

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА І СИГНАЛИ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ПРИСТРОЇВ

**АПРОКСИМАЦІЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ПРОЦЕСУ
ВІДРІЗКОМ
УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є**

**Рекомендації до виконання
розрахунково-графічної роботи**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електронні системи мультимедіа та засоби Інтернету речей»
спеціальності 171 «Електроніка»

Укладачі: О. В. Гармаш, О. І. Красильніков, Т. А. Полобюк

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 621.37: 519.8 (075.8)
Е50

Укладачі: *Гармаш Оксана Вікторівна*, канд. техн. наук, доцент
Красильніков Олександр Іванович, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Полобюк Тетяна Анатоліївна, канд. техн. наук

Рецензент *Хижняк, Т. А.*, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний редактор *Берегун, В. С.*, канд. техн. наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 04.06.2026 р.)
за поданням вченої ради Факультету електроніки
(протокол № 05/2026 від 27.05.2026 р.)*

А86 **Електричні кола і сигнали мультимедійних пристроїв.** Апроксимація детермінованого процесу відрізком узагальненого ряду Фур'є: [Електронний ресурс] : рек. до виконання розрахунково-графічної роботи : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електронні системи мультимедіа та засоби Інтернету речей» спец. 171 Електроніка / КПП ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Гармаш, О. І. Красильніков, Т. А. Полобюк. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 32 с.

В посібнику розглянуто приклади виконання завдань із аналізу процесів за допомогою узагальненого ряду Фур'є. Приділено увагу визначенню похибки апроксимації процесу із використанням відрізків ортогональних рядів. Наведені приклади побудови системи базисних функцій та алгоритм ортогоналізації. Призначено для здобувачів ступеня бакалавра, які навчаються за спеціальністю «Електроніка», буде також корисним для спеціальності «Електронні комунікації та радіотехніка».

УДК 621.37: 519.8 (075.8)

Реєстр. № НП 25/26-446. Обсяг 1,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056

<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ.....	6
1.1. Постановка задачі.....	6
1.2. Завдання на розрахунково-графічну роботу	6
1.3. Склад та структура розрахунково-графічної роботи	7
1.4 Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи	8
1.5. Організаційні питання	9
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗДІЛІВ.....	10
2.1. Загальні вимоги	10
2.2. Ортогональний розклад процесів	10
2.3. Отримання ортогональних систем функцій	12
2.4. Оптимальність ряду Фур'є.....	13
2.5. Приклади отримання ортогональних систем функцій	14
2.6. Приклади апроксимації процесу.....	17
КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.....	22
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	23
ДОДАТКИ.....	24
ДОДАТОК А. Титульний аркуш пояснювальної записки.....	24
ДОДАТОК Б. Приклад виконання розрахункової частини.....	25

ВСТУП

Сучасні інженери в галузі електроніки мають вирішувати різноманітні задачі дослідження та обробки реальних фізичних процесів. Базові знання, вміння та навички для розв'язання таких задач студенти здобувають у межах освітнього компонента «Електричні кола і сигнали мультимедійних пристроїв».

Метою освітнього компонента є формування у студентів системного розуміння методів аналізу електричних кіл і сигналів, що використовуються в мультимедійних пристроях, а також розвиток практичних навичок математичного моделювання фізичних процесів.

Основні завдання дисципліни:

- засвоєння теоретичних основ аналізу лінійних і нелінійних систем;
- опанування сучасних методів спектрального та часового аналізу сигналів;
- формування вмінь застосовувати математичний апарат для розв'язання інженерних задач електроніки.

За результатами вивчення освітньої компоненти студенти:

- знають основні поняття та визначення теорії процесів і систем, їх основні класи та моделі, а також методи аналізу перетворень процесів;
- вміють обчислювати часові та частотні характеристики відгуків лінійних і нелінійних систем;
- мають навички розв'язання типових прикладних задач теорії процесів та систем.

Важливу роль у засвоєнні матеріалу відіграє самостійна робота — систематичне опрацювання теоретичного матеріалу, виконання поточних завдань і розрахунково-графічної роботи. Для ефективної організації самостійної роботи рекомендується:

- дотримуватися графіку виконання завдань, визначеного робочою програмою;
- використовувати рекомендовану літературу та електронні освітні ресурси;
- своєчасно звертатися до викладача за консультацією у разі труднощів.

Розрахунково-графічна робота присвячена побудові ортогонального базису та поданню за його допомогою типових моделей процесів. За результатами її виконання студенти оволодівають загальною методикою отримання ортогональних систем функцій, навчаються апроксимувати

довільний процес відрізком узагальненого ряду Фур'є та обчислювати похибки апроксимації.

Робота виконується індивідуально відповідно до виданого варіанта завдання. Захист роботи передбачає усне пояснення отриманих результатів та відповіді на запитання викладача. Оцінювання здійснюється за такими критеріями: правильність та повнота розрахунків, якість графічного матеріалу, вміння аналізувати та інтерпретувати результати.

Освітній компонент спирається на знання, здобуті в курсах вищої математики, фізики та теорії електричних кіл, і є основою для подальшого вивчення дисциплін, пов'язаних із цифровою обробкою сигналів, проектуванням акустичних систем та мультимедійних пристроїв.

Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1.1. Постановка задачі

Мета роботи полягає в набутті навичок побудови ортогональних систем функцій та їх застосування для математичного моделювання довільних процесів з використанням узагальненого ряду Фур'є.

Темою роботи є апроксимація детермінованого процесу відрізком узагальненого ряду Фур'є.

Загальна постановка задачі полягає в наступному.

Заданий процес $x(t)$ на інтервалі $t \in [t_1; t_2]$ необхідно апроксимувати лінійною комбінацією

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(t),$$

де $g_k(t)$ – базисні функції, c_k – коефіцієнти апроксимації.

Необхідно для $n=4$ отримати систему базисних функцій $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$, обчислити коефіцієнти апроксимації c_k , знайти відносні похибки апроксимації $\delta(n)$ та зробити висновки по роботі.

Конкретна модель процесу $x(t)$ задається в індивідуальних вихідних даних, які студент отримує у керівника розрахунково-графічної роботи у встановлені терміни.

1.2. Завдання на розрахунково-графічну роботу

1. Отримати у керівника індивідуальні вихідні дані.
2. Вивчити основні теоретичні відомості.
3. Отримати систему базисних функцій $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$, ортогоналізуючи систему функцій $f_k(t) = \left\{ t^{k-1} \right\}_{k=1}^4$ на інтервалі $[t_1, t_2]$.
4. Обчислити коефіцієнти c_k , $k = \overline{1, 4}$, ортогонального подання заданого процесу $x(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, по системі базисних функцій $g_k(t)$, отриманих в п. 3.

Побудувати амплітудний спектр процесу $x(t)$. Записати формулу апроксимуючого процесу $x_n(t)$.

5. Побудувати графіки окремих спектральних складових ряду Фур'є. Апроксимувати процес $x(t)$, зобразивши на окремих графіках сам процес $x(t)$ та його апроксимації процесом $x_n(t)$ для $n = \overline{1,4}$.

