ГІПОТЕЗИ. НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ НАУКОВИХ ТА ІНЖЕНЕРНИХ ПРОБЛЕМ ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

УДК 519.246

ЗВ'ЯЗОК СПЕКТРА ФУНКЦІЇЇ РОЗПОДІЛУ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ЕНЕРГЕТИЧНИМ СПЕКТРОМ

Майстренко В.М., Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Встановлений зв'язок між спектральним способом опису одномірної функції розподілу випадкового процесу та енергетичним спектром стаціонарного випадкового процесу. Показано, що на підставі енергетичного спектра можна визначити функцію розподілу випадкового процесу і навпаки. Приведені інші оцінки випадкових процесів

Вступ. Постановка завдання

Інформація, що передається по каналу зв'язку або отримується в результаті вимірювання, міститься в сигналі. До прийому повідомлення сигнал розглядають як випадковий процес. Перешкоди, котрі притаманні будь-якому каналу зв'язку, також представляють собою випадковий процес.

Якщо усереднити комплексну спектральну щільність по всім реалізаціям, то отримаємо нульовий спектр процесу через випадковість і незалежність фаз спектральних складових в різних реалізаціях. Тому вводиться поняття спектральної щільності середнього квадрату випадкової функції, котра не залежить від фазування гармонік, що підсумовуються. Енергетичний спектр зв'язаний з кореляційною функцією випадкового процесу парою перетворень Фур'є та широко використовується в теорії випадкових сигналів і дає можливість описати випадковий процес за допомогою детермінованого сигналу [1].

З іншого боку випадковий процес описується іншими характеристиками: законом розподілу ймовірності випадкового процесу та щільністю ймовірності випадкового процесу (функцією розподілу). Можна представляти випадковий процес також за допомогою прямого перетворення Фур'є функції розподілу (СФР), що як і енергетичний спектр, забезпечує опис випадкового процесу детермінованим сигналом [2, 3, 4, 5, 6]. Але оскільки енергетичний спектр є усередненою характеристикою випадкового процесу, потрібно встановити взаємозв'язок з функцією розподілу, яка більш точно характеризує випадковий процес. Оцінка випадкового процесу за допомогою енергетичного спектра та СФР дозволяє встановити зв'язок між спектрами та сигналами, котрі зв'язані з цими спектрами парою перетворень Фур'є, тобто функцією розподілу та кореляційною функцією. Розглянемо це питання спочатку для більш простого – стаціонарного випадкового процесу.

Зв'язок енергетичного спектра випадкового процесу з СФР

Припустимо, що $F(\omega)$ — енергетичний спектр стаціонарного випадкового процесу з нульовим середнім значенням. Для енергетичного спектра, як відомо

[1, 7], справедливим є наступне співвідношення:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega,$$

де σ — середнє квадратичне відхилення.

З іншого боку [4]

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx,$$

де $p(x)$ — функція розподілу.

Отже

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega. \qquad (1)$$

Це співвідношення зв'язує функцію розподілу стаціонарного випадкового процесу з нульовим середнім значенням з його енергетичним спектром. Спектром Фур'є функції $x^2 p(x)$ є друга похідна від СФР [2]:

$$S_p''(\omega) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)e^{-j\omega x}dx.$$

На підставі зворотного перетворення Фур'є

$$x^2 p(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_p''(\omega)e^{j\omega x}d\omega.$$

Проінтегруємо вираз по x в границях $\pm\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_p''(\omega)e^{j\omega x}d\omega dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_p''(\omega)d\omega \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_p''(\omega)\delta(\omega)d\omega = -S_p''(0),$$

а потім підставимо в (1). В результаті

$$S_p''(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_p''(\omega)\delta(\omega)d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega,$$

Використаємо рівність Парсеваля, що визначає розподіл енергії [1]

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega, \qquad (2)$$

де $S(\omega)$ – спектр функції $f(x)$.

