}(t, \varepsilon) = g(\bar{y}(t, \varepsilon), [\bar{y}(t, \varepsilon)], t, \varepsilon),$$

$$\Pi g(\tau, \varepsilon) = g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), [\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) -$$

$$-g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), [\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Зобразимо вектор-функції $\bar{g}(t, \varepsilon)$ та $\Pi g(\tau, \varepsilon)$ у вигляді формальних рядів за степенями ε

$$\begin{aligned}\bar{g}(t, \varepsilon) &= g(\bar{y}(t, \varepsilon), [\bar{y}(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) = g(\bar{y}_0(t), \bar{y}_0(t), t, 0) + \\ &+ \varepsilon((\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t))\bar{y}_1(t) + g_1(t)) + \dots + \\ &+ \varepsilon^s((\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t))\bar{y}_s(t) + g_s(t)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{g}_s(t),\end{aligned}$$

елементи матриць $\bar{g}_y(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}}, \bar{g}_{[y]}(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial [y_j]} \right)_{i,j=\overline{1,n}}$

обчислюються в точці $(\bar{y}_0(t), \bar{y}_0(t), t, 0)$, а вектори $g_s(t)$ певним чином виражаються через $\bar{y}_k(t), [\bar{y}_k(t)], k < s$;

$$\begin{aligned}\Pi g(\tau, \varepsilon) &= g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), [\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) - \\ &- g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), [\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) = \\ &= g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0) - g(\bar{y}_0(0), \bar{y}_0(0), 0, 0) + \\ &+ \varepsilon(g_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + g_{[y]}(\tau)[\Pi_1 y(\tau)] + G_1(\tau)) + \dots + \\ &+ \varepsilon^s(g_y(\tau)\Pi_s y(\tau) + g_{[y]}(\tau)[\Pi_s y(\tau)] + G_s(\tau)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s g(\tau),\end{aligned}$$

елементи матриць $g_y(\tau), g_{[y]}(\tau)$ обчислюються в точці $(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, а вектори $G_s(\tau)$ певним чином виражаються через $\Pi_k y(\tau), [\Pi_k y(\tau)], k < s$.

Аналогічно подаємо матрицю $\tilde{B}(t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(t, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{1}{s!} \frac{\partial^s \tilde{B}(t, 0)}{\partial \varepsilon^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{B}_s(t), \\ \tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{i=0}^s \frac{1}{i!(s-i)!} \frac{\partial^s \tilde{B}(0, 0)}{\partial t^{s-i} \partial \varepsilon^i} \tau^{s-i} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s B(\tau).\end{aligned}$$

У системі (3.8) зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ :

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{g}(t, \varepsilon), \quad t \in [\varepsilon; T]; \quad (3.9)$$

$$\tilde{B}(\varepsilon\tau, \varepsilon) \frac{d\Pi y}{d\tau} = \Pi g(\tau, \varepsilon), \quad \tau \geq 1. \quad (3.10)$$

Початкова умова (3.6) при цьому набуває вигляду

$$\bar{y}(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} + \Pi y(\tau, \varepsilon)|_{0 \leq \tau \leq 1} = \psi(t).$$

Звідси

$$\begin{aligned} (\Pi_0 y(\tau) + \varepsilon \Pi_1 y(\tau) + \dots)|_{0 \leq \tau \leq 1} &= \psi(\varepsilon\tau) - \bar{y}_0(\varepsilon\tau) - \varepsilon \bar{y}_1(\varepsilon\tau) - \dots = \\ &= (\psi(0) - \bar{y}_0(0)) + \varepsilon(\psi'(0)\tau - \bar{y}_0'(0)\tau - \bar{y}_1(0)) + \dots + \\ &+ \varepsilon^s \left(\frac{\psi^{(s)}(0)}{s!} \tau^s - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\bar{y}_i^{(s-i)}(0)}{(s-i)!} \tau^{s-i} - \bar{y}_s(0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

У тотожностях (3.9), (3.10) зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε . Зокрема, при ε^0 маємо

$$g(\bar{y}_0(t), \bar{y}_0(t), t, 0) = 0; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} &= g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y], 0, 0) - \\ &- g(\bar{y}_0(0), \bar{y}_0(0), 0, 0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Згідно з припущенням 2 система (3.12) має розв'язок $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t)$. А тому система (3.13) набуде вигляду

$$\tilde{B}(0, 0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y], 0, 0), \quad \tau \geq 1. \quad (3.14)$$

Позначимо через $\Pi_{01}y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, $\psi_1(0)$ перші компоненти векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$ відповідно, а через $\Pi_{02}y(\tau)$,

$g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, $\psi_2(0)$ – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$.

Надалі робимо наступні припущення.

3. Рівняння $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y], 0, 0) = 0$ має розв'язок $\Pi_{01} y = \Pi_{01} y(\Pi_{02} y, [\Pi_{02} y])$, причому функція $\Pi_{01} y(\Pi_{02} y, [\Pi_{02} y])$ має неперервні частинні похідні за всіма змінними до k -го порядку включно і виконуються умови:

- а) $\Pi_{01} y(\Pi_{02} y, [\Pi_{02} y]) \rightarrow 0$, $(\Pi_{02} y, [\Pi_{02} y]) \rightarrow 0$;
- б) $\Pi_{01} y(\psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0)) = \psi_1(0) - \bar{y}_{01}(0)$.

4. Система

$$\frac{d\Pi_{02} y}{d\tau} = g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y], 0, 0),$$

здобута з (3.14) згідно з 3 має розв'язок $\Pi_{02} y = \Pi_{02} y(\tau)$, $\tau \geq 1$, що задовольняє початкову умову $\Pi_{02} y(1) = \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0)$, причому:

- а) $\Pi_{02} y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$;
- б) $\|Q(\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(t/\varepsilon))\| < a$, $t \in [\varepsilon; T]$.
- 5. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n-1}$.
- 6. $\{g_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)\}_{11} \neq 0$, $\tau \geq 1$.
- 7. $g_{[y]}(\bar{y}_0(0), \bar{y}_0(0), 0, 0) = 0$.
- 8. $\frac{d^s g_2(\psi(0), \psi(0), 0, 0)}{d\tau^s} = 0$, $s = \overline{0, k-1}$, число $k \in N$ визначимо пізніше.

Зазначимо, що з умов 3, 4, 8 випливає, що $\Pi_0 y(\tau) \in C^k[1; \infty)$ і

$$\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(1) = \psi(0). \quad (3.15)$$

Покажемо існування таких сталих $c_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, що

$$\|\Pi_0 y(\tau)\| \leq c_0 \exp(-\alpha_0 \tau), \quad \tau \geq 1. \quad (3.16)$$

Із системи (3.14) дістаємо

$$\frac{d\Pi_{02} y}{d\tau} = W_{n-1} \Pi_{02} y + \tilde{F}_{02}(\Pi_0 y, [\Pi_0 y]), \quad \tau \geq 1, \quad (3.17)$$

де

$$\tilde{F}_0(\Pi_0 y, [\Pi_0 y]) = g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y], 0, 0) - \Omega \Pi_0 y,$$

$\Omega = \text{diag}\{1, W_{n-1}\}$, $\tilde{F}_{02}(\Pi_0 y, [\Pi_0 y])$ – вектор-функція, що містить $n - 1$ останніх компонент $\tilde{F}_0(\Pi_0 y, [\Pi_0 y])$.

Згідно з припущенням 4 система (3.17) на піввідрізку $\tau \in [1; \rho_0)$, де ρ_0 – достатньо велике натуральне число, має розв’язок $\Pi_{02} y = \Pi_{02} y(\tau)$, що задовольняє початкову умову $\Pi_{02} y(1) = \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0)$.

Покладемо

$$c_{\rho_0}^{(0)} = \lim_{\tau \rightarrow \rho_0^-} \Pi_{02} y(\tau), \quad \sigma = \sup_{\rho_0 - 1 \leq \tau < \rho_0} \|\Pi_{02} y(\tau)\|.$$

Оскільки $\Pi_{02} y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, то можна вважати, що $\max\{\|c_{\rho_0}^{(0)}\|, \sigma\} < \delta_0$, де δ_0 – деяке достатньо мале додатне число.

Зазначимо, що для будь-якого $\xi > 0$ існує таке $\eta(\xi)$, що

$$\|\tilde{F}_0(u, [u]) - \tilde{F}_0(v, [v])\| < \xi(\|u - v\| + \|[u] - [v]\|)$$

і

$$\|\tilde{F}_0(u, v)\| < \xi(\|u\| + \|v\|)$$

для всіх $\|u\| \leq \eta(\xi)$, $\|[u]\| \leq \eta(\xi)$, $\|v\| \leq \eta(\xi)$, $\|[v]\| \leq \eta(\xi)$.

Згідно з умовою 3 існує така додатна стала k_0 , що

$$\|\Pi_{01}(u, [u]) - \Pi_{01}(v, [v])\| \leq k_0(\|u - v\| + \|[u] - [v]\|),$$

$$\|\Pi_{01}(u, v)\| \leq k_0(\|u\| + \|v\|)$$

для всіх $\|u\| \leq \eta(\xi)$, $\|[u]\| \leq \eta(\xi)$, $\|v\| \leq \eta(\xi)$, $\|[v]\| \leq \eta(\xi)$.

На піввідрізку $[\rho_0; \rho_0 + 1)$ розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \Pi_{02} y(\tau) &= \exp(W_{n-1}(\tau - \rho_0))c_{\rho_0}^{(0)} + \\ &+ \int_{\rho_0}^{\tau} \exp(W_{n-1}(\tau - p))\tilde{F}_{02}(\Pi_0 y(p), [\Pi_0 y(p)])dp. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для доведення експоненціальної оцінки (3.16) застосуємо метод послідовних наближень

$$\begin{aligned}\Pi_{02}^{(0)}y(\tau) &= \exp(W_{n-1}(\tau - \rho_0))c_{\rho_0}^{(0)}, \\ \Pi_{02}^{(k+1)}y(\tau) &= \exp(W_{n-1}(\tau - \rho_0))c_{\rho_0}^{(0)} + \\ &+ \int_{\rho_0}^{\tau} \exp(W_{n-1}(\tau - p))\tilde{F}_{02}(\Pi_0^{(k)}y(p), [\Pi_0y(p)])dp, k = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

При цьому вважаємо, що $\Pi_{01}^{(k+1)}y = \Pi_{01}(\Pi_{02}^{(k)}y, [\Pi_{02}y])$.

За побудовою

$$\|\Pi_{02}^{(0)}y(\tau)\| \leq \delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)),$$

де $\lambda = \max\{\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_{n-1}\}$.

Нехай

$$\|\Pi_0y(\tau)\| \leq \delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)), \quad \rho_0 - 1 \leq \tau \leq \rho_0$$

та $\delta_0 \leq \eta(\xi)$. Тоді

$$\|\Pi_{02}^{(1)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(0)}y(\tau)\| \leq \theta_0 \delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0))$$

і

$$\|\Pi_{02}^{(1)}y(\tau)\| \leq (1 + \theta_0)\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)),$$

$$\theta_0 = 2\xi(1 + k_0).$$

Нехай $\frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \leq \eta(\xi)$. Тоді аналогічно показуємо справедливості оцінок

$$\|\Pi_{02}^{(2)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(1)}y(\tau)\| \leq \theta_0^2 \delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)),$$

$$\begin{aligned}\|\Pi_{02}^{(2)}y(\tau)\| &\leq (1 + \theta_0 + \theta_0^2)\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)) \leq \\ &\leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \exp(\lambda(\tau - \rho_0)).\end{aligned}$$

Припустимо, що

$$||\Pi_{02}^{(k-1)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(k-2)}y(\tau)|| \leq \theta_0^{k-1}\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0))$$

і

$$\begin{aligned} ||\Pi_{02}^{(k-1)}y(\tau)|| &\leq (1 + \theta_0 + \dots + \theta_0^{k-1})\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)) \leq \\ &\leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \exp(\lambda(\tau - \rho_0)). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} ||\Pi_{02}^{(k)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(k-1)}y(\tau)|| &\leq \theta_0^k\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)), \\ ||\Pi_{02}^{(k)}y(\tau)|| &\leq (1 + \theta_0 + \dots + \theta_0^k)\delta_0 \exp(\lambda(\tau - \rho_0)) \leq \\ &\leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \exp(\lambda(\tau - \rho_0)). \end{aligned}$$

Отже, з тотожності

$$\begin{aligned} \Pi_{02}^{(k)}y(\tau) &= (\Pi_{02}^{(k)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(k-1)}y(\tau)) + (\Pi_{02}^{(k-1)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(k-2)}y(\tau)) + \dots + \\ &+ (\Pi_{02}^{(1)}y(\tau) - \Pi_{02}^{(0)}y(\tau)) \end{aligned}$$

випливатиме рівномірна відносно $\tau \in [\rho_0; \rho_0 + 1)$ збіжність послідовних наближень $\Pi_{02}^{(k)}y(\tau)$ до розв'язку $\Pi_{02}y(\tau)$. Крім того, має місце наступна оцінка

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \exp(\lambda(\tau - \rho_0)), \quad \tau \in [\rho_0; \rho_0 + 1).$$

Покладемо $c_{\rho_0+1}^{(0)} = \lim_{\tau \rightarrow \rho_0+1-} \Pi_{02}y(\tau)$. Тоді

$$||c_{\rho_0+1}^{(0)}|| \leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \exp \lambda$$

і

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \frac{\exp \lambda}{1 - \theta_0} \exp(\lambda(\tau - \rho_0 - 1)),$$

$\tau \in [\rho_0 + 1; \rho_0 + 2)$.

Аналогічно до наведеного вище, встановлюється рівномірна відносно $\tau \in [\rho_0 + j + 1; \rho_0 + j + 2)$, $j \in N$, збіжність послідовних наближень $\Pi_{02}^{(k)}y(\tau)$ до розв'язку $\Pi_{02}y(\tau)$. При цьому

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq \frac{\delta_0}{1 - \theta_0} \left(\frac{\exp \lambda}{1 - \theta_0} \right)^{j+1} \exp(\lambda(\tau - \rho_0 - j - 1)),$$

$\tau \in [\rho_0 + j + 1; \rho_0 + j + 2)$, $j \in N$.

А тому для досить малого ξ існують такі додатні сталі $\tilde{c}$ та α_0 , $0 < \alpha_0 < -\lambda$, що

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq \tilde{c}e^{-\alpha_0\tau}, \quad \tau \geq \rho_0.$$

На піввідрізку $[1; \rho_0)$ розв'язок $\Pi_{02}y(\tau)$ обмежений деякою сталою $\tilde{d}$

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq \tilde{d}, \quad \tau \in [1; \rho_0).$$

Нехай $c_{02} = \max \{ \tilde{d} \exp(\alpha_0 \rho_0), \tilde{c} \}$. Тоді

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq c_{02}e^{-\alpha_{02}\tau}, \quad \tau \geq 1,$$

і з умови 3 впливає оцінка (3.16).

Зазначимо, що малість сталих ξ та δ_0 можна гарантувати вибором досить великого ρ_0 .

Зрівнюючи у (3.9), (3.10) коефіцієнти при ε^s , $s \in N$, дістаємо

$$(\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t))\bar{y}_s = \sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}}{dt} - g_s(t); \quad (3.19)$$

$$\tilde{B}(0,0) \frac{d\Pi_s y}{d\tau} = g_y(\tau)\Pi_s y + g_{[y]}(\tau)[\Pi_s y] + F_s(\tau), \quad \tau \geq 1, \quad (3.20)$$

$$F_s(\tau) = G_s(\tau) - \sum_{i=1}^s \Pi_i B(\tau) \frac{d\Pi_{s-i} y(\tau)}{d\tau}.$$

Згідно з умовою 7 існує t_0 , $t_0 \leq T$, для якого $\det(\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t)) \neq 0$, $t \in [\varepsilon; t_0]$. Тоді

$$\bar{y}_s(t) = (\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t))^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}(t)}{dt} - g_s(t) \right), \quad t \in [\varepsilon; t_0],$$

$s \in N$.

За побудовою $g_y(\tau) \rightarrow g_y(\overline{y}_0(0), \overline{y}_0(0), 0, 0)$, $\tau \rightarrow \infty$ та $g_{[y]}(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$. Якщо

$$g_y(\tau) = \begin{pmatrix} C_1(\tau) & C_2(\tau) \\ C_3(\tau) & C_4(\tau) \end{pmatrix}, \quad g_{[y]}(\tau) = \begin{pmatrix} R_1(\tau) & R_2(\tau) \\ R_3(\tau) & R_4(\tau) \end{pmatrix},$$

де $C_4(\tau)$, $R_4(\tau)$ – квадратні матриці $(n-1)$ -го порядку, то систему (3.20) можна подати у вигляді

$$C_1(\tau)\Pi_{s1}y = -R_1(\tau)[\Pi_{s1}y] - R_2(\tau)[\Pi_{s2}y] - C_2(\tau)\Pi_{s2}y - F_{s1}(\tau); \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} &= C_4(\tau)\Pi_{s2}y + C_3(\tau)\Pi_{s1}y + R_3(\tau)[\Pi_{s1}y] + \\ &+ R_4(\tau)[\Pi_{s2}y] + F_{s2}(\tau), \quad \tau \geq 1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

де структура $\Pi_{s1}y(\tau)$, $F_{s1}(\tau)$ та $\Pi_{s2}y(\tau)$, $F_{s2}(\tau)$ аналогічна структурі відповідно $\Pi_{01}y(\tau)$ та $\Pi_{02}y(\tau)$.

9. Нехай $\Pi_{s1}y(1) = \frac{\psi_1^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\overline{y}_{i1}^{(s-i)}(0)}{(s-i)!} - \overline{y}_{s1}(0)$, $s \in N$.

Тоді можна вимагати, щоб

$$\Pi_{sy}(1) = \frac{\psi^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\overline{y}_i^{(s-i)}(0)}{(s-i)!} - \overline{y}_s(0), \quad s \in N. \quad (3.23)$$

Справді, початкову умову для розв'язку системи (3.22) знайдемо з рівності (3.23)

$$\Pi_{s2}y(1) = \frac{\psi_2^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\overline{y}_{i2}^{(s-i)}(0)}{(s-i)!} - \overline{y}_{s2}(0). \quad (3.24)$$

10. Нехай $R_1(\tau) \equiv 0$, $\tau \geq 1$.