6. Обчислити відносні похибки апроксимації $\delta(n)$ для $n = \overline{1,4}$. Отримані результати звести до таблиці.

7. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

8. Оформити роботу і здати її на перевірку.

9. Захистити роботу.

1.3. Склад та структура розрахунково-графічної роботи

Результати виконання розрахунково-графічної роботи оформляються студентами у вигляді пояснювальної записки, яка має наступну структуру.

1. Титульний аркуш.
2. Завдання та постановка задачі
3. Розрахункова частина.
4. Висновки.
5. Література.

Форма титульного аркушу наведена в додатку. Розрахункова частина містить необхідні розрахунки та графіки, що відповідають завданню на розрахунково-графічну роботу, а також аналіз отриманих результатів. У висновках (окрема сторінка) в короткій формі наводяться конкретні результати, які отримані у відповідних пунктах розрахункової частини, та їх аналіз.

Орієнтовний об'єм роботи складає 7...10 сторінок друкованого тексту.

1.4. Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи

Розрахунково-графічна робота оформляється в друкованому вигляді з урахуванням рекомендації [1] на аркушах формату А4 шрифтом Times New Roman, 14 пт, міжрядковий інтервал 1,5 lines, розміри полів: верхнє та нижнє – 20 мм, праве – 10 мм, лівє – 25 мм.

Роботу розбивають на розділи, при необхідності – на підрозділи. Розділи в роботі повинні мати порядкові номери (арабські цифри з крапкою). Підрозділи повинні нумеруватися в рамках розділу; номер підрозділу складається з номерів розділу та підрозділу, розділених крапкою, наприклад: 4.1.

Заголовок розділів розміщують по центру рядка та друкують великими літерами без крапки в кінці. Заголовки підрозділів друкують малими літерами, крім першої великої, без крапки в кінці. Перенесення слів у заголовках не допускається.

У тексті не дозволяється скорочення слів, за винятком загальноприйнятих. Необхідно давати розшифровку позначень у формулах.

Усі малюнки, таблиці та формули нумерують арабськими цифрами порядковою нумерацією в межах розділу. Нумерація складається з номера розділу і порядкового номера рисунка, таблиці або формули (наприклад, Рис. 3.2 - другий рисунок третього розділу, (2.1) - перша формула другого розділу). Малюнок може мати назву. Номер і назву малюнка розміщують під малюнком: «Рис. 3.2. Назва». Графіки повинні містити найменування осей і значення величин на них.

Номер і назву таблиці розміщують над таблицею. Слово «Таблиця ____» вказують один раз зліва над першою частиною таблиці, над іншими частинами тієї ж самої таблиці, розміщеної на наступних сторінках, пишуть: «Продовження табл. ____» із зазначенням її номера. Заголовки граф таблиці починають з великої літери, а підзаголовки – з малої.

На всі малюнки і таблиці, наведені в розрахунково-графічній роботі, повинні бути посилання в тексті. Посилання на малюнки і таблиці мають вигляд: «лінія 1 (рис. 3.1) відображає ...», «В табл. 1.1 наведено ... ».

Перелік літератури повинен складатися з літературних джерел, які були використані в роботі. Джерела слід розставляти в порядку посилань на них у

тексті або за алфавітом. Посилання на джерело мають вигляд: «в роботі [1] наведено ...», «питання розглянуто в роботах [3–5]».

Інформацію про джерела, які включені в перелік літератури, необхідно надавати відповідно до [1].

Додатки слід розміщувати в кінці роботи і позначати послідовно великими літерами українського алфавіту чи арабськими цифрами, наприклад «Додаток А» або «Додаток 1». Додатки повинні мати спільну з усім текстом наскрізну нумерацію сторінок.

1.5. Організаційні питання

Керівник роботи видає індивідуальні вихідні дані на виконання розрахунково-графічної роботи персонально кожному студентові на четвертому тижні з відміткою у відомості. Розрахунково-графічна робота виконується протягом 4-13 тижнів семестру за рахунок самостійної роботи студента (СРС) об'ємом 15 годин (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Пункти завдання	Терміни виконання, тижні семестру	Кількість годин СРС
1	4	-
2	5	2
3	6 - 7	3
4	8 - 9	3
5	10	2
6	11	2
7	12	1
8	13	2
9	15-16	-
Всього		15

Розділ 2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗДІЛІВ

2.1. Загальні вимоги

Після отримання завдання необхідно вивчити основні теоретичні відомості, використовуючи дані методичні вказівки та літературу [2, 3].

Розрахунково-графічна робота повинна містити постановку задачі, вихідні дані, необхідні розрахункові формули та послідовність обчислень по ним для відповідних індивідуальних даних.

Обчислення повинні проводитись без застосування спеціалізованого програмного забезпечення; в проміжних обчисленнях отримані дроби не слід перетворювати в десяткові; в кінцевих результатах отримані числа необхідно округлювати до двох знаків після коми, наприклад, $3,915 \approx 3,92$, $2,199 \approx 2,20$. Для обчислення інтегралів рекомендується використовувати табличні формули [4, 5].

Усі графіки повинні бути побудовані у відповідності з отриманими формулами, з дотриманням необхідних масштабів. Для побудови графіків можливе застосування засобів обчислювальної техніки.

2.2. Ортогональний розклад процесів

Нехай процес $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, має обмежену енергію:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Його можна розкласти в ряд за системою базисних функцій $\{g_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(t), \quad (2.1)$$

де c_k – коефіцієнти розкладу.

В більшості задач теорії процесів та систем в якості базисних функцій використовується повна система ортогональних функцій, для яких скалярний добуток (g_m, g_k) задовольняє співвідношенню

$$(g_m, g_k) = \int_{t_1}^{t_2} g_m(t) \overline{g_k(t)} dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \|g_k\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |g_k(t)|^2 dt, & k = m, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $[t_1, t_2]$ – інтервал ортогональності функцій $g_k(t)$; $\|g_k\|$ – їх норма.

У цьому випадку формула (2.1) називається *узагальненим рядом Фур'є* за системою ортогональних функцій $g_k(t)$, а числа c_k (в загальному випадку комплексні) – *коефіцієнтами ряду Фур'є*.

Коефіцієнти c_k обчислюються за формулою

$$c_k = \frac{(x, g_k)}{\|g_k\|^2}, \quad (2.3)$$

в якій скалярний добуток (x, g_k) дорівнює:

$$(x, g_k) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{g_k(t)} dt. \quad (2.4)$$

Сукупність коефіцієнтів Фур'є $\{c_k\}$ називається *спектром процесу $x(t)$* в базисі функцій $\{g_k(t)\}$, $|c_k|$ – його *амплітудним спектром*, а добуток $c_k g_k(t)$ – *спектральною складовою* процесу $x(t)$.

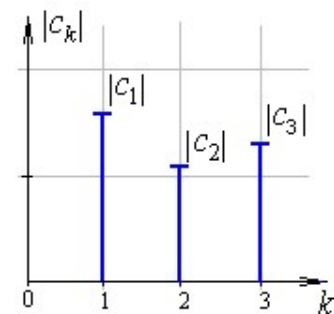


Рис. 2.1.

