

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО»**

Фізико – математичний факультет

Кафедра загальної фізики та моделювання фізичних процесів

«На правах рукопису» УДК 534.1

ДО ЗАХИСТУ ДОПУЩЕНО

Завідувач кафедри

Дарія САВЧЕНКО

«__» _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою «комп'ютерне
моделювання фізичних процесів» зі спеціальності 104
«фізика та астрономія»**

**на тему: «Аналітичне та чисельне дослідження мікроелектромеханічної системи
(МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні
за довільних крайових умов»**

Виконав:

студент 2 курсу, групи ОФ-31мп

Швачко Єгор Олександрович

Науковий керівник:

д. ф.-м. н., професор, зав. каф. загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Решетняк Сергій Олександрович



Консультант з розділу «Чисельне дослідження вимушених гармонічних
осесиметричних коливань кругової мембрани із пружно закріпленим краєм»

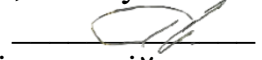
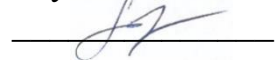
Пр. наук. сп. ІМАГ НАН України та МОН України, д. ф.-м. н., ст. наук. сп.

Герасимчук Ігор Вікторович

Рецензент:

завідувач відділу ІМАГ НАН України та МОН України, д. ф.-м. н., ст. наук. сп.,

Голуб Володимир Олегович



Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студент 

Київ – 2024 року

АНОТАЦІЯ
ДО МАГІСТЕРСЬОЇ ДИСЕРТАЦІЇ
СТУДЕНТА ФМФ, другого (магістерського) рівня вищої освіти, гр. ОФ-31мп
Швачко Єгора Олександровича
(ПІБ)

На тему Аналітичне та чисельне дослідження мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні за довільних крайових умов

Науковий керівник Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, Решетняк Сергій Олександрович

Актуальність Технології збудження власних і резонансних частот коливань мембран, прямокутної, круглої і, взагалі, довільної форми (найпростіші форми з огляду на управління параметрами та технології виробництва), визначають габаритні розміри рухомих елементів МЕМС і задають робочий діапазон частот цих пристроїв. З розвитком нових матеріалів і технологій виробництва, таких як 3D-друк та наноматеріали, з'являються нові можливості для проектування та вдосконалення МЕМС, що підвищує їхню продуктивність і знижує енергоспоживання. Врахування цих аспектів є важливим для подальшого розвитку галузі, оскільки інтеграція нових технологій дозволяє вирішувати складні завдання з вищою ефективністю та точністю

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами кафедри робота виконана в рамках тематики наукової школи «Фізика твердого тіла та магнітних явищ» КЗФ та КЗФ та МФП

Об'єкт дослідження двовимірне хвильове рівняння в полярній системі координат, що описує пружні коливання круглої мембрани

Предмет дослідження вимушені гармонічні осесиметричні коливання мембрани із пружно закріпленим краєм

Мета роботи аналітичний та чисельний аналіз динамічних властивостей круглої мембрани з пружним кріпленням, що дозволяє розширити існуючі знання про коливальні процеси в МЕМС

Методи дослідження аналітичний, чисельний (метод кінцевих різниць)

Відомості про обсяг звіту, кількість ілюстрацій, таблиць, додатків і літературних найменувань за переліком використаних обсяг звіту – 92 сторінок,

кількість ілюстрацій – 18, кількість додатків – 2, кількість літературних найменувань за переліком – 53

Мета індивідуального завдання, використані методи та отримані результати отримано аналітичний розв’язок і наведено чисельні результати. Аналітичний розв’язок виступає засобом верифікації чисельної схеми, підтверджуючи її точність. У свою чергу, чисельний метод забезпечує можливість розв’язання задач зі складнішими початковими або граничними умовами, що недоступно для аналітичного підходу. Обидва підходи показують осесиметричну поведінку, характерну для задач із радіальною симетрією

Висновок Отримані результати для простої моделі вимушених коливань круглої мембрани з пружним закріпленням по периметру та його графічна інтерпретація можуть бути корисними для розробників МЕМС при проектуванні МЕМС-пристроїв. Виявлення основних та вищих резонансних частот мембрани є важливим для її інтеграції в акустичні випромінювачі, сенсори та інші МЕМС-пристрої, де критично важливо точно контролювати динамічні параметри. Результати показали, що зростання частоти викликає зниження амплітуди коливань, що вказує на ефект частотного демпфування. Це відкриває можливість створення нових пристроїв із оптимізованим частотним демпфуванням для застосувань, де мембрани слугують не лише випромінювачами звуку, але й елементами амортизації або демпфування

Перелік ключових слів (не більше 20) вимушені гармонічні коливання, кругла мембрана, пружне кріплення, мікроелектромеханічні системи

Підпис керівника _____



SUMMARY
TO THE REPORT TO SCIENTIFIC AND RESEARCHING PRACTICE
STUDENT OF FMF, 2 COURSE OF THE MASTER LEVEL, GR. OF-31mp

Egor Shvachko
(FULL NAME)

On the topic Analytical and numerical investigation of a microelectromechanical system (MEMS) based on a model of axisymmetric vibrations of a circular elastic surface under arbitrary boundary conditions