Тоді система рівнянь, що еквівалентна (3.21), (3.22), (3.24), має вигляд

$$\Pi_{s1}y(\tau) = -\frac{1}{C_1(\tau)} (R_2(\tau)[\Pi_{s2}y(\tau)] + C_2(\tau)\Pi_{s2}y(\tau) + F_{s1}(\tau)); \quad (3.25)$$

$$\Pi_{s2}y(\tau) = \Phi_{n-1}(\tau)c_2^{(s)} + \int_1^\tau \Phi_{n-1}(\tau)\Phi_{n-1}^{-1}(p)\tilde{F}_{s2}(p)dp, \quad \tau \geq 1, \quad s \in N, \quad (3.26)$$

де

$$c_2^{(s)} = \frac{\psi_2^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\bar{y}_{i2}^{(s-i)}(0)}{(s-i)!} - \bar{y}_{s2}(0),$$

$$\tilde{F}_{s2}(\tau) = R_3(\tau)[\Pi_{s1}y] + \left(R_4(\tau) - \frac{C_3(\tau)R_2(\tau)}{C_1(\tau)} \right) [\Pi_{s2}y] +$$

$$+ F_{s2}(\tau) - \frac{C_3(\tau)}{C_1(\tau)} F_{s1}(\tau);$$

$\Phi_{n-1}(\tau)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = \left(C_4(\tau) - \frac{C_3(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)} \right) \Pi_{s2}y, \quad \Phi_{n-1}(1) = E_{n-1}.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n-1}(\tau)\| &\leq d_0 \exp(-\beta_0\tau), \quad \tau \geq 1, \quad \beta_0 > 0, \\ \|\Phi_{n-1}(\tau)\Phi_{n-1}^{-1}(p)\| &\leq d_0 \exp(-\beta_0(\tau-p)), \quad 1 \leq p \leq \tau; \\ \|c_2^{(s)}\| &\leq r_s, \quad \left\| \frac{R_3(\tau)[R_2(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau), \\ \left\| R_4(\tau) - \frac{R_3(\tau)[C_2(\tau)]}{[C_1(\tau)]} - \frac{C_3(\tau)R_2(\tau)}{C_1(\tau)} \right\| &\leq r \exp(-\alpha_0\tau), \\ \left\| F_{s2}(\tau) - \frac{C_3(\tau)F_{s1}(\tau)}{C_1(\tau)} - \frac{R_3(\tau)[F_{s1}(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| &\leq d_s \exp(-\gamma_s\tau), \end{aligned}$$

$$0 < \gamma_s \leq \alpha_0, \quad \tau \geq 1, \quad \alpha_0 < \beta_0.$$

11. Нехай $\frac{2d_0r}{\beta_0 - \alpha_0} < 1$.

Тоді оператор, що визначений за допомогою (3.25), (3.26), для достатньо великих c_{s2} відображає множину

$$\Gamma_s = \{\Pi_{s2}y(\tau) \in C[1; \infty) : \|\Pi_{s2}y(\tau)\| \leq c_{s2} \exp(-\alpha_{s2}\tau)\},$$

$0 < \alpha_{s2} \leq \gamma_s$, в себе і є оператором стиску. А тому система (3.25), (3.26) на множині Γ_s має єдиний розв'язок.

Таким чином, існують додатні сталі $c_s, \alpha_s, s = \overline{2, m}$, для яких мають місце нерівності

$$||\Pi_s y(\tau)|| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \tau \geq 1, s = \overline{1, m}.$$

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку основної початкової задачі (3.1), (3.2).

В умовах 3, 8 вважаємо, що $k = m$. Тоді, покладаючи в системі (3.5)

$$y(t, \varepsilon) = y_m(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (3.27)$$

де

$$y_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)),$$

$z(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, дістаємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dz}{dt} = g_y(t, \varepsilon)z + g_{[y]}(t, \varepsilon)[z] + h(z, [z], t, \varepsilon), \quad (3.28)$$

де

$$g_y(t, \varepsilon) = g_y(\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau), [\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)], t, \varepsilon),$$

$$g_{[y]}(t, \varepsilon) = g_{[y]}(\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau), [\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)], t, \varepsilon),$$

$$h(z, [z], t, \varepsilon) = g(y_m + z, [y_m + z], t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy_m}{dt} - \\ - g_y(t, \varepsilon)z - g_{[y]}(t, \varepsilon)[z].$$

За побудовою $||h(0, 0, t, \varepsilon)|| \leq c\varepsilon^{m+1}, t \in [\varepsilon; t_0]$. При цьому

$$||z(t, \varepsilon)|| \leq c\varepsilon^{m+1}, t \in [0; \varepsilon]. \quad (3.29)$$

Доведемо існування розв'язку системи (3.28), що задовольняє початкову умову

$$z(\varepsilon, \varepsilon) = \psi(\varepsilon) - y_m(\varepsilon, \varepsilon). \quad (3.30)$$

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{G}_1)$. У системі (3.28) зробимо заміну $z(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t, \varepsilon)$. Тут структура матриць $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$ така сама, як і в теоремі 2.3; $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{K}_1)$. Маємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{du}{dt} = \tilde{D}(t, \varepsilon)u + \tilde{F}(t, \varepsilon)[u] + \tilde{w}(u, [u], t, \varepsilon), \quad (3.31)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, \varepsilon) &= P(t, \varepsilon)\tilde{B}(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon), \\ \tilde{D}(t, \varepsilon) &= P(t, \varepsilon)g_y(t, \varepsilon)Q(t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t, \varepsilon)Q'(t, \varepsilon), \\ \tilde{F}(t, \varepsilon) &= P(t, \varepsilon)g_{[y]}(t, \varepsilon)[Q(t, \varepsilon)], \\ \tilde{w}(u, [u], t, \varepsilon) &= P(t, \varepsilon)h(Q(t, \varepsilon)u, [Q(t, \varepsilon)u], t, \varepsilon), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} &= D_1(t, \varepsilon)u_1 + D_2(t, \varepsilon)u_2 + F_1(t, \varepsilon)[u_1] + F_2(t, \varepsilon)[u_2] + \\ &+ w_1(u, [u], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_2}{dt} &= D_4(t, \varepsilon)u_2 + D_3(t, \varepsilon)u_1 + F_3(t, \varepsilon)[u_1] + F_4(t, \varepsilon)[u_2] + \\ &+ w_2(u, [u], t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$F(t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{F}(t, \varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} F_1(t, \varepsilon) & F_2(t, \varepsilon) \\ F_3(t, \varepsilon) & F_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$w(u, [u], t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} \tilde{w}(u, [u], t, \varepsilon),$$

де $b(0, 0) = 0$, $E_{n-1}(0, 0) = E_{n-1}$, $F_4(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця $(n-1)$ -го порядку; u_1 та w_1 – перші компоненти векторів u та w відповідно, а u_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент u та w (матриця $D(t, \varepsilon)$ така сама, як і в теоремі 2.3).

Початкова умова (3.30) при цьому набуває вигляду

$$u(\varepsilon, \varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_m(\varepsilon, \varepsilon)). \quad (3.34)$$

Зазначимо, що існує така стала $c > 0$, що

$$|D_1(t, \varepsilon) - e(t, \varepsilon)| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$$\|D_i(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = 2, 3,$$

$$\|D_4(t, \varepsilon) - W_{n-1}(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, де $e(0, 0) = 1$, $W_{n-1}(0, 0) = W_{n-1}$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\|F(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon + t \right), \quad t \in [\varepsilon; t_0]. \quad (3.35)$$

12. Нехай $b(t, \varepsilon) = \varepsilon^k t b_1(t, \varepsilon)$, $k \geq 0$, де $b_1(t, \varepsilon) \neq 0$, $t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$, причому $\operatorname{Re} \frac{D_1(t, \varepsilon)}{b_1(t, \varepsilon)} \leq \eta < 0$, $t \in [0; t_0]$.

Позначимо через $\Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon)$ фундаментальну матрицю одно-рідної системи

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_4(t, \varepsilon) u_2, \quad \Psi_{n-1}(s, s, \varepsilon) = E_{n-1}.$$

Тоді

$$\|\Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp \left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \leq s \leq t \leq t_0, \quad \beta > 0$$

[23, с. 53, 54].

За побудовою

$$\|w(v_1, [v_1], t, \varepsilon) - w(v_2, [v_2], t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon k_0 (\|v_1 - v_2\| + \|[v_1] - [v_2]\|)$$

для всіх $v_1, v_2 \in D_{m+1}$, де

$$D_{m+1} = \{u(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon; t_0] : \|u(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \varepsilon^{m+1}\}, \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_1],$$

k_1 – деяка відома стала та

$$||w(0, 0, t, \varepsilon)|| \leq c\varepsilon^{m+1}, \quad t \in [\varepsilon; t_0].$$

Вважаємо, що

$$||Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_m(\varepsilon, \varepsilon))|| \leq c\varepsilon^{m+1}.$$

Нехай

$$\varphi_m(\varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_m(\varepsilon, \varepsilon)) \equiv \text{col}(\varphi_{m1}(\varepsilon), \varphi_{m2}(\varepsilon)),$$

де $\varphi_{m2}(\varepsilon)$ – $(n-1)$ -вимірний вектор.

На відрізку $[\varepsilon; t_0]$ розглянемо систему інтегральних рівнянь, що еквівалентна (3.32) – (3.34). Маємо

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) = & \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \varphi_{m1}(\varepsilon) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) (D_2(s, \varepsilon)u_2 + \\ & + F_1(s, \varepsilon)[u_1] + F_2(s, \varepsilon)[u_2] + w_1(u, [u], s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) = & \Psi_{n-1}(t, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_{m2}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_{n-1}(t, s, \varepsilon) \times \\ & \times (D_3(s, \varepsilon)u_1 + F_3(s, \varepsilon)[u_1] + F_4(s, \varepsilon)[u_2] + w_2(u, [u], s, \varepsilon)) ds. \end{aligned} \quad (3.37)$$

13. Нехай

$$\frac{c}{|\eta| \min_{\varepsilon \leq t \leq t_0} |b_1(t, \varepsilon)|} (3 \exp(-\alpha_0) + 2t_0) < 1$$

та

$$\frac{cd}{\beta} (3 \exp(-\alpha_0) + 2t_0) < 1.$$

Тоді для достатньо великих k_1 , оператор, що визначений за допомогою (3.36), (3.37), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.36), (3.37) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином справедливою є така теорема.

Теорема 3.1. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+1}[0; \varepsilon]$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), \overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 2 – 13 (умова 9 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}, \quad t \in [\varepsilon; t_0], \quad (3.38)$$

де $x_m(t, \varepsilon) = Qy_m(t, \varepsilon)$.

Доведемо твердження, що аналогічне теоремі 3.1, для системи

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, [x], t, \varepsilon). \quad (3.39)$$

У даному випадку $\overline{y}_0(t) \equiv 0$, $t \in [\varepsilon; T]$; $\Pi_{01}y(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [1; \infty)$.
14. Нехай $\psi_{01}(0) = 0$.

Тоді, повторюючи міркування, що використані при доведенні теореми 3.1, переконуємось у справедливості наступного твердження.

Наслідок 3.1. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{m+1}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+1}[0; \varepsilon]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 5, 9, 11, 12, 14 (умова 9 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Теорема 3.1 та наслідок 3.1 мають локальний характер. Якщо на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має

$n - 1$ попарно різне власне значення, то згідно з [93, с. 17] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t)$, $Q(t)$, що

$$P(t)f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \text{diag}\{1, W_{n-1}(t)\},$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1}(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$, $\lambda_i(t)$ – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)) = 0. \quad (3.40)$$

Покладаючи у системі (3.1) $x(t, \varepsilon) = Q(t)y(t, \varepsilon)$ і домножуючи її обидві частини зліва на $P(t)$, дістаємо

$$\varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = g(y, [y], t, \varepsilon), \quad (3.41)$$

де

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = P(t)B(t, \varepsilon)Q(t),$$

$$g(y, [y], t, \varepsilon) = P(t)f(Q(t)y, [Q(t)y], t, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{B}(t, \varepsilon)Q^{-1}(t)Q'(t).$$

Початкова умова (3.2) при цьому набуває вигляду

$$y(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} = (Q^{-1}(t)\varphi(t))|_{0 \leq t \leq \varepsilon} \equiv \psi(t). \quad (3.42)$$

15. Нехай $\text{Re } \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$.

Шукаючи формальний розв'язок задачі (3.41), (3.42) у вигляді (3.7), приходимо до системи (3.9), (3.10). При цьому, припускаючи виконання відповідних умов на відрізку $[\varepsilon; T]$, із (3.9) дістаємо

$$\bar{y}_s(t) = \left(\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{d\bar{y}_{s-i}(t)}{dt} - g_s(t) \right), t \in [\varepsilon; T],$$

$s \in N$.

Сингулярна частина асимптотики визначається за формулами (3.25), (3.26).

Таким чином, мають місце такі твердження.

Теорема 3.2. Припустимо, що $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+1}[0; \varepsilon]$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n - 1$ попарно різне власне значення і виконуються умови 2 – 4, 6 – 13, 15 (умова 9 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наслідок 3.2. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{m+1}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+1}[0; \varepsilon]$, на відрізку $[0; T]$ в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ регулярна, має $n - 1$ попарно різне власне значення і виконуються умови 9, 11, 12, 14, 15 (умова 9 для $s = \overline{1, m}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.38).

Приклад 3.1. Розглянемо основну початкову задачу

$$\varepsilon \tilde{B}(t) \frac{dy}{dt} = g(y(t, \varepsilon), y(t - \varepsilon, t), t, \varepsilon), \quad t \in \left[\varepsilon; \frac{1}{2} \right],$$

$$y(t, \varepsilon)|_{0 \leq t \leq \varepsilon} = \psi,$$

де

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(y, [y], t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2^2 + t[y_3] \\ -y_2 + a_2 + b_2 t \\ -2y_3 + a_3 + b_3 t + \varepsilon[y_1] \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix},$$

$[y(t, \varepsilon)] = y(t - \varepsilon, \varepsilon)$, a_i , b_i , ψ_i – довільні сталі.

Тоді

$$\overline{y}_0(t) = \begin{pmatrix} -(a_2 + b_2 t)^2 - \frac{t}{2}(a_3 + b_3 t) \\ a_2 + b_2 t \\ \frac{1}{2}(a_3 + b_3 t) \end{pmatrix}.$$

Для сумісності заданої диференціально-алгебраїчної системи рівнянь, насамперед, слід вимагати виконання умови 3, яка у даному випадку зводиться до умови

$$\psi_1 = -\psi_2^2.$$

Таким чином,

$$\psi = \begin{pmatrix} -\psi_2^2 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

За побудовою

$$\Pi_0 y(\tau) = \begin{pmatrix} 2a_2(a_2 - \psi_2) \exp(1 - \tau) - (\psi_2 - a_2)^2 \exp(2(1 - \tau)) \\ (\psi_2 - a_2) \exp(1 - \tau) \\ (\psi_3 - \frac{a_3}{2}) \exp(1 - \tau) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$g_y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 2(a_2 + b_2 t + (\psi_2 - a_2) \exp(1 - \frac{t}{\varepsilon})) & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

та

$$g_{[y]}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то використовуючи перетворюючі матриці

$$P(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2t(a_2 + b_2 t)}{t-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2(a_2 + b_2 t)}{t-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

дістаємо

$$\tilde{D}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 2(\psi_2 - a_2) \exp(1 - \frac{t}{\varepsilon}) - 2\varepsilon t \frac{a_2 + b_2}{(t-1)^2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$F(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \frac{2\varepsilon(a_2+b_2(t-\varepsilon))}{t-\varepsilon-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, якщо

$$2|\psi_2 - a_2| + t < 1,$$

то виконуватиметься умова 13. Отже, для

$$|\psi_2 - a_2| < \frac{1}{4}$$

згідно теореми 3.1 задана основна початкова задача на відрізку $[0; \frac{1}{2}]$ має такий єдиний розв'язок $y = y(t, \varepsilon)$, що

$$\|y(t, \varepsilon) - y_0(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon, \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right],$$

де $y_0(t, \varepsilon) = \bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)$.

Розглянемо загальний випадок. Отже, нехай регулярна в'язка $f_x(\bar{x}_0(0), \bar{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$.

Шукаючи розв'язок задачі (3.5), (3.6) у вигляді (3.7), приходимо до систем (3.9), (3.10). При цьому

$$g_y(\bar{y}_0(0), \bar{y}_0(0), 0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_p\}, \quad \tilde{B}(0, 0) = \text{diag}\{J_q, E_p\}, \quad (3.43)$$

де $W_p = \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}$, $W_i = \lambda_i E_i + J_i$, $i = \overline{1, r}$, λ_i – корені рівняння (3.4), $J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

Позначимо через $\Pi_{01}y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, $\psi_1(0)$ вектори, що містять q перших компонент векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$ відповідно, а через $\Pi_{02}y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, $\psi_2(0)$ – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$.

Припускаємо виконання наступних умов.

16. Система

$$J_q \frac{d\Pi_{01}y}{d\tau} = g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y, \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y], 0, 0)$$

має розв'язок $\Pi_{01}y = \Pi_{01}y(\Pi_{02}y, [\Pi_{02}y], \tau)$ причому:

а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$, для яких

$$||\Pi_{01}(\Pi_{02}y, [\Pi_{02}y], \tau)|| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01}\tau), \tau \geq 1;$$

б) $\Pi_{01}y(\psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), 1) = \psi_1(0) - \bar{y}_{01}(0)$.

17. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{1, r}$.

18. $\frac{\partial^2 \{g(y, [y], 0, 0)\}_k}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \{g(y, [y], 0, 0)\}_k}{\partial y_i \partial [y_j]} = 0$, $k, i, j = \overline{1, n}$, для всіх y таких, що

$$||y - \bar{y}_0(0)|| \leq ||\psi(0) - \bar{y}_0(0)||,$$

$$||y - \bar{y}_0(0)|| \leq c_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon}\right), t \in [\varepsilon; t_0].$$

Регулярні члени асимптотики $\bar{y}_s(t)$, $s \in N$, визначаються із співвідношення (3.19).

Нехай

$$g_{[y]}(\tau) = \begin{pmatrix} R_1(\tau) & R_2(\tau) \\ R_3(\tau) & R_4(\tau) \end{pmatrix},$$

де $R_1(\tau)$ – квадратна матриця q -го порядку.

Сингулярні члени асимптотики визначаємо із системи (3.20), яка у даному випадку набуває вигляду

$$J_q \frac{d\Pi_{s1}y}{d\tau} = \Pi_{s1}y + R_1(\tau)[\Pi_{s1}y] + R_2(\tau)[\Pi_{s2}y] + F_{s1}(\tau), \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = W_p \Pi_{s2}y + R_3(\tau)[\Pi_{s1}y] + R_4(\tau)[\Pi_{s2}y] + F_{s2}(\tau), \tau \geq 1, s \in N, \quad (3.45)$$

де структура $\Pi_{s1}y(\tau)$, $F_{s1}(\tau)$ та $\Pi_{s2}y(\tau)$, $F_{s2}(\tau)$ аналогічна структурі відповідно $\Pi_{01}y(\tau)$ та $\Pi_{02}y(\tau)$.