Якщо $S^2(\omega)$ є спектром функції $K(x)$, то вона дорівнює згортці функції $f(x)$ [1, 7, 8]:

$$K(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\chi)f(\chi - x)d\chi. \qquad (3)$$

Спектр $S^2(\omega)$ в (2) є енергетичним спектром, а в нашому випадку

$S^2(\omega)=F(\omega)$ — це енергетичний спектр випадкового процесу. Таким чином енергетичний спектр $F(\omega)$ є спектром функції (4). А функція $f^2(x)$ в (2) — це функція $x^2 p(x)$. Звідки

$$f(x)=\pm x\sqrt{p(x)}. \qquad (4)$$

Підставляючи (4) в (3) отримаємо вираз для функції, що має енергетичний спектр $F(\omega)$, а це є кореляційною функцією:

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(x-\tau)\sqrt{p(x)p(x-\tau)}dx\,. \qquad (5)$$

При цьому відомо, що $K(0)=\sigma^2$. Якщо знайти $K(0)$ з (6), то

$$K(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = D = \sigma^2,$$

де D — дисперсія випадкового процесу, що співпадає з відомим виразом [1].

Спектр $S(\omega)$ — це спектр функції $f(x)$, що визначається виразом (4)

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}e^{-j\omega x}dx\,.$$

Енергетичний спектр випадкового процесу є перетворенням Фур'є від кореляційної функції, тобто

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\,,$$

тому, підставляючи вираз для кореляційної функції (6), отримаємо:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-x)\sqrt{p(x)p(\tau-x)}e^{-j\omega\tau}dxd\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}dx\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-x)\sqrt{p(\tau-x)}e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-x)\sqrt{p(\tau-x)}e^{-j\omega(\tau-x)}d(\tau-x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}\mu\sqrt{p(\mu)}e^{-j\omega(\mu)}d(\mu)=S^2(\omega).$$

Звідки

$$\begin{aligned}F(\omega)=S(\omega)S(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{p(x)}e^{-j\omega x}dx=\\ &=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)e^{-j\omega x}dx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\delta(\omega)e^{-j\omega x}=\\ &=2\pi\delta(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)e^{-j\omega x}=-2\pi S_p''(\omega)\delta(\omega).\end{aligned} \qquad (6)$$

або

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-j\omega x}dx=S_p(\omega)S_{x^2}(\omega). \qquad (7)$$

Для аналізу отриманого результату припустимо, що дві функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ мають спектральні функції відповідно $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$, причому функція $f(x)$ є згорткою цих функцій, тобто

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\chi)f_2(\chi-x)dx.$$

Тоді, відповідно до теореми про спектр згортки [1, 3, 10], спектр функції $f(x)$

$$S(\omega)=S_1(\omega)S_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)e^{-j\omega x}dx.$$

Змінимо порядок інтегрування. В результаті отримаємо:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega x}dx=2\pi S_d(\omega)\delta(\omega),$$

де $S_d(\omega)$ – спектр добутку функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

Спектр добутку цих функцій є згорткою спектрів $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$ [1, 7, 8]. Отже спектр згортки двох функцій дорівнює спектру добутку цих функцій, помноженому на $2\pi\delta(\omega)$.

Можна також показати, що на підставі симетрії перетворення Фур'є виконується аналогічне співвідношення для сигналів. Якщо спектром $S(\omega)$ функції $f(x)$ є згортка двох спектральних функцій $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$, що є відповідно спектрами функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, то функція $f(x)$ дорівнює функції $f_d(x)$, спектр котрої є добутком спектрів $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$, помноженому на $\delta(x)$, тобто якщо $S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$, $S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S_1(\nu)S_2(\nu-\omega)d\nu$, $f_d(x)=\int_{-\infty}^{\infty}S_1(\omega)S_2(\omega)e^{j\omega x}d\omega$ і $S_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-j\omega x}dx$ та $S_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)e^{-j\omega x}dx$, то $f(x)=f_d(x)\delta(x)$.

Виходячи з (7) можна кореляційну функцію зв'язати з функцією розподілу крім виразу (5) наступним виразом:

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\tau)^2p(x)dx.$$

У виразі (6) енергетичний спектр, що є спектром згортки функції розподілу та функції x^2, дорівнює спектру добутку цих функцій, тобто другій похідній від СФР, помноженому на $2\pi\delta(\omega)$. З погляду спектрального уявлення цей результат можна пояснити тим, що коефіцієнт $2\pi\delta(\omega)$ підсилює складові, котрі наближаються до $\omega = 0$ і послабляє ті, що від віддалені від нульової частоти.

