УДК 539.375

Зражевський Г.М.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.[2], к.ф.-м.н., доцент.

Постановка та дослідження задачі про оптимальне збудження коливань пластини

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

[2] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

G.M. Zrazhevsky[1], PhD,
V.F. Zrazhevska[2], PhD.

Formulation and study of the problem of optimal excitation of plate oscillations

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

[2] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

Розглянута модельна задача про гармонійні коливання шарнірно закріпленої пластини, що знаходиться під впливом деякого числа точкових зосереджених сил. Вважається, що модель пластини задовольняє умовам Кірхгофа. Основним предметом розгляду є задача про визначення оптимальних характеристик збудження - кількості сил, координат їхнього прикладання, амплітуд та фаз. Критерій оптимальності вибудовується як середньо квадратичне відхилення комплексних прогинів від заданої функції профілю. При заданих характеристиках збудження, задача визначення коливань розв'язується у вигляді суперпозиції функцій Гріна з сингулярностями в точках прикладання сил. Функція Гріна побудована у вигляді ряду Фур'є по коловій координаті. Шляхом використання рівності Парсеваля в просторі L_2 , цільова функцію оптимізаційної задачі представлена у вигляді комбінації лінійної та ермітової форм відносно комплексних амплітуд сил, матриці яких нелінійним (та не опуклим чином) залежать від координат точок сингулярності. Проведено повне дослідження цільової функції. Визначено достатні умови для редукції розмірності простору управління шляхом аналітичного визначення амплітуд сил. Отримані вирази для підрахунку градієнтів цільової функції по кутовим та радіальним координатам.

Ключові слова: гармонійні коливання платівки, оптимальне збудження.

A model problem of harmonic oscillations of a hinged plate, that is is under the influence of a certain number of point concentrated forces, is considered. The plate model is considered to satisfy Kirchhoff's conditions. The main task of the consideration is to determine the optimal characteristics of excitation - the number of forces, coordinates of their application, amplitudes and phases. The optimality criterion is constructed as the standard deviation of the complex deflections from a given profile function. With the given excitation characteristics, the problem of determining the vibrations is solved in the form of a superposition of the Green functions with singularities at the points of application of forces. The Green function is constructed as a Fourier series by a circular coordinate. By using Parseval equality in L_2, the objective function of the optimization problem is represented as a combination of linear and Hermitian forms with respect to complex amplitudes of forces whose matrices are nonlinear (and not convex) dependent on the coordinates of singular points. A complete study of the objective function is performed. Sufficient conditions are determined for reducing the dimension of the control space by analytical determination of the amplitudes of forces. Expressions were obtained to calculate the gradients of the objective function by angular and

radial coordinates. A partial case of grouping of excitation forces on concentric circles is considered, that leads to the degeneration of the problem.

Key words: harmonic plate oscillations, optimal excitation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Задача про визначення оптимальних характеристик збудження коливань круглої, шарнірно закріпленої пластини, що задовольняє умовам моделі Кіргхофа [1,2,4], має вигляд [3]:

$$I(R) \underset{q(r,\varphi)}{\searrow} \min, \tag{1}$$

де цільова функція

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} \left|R(r,\varphi)\right|^2 d\varphi + \gamma S_f \tag{2}$$

визначається нев'язкою наближення комплексною амплітудою коливань $w(r,\varphi)$ ($w(r,\varphi,t) = w(r,\varphi)e^{i\omega t}$) заданого профілю поверхні $W(r,\varphi)$ [5]:

$$R(r,\varphi) = w(r,\varphi) - W(r,\varphi).$$

Отже, w має бути розв'язком граничної задачі:

$$\Delta^2 w - k^4 w = q,\ 0 < r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\ ,$$

$$\begin{cases} w(1,\varphi) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right|_{r=1} = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

де $k^4 = \rho h \omega^2 / D$, D - циліндрична жорсткість, ν - коефіцієнт Пуасона, $q = q(r,\varphi;u_1,...,u_n)$ - зовнішнє навантаження, $\{u_k\}_{k=1}^n$ - параметри керування навантаженням.