Амплітудний спектр процесу прийнято зображати у вигляді стовпчикової діаграми (рис. 2.1).

Таким чином, розклад (2.1) являється поданням процесу $x(t)$ у вигляді нескінченної суми спектральних складових та дозволяє порівнювати між собою різні за формою процеси $x_1(t)$ та $x_2(t)$, зіставляючи їх спектри.

2.3. Отримання ортогональних систем функцій

В розкладі (2.1) можуть використовуватись різні системи ортогональних функцій, які можливо отримати з будь-якої системи лінійно незалежних функцій з використанням математичної процедури Грамма-Шмідта [2].

Якщо $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – система лінійно незалежних функцій, тоді побудова системи $\{g_k(t)\}$, що задовольняє умові (2.2), здійснюється в наступній послідовності.

1. Вибираємо одну з лінійно незалежних функцій, відносно якої будемо будувати весь ортогональний базис. Наприклад, $g_1(t) = f_1(t)$.

2. Наступну функцію $g_2(t)$ визначаємо співвідношенням:

$$g_2(t) = f_2(t) + a_{21}g_1(t), \quad (2.5)$$

де коефіцієнт a_{21} знаходимо з умови забезпечення ортогональності функцій $g_1(t)$ та $g_2(t)$. Для цього помножимо скалярно обидві частини рівності (2.5) на функцію $g_1(t)$, тобто

$$(g_2, g_1) = (f_2, g_1) + a_{21}(g_1, g_1). \quad (2.6)$$

Вимагаємо виконання умови (2.2). Тоді в рівнянні (2.6) ліва частина дорівнює нулю і коефіцієнт a_{21} обчислюється за формулою:

$$a_{21} = -\frac{(f_2, g_1)}{\|g_1\|^2}. \quad (2.7)$$

3. Функцію $g_3(t)$ визначаємо з використанням знайдених функцій $g_1(t)$, $g_2(t)$ та функції $f_3(t)$ співвідношенням:

$$g_3(t) = f_3(t) + a_{31}g_1(t) + a_{32}g_2(t), \quad (2.8)$$

де коефіцієнти a_{31}, a_{32} знаходимо аналогічно коефіцієнту a_{21} . Скалярно помножимо ліву та праву частину рівняння (2.8) на $g_1(t)$, $g_2(t)$ відповідно:

$$\begin{aligned} (g_3, g_1) &= (f_3, g_1) + a_{31}(g_1, g_1) + a_{32}(g_2, g_1), \\ (g_3, g_2) &= (f_3, g_2) + a_{31}(g_1, g_2) + a_{32}(g_2, g_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Вимагаючи виконання умови (2.2), отримуємо з (2.9) систему рівнянь, з яких знаходимо коефіцієнти:

$$a_{31} = -\frac{(f_3, g_1)}{\|g_1\|^2}, \quad a_{32} = -\frac{(f_3, g_2)}{\|g_2\|^2}. \quad (2.10)$$

Таким чином, загальний вираз, який дозволяє знаходити ортогональні функції $g_n(t)$, $n > 1$, має вигляд

$$g_n(t) = f_n(t) + a_{n1}g_1(t) + a_{n2}g_2(t) + \dots + a_{nn-1}g_{n-1}(t), \quad (2.11)$$

де

$$a_{nk} = -\frac{(f_n, g_k)}{\|g_k\|^2}. \quad (2.12)$$

Для отримання систем функцій, ортогональних на кінцевому інтервалі $[t_1, t_2]$, часто використовують систему лінійно незалежних функцій

$$\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty} = \{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Зауваження. Для однієї і тієї ж вихідної системи лінійно незалежних функцій $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ можна отримати різні ортогональні системи функцій $\{g_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ в залежності від вибору інтервалу ортогоналізації та порядку використання функцій $f_k(t)$.

2.4. Оптимальність ряду Фур'є

У випадку, коли в формулі (2.1) сума має скінчену кількість складових, ця формула приймає вигляд

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(t) \quad (2.13)$$

та носить назву *апроксимації* процесу $x(t)$ процесом $x_n(t)$.

Узагальнений ряд Фур'є є оптимальним, що означає наступне.

Нехай в формулі (2.13) $\{g_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – задана система ортогональних функцій. Тоді формула (2.13) забезпечує найкращу апроксимацію процесу $x(t)$ відповідно критерію мінімуму середньоквадратичної похибки

$$\varepsilon^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n c_k g_k(t) \right]^2 dt = \varepsilon_{\min}^2 \quad (2.14)$$

тільки у випадку, якщо числа c_k обчислюються за формулою (2.3), тобто є коефіцієнтами ряду Фур'є.

В цьому випадку мінімальна середньоквадратична похибка апроксимації $\varepsilon_{\min}^2$ дорівнює

$$\varepsilon_{\min}^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|g_k(t)\|^2. \quad (2.15)$$

Похибка $\varepsilon_{\min}^2$ буде дорівнювати нулю у випадку співпадання енергій вихідного процесу $x(t)$ та апроксимуючого $x_n(t)$, тобто при $n \rightarrow \infty$. В усіх інших випадках енергія апроксимуючого процесу не може перевищувати енергію вихідного процесу.

Якість апроксимації процесу $x(t)$ відрізком ряду Фур'є (2.13) зручно оцінити відносною середньоквадратичною похибкою

$$\delta(n) = \frac{\varepsilon_{\min}}{\|x\|} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|g_k(t)\|^2}{\|x\|^2}}. \quad (2.16)$$

2.5. Приклади отримання ортогональних систем функцій

Використовуючи систему функцій $\{f_k(t)\}_{k=1}^3 = \{t^{k-1}\}_{k=1}^3$, необхідно отримати ортогональну на інтервалі $[-1;1]$ систему функцій.

Розглянемо два приклади отримання різних ортогональних систем функцій в залежності від упорядкування заданої системи.

Приклад 2.1. Нехай система функцій $\{f_k(t)\}_{k=1}^3$ впорядкована в порядку зростання степеня, а саме $\{f_k(t)\}_{k=1}^3 = \{1; t; t^2\}$.

1. Покладемо $g_1(t) = f_1(t) = 1$.

2. Наступну функцію $g_2(t)$ знаходимо згідно з формулою (2.5)

$$g_2(t) = f_2(t) + a_{21}g_1(t) = t + a_{21}.$$

Знайдемо коефіцієнт a_{21} з формули (2.7). Чисельник виразу (2.7) дорівнює

$$(f_2, g_1) = \int_{-1}^1 f_2(t) g_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0.$$

Оскільки знаменник $\|g_1\|^2 > 0$, то $a_{21} = 0$.

Таким чином, друга ортогональна функція дорівнює $g_2(t) = t$.