Енергетичний спектр на підставі (7) можна визначити як СФР, помножений на спектр функції x^2. При цьому спектр функції x^2 можна вважати частотною характеристикою чотириполюсника, через котрий проходить сигнал, що має своїм спектром СФР і таким чином утворює енергетичний спектр випадкового сигналу із заданим СФР. В цьому випадку x^2 буде імпульсною характеристикою чотириполюсника.

Якщо імпульсна характеристика кола буде постійною величиною, наприклад одиницею, тобто $g_1(x) = 1$, то інтегралом від цієї функції буде

$$g_x(x) = \int_{-\infty}^{x} g_1(\chi) d\chi = \int_{-\infty}^{x} d\chi = x,$$

а $g_{x^2}(x) = x^2$ буде інтегралом від $g_x(x) = x$:

$$g_{x^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} g_x(\chi) d\chi = \int_{-\infty}^{x} \chi d\chi = x^2.$$

Спектр функції $g_1(x)$ є частотною характеристикою кола з імпульсною характеристикою 1, тобто

$$S_1(\omega) = K_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega). \quad (8)$$

Тоді спектр інтеграла від цієї функції (частотну характеристику кола з імпульсною характеристикою $g_x(x) = x$ можна отримати шляхом ділення (8) на $j\omega$ [1, 7, 8]):

$$S_x(\omega) = K_x(\omega) = S_{1(-1)}(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{j\omega} = \frac{2\pi}{j\omega}\delta(\omega), \quad (9)$$

Аналогічно спектр інтеграла від функції $g_x(x) = x$, тобто частотну характеристику $K_{x^2}(\omega)$ чотириполюсника, котрий має імпульсну характеристику $g_{x^2}(x) = x^2$, можна отримати шляхом ділення $K_x(\omega)$ на $j\omega$. Отже

$$S_{x^2}(\omega) = K_{x^2}(\omega) = S_{1(-2)}(\omega) = \frac{K_1(\omega)}{j\omega} = -\frac{K_x(\omega)}{\omega^2} = -\frac{2\pi}{\omega^2}\delta(\omega).$$

З іншого боку якщо функція $f(x)$ має спектр Фур'є $S(\omega)$, то перша похідна від спектральної функції

$$S'_\omega(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right|'_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left| e^{-j\omega x} \right|'_x = -j \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-j\omega x} dx.$$

Друга похідна

$$S''_\omega(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{-j\omega x} dx.$$

Тобто похідна спектра функції — це спектр цієї функції, помноженої на

$-jx$, що витікає з теореми про спектр похідної [1, 7, 8].

Тому при проходженні сигналу $f(x)$ через коло з імпульсною характеристикою $g_x(x)=x$ спектр цього сигналу повинен множитися на частотну характеристику кола. При цьому спектр сигналу диференціюється (сигнал інтегрується), але домножиться на дельта-функцію з коефіцієнтом 2π:

$$S_{K_x}(\omega)=S(\omega)K_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-j\omega x}dx=$$

$$=-j\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-j\omega x}dxj\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}dx=j2\pi S'_{\omega}(\omega)\delta(\omega).$$

Відповідно при проходженні сигналу через коло з імпульсною характеристикою $g_{x^2}(x)=x^2$ спектр сигналу

$$S_{K_{x^2}}(\omega)=S(\omega)K_{x^2}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-j\omega x}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)e^{-j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}dx=-2\pi S''_{\omega}(\omega)\delta(\omega).$$

Але імпульсна характеристика є відгуком на дію одиничного імпульсу $\delta(x)$. Через це чотириполюсник, що не змінює коефіцієнт передачі в залежності від вхідної дії одиничного імпульсу $\delta(x)$, передасть цей імпульс на вихід без спотворення, і його імпульсна характеристика буде $\delta(x)$, а частотна характеристика буде рівномірною в усьому діапазоні частот, тобто $K(\omega)=1$. Таким чином ідеальне інтегруюче коло буде мати імпульсну характеристику $g_{\text{int}}(x)=x\delta(x)$ і частотну характеристику $K_{\text{int}}(\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$, а подвійне інтегруюче коло — відповідно $g_{2\text{int}}(x)=x^2\delta(x)$ та $K_{2\text{int}}(\omega)=-\dfrac{1}{\omega^2}$.

Коло з імпульсною характеристикою x не є інтегруючим, тому в його частотній характеристиці (9) з'являється коефіцієнт $2\pi\delta(\omega)$, що є частотною характеристикою кола з імпульсною характеристикою $g_1(x)=1$. Через симетричність перетворення Фур'є коло з частотною характеристикою $K(\omega)=1$, буде мати імпульсну характеристику $g(x)=\delta(x)$.