Амплітуда та фаза заданого профілю поверхні в загальному випадку можуть залежати від просторових координат:

$$W(r,\varphi)e^{i\omega t} = A(r,\varphi)e^{i\omega(t+\Phi(r,\varphi))}. \tag{4}$$

В силу осесиметричності області, розв'язок (3) розшукувався в вигляді розкладів в ряд Фур'є по кутовій координаті:

$$w(r,\varphi) = \sum_{n=-M}^{M} w_n(r)e^{in\varphi}, \tag{5}$$

та, аналогічно,

$$W(r,\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} W_n(r)e^{in\varphi}, \tag{6}$$

$$R = \sum_{n=-M}^{M} R_n(r)e^{in\varphi}, \tag{7}$$

де, в силу (4), $W_n(r) \ne W_{-n}(r)$, $w_n(r) \ne w_{-n}(r)$, $M \ge N$ - порядок наближення.

В даній роботі розглянуто збудження коливань сукупністю $I+1$ точкових сил, прикладених в точках $r = 0$, $(r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k})$ з комплексними амплітудами F_0, F_k , $k = \overline{1,I}$:

$$q\left(r,\varphi;\left\{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{I} F_k \delta\left(r - r_{\xi_k}, \varphi - \varphi_{\xi_k}\right) + F_0 \delta(r). \tag{8}$$

Таким чином, параметрами керування в (2) є $(F_k = u_k + iv_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k})$, $F_0 = u_0 + v_0$, $k = \overline{1,I}$.

Згідно з (5), розв'язок (3) можна подати у вигляді [6]:

$$w\left(r,\varphi;\left\{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{I} F_k w^*\left(r, r_{\xi_k}, \varphi - \varphi_{\xi_k}\right) + F_0 w_{00}^*(r),$$

де $w^*\left(r,\varphi;r_\xi,\varphi_\xi\right)$, $w_{00}^*(r)$ - функції Гріна задачі (3) з правими частинами в рівняннях $\frac{1}{2\pi r}\delta\left(r - r_\xi\right)\delta\left(\varphi - \varphi_\xi\right)$ та $\frac{1}{2\pi r}\delta(r)$ відповідно. Коефіцієнти Фур'є функції $w^*\left(r, r_\xi, \varphi\right) = \sum_{n=-M}^{+M} w_n^*\left(r, r_\xi\right)e^{in\varphi}$ можна знайти як

суперпозицію фундаментального та однорідного розв'язків звичайного диференціального рівняння 4-го порядку, що зводиться до рівнянь Бесселя [6]: $w_n^*(r,r_\xi)=w_n^{1*}(r,r_\xi)+w_n^{2*}(r,r_\xi)$.

В результаті побудови функцій Гріна можна довести, що виконується

Твердження 1.

$$w_n^*(r,r_\xi)=\begin{cases} g_n(r,r_\xi), & r<r_\xi \\ g_n(r_\xi,r), & r>r_\xi \end{cases}, \text{ де}$$

$$g_n(r,r_\xi)=\frac{1}{D_n}\left(A_n(r_\xi)J_n(kr)+C_n(r_\xi)I_n(kr)\right).$$

Приймаючи до уваги (5)-(7) та використавши рівність Парсеваля для простору $L^2[0,2\pi]$, задача (1) може бути зведена до знаходження мінімумів функції:

$$I(R)=2\pi\sum_{n=-M}^{+M}\int_0^1\left|R_n\left(r,\varphi;\left\{F_k,r_{\xi_k},\varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I}\right)\right|^2 rdr$$

по змінним $F_0,\left\{F_k,r_{\xi_k},\varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I}$, а, отже, до дослідження Ермітової форми [7]:

$$I(R)=\vec{F}^T\,\mathrm{K}\,\overline{\vec{F}}-2\mathrm{Re}(\vec{b}\vec{F}^T)+C, \qquad (9)$$

де $\mathrm{K}=\sum_n \mathrm{K}_n$ - матриця лінійної форми та $\vec{b}=\sum_n \vec{b_n}$ - вектор лінійної форми є функціями від $(r_{\xi_k},\varphi_{\xi_k})$, $C=\sum_n C_n$ - константа, що визначається через (4).

Легко показати, що виконується

Твердження 2.

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}^*,\ \mathrm{K}=\overline{\mathrm{K}},\ \mathrm{K}>0.$$

Як наслідок, (6) є опуклою по відношенню до $F_k=u_k+iv_k$, $k=\overline{0,I}$ та необхідною умовою досягнення мінімуму $I(R)$ по F_k є лінійне алгебраїчне рівняння [5]. Отже, виконується:

Твердження 3.

$$\frac{\partial I(R)}{\partial\vec{F}}=0\Leftrightarrow\vec{F}=\vec{F}^{opt}=\mathrm{K}^{-1}\overline{\vec{b}}, \qquad (10)$$

де прийнято позначення $\frac{\partial}{\partial\vec{F}_s}=\left(\frac{\partial}{\partial u_s}+i\frac{\partial}{\partial v_s}\right)$.