19. Нехай $R_1(\tau) \equiv 0$, $R_3(\tau) \equiv 0$, $\tau \geq 1$.

Тоді

$$\Pi_{s1}y(\tau) = - \sum_{k=0}^{q-1} J_q^k \frac{d^k \tilde{F}_{s1}(\tau)}{d\tau^k},$$

і

$$\Pi_{s2}y(\tau) = \Phi_p(\tau)c_2^{(s)} + \int_1^{\tau} \Phi_p(\tau)\Phi_p^{-1}(v)\tilde{F}_{s2}(v)dv, \quad s \in N, \quad (3.46)$$

де $\Phi_p(\tau)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = W_p\Pi_{s2}y, \quad \Phi_p(1) = E_p,$$

$$c_2^{(s)} = \frac{\psi_2^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\bar{y}_{k2}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar{y}_{s2}(0),$$

$$\tilde{F}_{s1}(\tau) = R_2(\tau)[\Pi_{s2}y(\tau)] + F_{s1}(\tau), \quad \tilde{F}_{s2}(\tau) = R_4(\tau)[\Pi_{s2}y] + F_{s2}(\tau),$$

$s \in N$.

Нехай

$$\|\Phi_p(\tau)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0\tau), \quad \tau \geq 1, \quad \beta_0 > 0,$$

$$\|\Phi_p(\tau)\Phi_p^{-1}(v)\| \leq d_0 \exp(-\beta_0(\tau-v)), \quad 1 \leq v \leq \tau,$$

$$\|F_s(\tau)\| \leq d_s \exp(-\gamma_s\tau), \quad \|R(\tau)\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau), \quad \tau \geq 1, \quad s \in N.$$

Припустимо, що $0 < \alpha_{s2} \leq \min\{\alpha_0, \gamma_s\}$, $s = \overline{1, m+l}$, і $\alpha_0 < \beta_0$. Тоді, за умови 11, для розв'язку $\Pi_{s2}y = \Pi_{s2}y(\tau)$ системи (3.46) має місце наступна оцінка:

$$\|\Pi_{s2}(\tau)\| \leq r_s \exp(-\alpha_{s2}\tau), \quad \tau \geq 1, \quad s = \overline{1, m+l}.$$

А тому існують такі додатні сталі α_s , c_s , що

$$\|\Pi_s y(\tau)\| \leq c_s \exp(-\alpha_s\tau), \quad \tau \geq 1, \quad s = \overline{1, m+l}.$$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок основної початкової задачі (3.1), (3.2) має асимптотичний характер.

В умові 8 вважаємо, що $k = m + l$. У системі (3.5) зробимо заміну

$$y(t, \varepsilon) = y_{m+l}(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (3.47)$$

де $y_{m+l}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+l} \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau))$, $z(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, число l визначається пізніше. Як і раніше, приходимо до системи (3.28), в якій

$$\begin{aligned} g_y(t, \varepsilon) &= g_y \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), \sum_{s=0}^l \varepsilon^s ([\bar{y}_s(t)] + [\Pi_s y(\tau)]), t, \varepsilon \right), \\ g_{[y]}(t, \varepsilon) &= \\ &= g_{[y]} \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), \sum_{s=0}^l \varepsilon^s ([\bar{y}_s(t)] + [\Pi_s y(\tau)]), t, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

За побудовою

$$||h(0, 0, t, \varepsilon)|| \leq c\varepsilon^{m+l+1}, \quad t \in [\varepsilon; t_0],$$

$||h(v_1, [v_1], t, \varepsilon) - h(v_2, [v_2], t, \varepsilon)|| \leq k_0 \varepsilon^{l+1} (||v_1 - v_2|| + ||[v_1] - [v_2]||)$, для всіх таких $v_1(t, \varepsilon), v_2(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon; t_0]$, що $||v_1(t, \varepsilon)|| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $||v_2(t, \varepsilon)|| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $t \in [\varepsilon; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Згідно з теоремою 2.1 існують неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, для яких мають місце рівності (3.53), (3.54).

Тоді замість системи (3.32), (3.33) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} &= (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))u_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)u_2 + F_1(t, \varepsilon)[u_1] + \\ &+ F_2(t, \varepsilon)[u_2] + w_1(u, [u], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_2}{dt} &= (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))u_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)u_1 + F_3(t, \varepsilon)[u_1] + \\ &+ F_4(t, \varepsilon)[u_2] + w_2(u, [u], t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$J_q(0,0) = J_q$, $E_p(0,0) = E_p$, $W_p(0,0) = W_p$; u_1 та w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів u та w відповідно, а u_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент u та w . Тут матриця $D(t,\varepsilon)$ така сама, як і в теоремі 2.5.

20. Нехай $\det J_q(t,\varepsilon) \neq 0$, $t \in [\varepsilon; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, причому:

а) існує таке $\zeta \geq 1$, що

$$\|\Psi_q(t,s,\varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon\zeta} \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon\zeta}\right),$$

$$\|diag\{\Psi_q(t,s,\varepsilon)J_q^{-1}(s,\varepsilon), E_{n-q}\}F(s,\varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon\zeta-1} \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon\zeta}\right),$$

$\beta > 0$, для всіх $\varepsilon \leq s \leq t \leq t_0$, де $\Psi_q(t,s,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon J_q(t,\varepsilon) \frac{du_1}{dt} = (E_q(t,\varepsilon) + \varepsilon D_1(t,\varepsilon))u_1, \quad \Psi_q(s,s,\varepsilon) = E_q;$$

б)

$$\|J_q^{-1}(s,\varepsilon)w_1(0,0,s,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l-\gamma+1}, \quad \varepsilon \leq s \leq t \leq t_0,$$

$$\begin{aligned} & \|J_q^{-1}(s,\varepsilon)(w_1(v_1, [v_1], s, \varepsilon) - w_1(v_2, [v_2], s, \varepsilon))\| \leq \\ & \leq k_0\varepsilon^{l-\gamma+1}(\|v_1 - v_2\| + \|[v_1] - [v_2]\|), \end{aligned}$$

$\gamma \in N \cup \{0\}$, для всіх таких $v_1(s,\varepsilon)$, $v_2(s,\varepsilon) \in C[\varepsilon; t]$, що $\|v_1(s,\varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}$, $\|v_2(s,\varepsilon)\| \leq \delta\varepsilon^{l+1}$, $\varepsilon \leq s \leq t \leq t_0$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$. Тут $l = \gamma + 1$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\|diag\{\Psi_q(t,s,\varepsilon)J_q^{-1}(s,\varepsilon), E_{n-q}\}D(s,\varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon\zeta} \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon\zeta}\right),$$

$$\|\Psi_p(t,s,\varepsilon)\| \leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \leq s \leq t \leq t_0,$$

де $\Psi_p(t,s,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_p^{-1}(t,\varepsilon)W_p(t,\varepsilon) + \varepsilon D_4(t,\varepsilon))u_2, \quad \Psi_p(s,s,\varepsilon) = E_p,$$

та

$$\begin{aligned} \|w_2(0, 0, t, \varepsilon)\| &\leq c\varepsilon^{m+l+1}, \quad t \in [\varepsilon; t_0], \\ \|\psi(\varepsilon) - y_{m+l}(\varepsilon, \varepsilon)\| &\leq c\varepsilon^{m+l+1}. \end{aligned}$$

Нехай

$$u(\varepsilon, \varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_{m+l}(\varepsilon, \varepsilon)) \equiv \varphi_{m+l}(\varepsilon). \quad (3.50)$$

Розглянемо систему інтегральних рівнянь, що еквівалентна (3.48) – (3.50)

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) = & \Psi_q(t, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_{m+l,1}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) \times \\ & \times (\varepsilon D_2(s, \varepsilon)u_2 + F_1(s, \varepsilon)[u_1] + F_2(s, \varepsilon)[u_2] + w_1(u, [u], s, \varepsilon)) ds; \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) = & \Psi_p(t, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_{m+l,2}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_p(t, s, \varepsilon) \times \\ & \times (\varepsilon D_3(s, \varepsilon)u_1 + F_3(s, \varepsilon)[u_1] + F_4(s, \varepsilon)[u_2] + w_2(u, [u], s, \varepsilon)) ds, \quad (3.52) \end{aligned}$$

де $\varphi_{m+l}(\varepsilon) = \text{col}(\varphi_{m+l,1}(\varepsilon), \varphi_{m+l,2}(\varepsilon))$.

21. Нехай

$$\frac{2d}{\beta} < 1, \quad \frac{2cd}{\beta}(\exp(-\alpha_0) + t_0) < 1,$$

де стала c береться з оцінки (3.35).

Тоді оператор, що визначений за допомогою (3.51), (3.52), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.51), (3.52) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок.

Теорема 3.3. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $f'_x(x_0(0), x_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних ділників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 2, 4, 7 – 9, 11, 16 – 21 (умови 8 та 9 відповідно для $k = m + l - 1$ та $s = \overline{1, m + l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що

для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрітку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наслідок 3.3. Нехай $A(t), B(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 9, 11, 14, 17, 19 – 21 (умова 9 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрітку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.38).

Приклад 3.2. Нехай у системі (3.48) $q = 2$,

$$J_2(t, \varepsilon) \equiv J_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 \\ 0 & -2\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$E_2(t, \varepsilon) \equiv E_2, \quad D_1(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad (t, \varepsilon) \in \overline{K}_1.$$

Тоді власними значеннями матриці $J_2(\varepsilon)$ будуть

$$\lambda_1 = -\varepsilon, \quad \lambda_2 = -2\varepsilon.$$

Нехай $T(\varepsilon)$ – така квадратна матриця другого порядку, що

$$T^{-1}(\varepsilon)J_2(\varepsilon)T(\varepsilon) = W_2(\varepsilon), \quad W_2(\varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\},$$

тобто

$$T(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Psi_2(t, s, \varepsilon) = T(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} W_2^{-1}(\varepsilon)(t - s) \right) T^{-1}(\varepsilon),$$

то існує стала $d > 0$, для якої має місце оцінка

$$\|\Psi_2(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon^2} \exp \left(-\frac{t-s}{2\varepsilon^2} \right), \quad \varepsilon \leq s \leq t \leq t_0.$$

А тому умова 20 буде виконуватись для відповідних $F(t, \varepsilon)$ та $w_1(u, [u], t, \varepsilon)$. Наприклад, елементи матриць $F_1(t, \varepsilon)$ та $F_2(t, \varepsilon)$, що містять запізнення мають бути прямо пропорційні до параметра ε .

Наведемо нелокальні аналоги теореми 3.3 та наслідку 3.3. Якщо на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, то існують неособливі достатньо гладкі матриці $P(t)$, $Q(t)$, для яких мають місце рівності

$$P(t)f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \text{diag}\{E_q, W_p(t)\}, \quad (3.53)$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \text{diag}\{J_q, E_p\}, \quad (3.54)$$

де $W_p(t) = \text{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\}$, $W_i(t) = \lambda_i(t)E_i + J_i$, $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, – корені характеристичного рівняння (3.40)

Зробивши у системі (3.1) заміну $x(t, \varepsilon) = Q(t)y(t, \varepsilon)$ і домноживши її обидві частини зліва на $P(t)$, приходимо до задачі (3.41), (3.42).

22. Нехай $\text{Re } \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, r}$.

Тоді мають місце такі твердження.

Теорема 3.4. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 2, 4, 7 – 9, 11, 16, 18 – 22 (умови 8 та 9 відповідно для $k = m + l - 1$ та $s = \overline{1, m + l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наслідок 3.4. Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка

$A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має r попарно різних власних значень, яким відповідають r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 9, 11, 14, 19 – 22 (умова 9 для $s = \overline{1, m + l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.38).

3.2.2. Критичний випадок. Припустимо, що мають місце такі умови.

23. Рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ відносно x має розв'язок $x = \bar{x}_0(t, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_k^{(0)})$ – k -вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) функція $\bar{x}_0(t, \alpha)$ має достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними t та α на множині $\overline{D}(t, \alpha)$, $\overline{D}(t, \alpha) = [0; T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів $\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_k^{(0)}$;

б) ранг матриці $\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha)$ дорівнює k для всіх $(t, \alpha) \in \overline{D}(t, \alpha)$.

24. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = \overline{k+1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, – корені рівняння (3.40), а λ_i , $i = \overline{k+1, n-1}$, – корені рівняння (3.4).

Нехай в'язка $f_x(\bar{x}_0(0, \alpha), \bar{x}_0(0, \alpha), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний і один нескінченний елементарний дільник. Тоді $W_{n-1} = \operatorname{diag}\{0, \dots, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{n-1}\}$.

Як і у некритичному випадку, приходимо до задачі (3.5), (3.6). Формальний розв'язок задачі (3.5), (3.6) шукаємо у вигляді (3.7). Вектор-функції $\bar{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s = 0, 1, \dots$, визначаємо з тотожностей (3.9), (3.10), шляхом зрівнювання у них коефіцієнтів при однакових степенях ε .

Так, $\bar{y}_0(t)$ знаходимо із системи

$$g(\bar{y}_0(t), \bar{y}_0(t), t, 0) = 0. \quad (3.55)$$

Згідно з припущенням 23 $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t, \alpha(t))$, де $\alpha(t)$ – довільний k -вимірний вектор, який буде визначено далі.

Диференціюючи тотожність (3.55), коли $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\bar{x}_0(t, \alpha(t))$,

за змінною α , дістаємо

$(f_x(\bar{x}_0(t, \alpha), \bar{x}_0(t, \alpha), t, 0) + f_{[x]}(\bar{x}_0(t, \alpha), \bar{x}_0(t, \alpha), t, 0))\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha) \equiv 0$,
 $(t, \alpha) \in \bar{D}(t, \alpha)$, тобто стовпці матриці $\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha)$ є власними векторами матриці $f_x(\bar{x}_0(t, \alpha), \bar{x}_0(t, \alpha), t, 0) + f_{[x]}(\bar{x}_0(t, \alpha), \bar{x}_0(t, \alpha), t, 0)$, що відповідають нульовому власному значенню.

Функцію $\Pi_0 y(\tau)$ знаходимо із системи (3.14). Для цього позначимо через $\Pi_{01} y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, $\psi_1(0)$ перші компоненти векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$ відповідно, через $\Pi_{02} y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, $\psi_2(0)$ – вектори, що містять k компонент, починаючи з другої, векторів $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$, а через $\Pi_{03} y(\tau)$, $g_3(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{03}(0)$, $\psi_3(0)$ – вектори, що містять решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_0 y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$.

Надалі припускаємо виконання таких умов.

25. Рівняння

$$g_1(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + [\Pi_0 y], 0, 0) = 0$$

має розв'язок $\Pi_{01} y = \Pi_{01} y(\Pi_{02} y, \Pi_{03} y, [\Pi_{02} y], [\Pi_{03} y])$, причому функція $\Pi_{01} y(\Pi_{02} y, \Pi_{03} y, [\Pi_{02} y], [\Pi_{03} y])$ має неперервні частинні похідні за всіма змінними до k -го порядку включно і виконується умова

$$\begin{aligned} \Pi_{01} y(\psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_3(0) - \bar{y}_{03}(0), \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_3(0) - \bar{y}_{03}(0)) = \\ = \psi_1(0) - \bar{y}_{01}(0). \end{aligned}$$

26. Система

$$\frac{d\Pi_{0i} y}{d\tau} = g_i(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_0 y, Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + [\Pi_0 y], 0, 0),$$

$i = 2, 3$, має розв'язок $\Pi_{0i} y = \Pi_{0i} y(\tau)$, $\tau \geq 1$, $i = 2, 3$, що задовольняє початкову умову $\Pi_{0i} y(1) = \psi_i - \bar{y}_{0i}(0)$, $i = 2, 3$, причому:
 а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$ та $c_{02} > 0$, $\alpha_{02} > 0$, для яких

$$\|\Pi_{01}(\Pi_{02} y(\tau), \Pi_{03} y(\tau), [\Pi_{02} y(\tau)], [\Pi_{03} y(\tau)])\| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01} \tau),$$

$$||\Pi_{02}y(\tau)|| \leq c_{02} \exp(-\alpha_{02}\tau), \tau \geq 1;$$

б) $\Pi_{03}y(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$;

в) $||Q(\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(t/\varepsilon))|| < a, t \in [\varepsilon; T]$.

Зазначимо, що з умов 8, 25, 26 випливає, що $\Pi_0 y(\tau) \in C^k[1; \infty)$. Крім того, має місце рівність (3.15).

Як і раніше, показуємо існування сталих $c_0 > 0, \alpha_0 > 0$, для яких

$$||\Pi_0 y(\tau)|| \leq c_0 \exp(-\alpha_0 \tau), \tau \geq 1.$$

Регулярні члени асимптотики $\bar{y}_s(t), s \in N$, знаходимо із системи (3.19). Як і в п. 2.3.2, доводимо сумісність системи (3.19) для $s = 1$. При цьому вектор-функція $\alpha(t)$ задовольняє систему

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t), \quad (3.56)$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)\tilde{B}(t, 0)Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha))^{-1}K(t) \times \\ \times (g_1(t) - \tilde{B}(t, 0)Q^{-1}\bar{x}_{0t}(t, \alpha)),$$

$K(t)$ – прямокутна $(k \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці $(\bar{g}_y(t) + \bar{g}_{[y]}(t))^*$, що відповідають нульовому власному значенню.

Початкова умова

$$\alpha(0) = \alpha^{(0)} \quad (3.57)$$

для $\alpha(t)$ визначається згідно з припущеннями 25, 26.

27. Нехай задача (3.56), (3.57) на відрізку $[0; t_0]$ має розв'язок $\alpha = \alpha(t)$.

Тоді загальний розв'язок системи (3.19) при $s = 1$ можна записати у вигляді

$$\bar{y}_1(t) = Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(t, \alpha(t))\beta(t) + \tilde{y}_1(t),$$

де $\beta(t)$ – довільна k -вимірний вектор-функція, а $\tilde{y}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок (3.19) ($s = 1$).