3. Функцію $g_3(t)$ знайдемо, використовуючи вираз (2.8):

$$g_3(t) = f_3(t) + a_{31}g_1(t) + a_{32}g_2(t) = t^2 + a_{31} + a_{32}t.$$

Отримаємо коефіцієнти a_{31} , a_{32} за формулою (2.10). Для цього попередньо обчислимо скалярні добутки:

$$(f_3, g_1) = \int_{-1}^1 f_3(t) g_1(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$(f_3, g_2) = \int_{-1}^1 f_3(t) g_2(t) dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0.$$

Таким чином, з двох невідомих коефіцієнтів залишилось знайти тільки a_{31} , оскільки $a_{32} = 0$.

Знайдемо квадрат норми функції $g_1(t)$:

$$\|g_1\|^2 = \int_{-1}^1 [g_1(t)]^2 dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2.$$

Підставимо знайдені значення в формулу (2.10) та отримаємо

$$a_{31} = -\frac{(f_3, g_1)}{\|g_1\|^2} = -\frac{1}{3}.$$

Функція $g_3(t)$ з урахуванням знайдених коефіцієнтів дорівнює

$$g_3(t) = t^2 + a_{31} + a_{32}t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Таким чином, в результаті ортогоналізації системи функцій $\{f_k(t)\}_{k=1}^3 = \{1; t; t^2\}$ на інтервалі $[-1; 1]$ отримали ортогональну систему:

$$g_1(t) = 1, \quad g_2(t) = t \quad \text{та} \quad g_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Приклад 2.2. Впорядкуємо задану систему функцій наступним чином:

$$\{f_k(t)\}_{k=1}^3 = \{t^2; 1; t\}.$$

1. Покладемо $g_1(t) = f_1(t) = t^2$.

2. Наступну функцію $g_2(t)$ виразимо через $f_2(t)$ за формулою (2.5):

$$g_2(t) = f_2(t) + a_{21}g_1(t) = 1 + a_{21}t^2.$$

Знайдемо коефіцієнт a_{21} , використовуючи вираз (2.7). Чисельник виразу (2.7) дорівнює

$$(f_2, g_1) = \int_{-1}^1 f_2(t)g_1(t)dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Знайдемо знаменник виразу (2.7):

$$\|g_1\|^2 = \int_{-1}^1 [g_1(t)]^2 dt = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}.$$

Коефіцієнт a_{21} в даному випадку дорівнює

$$a_{21} = -\frac{(f_2, g_1)}{\|g_1\|^2} = -\frac{5}{3}$$

Таким чином, друга ортогональна функція дорівнює $g_2(t) = 1 - \frac{5}{3}t^2$.

3. Останню функцію $g_3(t)$ знайдемо, використовуючи формулу (2.8):

$$g_3(t) = f_3(t) + a_{31}g_1(t) + a_{32}g_2(t) = t + a_{31}t^2 + a_{32}\left(1 - \frac{5}{3}t^2\right).$$

Знайдемо коефіцієнти a_{31} , a_{32} з виразу (2.10). Для цього попередньо обчислимо скалярні добутки:

$$(f_3, g_1) = \int_{-1}^1 f_3(t)g_1(t)dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0,$$

$$(f_3, g_2) = \int_{-1}^1 f_3(t)g_2(t)dt = \int_{-1}^1 t\left(1 - \frac{5}{3}t^2\right)dt = 0.$$

Таким чином, $a_{31} = a_{32} = 0$.

Функція $g_3(t)$ з урахуванням знайдених коефіцієнтів дорівнює

$$g_3(t) = t.$$

В даному випадку в результаті ортогоналізації системи функцій $\{f_k(t)\}_{k=1}^3 = \{t^2; 1; t\}$ на інтервалі $[-1; 1]$ отримали ортогональну систему: $g_1(t) = t^2$, $g_2(t) = 1 - \frac{5}{3}t^2$ и $g_3(t) = t$.

Впевнитись в ортогональності отриманої системи функцій можна перевіркою виконання умови (2.2). Зокрема, для функцій $g_k(t)$ прикладу 1.2

$$(g_1, g_2) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{3}t^2\right) dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - \frac{5}{3}t^4\right) dt = \frac{2}{3} - \frac{10}{15} = 0,$$

$$(g_1, g_3) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot t dt = 0, \quad (g_2, g_3) = \int_{-1}^1 t \cdot \left(1 - \frac{5}{3}t^2\right) dt = 0.$$

Таким чином, умова ортогональності виконується, отже, ортогоналізація проведена вірно. Аналогічно можна впевнитись в правильності отримання ортогональної системи функцій прикладу 2.1.

2.6. Приклади апроксимації процесу

Приклад 2.3. Апроксимувати процес $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ відрізком узагальненого ряду Фур'є (2.13) за системою ортогональних функцій $g_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$, отриманих в прикладі 2.2:

$$\{g_k(t)\}_{k=1}^3 = \left\{t^2, 1 - \frac{5}{3}t^2, t\right\}.$$

Записати аналітичний вираз для апроксимуючого процесу $x_n(t)$.

Розв'язок

Апроксимувати процес $x(t)$ означає представити його у вигляді (2.13).

Очевидно, що інтервал ортогональності функцій $g_k(t)$ співпадає з інтервалом, де процес $x(t) \neq 0$ (рис. 2.2), тобто функції $g_k(t)$ можуть бути використані для апроксимації заданого процесу $x(t)$.

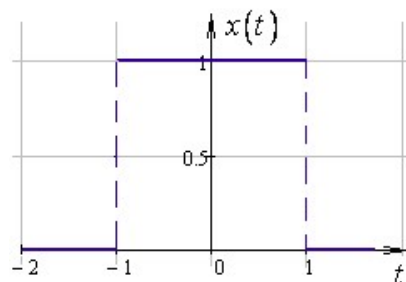


Рис. 2.2.

Обчислимо коефіцієнти c_k за формулою (2.3). Для коефіцієнта c_1 скалярний добуток дорівнює

$$(x, g_1) = \int_{-1}^1 \text{rect}(t) g_1(t) dt = \int_{-1}^1 1 \cdot t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Квадрат норми функції $g_1(t)$ був знайдений раніше в прикладі 1.2 і дорівнює

$$\|g_1\|^2 = \frac{2}{5}.$$

Таким чином, коефіцієнт c_1 дорівнює

$$c_1 = \frac{(x, g_1)}{\|g_1\|^2} = \frac{2}{3} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3}.$$

Коефіцієнти c_2 та c_3 обчислюються аналогічно c_1 та дорівнюють

$$c_2 = 1, \quad c_3 = 0.$$

Запишемо в явному вигляді вираз (2.13) з урахуванням знайдених коефіцієнтів c_k та заданих функцій $g_k(t)$

$$x_n(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + c_3 g_3(t) = \frac{2}{3} t^2 + 1 \cdot \left(1 - \frac{5}{3} t^2\right) + 0 \cdot t = 1 - t^2.$$

Приклад 2.4. Використати для апроксимації процесу

$$y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

ортогональну систему прикладу 2.3

На рис. 2.3 побудований графік заданого процесу $y(t)$.

Розв'язок

Коефіцієнти c_k обчислюються аналогічно прикладу 2.3.

