ПРО КОРЕКТНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДІРІХЛЕ ТА УМОВАМИ ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ У ДВОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ

І.Я. САВКА, М.А. МИТРОФАНОВ

Актуальними є задачі теплопровідності в неоднорідних середовищах із різними фізичними властивостями [1, 2], у яких фізичний стан на зовнішніх межах змінюються з певною періодичністю [3]. Крім того, на межах розділу між областями накладаються умови спряження, що відображають фізичну узгодженість процесів теплопередачі в системі.

У даній роботі досліджується коректність двошарової задачі з крайовими умовами Діріхле та умовами лінійного спряження, праві частини яких задаються 2π-періодичними функціями за часом. Початкові умови не задаються.

Нехай $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathcal{D} = (x_0, x_2)$ — інтервал дійсної прямої $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 = (x_0, x_1)$, $\mathcal{D}_2 = (x_1, x_2)$, $u_j = u_j(x,t)$, $j = 1, 2$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва всіх тригонометричних рядів $\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k e^{ikt}$ із скінченною нормою $\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(1+|k|\big)^{2q} |\varphi_k|^2}$; $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x) e^{ikt}$, $u_k(x) \in \mathbf{C}^n(\mathcal{D})$, таких, що для кожного фіксованого $x \in \mathcal{D}$ функції $\partial^j u/\partial x^j \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(j)}(x) e^{ikt}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, належать до простору $\mathbf{H}_{q-j/2}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $\mathcal{D}$; норму в просторі $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою $\|u; \mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{x\in\mathcal{D}} \|\partial^j u(x,\cdot)/\partial x^j; \mathbf{H}_{q-j/2}\|$.

В області $\mathcal{D} \times \Omega$ для $u = (u_1, u_2)$ розглядається задача

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \mathcal{D}_j \times \Omega, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$u_1\big|_{x=x_0} = g_1(t), \quad u_2\big|_{x=x_2} = g_2(t), \quad t \in \Omega, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \lim_{x\to x_{1-}} h_1 u_1 - \lim_{x\to x_{1+}} h_2 u_2 = g_3(t), \\ \lim_{x\to x_{1-}} \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lim_{x\to x_{1+}} \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = g_4(t), \quad t \in \Omega, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}_+$, g_1, g_2, g_3, g_4 — задані періодичні функції із простору Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$ — довільне фіксоване.

Умови спряження (3) узагальнюють класичні умови неперервності, вводячи лінійний зв'язок між температурами з обох боків межі через коефіцієнти h_1 та h_2. Таке узагальнення дає змогу врахувати тепловий опір або наявність контактного шару між двома середовищами.

Умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі тісно пов'язані з властивостями визначника $\Delta(k)$ для цілих значень k, де

$$\Delta(0) = h_1\kappa_2(x_1 - x_0) + h_2\kappa_1(x_2 - x_1),$$

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} e^{\beta_{1k}x_0} & e^{-\beta_{1k}x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_{2k}x_2} & e^{-\beta_{2k}x_2} \\ h_1 e^{\beta_{1k}x_1} & h_1 e^{-\beta_{1k}x_1} & -h_2 e^{\beta_{2k}x_1} & -h_2 e^{-\beta_{2k}x_1} \\ \kappa_1\beta_{1k}e^{\beta_{1k}x_1} & -\kappa_1\beta_{1k}e^{-\beta_{1k}x_1} & -\kappa_2\beta_{2k}e^{\beta_{2k}x_1} & \kappa_2\beta_{2k}e^{-\beta_{2k}x_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\alpha_j}\beta_{jk}(b_1 + b_2)e^{\Lambda_k}\left(1 + \tfrac{b_1-b_2}{b_1+b_2}e^{2\beta_{1k}(x_0-x_1)} - \tfrac{b_1-b_2}{b_1+b_2}e^{2\beta_{2k}(x_1-x_2)} - e^{-2\Lambda_k}\right),$$

де

$$\Lambda_k = \beta_{1k}(x_1 - x_0) + \beta_{2k}(x_2 - x_1),$$

$$\beta_{jk} = \sqrt{\tfrac{|k|}{2\alpha_j}}\,(1 + \operatorname{sgn}(k)i)\,, \quad k \neq 0,\ j = 1, 2,$$

$$b_1 = \tfrac{\kappa_1 h_2}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad b_2 = \tfrac{\kappa_2 h_1}{\sqrt{\alpha_2}}.$$

Показано, що визначник $\Delta(k)$ не дорівнює нулю для всіх цілих чисел k, і для достатньо великих значень $|k|$ задовольняє оцінку знизу вигляду $|\Delta(k)| \geqslant c_0|k|^{1/2}e^{\mathrm{Re}\Lambda_k} > 0$ із деякою сталою $c_0 > 0$. Цей результат використано для доведення наступної теореми про існування єдиного розв'язку.

Теорема 1. *Якщо* $g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{H}_q$, $g_4 \in \mathbf{H}_{q-1/2}$, $q \in \mathbb{R}$, *то в просторі* $\mathbf{C}^2(\mathcal{D}_1; \mathbf{H}_q) \times \mathbf{C}^2(\mathcal{D}_2; \mathbf{H}_q)$ *існує єдиний розв'язок* $u = (u_1, u_2)$ *задачі* (1)–(3), *компоненти якого* u_1 *і* u_2 *неперервно залежать від функцій* g_s, $s = 1, .., 4$.

Література

[1] Hahn D. W., Ozisik M. N. *Heat Conduction.* — New York: Wiley, 2012.

[2] Chiba R. *An analytical solution for transient heat conduction in a composite slab with time-dependent heat transfer coefficient* // Math. Probl. Eng. — 2018. — Article ID 4707860.

[3] Lu X., Lu T., Viljanen M. *A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings* // Applied Thermal Engineering. — 2006. — V. 26 (11). — pp. 1901–1909.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: ivan.savka@cnu.edu.ua

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: mishmit123@gmail.com