Сингулярні члени асимптотики $\Pi_s y(\tau)$, $s \in N$, знаходимо із системи (3.20). Нехай

$$g_y(\tau) = \begin{pmatrix} C_1(\tau) & C_2(\tau) & C_3(\tau) \\ C_4(\tau) & C_5(\tau) & C_6(\tau) \\ C_7(\tau) & C_8(\tau) & C_9(\tau) \end{pmatrix}, g_{[y]}(\tau) = \begin{pmatrix} R_1(\tau) & R_2(\tau) & R_3(\tau) \\ R_4(\tau) & R_5(\tau) & R_6(\tau) \\ R_7(\tau) & R_8(\tau) & R_9(\tau) \end{pmatrix},$$

де $C_5(\tau)$, $R_5(\tau)$ та $C_9(\tau)$, $R_9(\tau)$ – квадратні матриці відповідно k -та $(n - k - 1)$ -го порядків. Систему (3.20) при $s = 1$ подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} C_1(\tau)\Pi_{11}y &= -C_2(\tau)\Pi_{12}y - C_3(\tau)\Pi_{13}y - R_1(\tau)[\Pi_{11}y] - \\ &- R_2(\tau)[\Pi_{12}y] - R_3(\tau)[\Pi_{13}y] - F_{11}(\tau); \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{12}y}{d\tau} &= C_5(\tau)\Pi_{12}y + C_4(\tau)\Pi_{11}y + C_6(\tau)\Pi_{13}y + R_4(\tau)[\Pi_{11}y] + \\ &+ R_5(\tau)[\Pi_{12}y] + R_6(\tau)[\Pi_{13}y] + F_{12}(\tau); \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{13}y}{d\tau} &= C_9(\tau)\Pi_{13}y + C_7(\tau)\Pi_{11}y + C_8(\tau)\Pi_{12}y + R_7(\tau)[\Pi_{11}y] + \\ &+ R_8(\tau)[\Pi_{12}y] + R_9(\tau)[\Pi_{13}y] + F_{13}(\tau), \quad \tau \geq 1, \end{aligned} \quad (3.60)$$

де структура $\Pi_{1i}y(\tau)$, $F_{1i}(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, аналогічна структурі відповідно $\Pi_{0i}y(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$.

Позначимо через $\Phi_k(\tau)$ та $\Phi_{n-k-1}(\tau)$ фундаментальні матриці систем

$$\frac{d\Pi_{12}y}{d\tau} = C_5(\tau)\Pi_{12}y, \quad \Phi_k(1) = E_k,$$

та

$$\frac{d\Pi_{13}y}{d\tau} = C_9(\tau)\Pi_{13}y, \quad \Phi_{n-k-1}(1) = E_{n-k-1}, \quad \tau \geq 1.$$

Зазначимо, що для матриці $\Phi_k(\tau)$ мають місце властивості 1 – 3 (див. с. 83).

Нехай

$$\|\Phi_k(\tau)\| \leq d_0, \quad \tau \geq 1,$$

$$||\Phi_k(\tau)\Phi_k^{-1}(s)|| \leq d_0, \quad 1 \leq s \leq \tau,$$

та

$$||\Phi_{n-k-1}(\tau)|| \leq d_0 \exp(-\beta_0 \tau), \quad \tau \geq 1, \quad \beta_0 > 0,$$

$$||\Phi_{n-k-1}(\tau)\Phi_{n-k-1}^{-1}(s)|| \leq d_0 \exp(-\beta_0(\tau - s)), \quad 1 \leq s \leq \tau.$$

За побудовою

$$||C_i(\tau)|| \leq d_1 \exp(-\alpha_0 \tau), \quad i = \overline{2, 8},$$

$$||F_1(\tau)|| \leq d_1 \exp(-\gamma_1 \tau), \quad 0 < \gamma_1 \leq \alpha_0,$$

$$||R(\tau)|| \leq r \exp(-\alpha_0 \tau),$$

для всіх $\tau \geq 1$.

Припускаємо виконання умови 9 при $s = 1$. Тоді можна вважати, що має місце початкова умова (3.24). Справді, за побудовою

$$\Pi_{1i}y(1) = \psi'_i(0) - \bar{y}_{0i}'(0) - H_i\beta(0) - \tilde{y}_{1i}(0), \quad i = 2, 3, \quad (3.61)$$

де

$$Q^{-1}\bar{x}_{0\alpha}(0, \alpha(0)) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix},$$

H_2 – квадратна матриця k -го порядку, H_3 – прямокутна $((n - k - 1) \times k)$ -матриця.

Запишемо систему рівнянь, що еквівалентна (3.58) – (3.60), (3.61). Маємо

$$\Pi_{11}y(\tau) = -\frac{1}{C_1(\tau)}\tilde{F}_{11}(\tau); \quad (3.62)$$

$$\Pi_{12}y(\tau) = \Phi_k(\tau)(c_2^{(1)} + \int_1^\tau \Phi_k^{-1}(s)\tilde{F}_{12}(s)ds); \quad (3.63)$$

$$\Pi_{13}y(\tau) = \Phi_{n-k-1}(\tau)c_3^{(1)} + \int_1^\tau \Phi_{n-k-1}(\tau)\Phi_{n-k-1}^{-1}(s)\tilde{F}_{13}(s)ds, \quad \tau \geq 1, \quad (3.64)$$

де

$$\tilde{F}_{11}(\tau) = C_2(\tau)\Pi_{12}y + C_3(\tau)\Pi_{13}y + \sum_{i=1}^3 R_i(\tau)[\Pi_{1i}y] + F_{11}(\tau),$$

$$\tilde{F}_{12}(\tau) = C_4(\tau)\Pi_{11}y + C_6(\tau)\Pi_{13}y + \sum_{i=1}^3 R_{3+i}(\tau)[\Pi_{1i}y] + F_{12}(\tau),$$

$$\tilde{F}_{13}(\tau) = C_7(\tau)\Pi_{11}y + C_8(\tau)\Pi_{12}y + \sum_{i=1}^3 R_{6+i}(\tau)[\Pi_{1i}y] + F_{13}(\tau),$$

$$c^{(1)} = \psi'(0) - \bar{y}_0'(0) - H\beta(0) - \tilde{y}_1(0).$$

За побудовою $\det H_2 \neq 0$. Тоді вимагаючи, щоб $\Pi_{12}y(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, дістаємо

$$\beta(0) = H_2^{-1} \left(\psi_2'(0) - \bar{y}_{02}'(0) - \tilde{y}_{12}(0) + \int_1^{\infty} \Phi_k^{-1}(s) \tilde{F}_{12}(s) ds \right) \equiv \beta^{(0)}.$$

Таким чином, формула (3.63) набуде вигляду

$$\Pi_{12}y(\tau) = \int_{\infty}^{\tau} \Phi_k(\tau) \Phi_k^{-1}(s) \tilde{F}_{12}(s) ds. \quad (3.65)$$

Припускаючи виконання умови 10, розглянемо (3.62), (3.64), (3.65) на множині Γ_1 , де

$$\Gamma_1 = \{(\Pi_{12}y(\tau), \Pi_{13}y(\tau)) \in C[1; \infty) : \|\Pi_{1i}y(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha_1 \tau)\}.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\alpha_0 < \beta_0$ і

$$\left\| \frac{C_4(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)} \right\| \leq d_1 \exp(-\alpha_0 \tau),$$

$$\left\| C_6(\tau) - \frac{C_4(\tau)C_3(\tau)}{C_1(\tau)} \right\| \leq d_1 \exp(-\alpha_0 \tau),$$

$$\left\| \frac{C_7(\tau)C_3(\tau)}{C_1(\tau)} \right\| \leq d_1 \exp(-\alpha_0\tau),$$

$$\left\| C_8(\tau) - \frac{C_7(\tau)C_2(\tau)}{C_1(\tau)} \right\| \leq d_1 \exp(-\alpha_0\tau),$$

$$\left\| R_i(\tau) - \frac{C_4(\tau)R_{i-3}(\tau)}{C_1(\tau)} - \frac{R_4(\tau)[C_{i-3}(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau),$$

$i = 5, 6,$

$$\left\| R_i(\tau) - \frac{C_7(\tau)R_{i-6}(\tau)}{C_1(\tau)} - \frac{R_7(\tau)[C_{i-6}(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau),$$

$i = 8, 9,$

$$\left\| \frac{R_4(\tau)[R_i(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau), \quad \left\| \frac{R_7(\tau)[R_i(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq r \exp(-\alpha_0\tau),$$

$i = 2, 3,$

$$\left\| F_{1i}(\tau) - \frac{C_{3i-2}(\tau)F_{11}(\tau)}{C_1(\tau)} - \frac{R_{3i-2}(\tau)[F_{11}(\tau)]}{[C_1(\tau)]} \right\| \leq d_1 \exp(-\gamma_1\tau),$$

$i = 2, 3$, для всіх $\tau \geq 1$.

28. Нехай $2d_0(d_1 + 2r) \min \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0 - \alpha_0} \right\} < 1$.

Тоді, як і в теоремі 3.1, показуємо, що для $0 < \alpha_1 \leq \min\{\alpha_0, \gamma_1\}$ і достатньо великих c_1 оператор, що визначений за допомогою (3.62), (3.64), (3.65), відображає множину Γ_1 в себе і є оператором стиску. А тому система (3.62), (3.64), (3.65) на множині Γ_1 має єдиний розв'язок. Отже, існують додатні сталі c_1, α_1 , для яких має місце нерівність

$$\|\Pi_1 y(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha_1\tau), \quad \tau \geq 1.$$

Критерієм сумісності системи (3.19) при $s = 2$ є виконання наступної умови (п. 2.3.2).

29. Задача Коші

$$\frac{d\beta}{dt} = q_1(\beta, t), \quad \beta(0) = \beta^{(0)} \quad (3.66)$$

на відрізку $[0; t_0]$ має розв'язок $\beta = \beta(t)$. При цьому компоненти відомої вектор-функції $q_1(\beta, t)$ є многочленами другого степеня відносно $\beta(t)$.

Таким чином, $\bar{y}_1(t)$ та $\Pi_1 y(\tau)$ визначені. Решту членів асимптотики $\bar{y}_s(t)$, $\Pi_s y(\tau)$, $s = 2, 3, \dots$, знаходимо аналогічно.

Зазначимо, що існують додатні сталі c_s , α_s , $s = \overline{2, m+1}$, для яких мають місце нерівності

$$|\Pi_s y(\tau)| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \quad \tau \geq 1, \quad s = \overline{2, m+1}.$$

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку основної початкової задачі (3.1), (3.2).

В умовах 8, 25 вважаємо, що $k = m + 1$. Покладаючи у системі (3.5)

$$y(t, \varepsilon) = y_{m+1}(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \quad (3.67)$$

де $y_{m+1}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau))$, приходимо до системи (3.28), в якій

$$g_y(t, \varepsilon) = g_y \left(\sum_{s=0}^1 \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), \sum_{s=0}^1 \varepsilon^s ([\bar{y}_s(t)] + [\Pi_s y(\tau)]), t, \varepsilon \right),$$

$$g_{[y]}(t, \varepsilon) = g_{[y]} \left(\sum_{s=0}^1 \varepsilon^s (\bar{y}_s(t) + \Pi_s y(\tau)), \sum_{s=0}^1 \varepsilon^s ([\bar{y}_s(t)] + [\Pi_s y(\tau)]), t, \varepsilon \right).$$

Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G}_1)$. Тоді, згідно з теоремою 2.1, існують неособливі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K}_1)$, для яких мають місце рівності (3.92), (3.93).

Отже, замість системи (3.32), (3.33) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = & D_1(t, \varepsilon)u_1 + D_2(t, \varepsilon)u_2 + D_3(t, \varepsilon)u_3 + F_1(t, \varepsilon)[u_1] + \\ & + F_2(t, \varepsilon)[u_2] + F_3(t, \varepsilon)[u_3] + w_1(u, [u], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_5(t, \varepsilon)u_2 + D_4(t, \varepsilon)u_1 + D_6(t, \varepsilon)u_3 + F_4(t, \varepsilon)[u_1] +$$

$$+F_5(t, \varepsilon)[u_2] + F_6(t, \varepsilon)[u_3] + w_2(u, [u], t, \varepsilon); \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_3}{dt} = & D_9(t, \varepsilon)u_3 + D_7(t, \varepsilon)u_1 + D_8(t, \varepsilon)u_2 + F_7(t, \varepsilon)[u_1] + \\ & + F_8(t, \varepsilon)[u_2] + F_9(t, \varepsilon)[u_3] + w_3(u, [u], t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$F(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1(t, \varepsilon) & F_2(t, \varepsilon) & F_3(t, \varepsilon) \\ F_4(t, \varepsilon) & F_5(t, \varepsilon) & F_6(t, \varepsilon) \\ F_7(t, \varepsilon) & F_8(t, \varepsilon) & F_9(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

де $b(0, 0) = 0$; $D_5(t, \varepsilon)$, $F_5(t, \varepsilon)$ та $D_9(t, \varepsilon)$, $F_9(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці відповідно k -го та $(n - k - 1)$ -го порядку; u_1 та w_1 – перші компоненти векторів u та w , u_2 та w_2 – k -вимірні вектори, що містять k компонент u та w , починаючи з другої, u_3 та w_3 – $(n - k - 1)$ -вимірні вектори, що містять решту компонент u та w (матриця $D(t, \varepsilon)$ така сама, як і в теоремі 2.3).

За побудовою, існує така стала $c > 0$, що

$$|D_1(t, \varepsilon) - e(t, \varepsilon)| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$$||D_i(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = \overline{2, 8},$$

$$||D_9(t, \varepsilon) - W_{n-k-1}(t, \varepsilon)|| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right),$$

$t \in [0; t_0]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, де

$$e(0, 0) = 1, \quad W_{n-k-1}(0, 0) = \text{diag}\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{n-1}\}.$$

Припустимо, що виконується умова 12. Тоді система інтегральних рівнянь, що еквівалентна (3.68) – (3.70) з початковою умовою

$$u(\varepsilon, \varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_{m+1}(\varepsilon, \varepsilon)) \equiv \varphi_{m+1}(\varepsilon) \quad (3.71)$$

на відріжку $[\varepsilon; t_0]$ має вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1(t, \varepsilon) = & \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \varphi_{m+1,1}(\varepsilon) + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \frac{1}{b(s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \frac{D_1(v, \varepsilon)}{b(v, \varepsilon)} dv \right) \times \\
 & \times \left(D_2(s, \varepsilon) u_2 + D_3(s, \varepsilon) u_3 + \sum_{i=1}^3 F_i(s, \varepsilon) [u_i] + w_1(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds;
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(t, \varepsilon) = & \Psi_k(t, \varepsilon, \varepsilon) \varphi_{m+1,2}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_k(t, s, \varepsilon) \times \\
 & \times \left(D_4(s, \varepsilon) u_1 + D_6(s, \varepsilon) u_3 + \sum_{i=1}^3 F_{3+i}(s, \varepsilon) [u_i] + w_2(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds;
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
 u_3(t, \varepsilon) = & \Psi_{n-k-1}(t, \varepsilon, \varepsilon) \varphi_{m+1,3}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon) \times \\
 & \times \left(D_7(s, \varepsilon) u_1 + D_8(s, \varepsilon) u_2 + \sum_{i=1}^3 F_{6+i}(s, \varepsilon) [u_i] + w_3(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds,
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

де

$$\varphi_{m+1}(\varepsilon) = \text{colon}(\varphi_{m+1,1}(\varepsilon), \varphi_{m+1,2}(\varepsilon), \varphi_{m+1,3}(\varepsilon)),$$

$\varphi_{m+1,2}(\varepsilon)$ та $\varphi_{m+1,3}(\varepsilon)$ відповідно k - та $(n-k-1)$ -вимірні вектори;
 $\Psi_k(t, s, \varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці однорідних систем

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = D_5(t, \varepsilon) u_2, \quad \Psi_k(s, s, \varepsilon) = E_k,$$

$$\varepsilon \frac{du_3}{dt} = D_9(t, \varepsilon)u_3, \quad \Psi_{n-k-1}(s, s, \varepsilon) = E_{n-k-1},$$

причому

$$\|\Psi_k(t, s, \varepsilon)\| \leq d, \quad \|\Psi_{n-k-1}(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad \beta > 0,$$

$\varepsilon \leq s \leq t \leq t_0$ [23, с. 53, 54].

За побудовою

$$\|\varphi_{m+1}(\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+2}, \quad \|w(0, 0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+2}, \quad t \in [\varepsilon; t_0],$$

$$\|w(v_1, [v_1], t, \varepsilon) - w(v_2, [v_2], t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 k_0 (\|v_1 - v_2\| + \|[v_1] - [v_2]\|)$$

для всіх $v_1, v_2 \in D_{m+1}$.

Надалі пропускаємо виконання таких умов.

30.

$$\|F_i(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp\left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \right), \quad t \in [\varepsilon; t_0], \quad i = \overline{4, 6}.$$

31.

$$\frac{c}{|\eta| \min_{\varepsilon \leq t \leq t_0} |b_1(t, \varepsilon)|} (5 \exp(-\alpha_0) + 3t_0) < 1,$$

$$5cd \left(\frac{1}{\alpha_0} \exp(-\alpha_0) + t_0 \right) < 1,$$

$$\frac{cd}{\beta} (5 \exp(-\alpha_0) + 3t_0) < 1.$$

Тоді для достатньо великих k_1 оператор, що визначений за допомогою (3.72) – (3.74), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.72) – (3.74) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедливою є наступна теорема.

Теорема 3.5. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+2}[0; \varepsilon]$, в'язка $f_x(\overline{x}_0(0), \overline{x}_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$

регулярна, має $n - 1$ скінченний та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 6 – 10, 12, 23 – 31 (умови 8 та 9 відповідно для $k = m$ та $s = \overline{1, m + 1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

32. Нехай система

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t),$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)\tilde{B}(t)\Theta(t))^{-1}K(t) \times \\ \times \left(g(\Theta(t)\alpha(t), \Theta(t)\alpha(t), t, 0) - \tilde{B}(t)\Theta'(t)\alpha(t) \right),$$

$K(t)$ – прямокутна $(k \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці $(\tilde{A}(t))^*$, що відповідають нульовому власному значенню; $\Theta(t)$ – прямокутна $(n \times k)$ -матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $\tilde{A}(t)$, які відповідають нульовому власному значенню, на відрізку $[0; t_0]$ має розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, що задовольняє умову (3.57).

Тоді, як і в п. 2.3.2, переконуємось у справедливості такого твердження.

Наслідок 3.5. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+2}[0; \varepsilon]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 9, 12, 14, 24, 28, 31, 32 (умова 9 для $s = \overline{1, m + 1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наведемо нелокальні аналоги теореми 3.5 та наслідку 3.5.

33. Нехай $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{k + 1, n - 1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n - 1}$, – корені рівняння (3.40).