Можна також показати, що справедливе

Твердження 4. Якщо позначити $(\,)'=(\,)_{r_{\xi_k}}$, $(\,)'=(\,)_{\varphi_{\xi_k}}$, то

$$\left(\vec{F}^{optT}\,\mathrm{K}\,\overline{\vec{F}}^{opt}\right)'-2\mathrm{Re}\left(\vec{b}\,\vec{F}^{opt}\right)'= \qquad (11)$$
$$=\vec{F}^{optT}\,\mathrm{K}'\,\overline{\vec{F}}^{opt}-2\mathrm{Re}(\vec{b}'\,\vec{F}^{optT}).$$

Твердження 3 та 4 дозволяють зменшити кількість невідомих задачі шляхом визначення оптимальних значень $\vec{F}$ з (7), оскільки з (8) випливає, що мінімізація $I\left(R\left(\left\{F_k,r_{\xi_k},\varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I},F_0\right)\right)$ та $I\left(R\left(\left\{F_k^{opt},r_{\xi_k},\varphi_{\xi_k}\right\}_{k=1}^{I},F_0^{opt}\right)\right)$ - еквівалентні.

Редукування простору керувань суттєво спрощує розв'язання задачі, але воно можливе лише тоді, коли K не вироджена. В той же час легко показати, що при виконанні умови $\exists l\neq m: r_{\xi_l}=r_{\xi_m},\varphi_{\xi_l}\neq\varphi_{\xi_m}$ матриця форми вироджується, хоча розв'язок $\mathrm{K}\vec{F}^{opt}=\overline{\vec{b}}$ існує, оскільки $rank\,\mathrm{K}=rank\,(\mathrm{K}|\vec{b})<I+1$.

Вирішення цієї проблеми можливе шляхом розгляду груп сил, розташованих на концентричних колах:

$$\begin{cases} r_{\xi_{kj}}=R_k,\ j=\overline{1,I_k} \\ \varphi_{\xi_{kj}}=\Phi_k+(j-1)\Delta\Phi_k=\Phi_{kj},\ k=\overline{1,K} \end{cases} \qquad (12)$$

$$I=\sum_{k=1}^{K}I_k,\ \Delta\Phi_k=2\pi/I_k.$$

Легко бачити, що в цьому випадку K має блокову структуру, що полегшує її аналіз. Таке припущення також призводить до зменшення кількості невідомих задачі.

В результаті досліджень доведене

Твердження 5.

$$rank\,\mathrm{K} = rank\,(\mathrm{K}\,|\,\vec{b}) = \sum_{i=1}^{K} \min(2M+1, I_k) + 1, \quad (13)$$

а отже $\mathrm{K}\vec{F} = \vec{b}$ має розв'язок тоді і лише тоді, коли:

$$\sum_{k=1}^{K} \min(2M+1, I_k) \le \sum_{k=1}^{K} I_k. \quad (14)$$

Доведене твердження вказує спосіб можливості обернення K шляхом збільшення M при фіксованому N. Дійсно, N визначається з вимоги точності наближення профілю поверхні відрізком ряду Фур'є. Отже, з рівності Парсеваля слідує, що мінімум (9) може бути досягнуто при $M = N$. Оскільки $\vec{b}$ в (10) залежить лише від $W(r,\varphi)$, то збільшення $M > N$ не призведе до погіршення апроксимації, але дозволить уникнути виродження K .

Для перевірки отриманих результатів та підтвердження ефективності запропонованого підходу розглянуто чисельний приклад, в якому

$$\begin{aligned} W(r,\varphi) &= (-I_0(k_{00}) / J_0(k_{00}) J_0(k_{00} r) + \\ &+ I_0(k_{00} r)) + \\ &+ (-I_1(k_{11}) / J_1(k_{11}) J_1(k_{11} r) + I_1(k_{11} r)) e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (15)$$

де перший член є першою осесиметричною, а другий - першою не осесиметричною формами коливань шарнірно закріпленої пластини ($k_{00} = 2.23245$, $k_{11} = 3.7336$), $N = 1$. Такий профіль поверхні визначає суперпозицію стоячої та біжучої в коловому напрямку хвиль. Дійсна та уявна частини (15) представлено на Рис. 1,2. Розрахунки проводились для низьких $k = 0.2324$, середніх $k = 3.2324$ та високих $k = 5.2324$ частот. Розглянуто три конфігурації групування чотирьох сил.