Scientific supervisor Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of general physics at Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Serhii Oleksandrovykh Reshetnyak

Topicality Technologies for exciting natural and resonant frequencies of membrane vibrations—whether rectangular, circular, or of arbitrary shape (with simpler shapes being preferable for parameter control and manufacturing technologies)—determine the dimensions of MEMS moving elements and set the operating frequency range of these devices. The development of new materials and manufacturing technologies, such as 3D printing and nanomaterials, opens up new opportunities for designing and improving MEMS, enhancing their performance and reducing energy consumption. Considering these aspects is essential for advancing the field, as integrating new technologies allows solving complex tasks with greater efficiency and precision

Relationship of work with scientific programs, plans, themes cathedra The work is carried out within the framework of the scientific school "Physics of Solid State and Magnetic Phenomena" and the department's related themes

Object of research A two-dimensional wave equation in a polar coordinate system describing elastic vibrations of a circular membrane

Subject of research Forced harmonic axisymmetric vibrations of a membrane with elastic edge support

Purpose of work To perform an analytical and numerical analysis of the dynamic properties of a circular membrane with elastic edge support, thereby expanding the existing knowledge of vibration processes in MEMS

Research methods Analytical and numerical methods (finite difference method)

Information about the volume of the report, the number of illustrations, tables, applications and literary names in the list of used ones Volume - 92 pages, illustrations – 18, applications – 2, references – 53 sources

The purpose of the individual task, the methods used and the results obtained An analytical solution was derived, and numerical results were presented. The analytical solution serves as a tool for verifying the numerical scheme, confirming its accuracy. Conversely, the numerical method allows solving problems with more complex initial or boundary conditions, which are inaccessible to the analytical approach. Both approaches demonstrate the axisymmetric behavior characteristic of problems with radial symmetry

Conclusion The results obtained for a simple model of forced vibrations of a circular membrane with elastic edge support and their graphical interpretation can be useful for MEMS developers in designing MEMS devices. Identifying fundamental and higher resonance frequencies of the membrane is crucial for its integration into acoustic emitters, sensors, and other MEMS devices, where precise control of dynamic parameters is critical. The results showed that increasing frequency leads to a decrease in vibration amplitude, indicating a frequency damping effect. This opens up opportunities to create new devices with optimized frequency damping for applications where membranes serve not only as sound emitters but also as damping or cushioning elements

Keyword list (no more than 20) Forced harmonic vibrations, circular membrane, elastic support, microelectromechanical systems

Signature of the head



**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Факультет/ННІ фізико – математичний
(повна назва)

Кафедра загальної фізики та моделювання фізичних процесів
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність, спеціалізація 104 фізика та астрономія
(код і назва)

Освітньо-професійна програма комп'ютерне моделювання фізичних процесів

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
Дарія САВЧЕНКО
«__» _____ 20__ р.

**ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію
студенту**

Швачко Єгору Олександровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації Аналітичне та чисельне дослідження мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні за довільних крайових умов

науковий керівник дисертації Решетняк Сергій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «06» листопада 2024 р. №4981-с

2. Строк подання студентом дисертації «04» грудня 2024 р.

3. Об'єкт дослідження двовимірне хвильове рівняння в полярній системі координат, що описує пружні коливання круглої мембрани

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за ОПП/ОНП)
вимушені гармонічні осесиметричні коливання мембрани із пружно закріпленим краєм

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) Опрацювати літературу та сформулювати модель осесиметричних коливань круглої пружної поверхні.
 - 2) Провести пошук аналітичних методів розв’язання сформульованої задачі.
 - 3) Знайти аналітичний розв’язок поставленої задачі.
 - 4) Побудувати графічну інтерпретацію аналітичного розв’язку в Maple 2017.
 - 5) Провести аналіз чисельних методів розв’язання сформульованої задачі.
 - 6) Знайти чисельний розв’язок поставленої задачі.
 - 7) Розробити програмний код на мові програмування Python для графічної інтерпретації чисельного розв’язку та амплітудно-частотної характеристики.
 - 8) Порівняти результати аналітичного та чисельного розв’язку.
-

6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: типи мікросистем на основі МЕМС – 2, графік кривої $\mu_n I_1(\mu_n) - h R I_0(\mu_n) - 1$, графічна інтерпретація аналітичного розв’язку – 7, графічна інтерпретація чисельного розв’язку – 7, графік амплітудно-частотної характеристики – 1

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1) Є.О. Швачко, В.С. Герасимчук, Вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм, Матеріали XX всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики” (15 червня 2022, Київ, Україна), с. 95-98.

2) Є.О. Швачко, С.О. Решетняк, Вивчення властивостей мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні, Матеріали XLV International scientific and practical conference “Key Aspects of the Development of Scientific Research in Modern Conditions” (October 30 - November 1, 2024) Constanta, Romania. International Scientific Unity, 2024. 162-167 p.

8. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта (Консультантом не може бути зазначено наукового керівника)	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Чисельне дослідження вимушених гармонічних осесиметричних коливань кругової мембрани із пружно закріпленим краєм	Герасимчук І.В., провідний науковий співробітник ІМАГ НАН України та МОН України, доктор фізик- математичних наук, старший науковий співробітник	02.09.2024 	26.10.2024 

9. Дата видачі завдання 02.09.2024

Календарний план

№ з/	Назва етапів виконання	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Опрацювання літератури та сформування моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні	02.09.2024- 15.09.2024	Виконано
2	Пошук аналітичних методів розв'язання сформульованої задач	16.09.2024- 22.09.2024	Виконано
3	Знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі	23.09.2024- 06.10.2024	Виконано
4	Побудова графічної інтерпретації аналітичного розв'язку в Maple 2017	07.10.2024- 13.10.2024	Виконано
5	Аналіз чисельних методів розв'язання сформульованої задачі	14.10.2024- 20.10.2024	Виконано
6	Знаходження чисельного розв'язку поставленої задачі	21.10.2024- 03.11.2024	Виконано
7	Написання програмного коду на мові програмування Python для графічної інтерпретації чисельного розв'язку та амплітудно-частотної характеристики	04.11.2024- 15.11.2024	Виконано
8	Порівняння результатів аналітичного та чисельного розв'язку	16.11.2024- 22.11.2024	Виконано
9	Оформлення магістерської дисертації	23.11.2024- 10.12.2024	Виконано

Студент _____ Єгор ШВАЧКО


(підпис)

Науковий керівник дисертації _____ Сергій РЕШЕТНЯК


(підпис)

РЕФЕРАТ

Аналітичне та чисельне дослідження мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні за довільних крайових умов

Структура роботи: робота містить 92 сторінок і 18 рисунків. Список використаних джерел містить 53 найменування.

Актуальність: технології збудження власних і резонансних частот коливань мембран, прямокутної, круглої і, взагалі, довільної форми (найпростіші форми з огляду на управління параметрами та технології виробництва), визначають габаритні розміри рухомих елементів МЕМС і задають робочий діапазон частот цих пристроїв. З розвитком нових матеріалів і технологій виробництва, таких як 3D-друк та наноматеріали, з'являються нові можливості для проектування та вдосконалення МЕМС, що підвищує їхню продуктивність і знижує енергоспоживання. Врахування цих аспектів є важливим для подальшого розвитку галузі, оскільки інтеграція нових технологій дозволяє вирішувати складні завдання з вищою ефективністю та точністю.

Зв'язок дослідження з науковими програмами, планами, темами: робота виконана в рамках тематики наукової школи «Фізика твердого тіла та магнітних явищ» КЗФ та КЗФ та МФП.

Мета дослідження: аналітичний та чисельний аналіз динамічних властивостей круглої мембрани з пружним кріпленням, що дозволяє розширити існуючі знання про коливальні процеси в МЕМС.

Завдання дослідження: аналітичний та чисельний розв'язки сформульованої задачі, візуально-графічна інтерпретація моделювання осесиметричних коливань мембрани.

Об'єкт дослідження: двовимірне хвильове рівняння в полярній системі координат, що описує пружні коливання круглої мембрани.

Предмет дослідження: вимушені гармонічні осесиметричні коливання мембрани із пружно закріпленим краєм.

Методи дослідження: аналітичний, чисельний (метод кінцевих різниць).

Наукова новизна одержаних результатів: отримано аналітичний розв'язок моделі осесиметричних коливань пружно закріпленої по периметру круглої мембрани як функціональної частини МЕМС з урахуванням впливу рівномірно розподіленої дії зовнішньої гармонічної сили, що діє на один бік мембрани. Проведений аналітичний та чисельний аналіз динамічних властивостей круглої мембрани із пружним кріпленням дозволяє розширити існуючі знання про коливальні процеси в МЕМС. Дослідження таких коливань не лише підвищує надійність та ефективність МЕМС, але й відкриває нові перспективи для їх використання в нових галузях, зокрема в біомедичних технологіях, де високі вимоги до чутливості і точності є критично важливими.

Практичне значення одержаних результатів: результати дослідження аналітичної моделі дозволяє краще зрозуміти вплив таких параметрів як частота зовнішнього навантаження, жорсткість закріплення та розміри мембрани на її динамічну поведінку. Чисельне дослідження моделі дозволило отримати залежність зміщення мембрани вздовж радіуса у часі, що відображає її динамічні характеристики під дією зовнішніх сил. Такі моделі корисні в технологічних застосуваннях при розробці мікроелектромеханічних системах (МЕМС) і при розрахунках динамічних параметрів МЕМС-пристроїв.

Галузь застосування: сенсорні системи, резонатори та фільтри, медичні пристрої, біосенсори, мікроактуатори, оптичні системи, п'єзоелектричні генератори, аерокосмічна галузь, робототехніка.

Апробація результатів дисертації:

- 1) Є.О. Швачко, В.С. Герасимчук, Вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм, Матеріали XX всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та

молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики” (15 червня 2022, Київ, Україна), с. 95-98.

Публікації:

- 1) Є.О. Швачко, В.С. Герасимчук, Вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм, Матеріали XX всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики” (15 червня 2022, Київ, Україна), с. 95-98;
- 2) Є.О. Швачко, С.О. Решетняк, Вивчення властивостей мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні, Матеріали XLV International scientific and practical conference “Key Aspects of the Development of Scientific Research in Modern Conditions” (October 30-November 1, 2024) Constanta, Romania. International Scientific Unity, 2024. 162-167 p.