Реальні кола не можуть мати імпульсні характеристики $g_x(x)=x$ та $g_{x^2}(x)=x^2$ через те, що ці функції змінюються в нескінченно широких границях. Тому для практичних розрахунків та досліджень більш раціонально обмежити діапазон зміни аргументу певною величиною $\pm X$, котру для обмеженої функції розподілу задає сама ця функція. Для необмеженої функції розподілу, наприклад при нормальному законі розподілу, вводити обмеження теж раціонально, але вводити його можна на підставі значення функції, а не аргументу.

Обмежені в діапазоні $\pm X$ імпульсні характеристики $g_x(x)$ та $g_{x^2}(x)$ показані на рис. 1.

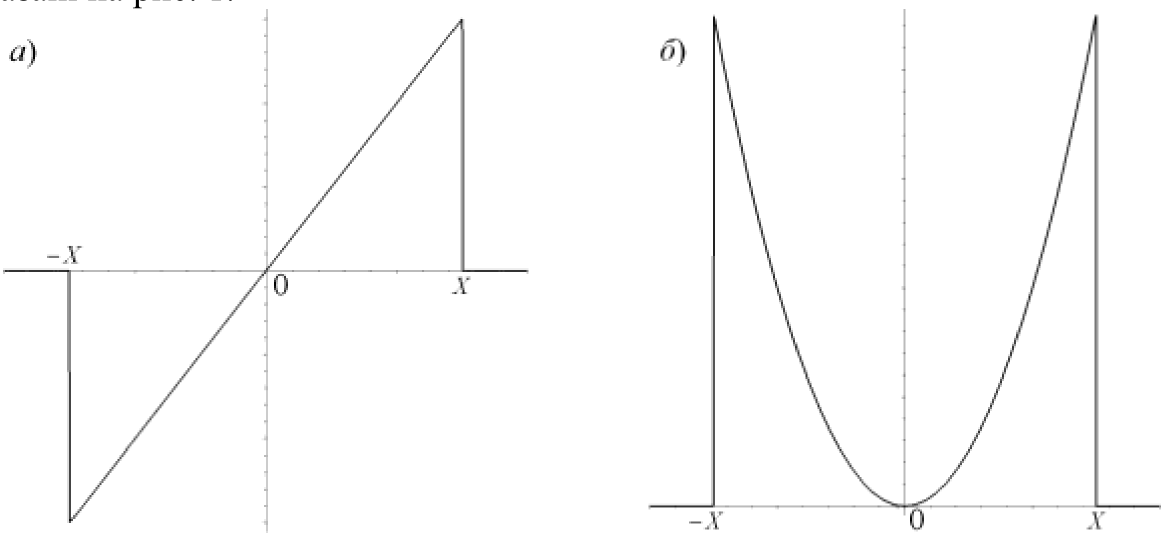

Рисунок 1 – Імпульсні характеристики з обмеженою зміною аргументу: $g_x(x) = x$ (*а*), $g_{x^2}(x) = x^2$ (*б*)

В цьому випадку частотна характеристика $K_x(\omega)$

$$K_x(\omega) = \int_{-X}^{X} x e^{-j\omega x} dx = j2\frac{\omega X \cos \omega X - \sin \omega X}{\omega^2}, \qquad (10)$$

а частотна характеристика $K_{x^2}(\omega)$

$$K_{x^2}(\omega) = \int_{-X}^{X} x^2 e^{-j\omega x} dx = 2\frac{\left[\left(\omega^2 X^2 - 2\right)\sin \omega X + 2\omega X \cos \omega X\right]}{\omega^3}. \qquad (11)$$

Графічне зображення частотних характеристик (10) та (11) приведене на рис. 2.

Таким чином знаходження енергетичного спектра випадкового процесу зведеться до знаходження добутку СФР та функції $K_{x^2}(\omega)$.

На підставі отриманих результатів як приклад знайдемо кореляційні функції стаціонарних випадкових процесів, що описуються функціями розподілу з рівномірним та трикутним законами розподілу.