Тоді, якщо на відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний і один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність, то згідно з [93, с. 17] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці

$P(t), Q(t)$, що

$$P(t)f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), t, 0)Q(t) = \text{diag}\{1, W_{n-1}(t)\},$$

$$P(t)B(t, 0)Q(t) = \text{diag}\{0, E_{n-1}\},$$

де $W_{n-1}(t) = \text{diag}\{0, \dots, 0, \lambda_{k+1}(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$.

Як і раніше, приходимо до задачі (3.41), (3.42). Шукаючи формальний розв'язок задачі (3.41), (3.42) у вигляді (3.7), знаходимо $\bar{y}_s(t), \Pi_s y(\tau), s = 0, 1, \dots$. При цьому вектор-функції $\bar{y}_s(t)$ визначені на відрізку $[\varepsilon; T]$.

Теорема 3.6. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+2}[0; \varepsilon]$, в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ на відрізку $[0; T]$ регулярна, має $n-1$ скінченний та один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність і виконуються умови 6 – 10, 23, 25 – 31, 33 (умови 8 та 9 відповідно для $k = m$ та $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наслідок 3.6. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\bar{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{m+2}[0; \varepsilon]$, на відрізку $[0; T]$ в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ регулярна, має $n-1$ скінченний та один нескінченний елементарний дільник, причому її власні значення зберігають сталу кратність і виконуються умови 9, 14, 28, 31 – 33 (умова 9 для $s = \overline{1, m+1}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; T]$ має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.38).

Розглянемо загальний випадок для регулярної в'язки матриць. Отже, нехай в'язка $f_x(\bar{x}_0(0, \alpha), \bar{x}_0(0, \alpha), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, r скінченних елементарних дільників та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $k + p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$.

34. Нехай $\lambda_i(t) \equiv 0, t \in [0; T], i = \overline{1, k}; \text{Re } \lambda_{k+i} < 0, i = \overline{1, r}$, де $\lambda_i(t), i = \overline{1, k}$, – корені рівняння (3.40), а $\lambda_{k+i}, i = \overline{1, r}$, – корені рівняння (3.4).

Тоді, як і раніше, приходимо до систем (3.9), (3.10), в яких

$$g_y(\bar{y}_0(0), \bar{y}_0(0), 0, 0) = \text{diag}\{E_q, W_{k+p}\}, \quad \tilde{B}(0, 0) = \text{diag}\{J_q, E_{k+p}\}, \quad (3.75)$$

де $W_{k+p} = \text{diag}\{0, W_1, \dots, W_r\}$, 0 – квадратна матриця k -го порядку, $W_i = \lambda_{k+i}E_i + J_i$, $i = \overline{1, r}$; $J_q = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s\}$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

Як і у випадку простих елементарних дільників, вектор-функцію $\bar{y}_0(t)$ знаходимо із рівняння (3.55).

Позначимо через $\Pi_{01}y(\tau)$, $g_1(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{01}(0)$, $\psi_1(0)$ вектори, що містять q перших компонент векторів $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$ відповідно, через $\Pi_{02}y(\tau)$, $g_2(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{02}(0)$, $\psi_2(0)$ – вектори, що містять k компонент, починаючи з $(q+1)$ -ї, векторів $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$, а через $\Pi_{03}y(\tau)$, $g_3(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_{03}(0)$, $\psi_3(0)$ – вектори, що містять решту компонент $\Pi_{01}y(\tau)$, $g(\bar{y}_0(0) + \Pi_{01}y(\tau), \bar{y}_0(0) + [\Pi_{01}y(\tau)], 0, 0)$, $\bar{y}_0(0)$ та $\psi(0)$.

35. Нехай система

$$J_q \frac{d\Pi_{01}y}{d\tau} = g_1(Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + \Pi_{01}y, Q^{-1}\bar{x}_0(0, \alpha(0)) + [\Pi_{01}y], 0, 0)$$

має розв'язок $\Pi_{01}y = \Pi_{01}y(\Pi_{02}y, \Pi_{03}y, [\Pi_{02}y], [\Pi_{03}y], \tau)$ причому:

а) існують сталі $c_{01} > 0$, $\alpha_{01} > 0$, для яких

$$|\Pi_{01}(\Pi_{02}y, \Pi_{03}y, [\Pi_{02}y], [\Pi_{03}y], \tau)| \leq c_{01} \exp(-\alpha_{01}\tau), \quad \tau \geq 1;$$

б)

$$\begin{aligned} \Pi_{01}y(\psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_3(0) - \bar{y}_{03}(0), \psi_2(0) - \bar{y}_{02}(0), \psi_3(0) - \bar{y}_{03}(0), 1) = \\ = \psi_1(0) - \bar{y}_{01}(0). \end{aligned}$$

Тоді, припускаючи виконання умови 26, визначаємо $\Pi_{01}y(\tau)$. При цьому існують такі сталі $c_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, що

$$|\Pi_{01}y(\tau)| \leq c_0 \exp(-\alpha_0\tau), \quad \tau \geq 1.$$

Регулярні члени асимптотики $\bar{y}_s(t)$, $s \in N$, визначаються із співвідношення (3.19), а сингулярні члени асимптотики – із системи, що аналогічна (3.44), (3.45). За умови 18 зазначена система набуде вигляду

$$J_q \frac{d\Pi_{s1}y}{d\tau} = \Pi_{s1}y + \tilde{F}_{s1}(\tau); \quad (3.76)$$

$$\frac{d\Pi_{s2}y}{d\tau} = \tilde{F}_{s2}(\tau); \quad (3.77)$$

$$\frac{d\Pi_{s3}y}{d\tau} = W_p \Pi_{s3}y + \tilde{F}_{s3}(\tau), \quad (3.78)$$

де

$$\tilde{F}_{s1}(\tau) = R_1(\tau)[\Pi_{s1}y] + R_2(\tau)[\Pi_{s2}y] + R_3(\tau)[\Pi_{s3}y] + F_{s1}(\tau),$$

$$\tilde{F}_{s2}(\tau) = R_4(\tau)[\Pi_{s1}y] + R_5(\tau)[\Pi_{s2}y] + R_6(\tau)[\Pi_{s3}y] + F_{s2}(\tau),$$

$$\tilde{F}_{s3}(\tau) = R_7(\tau)[\Pi_{s1}y] + R_8(\tau)[\Pi_{s2}y] + R_9(\tau)[\Pi_{s3}y] + F_{s3}(\tau).$$

Отже, для відповідного вибору $\beta(0)$ дістаємо

$$\Pi_{s1}y(\tau) = - \sum_{k=0}^{q-1} J_q^k \frac{d^k \tilde{F}_{s1}(\tau)}{d\tau^k}; \quad (3.79)$$

$$\Pi_{s2}y(\tau) = \int_{\infty}^{\tau} \tilde{F}_{s2}(v) dv; \quad (3.80)$$

$$\Pi_{s3}y(\tau) = \Phi_p(\tau) c_3^{(s)} + \int_1^{\tau} \Phi_p(\tau) \Phi_p^{-1}(v) \tilde{F}_{s3}(v) dv, \quad s \in N, \quad (3.81)$$

де $\Phi_p(\tau)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{d\Pi_{s3}y}{d\tau} = W_p \Pi_{s3}y, \quad \Phi_p(1) = E_p,$$

$$c_3^{(s)} = \frac{\psi_3^{(s)}(0)}{s!} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\bar{y}_{k3}^{(s-k)}(0)}{(s-k)!} - \bar{y}_{s3}(0), \quad s \in N.$$

Надалі використовуємо позначення, що наведені в теоремі 3.3.

Припускаємо виконання таких умов:

$$36. R_1(\tau) \equiv 0, R_4(\tau) \equiv 0, R_7(\tau) \equiv 0, \tau \geq 0.$$

$$37. \frac{r}{\alpha_0} < 1, \frac{d_0 r}{\beta_0 - \alpha_0} < 1.$$

Нехай $0 < \alpha_{sj} \leq \min\{\alpha_0, \gamma_s\}$, $j = 2, 3$, $s = \overline{1, m+l}$. Тоді для розв'язку $\Pi_{sj}y = \Pi_{sj}y(\tau)$, $j = 2, 3$, системи (3.80), (3.81) має місце наступна оцінка:

$$|\Pi_{sj}y(\tau)| \leq r_{sj} \exp(-\alpha_{sj}\tau), \tau \geq 1, j = 2, 3, s = \overline{1, m+l}.$$

А тому існують такі додатні сталі α_s , c_s , що

$$|\Pi_s y(\tau)| \leq c_s \exp(-\alpha_s \tau), \tau \geq 1, s = \overline{1, m+l}.$$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок основної початкової задачі (3.1), (3.2) має асимптотичний характер.

У системі (3.5) зробимо заміну (3.47). Згідно з теоремою 2.1 існують неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, для яких мають місце рівності (3.108), (3.109). Тоді замість системи (3.48), (3.49) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{du_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))u_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)u_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)u_3 + \\ + F_1(t, \varepsilon)[u_1] + F_2(t, \varepsilon)[u_2] + F_3(t, \varepsilon)[u_3] + w_1(u, [u], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))u_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)u_1 + \varepsilon D_6(t, \varepsilon)u_3 + \\ + F_4(t, \varepsilon)[u_1] + F_5(t, \varepsilon)[u_2] + F_6(t, \varepsilon)[u_3] + w_2(u, [u], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_3}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))u_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon)u_1 + \varepsilon D_8(t, \varepsilon)u_2 + \\ + F_7(t, \varepsilon)[u_1] + F_8(t, \varepsilon)[u_2] + F_9(t, \varepsilon)[u_3] + w_2(u, [u], t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.84)$$

де $J_q(0, 0) = J_q$, $E_k(0, 0) = E_k$, $E_p(0, 0) = E_p$, $W_k(0, 0) = 0$, $W_p(0, 0) = \text{diag}\{W_1, \dots, W_r\}$; $D_1(t, \varepsilon)$, $F_1(t, \varepsilon)$ та $D_5(t, \varepsilon)$, $F_5(t, \varepsilon)$ –

квадратні матриці відповідно q - та k -го порядку; u_1, w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів u та w ; u_2, w_2 – вектори, що містять k компонент u та w , починаючи з $(q+1)$ -ї; u_3, w_3 – вектори, що містять решту компонент u та w (матриця $D(t, \varepsilon)$ така сама, як і в теоремі 2.10).

38. Нехай $\operatorname{Re} \lambda_i(t, \varepsilon) \leq 0$, $i = \overline{1, k}$, $(t, \varepsilon) \in \overline{K}_1$, де $\lambda_i(t, \varepsilon)$ – власні значення матриці $W_k(t, \varepsilon)$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\|\Psi_k(t, s, \varepsilon)\| \leq d, \quad \|\Psi_p(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right),$$

$\varepsilon \leq s \leq t \leq t_0$, де $\Psi_k(t, s, \varepsilon)$ та $\Psi_p(t, s, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці систем

$$\varepsilon \frac{du_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))u_2, \quad \Psi_k(s, s, \varepsilon) = E_k,$$

та

$$\varepsilon \frac{du_3}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))u_3, \quad \Psi_p(s, s, \varepsilon) = E_p$$

відповідно,

$$\|w_i(0, 0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l+1}, \quad t \in [\varepsilon; t_0], \quad i = 2, 3.$$

Припускаючи виконання умови 20, розглянемо систему інтегральних рівнянь, що еквівалентна (3.82) – (3.84), (3.50),

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) = & \Psi_q(t, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_{m+l,1}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_q(t, s, \varepsilon)J_q^{-1}(s, \varepsilon) \times \\ & \times \left(\varepsilon D_2(s, \varepsilon)u_2 + \varepsilon D_3(s, \varepsilon)u_3 + \sum_{i=1}^3 F_i(s, \varepsilon)[u_i] + w_1(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds; \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$u_2(t, \varepsilon) = \Psi_k(t, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_{m+l,2}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_k(t, s, \varepsilon) \times$$

$$\times \left(\varepsilon D_4(s, \varepsilon) u_1 + \varepsilon D_6(s, \varepsilon) u_3 + \sum_{i=1}^3 F_{3+i}(s, \varepsilon) [u_i] + w_2(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds; \quad (3.86)$$

$$u_3(t, \varepsilon) = \Psi_p(t, \varepsilon, \varepsilon) \varphi_{m+l,3}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^t \Psi_p(t, s, \varepsilon) \times \\ \times \left(\varepsilon D_7(s, \varepsilon) u_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon) u_2 + \sum_{i=1}^3 F_{6+i}(s, \varepsilon) [u_i] + w_3(u, [u], s, \varepsilon) \right) ds, \quad (3.87)$$

де

$$\varphi_{m+l}(\varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)(\psi(\varepsilon) - y_{m+l}(\varepsilon, \varepsilon)) \equiv \\ \equiv \text{col}(\varphi_{m+l,1}(\varepsilon), \varphi_{m+l,2}(\varepsilon), \varphi_{m+l,3}(\varepsilon)),$$

$\varphi_{m+l,2}(\varepsilon)$ та $\varphi_{m+l,3}(\varepsilon)$ відповідно k - та p -вимірні вектори.

39. Нехай

$$\frac{2d}{\beta} < 1, \quad cd \left(\frac{1}{\alpha_0} \exp(-\alpha_0) + t_0 \right) < 1,$$

$$\frac{3cd}{\beta} (\exp(-\alpha_0) + t_0) < 1,$$

де c – найменша стала з умови 30 та оцінки (3.35).

Тоді оператор, що визначений за допомогою (3.85) – (3.87), відображає множину D_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.85) – (3.87) на множині D_{m+1} має єдиний розв'язок.

Теорема 3.7. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{K})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $f_x(x_0(0), x_0(0), 0, 0) - \lambda B(0, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $k + p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 7 – 9, 18, 20, 23, 26, 27, 29, 30, 34 – 39 (умови 8 та 9 відповідно для $k = m + l$ та $s = \overline{1, m + l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.1),

(3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.38).

Наслідок 3.7. Нехай $A(t), B(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{(m+l)q_0}(\overline{G}_1)$, $\varphi(t) \in C^{(m+l)q_0}[0; \varepsilon]$, $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_s\}$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $k + p_1 + \dots + p_r + q_1 + \dots + q_s = n$, і виконуються умови 9, 14, 20, 32, 34, 38, 39 (умова 9 для $s = \overline{1, m+l}$). Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ основна початкова задача (3.39), (3.2) на відрізку $[\varepsilon; t_0]$, $t_0 \leq T$, має єдиний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.38).

3.3. Періодичні розв'язки сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь із малим запізненням аргументу

3.3.1. Некритичний випадок. Наведемо алгоритм побудови періодичного розв'язку системи (3.1) з періодичними коефіцієнтами.

Нехай

$$\overline{V}_1 = \{(x, [x], t, \varepsilon) : \|x\| \leq a, \|[x]\| \leq a, -T \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

Під час побудови формального розв'язку системи (3.1), як і раніше, вважаємо, що $B(t, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{M})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{V}_1)$.

Надалі припускаємо виконання таких умов.

40. Компоненти матриці $B(t, \varepsilon)$ та вектор-функції $f(x, [x], t, \varepsilon)$ T -періодичні відповідно на множинах $\overline{M}$ та $\overline{V}_1$.

41. Рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ відносно x має такий T -періодичний розв'язок $x = x_0(t)$, що:

а) $x_0(t) \in C[0; T]$;

б) точки $(x_0(t), t) \in \overline{U}$, коли $t \in [0; T]$;

в) корінь $x = x_0(t)$ є ізольованим на відрізку $[0; T]$.

42. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має $n - 1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник.

43. $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (3.40).

Формальний розв'язок системи (3.1) з періодичними коефіцієнтами шукаємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s x_s(t). \quad (3.88)$$

Для цього вектор-функцію $f(x(t, \varepsilon), [x(t, \varepsilon)], t, \varepsilon)$ та матрицю $B(t, \varepsilon)$ записуємо наступним чином

$$f(x(t, \varepsilon), [x(t, \varepsilon)], t, \varepsilon) = f(x_0(t), x_0(t), t, 0) + \varepsilon((f_x(t) + f_{[x]}(t))x_1(t) + f_1(t)) + \dots + \varepsilon^s((f_x(t) + f_{[x]}(t))x_s(t) + f_s(t)) + \dots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{f}_s(t),$$

$$B(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \frac{1}{s!} \frac{\partial^s B(t, 0)}{\partial \varepsilon^s} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{B}_s(t),$$

де елементи матриць $f_x(t)$ та $f_{[x]}(t)$ обчислюються в точці $(x_0(t), x_0(t), t, 0)$, а вектори $f_s(t)$ певним чином виражаються через $x_k(t)$, $k < s$.

Підставимо (3.88) до системи (3.1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε . Так, при ε^0 маємо

$$f(x_0(t), x_0(t), t, 0) = 0. \quad (3.89)$$

44. Нехай $\det(f_x(t) + f_{[x]}(t)) \neq 0$, $t \in [0; T]$.

Згідно з припущеннями 40, 41, 44 рівняння (3.89) має T -періодичний розв'язок $x_0 = x_0(t)$ такий, що $x_0(t) \in C^\infty[-T; T]$.

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^s , $s \in N$, дістаємо

$$\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{dx_{s-i}}{dt} = (f_x(t) + f_{[x]}(t))x_s + f_s(t). \quad (3.90)$$

Тоді

$$x_s(t) = (f_x(t) + f_{[x]}(t))^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \bar{B}_{i-1}(t) \frac{dx_{s-i}(t)}{dt} - f_s(t) \right), \quad s \in N.$$

При цьому, вектор-функції $x_s(t)$, $s \in N$, є T -періодичними.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (3.1). Зробивши заміну у системі (3.1)

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (3.91)$$

де $x_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s x_s(t)$, а $y(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, дістаємо

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = f_x(t, \varepsilon)y + f_{[x]}(t, \varepsilon)[y] + h(y, [y], t, \varepsilon), \quad (3.92)$$

де

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x(x_0(t), x_0(t), t, \varepsilon), \quad f_{[x]}(t, \varepsilon) = f_{[x]}(x_0(t), x_0(t), t, \varepsilon),$$

$$h(y, [y], t, \varepsilon) = f(x_m + y, [x_m + y], t, \varepsilon) - \varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx_m}{dt} - \\ - f_x(t, \varepsilon)y - f_{[x]}(t, \varepsilon)[y].$$

За побудовою $\|h(0, 0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}$, $t \in [0; T]$.

Доведемо існування такого T -періодичного розв'язку $y = y(t, \varepsilon)$ системи (3.92), що $\|y(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}$, $t \in [0; T]$.