Ключові слова: мікроелектромеханічні системи, вимушені гармонічні коливання, пружне кріплення, кругла мембрана.

Abstract

Analytical and numerical investigation of a microelectromechanical system (MEMS) based on the model of axisymmetric vibrations of a circular elastic surface under arbitrary boundary conditions

Structure of the work: the work consists of 92 pages and 18 figures. The list of references includes 53 sources.

Topicality: the technologies for exciting natural and resonant frequencies of membrane vibrations—rectangular, circular, or of arbitrary shapes (simplest forms in terms of parameter control and manufacturing technologies)—determine the overall dimensions of the moving elements in MEMS and set the operating frequency range of these devices. With the development of new materials and manufacturing technologies, such as 3D printing and nanomaterials, new opportunities emerge for the design and improvement of MEMS, enhancing their performance and reducing energy consumption. Considering these aspects is crucial for further development in the field, as integrating new technologies allows solving complex tasks with greater efficiency and precision.

Relationship of work with scientific programs, plans, themes cathedra: this work is part of the research agenda of the scientific school "Solid State Physics and Magnetic Phenomena" at KZF and KZF and MFP.

Purpose of work: to conduct analytical and numerical analysis of the dynamic properties of a circular membrane with elastic clamping, thereby extending the existing knowledge about vibrational processes in MEMS.

Research tasks: to obtain analytical and numerical solutions to the formulated problem and to provide visual-graphical interpretation of the modeling of axisymmetric membrane vibrations.

Object of research: a two-dimensional wave equation in a polar coordinate system that describes the elastic vibrations of a circular membrane.

Subject of research: forced harmonic axisymmetric vibrations of a membrane with an elastically clamped edge.

Research methods: analytical and numerical (finite difference method).

Scientific novelty of the results: an analytical solution for the model of axisymmetric vibrations of a circular membrane with elastic fixation along its perimeter has been obtained, considering the effect of a uniformly distributed external harmonic force acting on one side of the membrane. Analytical and numerical analyses of the dynamic properties of the circular membrane with elastic fixation have been conducted, allowing for an expansion of existing knowledge about vibrational processes in MEMS. The study of such oscillations not only enhances the reliability and efficiency of MEMS but also opens new perspectives for their application in emerging fields, particularly in biomedical technologies, where high sensitivity and precision are critically important.

Practical significance of the results: the results of the analytical model provide a deeper understanding of the influence of parameters such as the frequency of external loading, the stiffness of the fixation, and the size of the membrane on its dynamic behavior. Numerical analysis of the model made it possible to obtain the displacement profile of the membrane along the radius over time, reflecting its dynamic characteristics under the action of external forces. These models are valuable for technological applications in the development of microelectromechanical systems (MEMS) and in calculating the dynamic parameters of MEMS devices.

Application areas: sensor systems, resonators and filters, medical devices, biosensors, microactuators, optical systems, piezoelectric generators, aerospace industry, and robotics.

Presentation of dissertation results:

- 1) Y.O. Shvachko, V.S. Herasymchuk, Forced Harmonic Axisymmetric Vibrations of a Circular Membrane with an Elastically Clamped Edge, Materials of the XX All-Ukrainian Scientific-Practical Conference for Students, Postgraduates, and Young

Scientists "Theoretical and Applied Problems of Physics, Mathematics, and Computer Science" (June 15, 2022, Kyiv, Ukraine), pp. 95–98.

Publications:

- 1) Y.O. Shvachko, V.S. Herasymchuk, Forced Harmonic Axisymmetric Vibrations of a Circular Membrane with an Elastically Clamped Edge, Materials of the XX All-Ukrainian Scientific-Practical Conference for Students, Postgraduates, and Young Scientists "Theoretical and Applied Problems of Physics, Mathematics, and Computer Science" (June 15, 2022, Kyiv, Ukraine), pp. 95–98;
- 2) Y.O. Shvachko, S.O. Reshetnyak, Study of the Properties of a Microelectromechanical System (MEMS) Based on a Model of Axisymmetric Vibrations of a Circular Elastic Surface, Materials of the XLV International Scientific and Practical Conference “Key Aspects of the Development of Scientific Research in Modern Conditions” (October 30–November 1, 2024, Constanta, Romania). International Scientific Unity, 2024, pp. 162–167.

Keywords: microelectromechanical systems, forced harmonic vibrations, elastic clamping, circular membrane.