В результаті обчислень отримаємо наступні значення коефіцієнтів c_k :

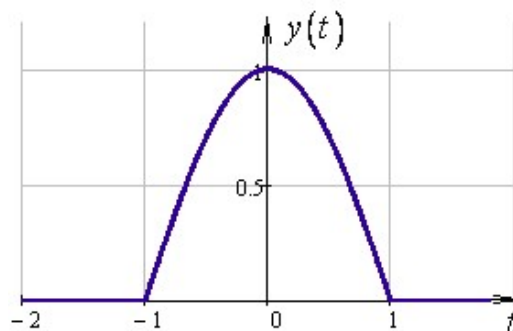


Рис. 2.3.

$$c_1 = \frac{10(\pi^2 - 8)}{\pi^3}, \quad c_2 = -\frac{3(\pi^2 - 20)}{\pi^3}, \quad c_3 = 0.$$

Таким чином, апроксимація процесу $y(t)$ виразом (2.13) має вигляд

$$y_n(t) = \frac{10(\pi^2 - 8)}{\pi^3} t^2 - \frac{8(\pi^2 - 20)}{3\pi^3} \left(1 - \frac{5}{3} t^2\right) = 0,98 - 1,03 t^2.$$

На рис. 2.4 наведені амплітудні спектри процесів $x(t)$ (а) та $y(t)$ (б).

З графіків видно, що з трьох розрахованих нами коефіцієнтів ряду основний внесок дає другий коефіцієнт.

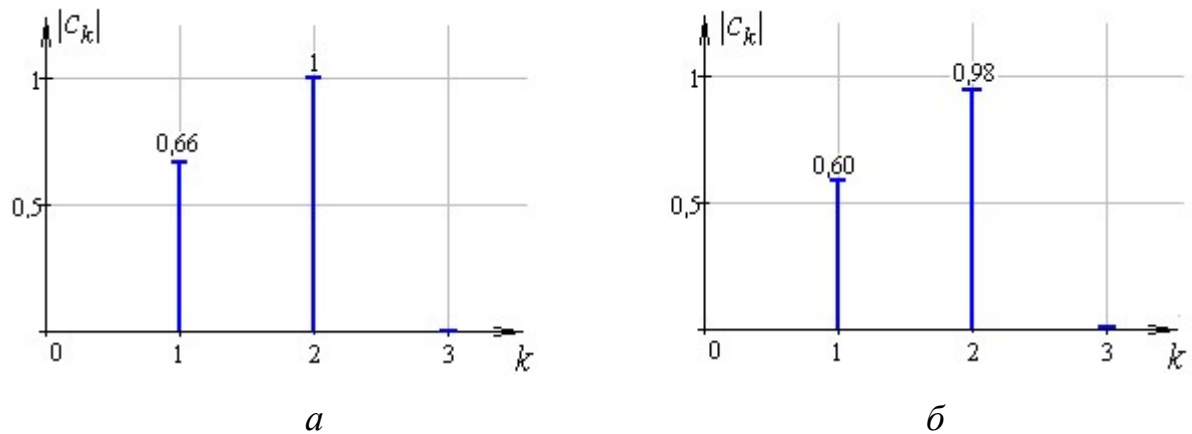


Рис. 2.4.

Приклад 2.4. Побудувати графіки апроксимуючих процесів та знайти похибки апроксимації для процесів прикладів 2.1. та 2.2.

На рис. 2.5 наведені графіки окремих спектральних складових $c_1 g_1(t)$ та $c_2 g_2(t)$ процесу $x(t)$ та апроксимуючого процесу $x_n(t)$ для $n = 1, 2$.

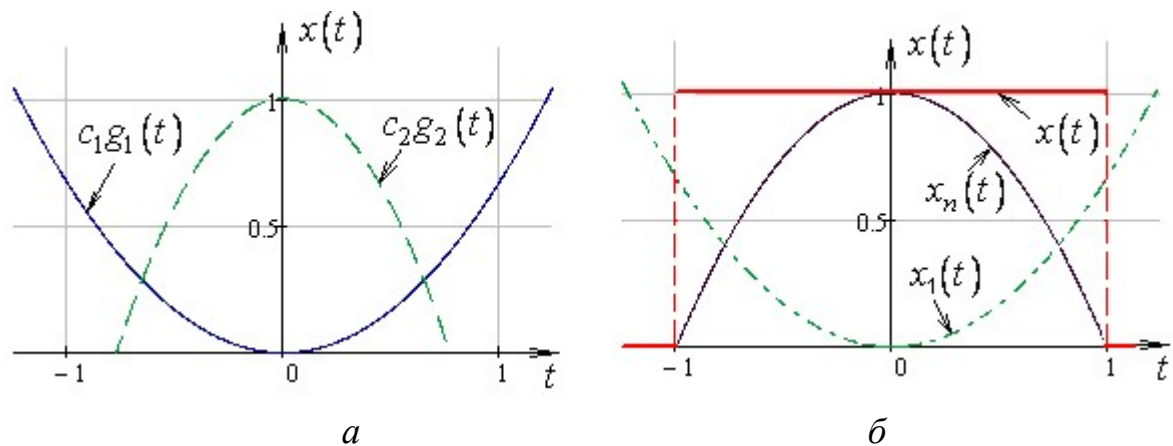


Рис. 2.5.

На рис. 2.6 наведені аналогічні графіки для процесу $y(t)$.

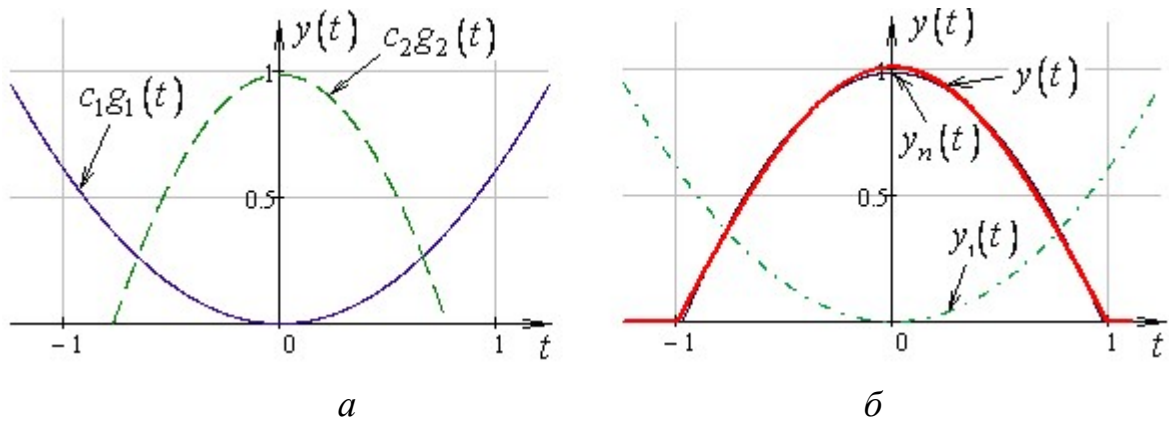


Рис. 2.6.