Згідно з наслідком 2.5 існують неособливі T -періодичні достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, для яких мають місце рівності (2.121), (2.122). Зробимо в системі (3.92) заміну $y(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)z(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t, \varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = e(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_1(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)z_2 + \\ + F_1(t, \varepsilon)[z_1] + F_2(t, \varepsilon)[z_2] + w_1(z, [z], t, \varepsilon); \quad (3.93)$$

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = W_{n-1}(t)z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)z_1 + \\ + (E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)W_{n-1}(t, \varepsilon) - W_{n-1}(t) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))z_2 + \\ + F_3(t, \varepsilon)[z_1] + F_4(t, \varepsilon)[z_2] + w_2(z, [z], t, \varepsilon), \quad (3.94)$$

де

$$\begin{aligned} D(t, \varepsilon) &= -\text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} P(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) Q'(t, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} D_1(t, \varepsilon) & D_2(t, \varepsilon) \\ D_3(t, \varepsilon) & D_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t, \varepsilon) &= \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} P(t, \varepsilon) f_{[x]}(t, \varepsilon) [Q(t, \varepsilon)] \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} F_1(t, \varepsilon) & F_2(t, \varepsilon) \\ F_3(t, \varepsilon) & F_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$w(z, t, \varepsilon) = \text{diag}\{1, E_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon)\} P(t, \varepsilon) h(Q(t, \varepsilon)z, [Q(t, \varepsilon)z], t, \varepsilon),$$

$D_4(t, \varepsilon), F_4(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці $(n-1)$ -го порядку; $b(t, 0) = 0$, $E_{n-1}(t, 0) = E_{n-1}$, $W_{n-1}(t, 0) = W_{n-1}(t) \equiv \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\}$; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w .

45. Нехай $b(t, \varepsilon) = \varepsilon^k b_1(t, \varepsilon)$, $k > 0$, причому $\text{Re } b_1(t, 0) \neq 0$, $t \in [0; T]$.

Тоді із системи (3.93), (3.94) дістаємо

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} \frac{1}{b(s, \varepsilon)} (\Psi_1(s, \varepsilon) (\Psi_1^{-1}(T, \varepsilon) - 1) \Psi_1^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ &\times u(z, [z], s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_{n-1}(s, \varepsilon) (\Psi_{n-1}^{-1}(T, \varepsilon) - E_{n-1}) \Psi_{n-1}^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ &\times v(z, [z], s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (3.96)$$

де $\Psi_1(t, \varepsilon)$ – розв'язок задачі Коші

$$\varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = e(t, \varepsilon) z_1, \quad \Psi_1(0, \varepsilon) = 1,$$

а $\Psi_{n-1}(t, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_2}{dt} &= W_{n-1}(t)z_2, \quad \Psi_{n-1}(0, \varepsilon) = E_{n-1}, \\ u(z, [z], s, \varepsilon) &= \varepsilon D_1(s, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_2(s, \varepsilon)z_2 + F_1(s, \varepsilon)[z_1] + \\ &+ F_2(s, \varepsilon)[z_2] + w_1(z, [z], s, \varepsilon), \\ v(z, [z], s, \varepsilon) &= \varepsilon D_3(s, \varepsilon)z_1 + \\ &+ (E_{n-1}^{-1}(s, \varepsilon)W_{n-1}(s, \varepsilon) - W_{n-1}(s) + \varepsilon D_4(s, \varepsilon))z_2 + \\ &+ F_3(s, \varepsilon)[z_1] + F_4(s, \varepsilon)[z_2] + w_2(z, [z], s, \varepsilon). \end{aligned}$$

За побудовою

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, \varepsilon) &= \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right), \\ \Psi_{n-1}(t, \varepsilon) &= \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t W_{n-1}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Таким чином, як і в п. 2.4.1, $z_1(t, \varepsilon)$, $z_2(t, \varepsilon)$ є розв'язками системи, аналогічної (2.127), (2.128).

Нехай $W_{n-1}(t) = \text{diag}\{W_+(t), W_-(t)\}$, де $W_+(t)$ та $W_-(t)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W_{n-1}(t)$ відповідно з додатними та від'ємними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\text{Re} \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} > 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$.

Систему (2.127), (2.128) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) - 1 \right)^{-1} \times \\ &\times \int_0^T \frac{1}{b(t+s, \varepsilon)} \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s}^t \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} dt \right) \times \end{aligned}$$

$$\times u(z(t+s, \varepsilon), [z(t+s, \varepsilon)], t+s, \varepsilon) ds; \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} z_{2+}(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W_+(t) dt \right) - E_+ \right)^{-1} \times \\ &\times \int_0^T \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s}^t W_+(t) dt \right) v_+(z(t+s, \varepsilon), [z(t+s, \varepsilon)], t+s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} z_{2-}(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(E_- - \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T W_-(t) dt \right) \right)^{-1} \times \\ &\times \int_0^T \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t+s-T}^t W_-(t) dt \right) v_-(z(t+s, \varepsilon), [z(t+s, \varepsilon)], t+s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (3.99)$$

де

$$v(z, [z], t, \varepsilon) = \text{col}(v_+(z, [z], t, \varepsilon), v_-(z, [z], t, \varepsilon)),$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \text{col}(z_{2+}(t, \varepsilon), z_{2-}(t, \varepsilon)),$$

причому розмірності векторів $v_+(z, [z], t, \varepsilon)$, $z_{2+}(t, \varepsilon)$ та $v_-(z, [z], t, \varepsilon)$, $z_{2-}(t, \varepsilon)$ відповідно дорівнюють порядку матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$; E_+ та E_- – одиничні матриці відповідного порядку.

Позначимо через $\lambda_{i+}(t)$ та $\lambda_{j-}(t)$ довільні фіксовані власні значення матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$ відповідно. Тоді існують такі сталі λ_+ , λ_- , що $0 < \lambda_+ \leq \text{Re } \lambda_{i+}(t)$, $\text{Re } \lambda_{j-}(t) \leq \lambda_- < 0$ для всіх i, j .

46. Нехай

$$c \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{1}{\eta |b_1(t, 0)|}, \frac{1}{\lambda_+}, \frac{1}{|\lambda_-|} \right\} < 1,$$

$$\text{де } \|F(t, \varepsilon)\| \leq c, \text{ Re } \frac{e(t, \varepsilon)}{b(t, \varepsilon)} \geq \frac{\eta}{\varepsilon^k} > 0, t \in [0; T].$$

Тоді для достатньо великих k_1 оператор, що визначений за допомогою (3.97) – (3.99), відображає множину

$$P_{m+1} = \{z(t, \varepsilon) \in C[0; T] : z(t+T, \varepsilon) = z(t, \varepsilon), \|z(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \varepsilon^{m+1}\},$$

в себе і є оператором стиску. А тому система (3.97) – (3.99) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3.8. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{M})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40 – 46. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1}, \quad t \in [0; T]. \quad (3.100)$$

Наслідок 3.8. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+1}[-T; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 42, 43, 45, 46. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.39) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.100).

Приклад 3.3. Розглянемо систему диференціально-алгебраїчних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x, [x], t, \varepsilon), \quad t \in [0; 2\pi],$$

де

$$B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\sin t + 2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$f(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1 - \cos t + 2 + \varepsilon[x_1] \\ x_1 x_2 + \varepsilon x_1(\cos t + 1) + \frac{1}{10}[x_1][x_3] \\ 2x_3 + \sin t + \varepsilon x_2 x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 2 \\ \frac{\sin t}{20} \\ -\frac{\sin t}{2} \end{pmatrix},$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 2 - \cos t \\ \frac{\cos t}{20(\cos t - 2)} - \cos t - 1 + \frac{1}{40} \left(\cos t + \frac{\sin^3 t}{40} \right) \\ -\frac{1}{4} \left(\cos t + \frac{\sin^3 t}{40} \right) \end{pmatrix}.$$

За побудовою

$$P(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin t}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(t, 0) = E_3,$$

$$e(t, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad b(t, \varepsilon) = \varepsilon(\sin t + 2) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Оскільки

$$F(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \\ \frac{\sin t}{2} + O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \frac{\cos t - 2}{10} + O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то має місце умова 46. І тому за теоремою 3.8 задана система має єдиний періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ для якого

$$\|x(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^2, \quad t \in [0; 2\pi],$$

де $x_1(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай мають місце наступні умови.

47. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $p + q = n$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

48. $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, r}$, та $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, r}$, де $\lambda_i(t)$ – корені рівняння (3.40).

Як і раніше, формальний розв'язок системи (3.1) шукаємо у вигляді (3.88).

Покажемо, що, як і у випадку простих елементарних дільників, побудований формальний розв'язок системи (3.1) має асимптотичний характер. Для цього у системі (3.1) зробимо заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_{m+l}(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (3.101)$$

де $x_{m+l}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+l} \varepsilon^s x_s(t)$, $y(t, \varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, число l визначається пізніше. Як і раніше, приходимо до системи (3.92), в якій

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s x_s(t), \sum_{s=0}^l \varepsilon^s x_s(t), t, \varepsilon \right),$$

$$f_{[x]}(t, \varepsilon) = f_x \left(\sum_{s=0}^l \varepsilon^s x_s(t), \sum_{s=0}^l \varepsilon^s x_s(t), t, \varepsilon \right).$$

За побудовою $\|h(0, 0, t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+l+1}$, $t \in [0; T]$.

Міркуючи аналогічно викладеному вище, замість системи (3.93), (3.94) дістаємо

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)z_2 + F_1(t, \varepsilon)[z_1] +$$

$$+ F_2(t, \varepsilon)[z_2] + w_1(z, [z], t, \varepsilon); \quad (3.102)$$

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon))z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)z_1 + F_3(t, \varepsilon)[z_1] +$$

$$+ F_4(t, \varepsilon)[z_2] + w_2(z, [z], t, \varepsilon), \quad (3.103)$$

де

$$E_q(t, 0) = E_q, \quad E_p(t, 0) = E_p, \quad J_q(t, 0) = J_q,$$

$$W_p(t, 0) = \text{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\}, \quad W_i(t) = \lambda_i(t)E_i + J_i, \quad i = \overline{1, r};$$

z_1 та w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w .

Покладемо

$$Z_q(t, s, \varepsilon) = (\Psi_q(s, \varepsilon) (\Psi_q^{-1}(T, \varepsilon) - E_q) \Psi_q^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_p(t, s, \varepsilon) = (\Psi_p(s, \varepsilon) (\Psi_p^{-1}(T, \varepsilon) - E_p) \Psi_p^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

де $\Psi_q(t, \varepsilon)$ та $\Psi_p(t, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці однорідних систем відповідно

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon)) z_1$$

та

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon) W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)) z_2.$$

49. Нехай $\det J_q(t, \varepsilon) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, причому:

а) існує таке $\zeta \geq 1$, що

$$\|Z_q(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon^\zeta} \exp\left(\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon^\zeta}\right),$$

$$\|diag\{Z_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon), E_{n-q}\} F(s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\varepsilon^{\zeta-1}} \exp\left(\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon^\zeta}\right),$$

$i = 1, 2$, $\beta > 0$, для всіх $t \leq s \leq t + T$, $t \in [0; T]$;

б)

$$\|J_q^{-1}(s, \varepsilon) w_1(0, 0, s, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{m+l-\gamma+1}, \quad t \leq s \leq t + T, \quad t \in [0; T],$$

$$\begin{aligned} & \|J_q^{-1}(s, \varepsilon)(w_1(v_1, [v_1], s, \varepsilon) - w_1(v_2, [v_2], s, \varepsilon))\| \leq \\ & \leq k_0 \varepsilon^{l-\gamma+1} (\|v_1 - v_2\| + \|[v_1] - [v_2]\|), \end{aligned}$$

$\gamma \in N \cup \{0\}$, для всіх таких $v_1(s, \varepsilon)$, $v_2(s, \varepsilon) \in C[0; T]$, що $\|v_1(s, \varepsilon)\| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $\|v_2(s, \varepsilon)\| \leq \delta \varepsilon^{l+1}$, $t \leq s \leq t + T$, $t \in [0; T]$.

Покладемо

$$Z_p(t, s, \varepsilon) = diag\{Z_{p+}(t, s, \varepsilon), Z_{p-}(t, s, \varepsilon)\},$$

де $Z_{p+}(t, s, \varepsilon)$ та $Z_{p-}(t, s, \varepsilon)$ – квадратні матриці відповідного порядку, власними значеннями яких є власні значення $Z_p(t, s, \varepsilon)$ з додатними та від'ємними дійсними частинами. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що

$$\|Z_{p+}(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp\left(\frac{\beta(t-s)}{\varepsilon}\right),$$

$$\|Z_{p-}(t, s, \varepsilon)\| \leq d \exp\left(-\frac{\beta(t-s+T)}{\varepsilon}\right),$$

$$t \leq s \leq t+T, t \in [\varepsilon; T].$$

50. Нехай $\frac{d(r+1)}{\beta} < 1$, $\frac{cd}{\beta} < 1$, де

$$\|diag\{J_q^{-1}(t, \varepsilon), E_{n-q}\}D(t, \varepsilon)\| \leq r, \|F(t, \varepsilon)\| \leq c, t \in [0; T].$$

Покладемо $l = \gamma + 1$. Тоді оператор, що визначений за допомогою

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (\varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + F_1(t, \varepsilon)[z_1] + \\ & + F_2(t, \varepsilon)[z_2] + w_1(z, [z], s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_p(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_1 + F_3(t, \varepsilon)[z_1] + \\ & + F_4(t, \varepsilon)[z_2] + w_2(z, [z], s, \varepsilon)) ds, \end{aligned} \quad (3.105)$$

відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.104), (3.105) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609].

Теорема 3.9. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{M})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 41, 44, 47 – 50. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.100).

Наслідок 3.9. Припустимо, що $A(t), B(t) \in C^{m+l+1}[-T; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 47 – 50. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.39) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.100).

Приклад 3.4. Нехай у системі (3.102) $q = 2$,

$$J_2(t, \varepsilon) \equiv J_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, E_2(t, \varepsilon) \equiv E_2, D_1(t, \varepsilon) \equiv 0, (t, \varepsilon) \in \overline{M}.$$

Тоді

$$\Psi_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{11}(t, \varepsilon) & \psi_{12}(t, \varepsilon) \\ \psi_{21}(t, \varepsilon) & \psi_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t, \varepsilon) &= \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{12}(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{21}(t, \varepsilon) &= -\sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \\ \psi_{22}(t, \varepsilon) &= \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

А тому, враховуючи, що

$$\|Z_2(t, s, \varepsilon)\| \leq \frac{d}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{t-s}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad t \leq s \leq t+T, \quad t \in [0; T],$$

приходимо до висновку про справедливість умови 49 для відповідних $F(t, \varepsilon)$ та $w_1(z, [z], t, \varepsilon)$. Наприклад, елементи матриць $F_1(t, \varepsilon)$ та $F_2(t, \varepsilon)$, що містять запізнення мають бути прямо пропорційні до параметра ε .

Зазначимо, що у даному випадку оператор, що визначається (3.104), (3.105) буде задовольняти умови теореми про існування та єдиність нерухомої точки без виконання умови 50.

3.3.2. Критичний випадок. Надалі припускаємо виконання таких умов.

51. Рівняння $f(x, x, t, 0) = 0$ відносно x має T -періодичний розв'язок $x = x_0(t, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – k -вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) $x_0(t, \alpha) \in C^{m+2}(\overline{D}(t, \alpha))$, $\overline{D}(t, \alpha) = [-T; T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_k$;

б) ранг матриці $x_{0\alpha}(t, \alpha)$ дорівнює k для всіх $(t, \alpha) \in \overline{D}(t, \alpha)$.

52. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{k+1, n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{k+1, n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, – корені рівняння (3.40).

53. Матриця $f_x(x_0(t, \alpha), x_0(t, \alpha), t, 0) + f_{[x]}(x_0(t, \alpha), x_0(t, \alpha), t, 0)$, $t \in [0; T]$, має прості елементарні дільники, що відповідають нульовому власному значенню.

Вважаємо, що має місце умова 42. Тоді розв'язок системи (3.1), як і некритичному випадку, шукаємо у вигляді (3.88).

Оскільки рівняння, з яких визначатимемо $x_s(t)$, ідентичні відповідним рівнянням п. 3.2.2, то для побудови періодичних вектор-функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ припускаємо виконання таких умов.

54. Система (3.56) має T -періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [-T; T]$.

55. Система (3.66) має T -періодичний розв'язок $\beta = \beta(t)$, $t \in [-T; T]$.

На i -му кроці $x_i(t)$ залежить від довільної k -вимірної вектор-функції $\gamma_i(t)$, яку знаходимо з умови сумісності відповідної алгебраїчної системи відносно $x_{i+1}(t)$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = q_{i+1}(\gamma_i, t). \quad (3.106)$$

56. Нехай система (3.106) має T -періодичний розв'язок $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [-T; T]$, $i = \overline{2, m}$. Зазначимо, що компоненти $q_i(\gamma_i, t)$, $i = \overline{2, m}$, лінійні функції відносно γ_i .

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (3.1). Зробивши у системі (3.1) заміну

$$x(t, \varepsilon) = x_{m+1}(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon), \quad (3.107)$$

де $x_{m+1}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon^s x_s(t)$, приходимо до системи (3.92), в якій

$$f_x(t, \varepsilon) = f_x(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon),$$

$$f_{[x]}(t, \varepsilon) = f_{[x]}(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon).$$

Як і раніше, будуюмо систему, що аналогічна (3.93), (3.94),

$$\begin{aligned} \varepsilon b(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = & e(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_1(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon) z_3 + \\ & + F_1(t, \varepsilon)[z_1] + F_2(t, \varepsilon)[z_2] + F_3(t, \varepsilon)[z_3] + w_1(z, [z], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_2}{dt} = & (E_k^{-1}(t, \varepsilon) W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon)) z_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(t, \varepsilon) z_3 + \\ & + F_4(t, \varepsilon)[z_1] + F_5(t, \varepsilon)[z_1] + F_6(t, \varepsilon)[z_1] + w_2(z, [z], t, \varepsilon); \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_3}{dt} = & W_{n-k-1}(t) z_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(t, \varepsilon) z_2 + \\ & + (E_{n-k-1}^{-1}(t, \varepsilon) W_{n-k-1}(t, \varepsilon) - W_{n-k-1}(t) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon)) z_3 + \\ & + F_7(t, \varepsilon)[z_1] + F_8(t, \varepsilon)[z_2] + F_9(t, \varepsilon)[z_3] + w_3(z, [z], t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.110)$$

де

$$e(t, 0) = 1, \quad E_k(t, 0) = E_k, \quad E_{n-k-1}(t, 0) = E_{n-k-1},$$

$$b(t, 0) = 0, \quad W_k(t, 0) = 0,$$

$$W_{n-k-1}(t, 0) = W_{n-k-1}(t) \equiv \text{diag}\{\lambda_{k+1}(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)\};$$

z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w , z_2 та w_2 – k -вимірні вектори, що містять k компонент z та w , починаючи з другої, z_3 та w_3 – $(n - k - 1)$ -вимірні вектори, що містять решту компонент z та w .