ЗМІСТ

ВСТУП	19
РОЗДІЛ 1 СУЧАСНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ (МЕМС)	21
1.1 Мікросистемні технології та мікроелектромеханічні системи	21
1.2 Мікросистеми, мікропристрої та їх елементи	22
1.3 Структура мікроелектромеханічних систем	27
1.4 Основні принципи функціонування МЕМС	29
1.5 Сфери застосування	32
1.6 Проблеми проектування МЕМС.....	33
Висновки до розділу 1	36
РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГОВОЇ МЕМБРАНИ ІЗ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНИМ КРАЄМ	38
2.1 Формулювання задачі	38
2.2 Метод розв'язання	39
2.3 Задача про вимушені коливання.....	39
2.4 Задача про власні коливання.....	42
2.5 Аналітичний розв'язок задачі	49
2.6 Графічна інтерпретація отриманого аналітичного розв'язку	49
Висновки до розділу 2	55
РОЗДІЛ 3 ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГОВОЇ МЕМБРАНИ ІЗ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНИМ КРАЄМ	57

3.1 Формулювання задачі	57
3.2 Аналіз числових методів розв'язання	58
3.2.1 Особливості задачі	58
3.2.2 Метод кінцевих різниць: огляд та обґрунтування вибору	58
3.2.3 Аналіз альтернативних методів	60
3.3 Числовий розрахунок.....	61
3.3.1 Дискретизація просторової та часової компонент.....	61
3.3.2 Дискретизація крайових умов.....	62
3.4 Алгоритм чисельного розв'язку	63
3.5 Моделювання чисельного розв'язку	64
3.6 Дослідження амплітудно-частотної характеристики	68
Висновки до розділу 3	70
РОЗДІЛ 4 ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ АНАЛІТИЧНОГО ТА ЧИСЕЛЬНОГО ПІДХОДІВ ДО СФОРМОВАНОЇ ЗАДАЧІ	72
4.1 Варіанти вхідних даних моделі	72
4.1.1 Базовий сценарій (варіант №1)	74
4.1.2 Сценарій з високою частотою та жорстким кріпленням (варіант №2)	75
4.1.3 Сценарій із низькою частотою та слабким кріпленням (варіант №3)	77
4.1.4 Сценарій з великою амплітудою сили (варіант №4)	79
Висновки до розділу 4	81
ВИСНОВКИ.....	83
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	86

ДОДАТОК А. Код програми на Python для моделювання чисельного розв'язку задачі про вимушені осесиметричні коливання мембрани.....	93
--	----

ДОДАТОК Б. Код програми на Python для моделювання амплітудно-частотної характеристики чисельного розв'язку задачі про вимушені осесиметричні коливання мембрани	95
---	----

ВСТУП

На сьогодні у сфері мікро- та нанотехнологій набувають широкого застосування мікроелектромеханічні системи та пристрої. Сучасні системи збору, управління та обробки інформації – лише найпростіші приклади широкого застосування таких систем. Мікроелектромеханічні системи (MEMS) – це мікроприлади, що містять у собі сукупність взаємопов'язаних компонент мікронних розмірів в єдиній конструктивній реалізації, що виготовляються з модифікованими технологіями мікроелектроніки. Очевидно, що одна з особливостей таких пристроїв – мікронні розміри, але наявна й інша важлива особливість – рухомі механічні частини. Тобто, в інтегрованій системі взаємопов'язані мініатюрні електричні та механічні структури мікронних розмірів.

Сучасна ера цифровізації та автоматизації вимагає впровадження новітніх і ефективних рішень для обробки даних і виконання складних завдань у різноманітних сферах, таких як медицина, автомобілебудування, телекомунікації та екологічний моніторинг. MEMS є невід'ємною складовою цих інновацій, оскільки вони забезпечують високу чутливість, швидкість реагування та здатність інтегруватися з іншими технологіями, зокрема штучним інтелектом. MEMS дозволяють створювати компактні, але високопродуктивні пристрої, здатні виконувати численні функції, такі як вимірювання температури, тиску або вібрацій, що робить їх важливими елементами сучасних технологій.

Технології збудження власних і резонансних частот коливань мембран різних форм (наприклад, прямокутної або круглої) визначають габаритні розміри рухомих елементів MEMS і, відповідно, задають робочий діапазон частот цих пристроїв. З розвитком нових матеріалів і виробничих технологій, таких як 3D-друк і наноматеріали, відкриваються нові можливості для проектування та вдосконалення

МЕМС, що дозволяє підвищити їхню ефективність і знизити енергоспоживання. Урахування цих факторів є ключовим для подальшого розвитку цієї галузі, оскільки інтеграція новітніх технологій дозволяє ефективніше і точніше вирішувати складні інженерні завдання.

Вивчення вільних та вимушених коливань мембран довільної форми, що мають різні варіанти кріплення по периметру (жорстке, вільне або пружне), є **актуальним напрямом досліджень**. В даній роботі розглянута задача про вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани, що пружно закріплена по периметру, яка раніше не розглядалась як функціональна частина МЕМС. Також на цей час дана задача не має строго обґрунтованого розв'язку, що зумовлює необхідність пошуку нових підходів і методів її вирішення. Дослідження таких коливань не лише підвищує надійність та ефективність МЕМС, але й відкриває нові перспективи для їх використання в нових галузях, зокрема в біомедичних технологіях, де високі вимоги до чутливості і точності є критично важливими.

Метою даної роботи є встановлення закономірностей процесів динаміки круглої мембрани з пружним кріпленням, що дозволяє розширити існуючі знання про коливальні процеси в МЕМС. Задачами дослідження є моделювання осесиметричних коливань мембрани, застосування чисельних методів для отримання розв'язків задачі, а також розробка програмного забезпечення для візуалізації результатів.