Для рівномірного закону розподілу енергетичний спектр на підставі СФР [11]

$$F_{рів.}(\omega) = \frac{\sin \omega X}{\omega X} K_{x^2}(\omega) = 2\frac{\sin \omega X}{\omega^4 X}\left[\left(\omega^2 X^2 - 2\right) + 2\omega X \cos \omega X\right],$$

а для трикутного закону розподілу

$$F_{трик.}(\omega) = 2\frac{1 - \cos \omega X}{\omega^2 X^2} K_{x^2}(\omega) = 4\frac{1 - \cos \omega X}{\omega^5 X^2}\left[\left(\omega^2 X^2 - 2\right)\sin \omega X + 2\omega X \cos \omega X\right].$$

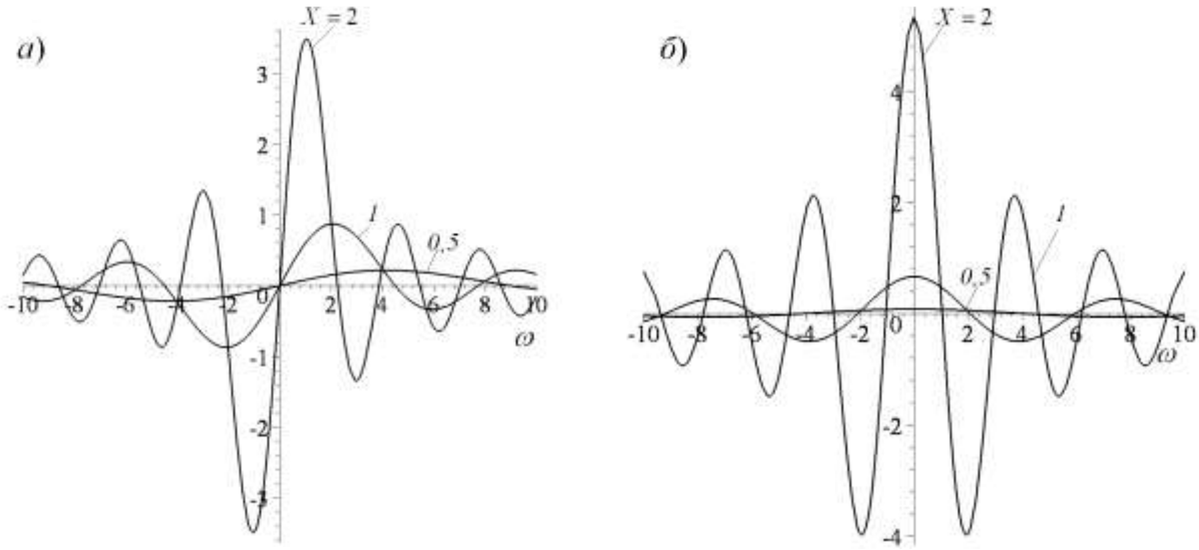

Рисунок 2 – Частотні характеристики кіл з імпульсними характеристиками, зображеними: на рис. 1*а* (*а*), на рис. 1*б* (*б*)

Графіки цих функцій при $X = 2$ приведені на рис. 3.