З рис. 2.5 видно, що заданий процес $x(t)$ та його апроксимація $x_n(t)$ суттєво відрізняються один від одного. Це свідчить про те, що трьох складових ряду Фур'є для апроксимації даного процесу недостатньо.

З рис. 2.6 видно, що при апроксимації процесу $y(t)$ функцією $y_n(t)$, вже дві складові ряду Фур'є забезпечують достатньо точну апроксимацію.

Кількісно відмінність між заданим процесом та його апроксимацією можна знайти, обчисливши відносну похибку апроксимації $\delta(n)$ за формулою (2.16). Для представлення похибки у відсотках перепишемо вираз (2.16), враховуючи, що процеси, які розглядаються, та відповідні коефіцієнти Фур'є являються дійсними:

$$\delta(n) = \frac{\varepsilon_{\min}}{\|x\|} 100 \% = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=1}^n c_k^2 \|g_k(t)\|^2}{\|x\|^2}} 100 \%. \quad (2.17)$$

Обчислимо відносні похибки апроксимації (2.17) для процесу $x(t)$.

Енергія процесу $x(t)$ дорівнює

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^1 [x(t)]^2 dt = \int_{-1}^1 [\text{rect}(t)]^2 dt = \int_{-1}^1 dt = 2.$$

Знаходимо відносні похибки апроксимації при різній кількості складових ряду Фур'є.

При $n = 1$

$$\delta(1) = \sqrt{1 - \frac{c_1^2 \|g_1(t)\|^2}{\|x\|^2}} 100 \% = \sqrt{1 - \frac{4}{45}} 100 \% = 95,5 \ \%.$$

При $n = 2$

$$\delta(2) = \sqrt{1 - \frac{c_1^2 \|g_1(t)\|^2 + c_2^2 \|g_2(t)\|^2}{\|x\|^2}} 100 \% = \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{45} + \frac{8}{9}}{2}} 100 \% = 68,3 \ \%.$$

При $n = 3$

$$\delta(3) = \delta(2) = 68,3 \ \%.$$

Результати обчислень зведемо в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

n	1	2	3
$\delta(n), \%$	95,5	68,3	68,3

Аналіз табл. 2.1 показує, що при збільшенні кількості складових узагальненого ряду Фур'є похибка апроксимації зменшується. Однак для апроксимації прямокутного відеоімпульсу $x(t)$ трьох складових ряду недостатньо (в інженерній практиці похибка апроксимації не повинна перевищувати 10 %).

Велику похибку апроксимації процесу $x(t)$ можна пояснити не тільки малою кількістю складових, але й тим, що задана функція має точки розриву, а функції $g_k(t)$ являються неперервними.

Для зменшення похибки апроксимації необхідно або враховувати більшу кількість складових ряду Фур'є, або використовувати інший ортогональний базис.

Неважко перевірити, що для прямокутного відеоімпульсу більш підходить ортогональна система, що отримана в прикладі 2.1. При її використанні $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, тобто апроксимація здійснюється без похибки.

Аналогічно визначимо відносні похибки апроксимації процесу $y(t)$ та зведемо результати в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

n	1	2	3
$\delta(n), \%$	92,4	2,4	2,4

З отриманих результатів видно, що з інженерної точки зору для апроксимації процесу $y(t)$ достатньо трьох складових.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Як визначається енергія процесу?
2. Як визначаються лінійно незалежні функції?
3. Як визначаються ортогональні функції?
4. Як визначається ортогональний базис?
5. Яка система ортогональних функцій називається повною?
6. Сформулювати критерій повноти системи базисних функцій.
7. Записати формулу узагальненого ряду Фур'є.
8. Як обчислюються коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є?
9. Що таке спектр процесу? Його амплітудний спектр? Спектральні складові?
10. В чому полягає оптимальність ряду Фур'є?
11. Чому дорівнює мінімальна похибка апроксимації при скінченній кількості складових в ряді Фур'є?
12. Як пов'язана енергія процесу з коефіцієнтами узагальненого ряду Фур'є?
13. Записати формулу для знаходження середньоквадратичної похибки апроксимації відрізком ряду Фур'є.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. ДСТУ 3008-2015. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. [Чинний від 01.07.2017]. Вид. офіц. Київ : Держстандарт України, 2015. 26 с.
2. Волощук Ю. І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 1. Харків : «Компанія СМІТ», 2003. 580 с.
3. Манздій Б. А., Желяк Р. І. Основи теорії сигналів. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019. 240 с.
4. Dwight, H. B. Tables of Integrals and other Mathematical Data. New York : The Macmillan Company, 1961. 336 p.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навчальний посібник для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закладів. Київ : А.С.К., 2005. 648 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А. Титульний аркуш пояснювальної записки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет електроніки

Кафедра акустичних та мультимедійних електронних систем

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з освітньої компоненти _____
(назва освітньої компоненти)

на тему: _____

Виконав:

студент ____-го курсу гр. ____

(ініціали, прізвище студента)

Перевірив:

(ініціали, прізвище керівника)

Пункти завдання	Виконання						Захист	Всього
	3	4	5	6	7	Σ		
Бали								

Київ – 20 ____

ДОДАТОК Б. Приклад виконання розрахункової частини

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Отримання системи базисних функцій $g_k(t)$

Постановка задачі

Отримати систему базисних функцій $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$, ортогоналізуючи систему функцій $f_k(t) = \left\{ t^{k-1} \right\}_{k=1}^4$ на інтервалі ортогональності функцій $[t_1; t_2] = [0; 2]$.

Розв'язок

Загальна формула для знаходження базисних функцій має наступний вигляд:

$$g_k(t) = f_k(t) + a_{k1}g_1(t) + a_{k2}g_2(t) + \dots + a_{kk-1}g_{k-1}(t), \quad (1.1)$$

$$a_{nk} = -\frac{(f_n, g_k)}{\|g_k\|^2}. \quad (1.2)$$

1.1. Оберемо

$$\underline{g_1(t) = f_1(t) = 1.} \quad (1.3)$$

2.1. Знайдемо функцію $g_2(t)$ за виразом

$$g_2(t) = f_2(t) + a_{21}g_1(t). \quad (1.4)$$

$$(f_2, g_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) \overline{g_1(t)} dt = \int_0^2 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = 2$$

$$\|g_1\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |g_1|^2 dt = \int_0^2 dt = t \Big|_0^2 = 2, \quad a_{21} = -\frac{(f_2, g_1)}{\|g_1\|^2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Отже $\underline{g_2(t) = t - 1.}$

3.1. Знайдемо $g_3(t) = f_3(t) + a_{31}g_1(t) + a_{32}g_2(t)$

$$(f_3, g_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_3(t) \overline{g_1(t)} dt = \int_0^2 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}, \quad a_{31} = -\frac{(f_3, g_1)}{\|g_1\|^2} = -\frac{8}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$$

$$(f_3, g_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_3(t) \overline{g_2(t)} dt = \int_0^2 t^2 (t-1) dt = \left. \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\|g_2\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |g_2|^2 dt = \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{(t-1)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad a_{32} = -\frac{(f_3, g_2)}{\|g_2\|^2} = -\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3} = -2$$