Об'єктом дослідження є двовимірне хвильове рівняння в полярній системі координат, що описує поведінку мембрани в сферично симетричних середовищах, а **предметом дослідження** – вимушені гармонічні осесиметричні коливання мембрани із пружно закріпленим краєм.

РОЗДІЛ 1 СУЧАСНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ (МЕМС)

1.1 Мікросистемні технології та мікроелектромеханічні системи

Мікросистемні технології (МСТ) – це галузь, яка динамічно розвивається та виникла в результаті амбіційного проекту однієї з американських лабораторій, що спеціалізувалися на напівпровідниках. У 60-х роках ця лабораторія розробила кремнієву мікромембрану на базі кремнієвого кристала, використовуючи технології, які зазвичай застосовуються у виробництві напівпровідникових пристроїв. Цю мембрану запропонували використовувати в вимірювачах тиску, замінивши традиційні металеві компоненти. Переваги такого підходу виявилися очевидними, проте реалізація вимагала удосконалення як технологічних процесів, так і методик вимірювання переміщень мембрани.

Проте найбільший імпульс розвитку МСТ відбувся в 80-х роках, коли вдосконалені технології обробки матеріалів, нові типи сировини, поява інноваційного обладнання та активне впровадження електронно-обчислювальної техніки кардинально змінили підхід до виготовлення мікросистем. Це призвело до створення нових, складних пристроїв, здатних виконувати різноманітні функції з високою точністю та швидкістю [1, 2].

У різних регіонах світу терміни, що описують цю галузь, мають свої особливості. Наприклад, в Європі найчастіше вживається термін "мікросистемні технології", тоді як у Сполучених Штатах домінує термін "мікроелектромеханічні системи" (МЕМС). В Азії популярні терміни "мікромашини" або "мікронаука", що підкреслює значну частину наукових досліджень, проведених інженерами цієї галузі. МЕМС об'єднують електричні та механічні елементи в компактні системи мікронних

розмірів, зазвичай включаючи мікрокомп'ютерні схеми для управління та обміну інформацією з іншими пристроями.

Класифікація MEMC є надзвичайно широкою та досі не усталеною, що пов'язано з великою різноманітністю їх застосувань, появою нових пристроїв і їх використанням у різних галузях. MEMC можна класифікувати за багатьма критеріями: за сферою застосування, кількістю елементів, розмірами конструкції, фізичними явищами, що використовуються, технологією виготовлення тощо [3].

Зосередження різноманітних елементів в одній системі вимагає інтеграції різних технологій, характерних для конкретних видів компонентів. Часто розробникам доводиться створювати нові технологічні процеси і принципи, що забезпечують оптимальне виготовлення та інтеграцію різних елементів.

Аналіз структури MEMC показує, що технологічний процес їх виготовлення є складним і тривалим. В залежності від складності пристрою, виготовлення може займати від кількох днів до кількох десятків днів, навіть із застосуванням сучасних технологій. Процес перевірки та відбраковування продукції також є тривалим, адже часто виготовляється партія однотипних пристроїв, при цьому вихід якісної продукції рідко перевищує 2%.

Внутрішня структура та принципи функціонування MEMC заслуговують на особливу увагу, адже їх детальне вивчення забезпечує глибше розуміння роботи цих пристроїв. Це, у свою чергу, дозволяє оптимізувати їх розробку та впровадження в різноманітні сфери, створюючи нові можливості для інновацій у таких важливих областях, як медицина, екологічний моніторинг та інформаційні технології [4, 5, 6, 7].

1.2 Мікросистеми, мікропристрої та їх елементи

Залежно від конструктивних особливостей, мікросистеми, створені на базі MEMC, поділяються на два основних типи. Перший тип представлений інтегральними

(монолітними) мікросистемами, у яких мікропристрої та компоненти виготовляються та об'єднуються в єдину структуру як у об'ємі, так і на поверхні кристала.

Такий підхід забезпечує основу для мехатроніки, сприяючи підвищенню надійності та автономності системи. Крім того, це дозволяє скоротити кількість і довжину з'єднань як між мікросистемою та зовнішніми пристроями, так і всередині самої мікросистеми. У результаті зменшується енергоспоживання, а також знижується рівень шумів і вплив електромагнітних наведень. Застосування групових мікроелектронних технологій для виготовлення електронних і мікромеханічних компонентів у межах одного виробничого циклу істотно оптимізує витрати на їхнє виготовлення [8, 9].

Прикладом інтегральної мікросистеми є однокристальний акселерометр виробництва компанії Analog Devices, який містить одновісну вимірювальну структуру, інтегровану з електронними схемами обробки сигналів (рис. 1.1).