Припустимо, що має місце умова 45. Тоді із системи (3.108) – (3.110) дістаємо

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} \frac{1}{b(s, \varepsilon)} (\Psi_1(s, \varepsilon) (\Psi_1^{-1}(T, \varepsilon) - 1) \Psi_1^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\ & \times (\varepsilon D_1(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_3 + F_1(s, \varepsilon)[z_1] + F_2(s, \varepsilon)[z_2] + \\ & + F_3(s, \varepsilon)[z_3] + w_1(z, [z], s, \varepsilon)) ds; \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned}
z_2(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\
& \times (\varepsilon D_4(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(s, \varepsilon) z_3 + F_4(s, \varepsilon)[z_1] + F_5(s, \varepsilon)[z_2] + \\
& + F_6(s, \varepsilon)[z_3] + w_2(z, [z], s, \varepsilon)) ds; \quad (3.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z_3(t, \varepsilon) = \\
= & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} (\Psi_{n-k-1}(s, \varepsilon) (\Psi_{n-k-1}^{-1}(T, \varepsilon) - E_{n-k-1}) \Psi_{n-k-1}^{-1}(t, \varepsilon))^{-1} \times \\
& \times (\varepsilon D_7(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon) z_2 + (E_{n-k-1}^{-1}(s, \varepsilon) W_{n-k-1}(s, \varepsilon) - \\
& - W_{n-k-1}(s) + \varepsilon D_9(s, \varepsilon)) z_3 + F_7(s, \varepsilon)[z_1] + F_8(s, \varepsilon)[z_2] + \\
& + F_9(s, \varepsilon)[z_3] + w_3(z, [z], s, \varepsilon)) ds, \quad (3.113)
\end{aligned}$$

де функція $\Psi_1(t, \varepsilon)$ визначена раніше, $\Psi_k(t, \varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t, \varepsilon)$ – фундаментальні матриці відповідно систем

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon) W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon)) z_2, \quad \Psi_k(0, \varepsilon) = E_k,$$

$$\varepsilon \frac{dz_3}{dt} = W_{n-k-1}(t) z_3, \quad \Psi_{n-k-1}(0, \varepsilon) = E_{n-k-1}.$$

Надалі маємо такі припущення.

57. $\|(\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1}\| \leq d, \quad t \leq s \leq t + T, \quad t \in [0; T].$

58.

$$c \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{1}{\eta |b_1(t, 0)|}, \frac{1}{\lambda_+}, \frac{1}{|\lambda_-|} \right\} < 1, \quad cd \left(5T + \frac{3}{\alpha_0} \right) < 1,$$

де сталі λ_+, λ_- визначаються для матриці $\Psi_{n-k-1}(t, \varepsilon)$;

$$\|D(t, \varepsilon)\| \leq c, \quad \|F(t, \varepsilon)\| \leq c,$$

причому

$$\|F_i(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = \overline{4, 6}, \quad t \in [0; T].$$

Тоді оператор, що визначений за допомогою (3.111) – (3.113), відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.111) – (3.113) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 3.10. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{M})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 42, 45, 51 – 58. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.100).

Надалі припускаємо виконання таких умов.

59. Система

$$\frac{d\alpha}{dt} = q_0(\alpha, t),$$

де

$$q_0(\alpha, t) = (K(t)B(t)\Theta(t))^{-1}K(t) \times \\ \times (f(\Theta(t)\alpha(t), \Theta(t)\alpha(t), t, 0) - B(t)\Theta'(t)\alpha(t)),$$

$K(t)$ – прямокутна $(k \times n)$ -матриця, рядками якої є власні вектори матриці $A^*(t)$, що відповідають нульовому власному значенню; $\Theta(t)$ – прямокутна $(n \times k)$ -матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $A(t)$, які відповідають нульовому власному значенню, має T -періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [-T; T]$.

60. Система

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = q_i(\gamma_i, t), \quad i = \overline{1, m},$$

що утворена аналогічно (3.66), (3.106) для системи (3.39), має T -періодичний розв'язок $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [-T; T]$, $i = \overline{1, m}$.

Наслідок 3.10. Нехай $A(t), B(t) \in C^{m+2}[-T; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+2}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 42, 45, 52, 57 – 60. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.39) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.100).

Розглянемо загальний випадок. Отже, нехай мають місце наступні умови:

61. На відрізку $[0; T]$ в'язка $f_x(\bar{x}_0(t), \bar{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t, 0)$ регулярна, має k простих скінченних елементарних дільників, r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють $p_1, \dots, p_r$ та $q_1, \dots, q_s$, причому $k + p + q = n$, $p = p_1 + \dots + p_r$, $q = q_1 + \dots + q_s$.

62. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, k}$; $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $i = \overline{k+1, k+r}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0; T]$, $i \neq j$, $i, j = \overline{k+1, k+r}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, k+r}$ – корені рівняння (3.40).

Тоді при виконанні відповідних умов формальний розв'язок системи (3.1) має вигляд (3.88).

Доведемо асимптотичну оцінку (3.100). Для цього у системі (3.1) зробимо заміну (3.101). Маємо

$$\varepsilon J_q(t, \varepsilon) \frac{dz_1}{dt} = (E_q(t, \varepsilon) + \varepsilon D_1(t, \varepsilon))z_1 + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)z_2 + \varepsilon D_3(t, \varepsilon)z_3 + \\ + F_1(t, \varepsilon)[z_1] + F_2(t, \varepsilon)[z_2] + F_3(t, \varepsilon)[z_3] + w_1(z, [z], t, \varepsilon); \quad (3.114)$$

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t, \varepsilon)W_k(t, \varepsilon) + \varepsilon D_5(t, \varepsilon))z_2 + \varepsilon D_4(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_6(t, \varepsilon)z_3 + \\ + F_4(t, \varepsilon)[z_1] + F_5(t, \varepsilon)[z_2] + F_6(t, \varepsilon)[z_3] + w_2(z, [z], t, \varepsilon); \quad (3.115)$$

$$\varepsilon \frac{dz_3}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon)W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon))z_3 + \varepsilon D_7(t, \varepsilon)z_1 + \varepsilon D_8(t, \varepsilon)z_2 + \\ + F_7(t, \varepsilon)[z_1] + F_8(t, \varepsilon)[z_2] + F_9(t, \varepsilon)[z_3] + w_3(z, [z], t, \varepsilon), \quad (3.116)$$

де

$$E_q(t, 0) = E_q, \quad E_k(t, 0) = E_k, \quad E_p(t, 0) = E_p, \quad J_q(t, 0) = J_q,$$

$$W_k(t, 0) = 0, \quad W_p(t, 0) = \operatorname{diag}\{W_1(t), \dots, W_r(t)\},$$

$$W_i(t) = \lambda_{k+i}(t)E_i + J_i, \quad i = \overline{1, r};$$

z_1, w_1 – вектори, що містять q перших компонент векторів z та w ;
 z_2, w_2 – вектори, що містять k компонент z та w , починаючи з $(q+1)$ -ї; z_3, w_3 – вектори, що містять решту компонент z та w .

Покладемо

$$Z_k(t, s, \varepsilon) = (\Psi_k(s, \varepsilon) (\Psi_k^{-1}(T, \varepsilon) - E_k) \Psi_k^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_q(t, s, \varepsilon) = (\Psi_q(s, \varepsilon) (\Psi_q^{-1}(T, \varepsilon) - E_q) \Psi_q^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

$$Z_p(t, s, \varepsilon) = (\Psi_p(s, \varepsilon) (\Psi_p^{-1}(T, \varepsilon) - E_p) \Psi_p^{-1}(t, \varepsilon))^{-1},$$

де матриці $\Psi_k(t, \varepsilon)$, $\Psi_q(t, \varepsilon)$ визначено раніше, а $\Psi_p(t, \varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon \frac{dz_2}{dt} = (E_p^{-1}(t, \varepsilon) W_p(t, \varepsilon) + \varepsilon D_9(t, \varepsilon)) z_2, \quad \Psi_p(0, \varepsilon) = E_p.$$

63. Нехай

$$\frac{d(r+1)}{\beta} < 1, \quad drT + 3cd \left(T + \frac{1}{\alpha_0} \right) < 1, \quad \frac{cd}{\beta} < 1,$$

де $\|diag\{J_q^{-1}(t, \varepsilon), E_{n-q}\} D(t, \varepsilon)\| \leq r$, $\|F(t, \varepsilon)\| \leq c$, причому

$$\|F_i(t, \varepsilon)\| \leq c \left(\exp \left(-\frac{\alpha_0 t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \right), \quad i = \overline{4, 6}, \quad t \in [0; T].$$

Тоді, вважаючи, що $l = \gamma + 1$ і припускаючи виконання умови 63, показуємо, що оператор, який визначений за допомогою співвідношень

$$z_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_q(t, s, \varepsilon) J_q^{-1}(s, \varepsilon) (\varepsilon D_2(s, \varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(s, \varepsilon) z_3 + \\ + F_1(s, \varepsilon)[z_1] + F_2(s, \varepsilon)[z_2] + F_3(s, \varepsilon)[z_3] + w_1(z, [z], s, \varepsilon)) ds; \quad (3.117)$$

$$z_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_k(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_4(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(s, \varepsilon) z_3 + F_4(s, \varepsilon)[z_1] + \\ + F_5(s, \varepsilon)[z_2] + F_6(s, \varepsilon)[z_3] + w_2(z, [z], s, \varepsilon)) ds; \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned}
z_3(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+T} Z_p(t, s, \varepsilon) (\varepsilon D_7(s, \varepsilon) z_1 + \varepsilon D_8(s, \varepsilon) z_2 + F_7(s, \varepsilon) [z_1] + \\
& + F_8(s, \varepsilon) [z_2] + F_9(s, \varepsilon) [z_2] + w_3(z, [z], s, \varepsilon)) ds, \quad (3.119)
\end{aligned}$$

відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (3.117) – (3.119) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [47, с. 609]. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3.11. Нехай $B(t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{M})$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 49, 51, 53 – 57, 61 – 63. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.1) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справджується оцінка (3.100).

Наслідок 3.11. Припустимо, що $A(t), B(t) \in C^{m+l+1}[-T; T]$, $f(x, [x], t, \varepsilon) \in C^{m+l+1}(\overline{V}_1)$ і виконуються умови 40, 49, 57, 59 – 63. Тоді існує таке ε_1 , $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ система (3.39) на відрізку $[0; T]$ має єдиний T -періодичний розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$, для якого справедливою є оцінка (3.100).

Список використаної літератури

1. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К.А. Абгарян. — Москва: Наука, 1973. — 431 с.
2. Акименко А.М. Періодичні розв'язки сингулярно збуреної виродженої системи диференціальних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Акименко Андрій Миколайович; Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, мех.-мат. ф-т. — Київ, 2008. — 170 с.
3. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — Москва: Мир, 1967. — 548 с.
4. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Н.Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945. — 137 с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — Москва: Наука, 1974. — 503 с.
6. Боголюбов Н.Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко. — Киев: Наукова думка, 1969. — 245 с.
7. Божко В.А. О периодических решениях системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / В.А. Божко. // Изв. вузов. Математика. — 1980. — № 3. — С. 80–84.
8. Бойчук О.А. Умови біфуркації розв'язків вироджених крайових задач / О.А. Бойчук, Л.М. Шегда. // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 2. — С. 147 – 154.
9. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений /

- Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980. — 222 с.
10. Бояринцев Ю.Е. Об одном разрешающем преобразовании неизвестных в неявной системе обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев // Алгебро-дифференциальные системы и методы их решения. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1993. — С. 4 – 18.
 11. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988. — 157 с.
 12. Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.
 13. Бояринцев Ю.Е. Численные методы решения сингулярных систем / Ю.Е. Бояринцев, В.А. Данилов, А.А. Логинов, В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989. — 223 с.
 14. Бояринцев Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН, 1998. — 224 с.
 15. Бутузов В.Ф. К вопросу об асимптотике решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной / В.Ф. Бутузов // Дифференциальные уравнения. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 391 – 406.
 16. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. — Москва: Мир, 1968. — 464 с.
 17. Васильева А.Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных / А.Б. Васильева // Мат. сб. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 587 – 645.

18. Васильева А.Б. Построение равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной / А.Б. Васильева // Мат. сб. — 1960. — Т. 50 (92), № 1. — С. 43 – 58.
19. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых краевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной / А.Б. Васильева // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 135, № 6. — С. 1303 – 1306.
20. Васильева А.Б. Асимптотика решений дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом / А.Б. Васильева // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 768 – 786.
21. Васильева А.Б. Уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием / А.Б. Васильева // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145, № 3. — С. 495 – 497.
22. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — Москва: Наука, 1973. — 272 с.
23. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
24. Васильева А.Б. Применение метода возмущений к уравнению с запаздывающим аргументом в случае малого запаздывания / А.Б. Васильева, А.М. Родионов // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — 1962. — Т. 1. — С. 20 – 27.
25. Вишик М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3 – 122.

26. Волосов В.М. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной / В.М. Волосов // Мат. сб. — 1952. — Т. 30 (72), № 2. — С. 245 – 270.
27. Волосов В.М. К теории нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при старшей производной / В.М. Волосов // Мат. сб. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 645 – 674.
28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — Москва: Наука, 1988. — 552 с.
29. Градштейн И.С. Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных / И.С. Градштейн // Мат. сб. — 1950. — Т. 27 (69), № 1. — С. 47 – 68.
30. Градштейн И.С. Применение теории устойчивости А.М.Ляпунова к теории дифференциальных с малыми множителями при производных / И.С. Градштейн // Мат. сб. — 1953. — Т. 32 (74), № 2. — С. 263 – 286.
31. Далецкий Ю.Л. О некоторых уравнениях с замкнутыми операторами / Ю.Л. Далецкий // Изв. Киев. политехн. ин-та. — 1956. — 19. — С. 157 – 177.
32. Далецкий Ю.Л. О дифференциальных уравнениях в гильбертовых пространствах / Ю.Л. Далецкий, С.Г. Крейн // Укр. мат. журн. — 1950 — Т. 2, № 4. — С. 71 – 91.
33. Жук С.М. Замкненість та нормальна розв'язність оператора, породженого виродженням лінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами / С.М. Жук // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 464 – 480.
34. Жукова Г.С. Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / Г.С. Жукова. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та — 1988. — 200 с.

35. Жукова Г.С. Метод общего анализа линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Жукова Галина Севастьяновна; АН УССР, Институт математики. — Киев, 1990. — 296 с.
36. Жукова Г.С. Асимптотика решений одного класса линейных систем с вырожденной матрицей при производной / Г.С. Жукова. — Киев: Ин-т математики, 1990. — 24 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 90.36).
37. Завизион Г.В. Асимптотические решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями / Г.В. Завизион // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 4. — С. 435 – 445.
38. Зубова С.П. О задаче Коши для дифференциального уравнения с сингулярным возмущением в банаховом пространстве / С.П. Зубова // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 264, № 2. — С. 286 – 291.
39. Зубова С.П. Исследование решения задачи Коши для одного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения / С.П. Зубова // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 8. — С. 76 – 80.
40. Зубова С.П. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С.П. Зубова, К.И. Чернышов // Дифференциальные уравнения и их применение. — 1976. — Вып. 14. — С. 21 – 39.
41. Еременко В.А. О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных / В.А. Еременко // Укр. мат. журн. — 1980. — Т. 32, № 2. — С. 168 – 174.
42. Ильин А.М. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоуголь-

- нике / А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова // Мат. сб. — 1975. — Т. 96 (138), N 4. — С. 568 – 583.
43. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. — Москва: Наука, 1989. — 336 с.
44. Ильин А.М. Эллиптическое уравнение с малым параметром при старших производных, вырождающееся на границе области / А.М. Ильин, Т.Ю. Ялышева // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, N 6. — С. 847 – 848.
45. Ильин А.М. Асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных, вырождающегося на границе области. Случай слабого вырождения / А.М. Ильин, Т.Ю. Зырянова // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, N 8. — С. 1092 – 1099.
46. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем / М.И. Иманалиев. — Фрунзе: Илим, 1972. — 356 с.
47. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — Москва: Наука, 1977. — 744 с.
48. Крейн С.Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, М.И. Хазан // Итоги науки и техники. Мат. анализ. — 1983. — Т. 21. — С. 130 – 264.
49. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. — 475 с.
50. Кореневский Д.Г. К теории систем с распределенными параметрами и запаздыванием / Д.Г. Кореневский, С.Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. — 1967. — Т. 19, № 4. — С. 57 – 66.

51. Кочерга О.І. Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збудованої лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора / О.І. Кочерга, В.П. Яковець // Нелінійні коливання. — 1999. — Т. 2, № 1. — С. 19 – 29.
52. Крилов М.М. Про деякі формальні розклади нелінійної механіки / М.М. Крилов, М.М. Боголюбов. — Київ: Вид-во АН УРСР, 1934. — 91 с.
53. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 365 с.
54. Курдеванидзе Г.Д. Теорема о существовании периодических решений систем с малым запаздыванием в критическом случае / Г.Д. Курдеванидзе // Сообщ. АН ГССР. — 1975. — Т. 77, № 1. — С. 29 – 32.
55. Лейфура В.Н. Об асимптотическом интегрировании уравнений управляемого процесса в случае кратных элементарных делителей / В.Н. Лейфура // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 4. — С. 301 – 304.
56. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — Москва: Наука, 1981. — 398 с.
57. Лыкова О.Б. Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в "нерезонансном" случае / О.Б. Лыкова // Укр. мат. журн. — 1958. — Т. 10, № 3. — С. 239 – 250.
58. Лыкова О.Б. Об исследовании индивидуальных решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в случае резонанса / О.Б. Лыкова // Укр. мат. журн. — 1958. — Т. 10, № 4. — С. 365 – 374.