Отже
$$g_3(t) = t^2 - \frac{4}{3} - 2(t-1) = t^2 - 2t + \frac{2}{3}.$$

4.1. Знайдемо

$$g_4(t) = f_4(t) + a_{41}g_1(t) + a_{42}g_2(t) + a_{43}g_3(t) \quad (1.5)$$

$$(f_4, g_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_4(t) \overline{g_1(t)} dt = \int_0^2 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 = 4, \quad a_{41} = -\frac{(f_4, g_1)}{\|g_1\|^2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$(f_4, g_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_4(t) \overline{g_2(t)} dt = \int_0^2 t^3(t-1) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} - \frac{20}{5} = \frac{12}{5}$$

$$a_{42} = -\frac{(f_4, g_2)}{\|g_2\|^2} = -\frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 2} = -\frac{18}{5}$$

$$(f_4, g_3) = \int_{t_1}^{t_2} f_4(t) \overline{g_3(t)} dt = \int_0^2 t^3 \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{15}$$

$$\|g_3\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |g_3|^2 dt = \int_0^2 \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right)^2 dt = \frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{16t^3}{9} - \frac{4t^2}{3} + \frac{4t}{9} \Big|_0^2 = \frac{8}{45}$$

$$a_{43} = -\frac{(f_4, g_3)}{\|g_3\|^2} = -\frac{8 \cdot 45}{15 \cdot 8} = -3$$

Отже
$$g_4(t) = t^3 - 2 - \frac{18}{5}(t-1) - 3 \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) = t^3 - 3t^2 + \frac{12}{5}t - \frac{2}{5}.$$

Відповідь:

$g_1(t) = 1,$	$g_2(t) = t - 1,$
$g_3(t) = t^2 - 2t + \frac{2}{3},$	$g_4(t) = t^3 - 3t^2 + \frac{12}{5}t - \frac{2}{5}.$

2. Обчислення коефіцієнтів c_k

Постановка задачі

Обчислити коефіцієнти c_k , $k = \overline{1, 4}$, ортогонального подання заданого процесу $x(t)$, $t \in [t_1; t_2]$:

$$x(t) = 2t \cdot E(t)E(1-t) + 2(2-t) \cdot E(t-1)E(2-t), \quad [t_1; t_2] = [0; 2],$$

по системі базисних функцій $g_k(t)$, отриманих в п. 1. Побудувати амплітудний спектр процесу $x(t)$. Записати формулу апроксимуючого процесу $x_n(t)$.

Розв'язок

Загальна формула для знаходження коефіцієнтів:

$$c_k = \frac{(x, g_k)}{\|g_k\|^2}. \quad (2.1)$$

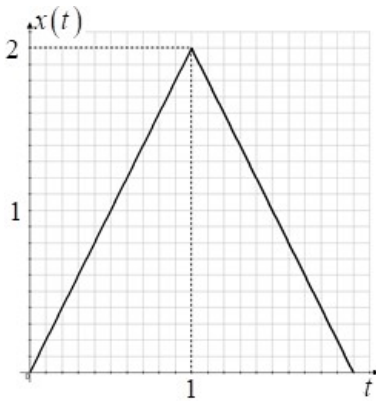


Рис. 2.1.

Наведемо епюр функції (рис. 2.1):

$$x(t) = 2t \cdot E(t)E(1-t) + 2(2-t) \cdot E(t-1)E(2-t).$$

Враховуючи, що функція $E(t)E(1-t) \neq 0$ тільки на інтервалі $t \in [0; 1]$, а $E(t-1)E(2-t) \neq 0$ на інтервалі $t \in [1; 2]$, можемо не нульове значення функції представити двома проміжками $t \in [0; 1]$ та $t \in [1; 2]$.

Знайдемо коефіцієнти c_k по системі базисних функцій $g_k(t)$.

2.1. Знайдемо коефіцієнт c_1 :

$$c_1 = \frac{(x, g_1)}{\|g_1\|^2} \quad (2.2)$$

$$(x, g_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{g_1(t)} dt = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2(2-t) dt = t^2 \Big|_0^1 + 4t - t^2 \Big|_1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\underline{c_1 = \frac{2}{2} = 1.}$$

2.2. Знайдемо коефіцієнт c_2 :

$$c_2 = \frac{(x, g_2)}{\|g_2\|^2} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (x, g_2) &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{g_2(t)} dt = \int_0^1 2t(t-1) dt + \int_1^2 2(2-t)(t-1) dt = \\ &= \frac{2t^3}{3} - t^2 \Big|_0^1 - \frac{2t^3}{3} + 3t^2 - 4t \Big|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0, \quad \underline{c_2 = 0.} \end{aligned}$$

2.3. Знайдемо коефіцієнт c_3 :

$$c_3 = \frac{(x, g_3)}{\|g_3\|^2} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (x, g_3) &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{g_3(t)} dt = \int_0^1 2t \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) dt + \int_1^2 2(2-t) \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) dt = \\ &= \left. \frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} + \frac{2t^2}{3} \right|_0^1 - \left. \frac{t^4}{2} + \frac{8t^3}{3} - \frac{14t^2}{3} + \frac{8t}{3} \right|_1^2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}, \quad \underline{c_3 = -\frac{45}{3 \cdot 8} = -\frac{15}{8}} \end{aligned}$$

2.4. Знайдемо коефіцієнт c_4 :

$$c_4 = \frac{(x, g_4)}{\|g_4\|^2} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (x, g_4) &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{g_4(t)} dt = \int_0^1 2t \left(t^3 - 3t^2 + \frac{12}{5}t - \frac{2}{5} \right) dt + \int_1^2 2(2-t) \left(t^3 - 3t^2 + \frac{12}{5}t - \frac{2}{5} \right) dt = \\ &= \left. \frac{2t^5}{5} - \frac{3t^4}{2} + \frac{8t^3}{5} - \frac{2t^2}{5} \right|_0^1 - \left. \frac{2t^5}{5} + \frac{5t^4}{2} - \frac{28t^3}{5} + \frac{26t^2}{5} - \frac{8t}{5} \right|_1^2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0, \end{aligned}$$

$$\underline{c_4 = 0.}$$

2.5. Запишемо модель апроксимованого процесу x_n для $n = \overline{1, 4}$:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(t), \quad (2.6)$$

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = 1 - \frac{15}{8} \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) = -\frac{15}{8} t^2 + \frac{15}{4} t - \frac{1}{4}.$$

Побудуємо амплітудний спектр процесу $x(t)$ в ортогональному базисі функцій $\{g_k(t)\}$:

Таблиця 2.1. Амплітудний спектр процесу $x(t)$

k	1	2	3	4
$ c_k $	1	0	1,875	0

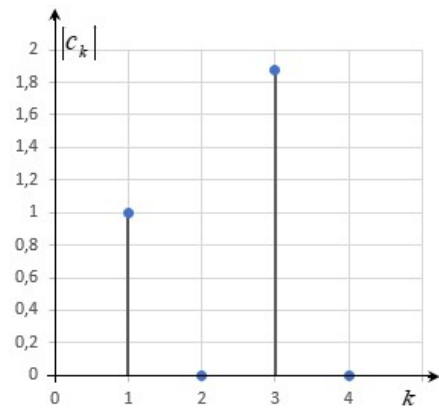


Рис. 2.2.