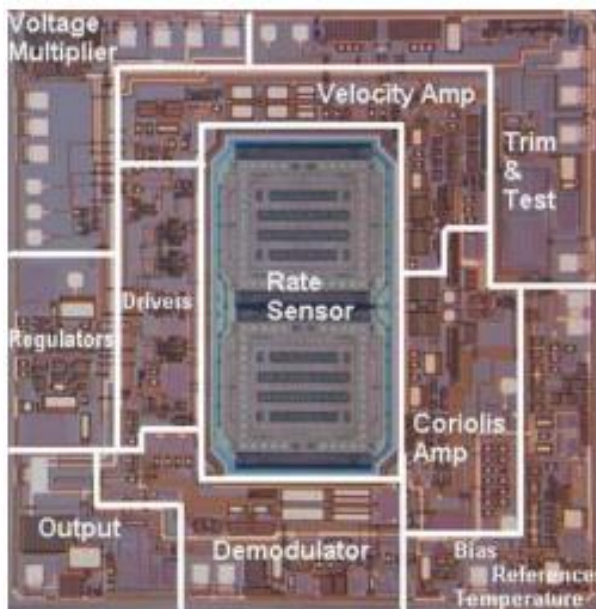


Рисунок 1.1 – Однокристальний акселерометр виробництва компанії Analog Devices як приклад інтегральної мікросистеми, перший тип мікросистем на основі MEMS

Другий тип мікросистем представлений гібридними мікросистемами. Вони формуються з компонентів, створених із різних матеріалів та виготовлених за допомогою різноманітних технологій, які згодом інтегруються на спільній конструктивній основі (рис. 1.2).

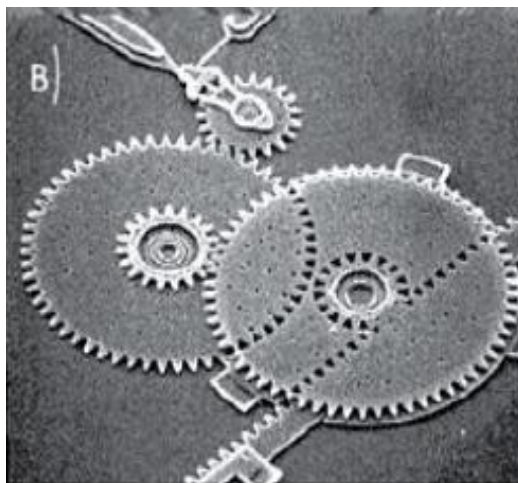


Рисунок 1.2 – Гібридні мікросистемами, другий тип мікросистем на основі МЕМС

Мікроелектромеханічні системи у контексті інформаційно-керувальних мікросистем можуть бути класифіковані за виконуваними функціями. У завершеному функціональному вигляді вони являють собою інформаційно-керувальні мікросистеми різного призначення, які інтегрують мікропристрої для збору та обробки інформації, обчислювальні модулі для формування керувальних сигналів, а також виконавчі пристрої, що забезпечують прямий вплив на об'єкт [10, 11].

Функціональні мікропристрої, що входять до інформаційної частини таких мікросистем, можна поділити на дві основні групи. Перша група – МЕМС-датчики, які виконують перетворення фізичних величин. Друга група – обчислювальні пристрої, що включають різноманітні електронні компоненти, такі як підсилювачі, аналогові ключі, комутатори, подільники частоти, цифро-аналогові та аналого-

цифрові перетворювачі, мікроконтролери, мікропроцесори, цифрові та логічні схеми, а також запам'ятовуючі пристрої. Ці елементи можуть функціонувати як самостійна група обчислювальних пристроїв або бути інтегрованими до складу МЕМС-датчиків.

У конструкціях МЕМС можна чітко розрізняти елементи та компоненти. Елемент – це нероздільна частина конструкції, яка не може бути виокремлена із системи. Натомість компонент є функціонально завершеним об'єктом, який можна відокремити від мікросистеми та розглядати як самостійну одиницю.

Компоненти мікросистем можна класифікувати так [1, 7]:

- 1) чутливі елементи – компоненти, що реагують на зовнішні фізичні впливи та перетворюють їх у сигнал:
 - п'єзоелектричний датчик тиску;
 - оптичний сенсор для вимірювання освітленості;
- 2) перетворювальні елементи – елементи, що трансформують один вид сигналу в інший:
 - термопари для перетворення теплової енергії в електричну;
 - мікромеханічні перетворювачі для зміни механічного руху на електричний сигнал;
- 3) елементи обробки сигналу – компоненти, що підсилюють, фільтрують чи аналого-цифрово перетворюють сигнал:
 - підсилювачі низької частоти;
 - цифро-аналогові перетворювачі в МЕМС-датчиках;
- 4) механічні елементи – частини, що виконують механічні функції:
 - мікробалка – елемент із одним або двома закріпленими кінцями;
 - мікروажиль – елемент з опорою, що зрівноважує сили;
 - мікропружина – елемент, що накопичує енергію за рахунок пружної деформації;
 - мікропідвіс – елемент, який з'єднує дві рухомі частини;

- мікропоршень – перекриває поперечний переріз і переміщується для подачі сигналу або енергії;
 - мікромембрана – тонка плівка або пластина, що працює на прогин або вібрацію;
 - зубчасте мікроколесо – забезпечує лінійний рух і змінює швидкість або напрямок;
- 5) енергетичні елементи – елементи для постачання або перетворення енергії:
- мікроакумулятори – зберігають енергію для живлення системи;
 - мікроенергознімальні пристрої – наприклад, п'єзоелектричні мікрогенератори;
 - змінний мікроіндуктор – генерує змінне магнітне поле;
 - змінний мікроконденсатор – змінює ємність через переміщення частин;
- 6) виконавчі елементи – елементи, що безпосередньо впливають на об'єкт керування або середовище:
- мікроклапан (мікрозаслінка) – регулює потоки рідин чи газів;
 - мікросопло – керує розгоном рідини чи газу;
 - мікропривод – приводить мікрооб'єкти в стан коливань або обертань;
 - мікротрансмісія – передає обертальний рух від мікродвигуна до споживачів енергії;
 - мікроредуктор – змінює швидкість і момент обертання за допомогою зубчастої або черв'ячної передачі;
- 7) структурно-з'єднувальні елементи – елементи, що забезпечують механічну інтеграцію та взаємодію компонентів:
- мікроякір – нерухомий елемент для закріплення інших части;
 - мікропідвіс – з'єднує рухомі частини;
 - зубчаста мікропередача – передає обертальний рух, змінюючи частоту або напрямок;