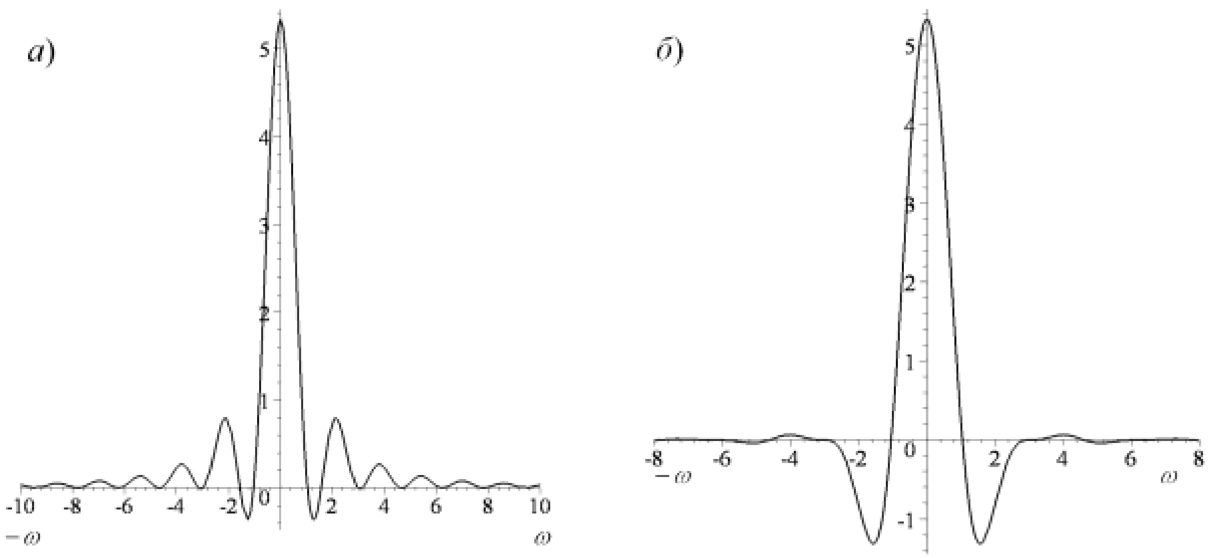

Рисунок 3 – Енергетичні спектри: при рівномірному розподілі випадкового процесу (*а*) та трикутному розподілі (*б*)

За допомогою зворотного перетворення Фур'є від енергетичних спектрів можна перейти до кореляційних функцій цих процесів. Для рівномірного закону розподілу

$$K_{рів.}(\tau) = \frac{\pi}{6X}\{\tau^3[\operatorname{sgn}(\tau+2X) - 2\operatorname{sgn}\tau + \operatorname{sgn}(\tau-2X)] +$$
$$+3\tau^2 X[\operatorname{sgn}(\tau+2X) - \operatorname{sgn}(\tau-2X)] +$$
$$+3\tau X^2[\operatorname{sgn}(\tau-2X) - 2\operatorname{sgn}\tau + \operatorname{sgn}(\tau+2X)] + 2X^3[\operatorname{sgn}(\tau+2X) - \operatorname{sgn}(\tau-2X)]\}.$$

Для трикутного закону розподілу

$$K_{трик.}(\tau)=\frac{\pi}{12X^2}\{\tau^4[2\operatorname{sgn}(\tau-X)-2\operatorname{sgn}(\tau+X)-\operatorname{sgn}(\tau-2X)+\operatorname{sgn}(\tau+2X)]+$$
$$+4\tau^3X[\operatorname{sgn}(\tau-2X)-2\operatorname{sgn}\tau+\operatorname{sgn}(\tau+2X)]+6\tau^2X^2[\operatorname{sgn}(\tau+2X)-\operatorname{sgn}(\tau-2X)]+$$
$$+8\tau X^3[\operatorname{sgn}(\tau+2X)+\operatorname{sgn}(\tau-2X)-\operatorname{sgn}(\tau+X)-\operatorname{sgn}(\tau-X)]+$$
$$+2X^4[3\operatorname{sgn}(\tau-X)-3\operatorname{sgn}(\tau+X)+4\operatorname{sgn}(\tau+2X)-4\operatorname{sgn}(\tau-2X)].$$

Графіки відповідних кореляційних функцій при $X=1{,}5$ приведені на рис. 4.