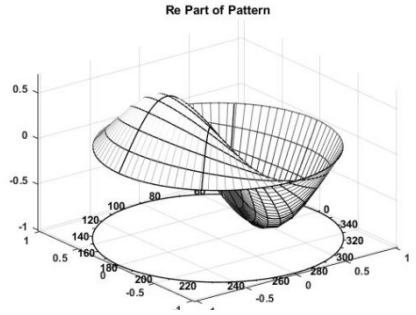

Рис.1 Дійсна частина форми поверхні

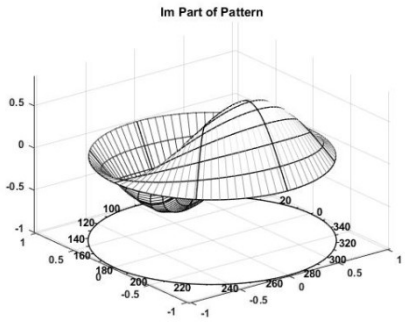

Рис.2 Уявна частина форми поверхні

В першій конфігурації прийнято, що всі сили незалежні (8 невідомих: $R_i, \Phi_i, i = \overline{1,4}$), в другому - дві незалежні групи двох діаметрально розташованих сил (4 невідомих: $R_k, \Phi_k, k = \overline{1,2}$), в третьому - одна група сил з кутовими відстанями $\pi/2$ (2 невідомих: R_1, Φ_1). Для коректності порівняння в усіх випадках прийнято $M = 4$. В результаті розрахунків, оптимальні розташування сил, їхні комплексні амплітуди та значення цільової функції співпали з відносною точністю в межах 10^{-2} для всіх частот. В той же час, для кожної наступної конфігурації, час розрахунків суттєво зменшувався. Оптимальне значення цільової функції збільшується зі збільшення частоти коливань від $4 \cdot 10^{-4}$ до $3 \cdot 10^{-2}$, що є природнім та може бути скомпенсоване шляхом збільшення кількості сил.

Мінімізація цільової функції виконувалась з використанням пакету PSG Matlab Interface.

Список використаних джерел

1. *Бажанов В.Л.* Пластины и оболочки из стеклопластиков / В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат и др. – М: Высшая школа, 1970. - 408 с.
2. *Donnell L.H.* Beams, Plates, and Shell / L.H. Donnell., – New York: McCraw-Hill Book Company 1976. – 453 p.
3. *Зражевський Г.М.* Оптимізаційний підхід до розрахунку гармонічних коливань круглої пластини / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки - 2017, №3. – С. 63-66.
4. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells / S. Timoshenko. – New York: McCraw-Hill Book Company, 1989. – 600 p.
5. *Lawson C.L.* Solving Least Square Problems / C.L. Lawson., R.J. Hanson . – New Jersey: Prentice-Hall, 1974 .– 524 p.
6. *Courant R.* Methods of Mathematical Physics, Volume II / R. Courant., D. Hilbert, – New York: Wiley-Interscience, 1962. – 830 p.
7. *Strang G.* Linear Algebra and its Applications / G. Strang. – Cambridge: Wellesley- Cambridge Press, 2016 . – 574 p.

References

1. BAZHANOV, V.L and GOLDENBLAT, I.I. i drugie. (1970) *Plastini i obolochki iz stekloplasticov*. Moskva: Visshaya shkola.
2. DONNELL, L.H. (1976) *Beams, Plates, and Shell.* New York: McCraw-Hill Book Company.
3. ZRAZHEVSKY, G.M. and ZRAZHEVSKA V.F. (2017) Optimizaziyniy pidhid do rozrahunku garmonichnih kolivan krugloiy plastini. *Bull. of T. Shevchenko National University of Kyiv Ser.: Phys. & Math.* N 3 pp. 63-66.
4. TIMOSHENKO, S. (1989) *Theory of Plates and Shells.* New York: McCraw-Hill Book Company.
5. LAWSON, C.L. and HANSON, R.J. (1974) *Solving Least Square Problems*. New Jersey: Prentice-Hall.
6. COURANT, R. and HILBERT, D. (1962) *Methods of Mathematical Physics*, *Volume II.* New York: Wiley-Interscience.
7. STRANG G. (2016) *Linear Algebra and its Applications*. Cambridge: Wellesley-Cambridge Press.

Надійшла до редколегії 15.09.2019