59. Лыкова О.Б. О некоторых свойствах решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами / О.Б. Лыкова // Укр. мат. журн. — 1960. — Т. 12, № 3. — С. 267 – 278.
60. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. — Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. — 472 с.
61. Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. — 1940. — № 5. — С. 4 – 66.
62. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. — Москва: Высшая школа, 1967. — 409 с.
63. Менько Я.П. К теории асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Менько Яков Петрович; Киев. гос. пед. ин-т им. А.М. Горького, физ.-мат. ф-т. — Киев, 1966. — 17 с.
64. Менько Я.П. О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и запаздывающим аргументом / Я.П. Менько, С.Ф. Феценко // Первая летн. мат. школа (Канев, июнь – июль 1963 г.). — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. — Вып. 2. — С. 28 – 30.
65. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю.А. Митропольский. — Киев: Изд-во АН УССР, 1955. — 280 с.
66. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю.А. Митропольский. — Москва: Наука, 1964. — 431 с.

-
67. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. — Киев: Наукова думка, 1971. — 240 с.
68. Митропольський Ю.О. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (Асимптотичні методи) / Ю.О. Митропольський, Б.І. Мосєєнков. — Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1961. — 121 с.
69. Митропольский Ю.А. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. — 310 с.
70. Митропольский Ю.А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк. — Киев: Вища шк., 1979. — 248 с.
71. Митропольский Ю.А. Об асимптотических приближениях для слабо нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием / Ю.А. Митропольский, В.Г. Самойленко. — Киев: Ин-т математики, 1981. — 52 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 81.42).
72. Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис // Успехи мат. наук. — 1949. — Т. 4, № 5. — С. 99 – 141.
73. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. — Москва: Наука, 1972. — 352 с.
74. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин. — Москва: Наука, 1965. — 354 с.
75. Пидченко Ю.П. Об асимптотических разложениях решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с медленно меняющимися коэффициентами: дис. ...

- канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Пидченко Юрий Петрович; АН УССР, Институт математики. — Киев, 1973. — 170 с.
76. Пидченко Ю.П. Построение формальных решений системы линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа / Ю.П. Пидченко // Докл. АН УССР. — 1973. — № 12. — 1088 – 1093 с.
77. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни. — Москва: Изд-во иност. лит., 1961. — 248 с.
78. Потороча В.В. Асимптотические решения сингулярно возмущенных нелинейных систем дифференциальных уравнений с вырождением и импульсным воздействием / В.В. Потороча, В.Г. Самойленко // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 356 – 367.
79. Пуанкаре А. Избранные труды, том I. / А. Пуанкаре. — Москва: Наука, 1971. — 771 с.
80. Пуанкаре А. Избранные труды, том II. / А. Пуанкаре. — Москва: Наука, 1972. — 999 с.
81. Радченко С.П. Про періодичні розв'язки нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням / С.П. Радченко, П.Ф. Самусенко // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2006, вип. 15. — С. 26 – 31.
82. Рожков В.И. Уравнения нейтрального типа с переменным малым запаздыванием / В.И. Рожков // Дифференциальные уравнения. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 407 – 416.
83. Рожков В.И. Асимптотика периодического решения уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием / В.И. Рожков // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 180, № 5. — С. 1041 – 1044.

-
84. Рожков В.И. Асимптотическое разложение по степеням запаздывания периодического решения уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием / В.И. Рожков // Дифференциальные уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1250 – 1257.
85. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. — Москва: Наука, 1969. — 287 с.
86. Руткас А.Г. О классификации и свойствах решений уравнения $Ax' + Bx = f(t)$ / А.Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 7. — С. 1150 – 1155.
87. Рябов Ю.А. Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Ю.А. Рябов // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — 1962. — Т. 1. — С. 103 – 113.
88. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра для построения решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Ю.А. Рябов // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 113, № 2. — С. 288 – 291.
89. Самойленко А.М. Некоторые вопросы теории периодических и квазипериодических систем: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 / Самойленко Анатолий Михайлович; АН УССР, Институт математики — Киев, 1967. — 24 с.
90. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний / А.М. Самойленко. — Москва: Наука, 1987. — 301 с.
91. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А.М. Самойленко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 11. — С. 1505 – 1516.

92. Самойленко А.М. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме / А.М. Самойленко, В.П. Яковец // Докл. АН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10 – 15.
93. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. — Київ.: Вища школа, 2000. — 294 с.
94. Самусенко П.Ф. Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних / П.Ф. Самусенко // Нелінійні коливання. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 527 – 540.
95. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених слабо нелінійних систем диференціальних рівнянь з виродженням / П.Ф. Самусенко // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: 36. наук. праць. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 110 – 116.
96. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням / П.Ф. Самусенко // Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — 2006. — Вип. 16. — С. 75 – 83.
97. Самусенко П.Ф. Про побудову асимптотичного розв'язку нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням / П.Ф. Самусенко // Наукові вісті НТУУ (Київський політехнічний інститут). — 2006. — № 1 (45). — С. 144 – 150.
98. Самусенко П.Ф. Построение периодических решений нелинейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырождением / П.Ф. Самусенко // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 32, № 6. — С. 756 – 763.

-
99. Самусенко П.Ф. Про побудову розв'язку основної початкової задачі для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу і виродженням / П.Ф. Самусенко // Математичні студії. — 2008. — Т. 29, № 2. — С. 175 – 181.
100. Самусенко П.Ф. Побудова асимптотичних формул для розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням / П.Ф. Самусенко // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 508 – 521.
101. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з виродженням у точці / П.Ф. Самусенко // Наукові вісті НТУУ (Київський політехнічний інститут). — 2008. — № 4 (60). — С. 152 – 156.
102. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями / П.Ф. Самусенко. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. — 343 с.
103. Скрипник В.П. Выводимые линейные системы / В.П. Скрипник // Изв. вузов. Математика. — 1982. — № 3. — С. 62 – 67.
104. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование и расщепление дифференциальных уравнений / Н.А. Сотниченко // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 361 – 362.
105. Сотниченко Н.А. К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров / Н.А. Сотниченко // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1640 – 1642.
106. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Н.А. Сотниченко, С.Ф. Фещенко. — Киев: Ин-т математики, 1980. — 48 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 80.3).

107. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений в частных производных / Н.А. Сотниченко, В.П. Яковец // Укр. мат. журн. — 1983. — Т. 35, № 2. — С. 187 – 193.
108. Старун И.И. Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения" / Старун И.И. — К., 1969. — 16 с.
109. Старун И.И. Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем / И.И. Старун // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 10. — С. 1822 – 1823.
110. Старун И.И. Система с вырожденной матрицей при производных / И.И. Старун // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 11. — С. 1535 – 1537.
111. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики / Под ред. В.С. Владимирова / В.А. Стеклов. — Москва: Наука, 1983. — 432 с.
112. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. — Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. — 468 с.
113. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я.Д. Тамаркин. — Петроград, 1917. — 380 с.
114. Территин Х.Л. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр / Х.Л. Территин // Математика: сб. переводов. — 1957. — Вып. 1, № 2. — С. 29 – 59.

-
115. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А.Н. Тихонов // Мат. сб. — 1948. — Т. 22 (64), № 2. — С. 193 – 204.
116. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / А.Н. Тихонов // Мат. сб. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 575 – 586.
117. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — Москва: Изд-во ин-та лит., 1960. — 299 с.
118. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк. — Москва: Наука, 1983. — 352 с.
119. Фещенко С.Ф. Асимптотичний розв'язок нескінченної системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами / С.Ф. Фещенко // Доп. АН УРСР. — 1954. — № 2. — С. 82 – 86.
120. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. — 1955. — Т. 7, № 2. — С. 167 – 179.
121. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. — 1955. — Т. 7, № 4. — С. 252 – 243.
122. Фещенко С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. — Киев: Наукова думка, 1966. — 249 с.
123. Фещенко С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Ю.П. Пидченко, Н.А. Сотниченко. — Киев: Наукова думка, 1981. — 294 с.

124. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I / Г.М. Фихтенгольц. — Москва: Наука, 1969. — 608 с.
125. Фодчук В.И. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром / В.И. Фодчук // Укр. мат. журн. — 1962. — Т. 14, № 4. — С. 435 – 440.
126. Фодчук В.И. Исследование интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / В.И. Фодчук // Укр. мат. журн. — 1965. — Т. 17, № 4. — С. 94 – 102.
127. Фодчук В.И. Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа / В.И. Фодчук // Укр. мат. журн. — 1968. — Т. 20, № 2. — С. 203 – 209.
128. Фодчук В.И. Асимптотические методы нелинейной механики в теории дифференциально-разностных уравнений: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Фодчук Василий Иванович; АН УССР, Ин-т математики. — Киев, 1972. — 23 с.
129. Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А. Халанай // Rev. Math. Pures. Appl. Acad. RPR. — 1959. — V. 4, № 3. — P. 467 – 483 с.
130. Чернышов К.И. Метод стандартного расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений / К.И. Чернышов // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 32, № 3. — С. 192 – 200.
131. Чернышов К.И. Асимптотический анализ уравнения с фредгольмовым оператором при производной: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Чернышов К.И.; НАН Украины, Институт математики. — Киев, 1992. — 29 с.

-
132. Чистяков В.Ф. О связи структуры пучка матриц с существованием решений неявной системы ОДУ / В.Ф. Чистяков. // Методы оптимизации и исследование операций. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. — С. 194 – 202.
133. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, Сиб. издательская фирма РАН, 1996. — 279 с.
134. Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.
135. Шатковская Е.В. Исследование структуры частных асимптотических решений линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с малым запаздыванием аргумента / Е.В. Шатковская // Динамические системы: Межведомственный научный сборник / Отв. ред. О.В. Анашкин; Таврический нац. ун-т им. В.И. Вернадского. — Симферополь, 2009. — Вып. 26. — С. 115 – 129.
136. Шепель О.А. Про побудову розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь в околі іррегулярної особливої точки / О.А. Шепель // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, № 4. — С. 555 – 561.
137. Шкиль Н.И. Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения / Н.И. Шкиль // Укр. мат. журн. — 1962. — Т. 16, № 4. — С. 383 – 392.
138. Шкиль Н.И. Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / Н.И. Шкиль // Изв. вузов. Математика. — 1966. — № 1. — С. 163 – 169.
139. Шкиль Н.И. О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно ме-

- няющимися коэффициентами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шкиль Николай Иванович; АН УССР, Институт математики. — Киев, 1968. — 420 с.
140. Шкиль Н.И. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / Н.И. Шкиль, А.Н. Вороной, В.Н. Лейфура. — Киев: Вища школа, 1985. — 248 с.
141. Шкіль М.І. Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / М.І. Шкіль, В.К. Григоренко // Вісн. Київ. ун-ту. — 1972. — 14. — С. 26 – 38.
142. Шкіль М.І. Про загальний формальний розв'язок для системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / М.І. Шкіль, В.К. Григоренко // Доп. АН УРСР. — 1972. — 5. — С. 442 – 446.
143. Шкиль Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. — Киев: Вища школа, 1991. — 207 с.
144. Шлапак Ю.Д. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной / Ю.Д. Шлапак // Укр. мат. журн. — 1975. — Т. 27, № 1. — С. 137 – 140.
145. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. — Москва: Наука, 1971. — 296 с.
146. Яковец В.П. Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождением / В.П. Яковец // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 11. — С. 1559 – 1566.

-
147. Яковец В.П. Асимптотика решений одного класса линейных сингулярно возмущенных систем / В.П. Яковец // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1991. — № 1. — С. 18 – 21.
148. Яковец В.П. Асимптотический анализ сингулярно возмущенной линейной системы с сингулярным предельным пучком матриц / В.П. Яковец // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 1. — С. 106 – 122.
149. Яковец В.П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Яковец Василь Павлович; НАН України, Інститут математики. — Київ, 1993. — 318 с.
150. Яковец В.П. Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем з кратним елементарним дільником / В.П. Яковець, А.М. Акименко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 10. — С. 1403 – 1415.
151. Яковец В.П. Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь / В.П. Яковець, М.В. Віра // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 272 – 286.
152. Яковец В.П. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В.П. Яковець, О.В. Головченко // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 417 – 432.
153. Balser W. Multisummability of formal solutions of singular perturbation problems / W. Balser, J. Mozo-Fernandez // Journ. Differential Equations. — 2002. — V. 183. — P. 526 – 545.
154. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter / G.D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — V. 9. — P. 219 – 231.
155. Campbell S.L. Singular systems of differential equations / S.L. Campbell. — San-Francisco: Pitman, 1980. — 176 p.

156. Campbell S.L. Singular systems of differential equations II / S.L. Campbell. — San-Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
157. Campbell S.L. Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations / S.L. Campbell // Proc. Amer. Contr. Conf. San Diego, Calif., 5 – 6 June. — 1984. — V. 3. — P. 1315 – 1318.
158. Campbell S.L. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations / S.L. Campbell, L.R. Petzold // SIAM Journ. Alg. Descrete Methods. — 1983. — № 4. — P. 517 – 521.
159. Canalis-Durand M. Monomial summability and doubly singular differential equations / M. Canalis-Durand, J. Mozo-Fernandez, R. Schafke // Journ. Differential Equations. — 2007. — V. 233. — P. 485 – 511.
160. Favini A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rend. mat. — 1979. — V. 12, № 3. — 4. — P. 511 – 536.
161. Favini A. Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equation / A. Favini, A. Rutkas // Differential and integral equations, USA. — 1999. — V. 12, № 3. — P. 373 – 394.
162. Gear C.W. Differential-algebraic systems and matrix pencil / C.W. Gear, L.R. Petzold // Lect. Notes Math. — 1983. — № 973. — P. 75 – 89.
163. Gear C.W. ODE methods for the solutions of differential-algebraic systems / C.W. Gear, L.R. Petzold // SIAM Journ. on Numer. Anal. — 1984. — V. 24, № 4. — P. 716 – 728.
164. Griepentrog E. Differential-algebraic equations and thier numerical treatment / E. Griepentrog, R. März. — Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlag gesellschaft, 1986. — 220 p.

-
165. Hairer E. Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems / E. Hairer, G. Wanner. — Berlin: Springer-Verlag, 2010. — 614 p.
166. Hukuhara M. Sur les proprietes asymptotiques des solutions d'un systeme d'equations differentielles lineaires contenant un parametre / M. Hukuhara // Mem Fac. Engin. Kyusyu Univ. — 1937. — V. 8. — P. 249 – 280.
167. Hukuhara M. Sur les points singuliers des equations differentielles lineaires, II / M. Hukuhara // Journ. Fac. Sci., Hokkaido Univ. — 1937. — V. 5. — P. 157 – 166.
168. Hukuhara M. Sur les points singuliers des equations differentielles lineaires, III / M. Hukuhara // Mem Fac. Sci. Kyusyu Univ. — 1942. — V. 3. — P. 125 – 137.
169. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I / M. Iwano // Funkcialaj Ekvacioj. — 1963. — V. 5. — P. 71 – 134.
170. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II / M. Iwano // Funkcialaj Ekvacioj. — 1964. — V. 6. — P. 89 – 141.
171. Iwano M. On the study of asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a parameter with a singular point / M. Iwano // Japanese journ. of mathematics. — 1965. — V. XXXV, № 6. — P. 1 – 30.
172. Iwano M. Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter / M. Iwano, Y. Sibuya // Kodai Math. Semi. Rep. — 1963. — V. 15. — P. 1 – 28.
173. Kunkel P. Differential-algebraic equations. Analysis and numerical solution / P. Kunkel, V. Mehrmann. — Zurich: European Mathematical Society, 2006. — 377 p.

174. Liouville J. Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujetis a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre, contenant un parametre variable / J. Liouville // Journ. de Math. pur. et appl. — 1837. — V. 2. — P. 16 – 35, 418 – 436.
175. Liouville J. Sur la Theorie des Equations differentielles lineaires et sur le developpement de Fonctions en series / J. Liouville // Journ. de Math. pur. et appl. — 1838. — V. 3. — P. 561 – 614.
176. März R. Higher-index differential-algebraic equation: analytics and numerical treatment / R. März. — Berlin: Humbold Univ., 1987. — 30 p. — (Preprint / Humbold Univ. Sect. Math.; 159).
177. März R. Multistep methods for initial value problem in implicit differential-algebraic equations / R. März // Beitrage Numer. Math. — 1984. — № 12. — P. 107 – 123.
178. Mitropolskiy Y. A. On asymptotic solutions to delay differential equation with slowly varying coefficients / Y.A. Mitropolskiy, V.H. Samoylenko, G. Matarazzo // Nonlinear Analysis. — 2003. — 52. — P. 971 – 988.
179. Müller P.C. Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems / P.C. Müller // Appl. Math. and Comp. Sci. — 1998. — V. 8, № 2. — P. 269 – 286.
180. Oguztorelli M.N. Time-lag control system / M.N. Oguztorelli. — New York – London: Acad. Press, 1966. — 392 p.
181. O'Malley R.E. Singular singular-perturbation problems / R.E. O'Malley, J.E. Flaherty // Lect. Notes in Math. — 1977. — № 594. — P. 422 – 436.
182. Poincare H. Sur les equations de la physique et mathematique / H. Poincare // Rend. Pal. — 1894. — V. 8. — P. 57 – 155.

-
183. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei kleiner Reibung / L. Prandtl // III Internat. Math. Kongr. — Leipzig. — 1905. — P. 484 – 491.
184. Rheinboldt W.C. Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds / W.C. Rheinboldt // Math. Comp. — 1984. — V. 43, № 168. — P. 473 – 482.
185. Riazia R. Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications / R. Riazia. — World Scientific, 2008. — 330 p.
186. Rutkas A. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations / A. Rutkas, L. Vlasenko // Nonlinear Oscillations. — 2001. — V. 4, № 2. — P. 252 – 263.
187. Schlesinger L. Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differential systeme als Functionen eines Parameteres / L. Schlesinger // Math. Anal. — 1907. — V. 63. — S. 277 – 300.
188. Sibuya Y. Sur reduction analytique d'un systeme d'equation differentielles ordinaires lineaires contenant un parameter / Y. Sibuya // Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1958. — V. 7, № 5. — P. 527 – 540.
189. Sibuya Y. Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point / Y. Sibuya // Funkcialaj Ekvacioj. — 1962. — V. 4. — P. 29 – 56.
190. Sturm C. Sur les equations differentielles lineaires du second ordre / C. Sturm // Journ. de Math. pur. et appl. — 1836. — V. 1. — P. 106 – 186.

Наукове видання

Самусенко Петро Федорович

Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь

Монографія

В авторській редакції

Надруковано з оригінал-макета замовника

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

просп. Перемоги, 37,

м. Київ, 03056

Підп. до друку 02.04.2023. Формат 60 × 84 1/16. Папір офс. Гарнітура Calibri.

Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 11,86. Обл.-вид. арк. 9,85.

Наклад 20 пр. Поз. 23-3-1-003. Зам. № 23-019.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського

вул. Політехнічна, 14, корп. 15

м. Київ, 03056

тел. (044) 204-81-78