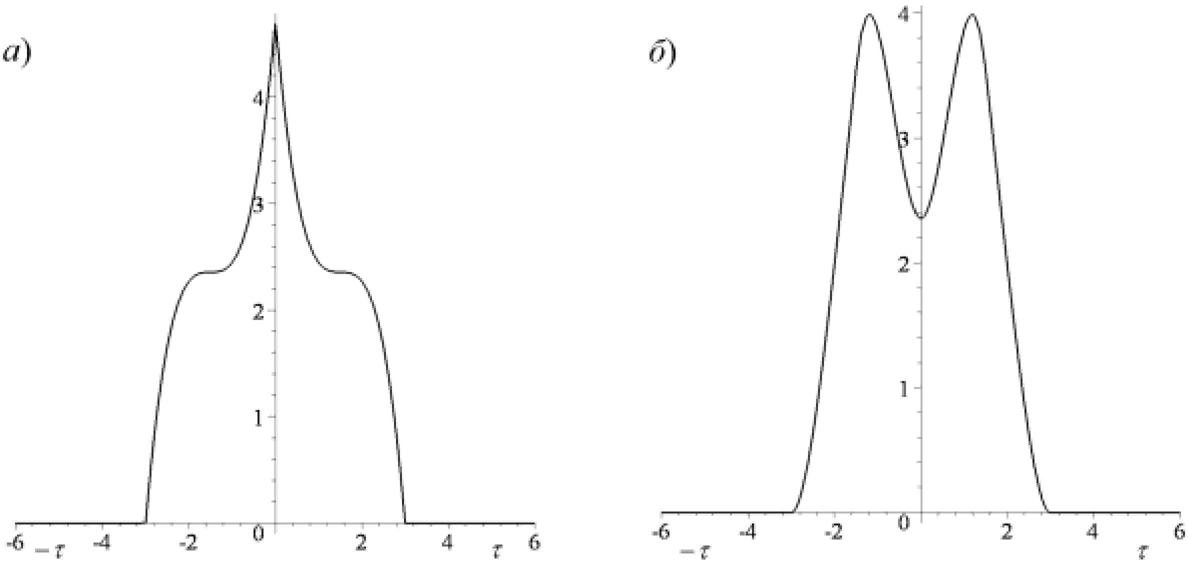

Рисунок 4 – Кореляційні функції: при рівномірному розподілі випадкового процесу (*а*) та трикутному розподілі (*б*)

Висновки

Між кореляційною функцією та енергетичним спектром випадкового процесу з одного боку і функцією розподілу та СФР з іншого боку існує жорсткий зв’язок через те, що всі ці параметри усереднено характеризують один і той же випадковий процес.

Спектр згортки двох функцій дорівнює спектру добутку цих функцій, помноженому на $2\pi\delta(\omega)$. Функція, спектром якої є згортка двох спектрів, дорівнює функції, спектром якої є добуток цих функцій, помноженій на $\delta(x)$.

Енергетичний спектр випадкового процесу дорівнює другій похідній від СФР по частоті з знаком „мінус”, помноженій на коефіцієнт $2\pi\delta(\omega)$. Енергетичний спектр випадкового процесу також можна знайти шляхом множення СФР цього процесу на спектр функції x^2. Для спрощення розрахунку енергетичного спектра цим методом доцільно знаходити спектр функції x^2 в обмеженому діапазоні зміни аргументу, в якому зосереджена основна частина площі функції розподілу.

Кореляційна функція випадкового процесу є згорткою функції розподілу цього процесу з квадратом аргументу.

Отримані співвідношення дозволяють теоретично або практично за допомогою відповідних приладів визначити всі основні характеристики випадкового процесу якщо відома хоча б одна з них.

Перспективою подальших досліджень з розглянутих питань є моделювання СФР нестаціонарно випадкового процесу.

Література

1. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 671 с.
2. В.М. Майстренко. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”. Серія приладобудування – 2003. – № 26. – С. 145–150.
3. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”, 20 – 21 квітня 2004 р. Збірка наукових праць. Тези доп., Київ, 2004. – С. 137–138.
4. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”. Серія приладобудування – 2004. – № 27. – С. 163–170.
5. В.М. Майстренко. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”, 20 – 21 квітня 2004 р. Збірка наукових праць. Тези доп., Київ, 2004. – С. 138–139.
6. В.М. Майстренко. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Методи та прилади контролю якості. – 2004. – № 12. – С. 77–80.
7. А.А. Харкевич. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с.
8. В.Г. Криксунов. Спектральний аналіз електричних сигналів. – К.: Техніка, 1971. – 193 с.
9. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1974. – 549 с.
10. В.М. Майстренко. Метод оцінки взаємодії випадкових некорельованих перешкод і сигналу в системі передачі інформації // Вісник національного технічного університету “Київський політехнічний інститут”. Серія приладобудування – 2004. – № 28. – С. 155–162.
11. В.И. Тихонов. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 623 с.

Майстренко В.Н. **Связь спектра функции распределения стационарного случайного процесса с энергетическим спектром.** Установлена связь между спектральным способом описания одномерной функции распределения случайного процесса и энергетическим спектром стационарного случайного процесса. Показано, что на основании энергетического спектра можно определить функцию распределения случайного процесса и наоборот. Приведены другие оценки случайных процессов.	Maystrenko V.N. **Connection of a spectrum of function of distribution of stationary casual process with a power spectrum.** The connection between a spectral way of the description of one-dimensional function of distribution of casual process and power spectrum of stationary casual process is established. Is shown, that on the basis of a power spectrum it is possible to define function of distribution of casual process and on the contrary. Other estimations of casual processes are given.

Надійшло до редакції
21 липня 2005 року