3. Графіки окремих спектральних складових ряду Фур'є і апроксимованого процесу

Постановка задачі

Побудувати графіки окремих спектральних складових ряду Фур'є. Апроксимувати процес $x(t)$, зобразивши на окремих графіках сам процес $x(t)$ і його апроксимації процесом $x_n(t)$ для $n = \overline{1,4}$.

Розв'язок

3.1. Побудуємо графіки окремих спектральних складових. Коефіцієнти c_k для $k = 2, 4$ дорівнюють нулю тому побудувати графіки складових для них не має сенсу. На рисунках наведені графіки для $k = 1, 3$.

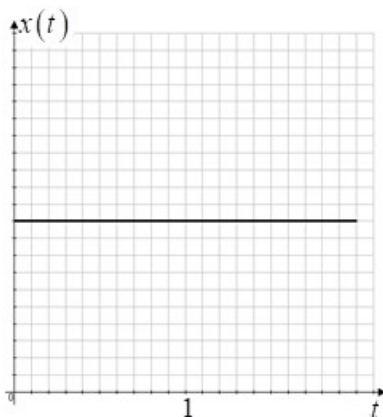


Рис. 3.1. $k = 1$

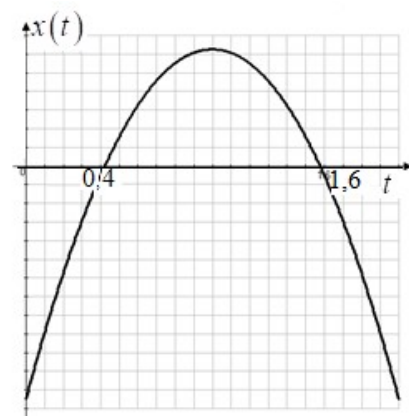


Рис. 3.2. $k = 3$

3.2. Побудувати графіки апроксимації процесу $x(t)$ процесом $x_n(t)$ для $n = \overline{1,4}$. Оскільки графіки для $n = 1, 2$ и $n = 3, 4$ будуть мати однаковий вигляд, наведемо тільки два

графіка апроксимації даного процесу $x(t)$. Процес $x(t)$ зображено суцільною лінією, а апроксимований процес $x_n(t)$ – пунктирною.

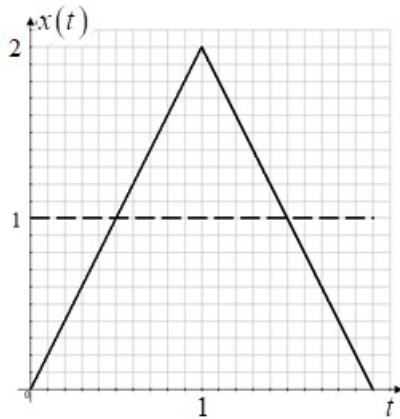


Рис. 3.3. $n = 1, 2$

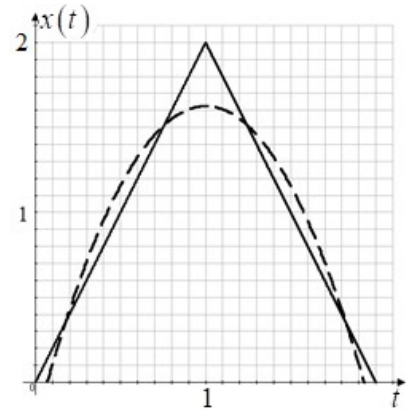


Рис. 3.4. $n = 3, 4$

4. Відносні похибки апроксимації

Постановка задачі

Розрахувати відносні похибки апроксимації $\delta(n)$ для $n = \overline{1, 4}$. Отримані результати звести в таблицю.

Розв'язок

Загальна формула для розрахунку похибок апроксимації:

$$\delta(n) = \frac{\varepsilon_{\min}}{\|x\|} \cdot 100\% = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=1}^n c_k^2 \|g_k(t)\|^2}{\|x\|^2}} \cdot 100\% \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \int_{t_1}^{t_2} |x|^2 dt = \int_0^2 (2t \cdot E(t) E(1-t) + 2(2-t) \cdot E(t-1) E(2-t))^2 dt = \\ &= \int_0^2 \left([2t \cdot E(t) E(1-t)]^2 + 8t(2-t) \cdot E(t) E(1-t) E(t-1) E(2-t) + \right. \\ &\quad \left. + [2(2-t) \cdot E(t-1) E(2-t)]^2 \right) dt = \int_0^1 4t^2 dt + \int_1^2 4(2-t)^2 dt = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$4.1. \quad n = 1, 2: \quad \delta(1) = \delta(2) = \sqrt{1 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{8}} \cdot 100\% = 50\%$$

$$4.2. \quad n = 3, 4:$$

$$\delta(3) = \delta(4) = \sqrt{1 - \frac{3 \left(1 \cdot 2 + \frac{15^2 \cdot 8}{8^2 \cdot 45} \right)}{8}} \cdot 100 \% = \sqrt{1 - \frac{3 \cdot 21}{8 \cdot 8}} \cdot 100 \% = 12,5\%.$$

Таблиця 4.1. Відносні похибки апроксимації $\delta(n)$

n	1	2	3	4
$\delta(n), \%$	50	50	12,5	12,5

Висновки

Під час виконання розрахунково-графічної роботи була виконана апроксимація процесу $x(t)$. Отримано систему базисних функцій $g_k(t)$:

$$g_1(t)=1; \quad g_2(t)=t-1; \quad g_3(t)=t^2-2t+\frac{2}{3}; \quad g_4(t)=t^3-3t^2+\frac{12}{5}t-\frac{2}{5}.$$

Розраховані коефіцієнти c_k , для ортогонального розкладення заданого процесу $x(t)$:

$$c_1=1 \quad c_2=0 \quad c_3=-\frac{15}{8} \quad c_4=0.$$

На рис. 3.1 і 3.2 наведені графіки окремих спектральних складових ряду Фур'є. На рис. 3.3 і рис. 3.4 наведені графіки апроксимованого процесу з різною кількістю складових і заданого процесу $x(t)$. Аналіз даних графіків і похибок, отриманих в п. 4 (табл. 4.1), свідчить про те, що при збільшенні кількості складових ряду Фур'є апроксимований процес більше наближається до вихідного процесу, а похибка апроксимації зменшується з величини 50 % до 12,5 %. Тим не менш, видно, що чотирьох складових ряду Фур'є недостатньо для апроксимації даного процесу $x(t)$, оскільки похибка апроксимації перевищує допустимі для цього 10 %. Для зменшення похибки апроксимації необхідно використовувати інший набір базисних функцій, або їх більшу кількість, що призведе до кращого наближення апроксимації на даному відрізку до вихідного процесу.