- мікроперемикач – виконує функцію замикання або розмикання контактів;
- мікрозварні шви – забезпечують нероз'ємне механічне з'єднання.

Кожен із цих елементів грає важливу роль у забезпеченні функціональності мікросистеми.

1.3 Структура мікроелектромеханічних систем

Мікроелектромеханічні системи (MEMS) являють собою складні пристрої, що інтегрують кілька функціональних елементів, кожен із яких здатний виконувати декілька завдань. Такий підхід, спрямований на багатофункціональність, дозволяє конструкторам оптимізувати кількість компонентів і спростити технологічні процеси. Водночас, у багатьох випадках залишаються елементи, які виконують строго визначені функції, забезпечуючи точність і надійність роботи системи.

У загальному випадку MEMS можуть бути представлені як пристрої, що включають такі функціональні модулі [1, 7]:

- 1) виконавчий механізм (мікрорухій) – забезпечує рух необхідних механізмів, виконуючи функцію приводної ланки. Наприклад, мікроприводи, які генерують обертальні або поступальні рухи;
- 2) чутливий елемент (сенсор) – реагує на зовнішні фізичні впливи (тиск, температуру, освітленість тощо) і перетворює їх у сигнал, придатний для подальшої обробки. Прикладом є п'єзоелектричні сенсори або термочутливі датчики;
- 3) керований механізм – виконує функцію заключної ланки в ланцюгах керування, здійснюючи фізичний вплив на середовище або об'єкт. До таких механізмів належать:
 - мікродзеркала, які використовуються в оптичних системах;
 - керовані мікроклапани для регулювання потоку рідини чи газу;

- мембранні мікропомпи для транспортування рідин у мікрофлюїдних пристроях;
- 4) пристрої для передавання енергії – забезпечують передачу руху, електричного струму, тиску рідин або інших форм енергії між компонентами системи. Наприклад:
 - мікротрансмісії для передачі обертального руху;
 - зубчасті мікропередачі для зміни напрямку чи швидкості руху;
- 5) пристрої керування – активують відповідні виконавчі механізми з урахуванням інформації, отриманої від сенсорів, і принципів роботи системи. Це можуть бути:
 - електричні схеми керування, що регулюють напругу чи струм;
 - механічні мікроперемикачі, що виконують функцію замикання або розмикання ланцюгів.

Таким чином, конструкція МЕМС є результатом оптимального балансу між багатофункціональністю елементів та їх вузькоспеціалізованими функціями, що забезпечує ефективність, надійність і адаптивність цих систем у різноманітних галузях застосування.

Сучасні МЕМС виготовляються із широкого спектра матеріалів, включаючи метали, сплави, неметали, мінеральні сполуки та органічні речовини. Однак у процесі виробництва зазвичай прагнуть мінімізувати використання різнорідних матеріалів, оскільки це підвищує технологічність виробництва та знижує собівартість продукції. Використання більшого асортименту матеріалів стає доцільним лише за наявності специфічних вимог до елементів пристрою, наприклад, у випадках, коли потрібна висока термостійкість, хімічна інертність або особливі механічні властивості окремих компонентів [7, 11].

Частка МЕМС у сучасній промисловій продукції постійно збільшується. Це обумовлено їхнім широким застосуванням у різних галузях, таких як електроніка, біомедицина, автомобілебудування та космічна техніка. Основні переваги МЕМС над традиційними технологіями включають:

- компактність – малі розміри дозволяють інтегрувати пристрої навіть у найменші системи;
- енергоефективність – низьке споживання енергії сприяє збільшенню тривалості роботи автономних пристроїв;
- висока щільність розміщення елементів – дає змогу створювати більш функціональні пристрої на обмеженому просторі;
- гнучкість дизайну – можливість проектування багатофункціональних систем відповідно до конкретних вимог замовника.

Ці характеристики стимулюють інженерів у різних галузях активніше інтегрувати МЕМС у свої продукти, забезпечуючи їхню конкурентоспроможність та відповідність сучасним технологічним стандартам.

1.4 Основні принципи функціонування МЕМС

При розгляді широкого спектра мікроелектромеханічних систем (МЕМС) важливо врахувати основні принципи та методи їх функціонування, зокрема різноманітність актюаторів, які є ключовими компонентами цих систем. Актюатори перетворюють одну форму енергії в іншу, найчастіше механічну роботу, і для їх створення використовуються різні фізичні явища. Кількість типів актюаторів постійно зростає, що сприяє розвитку МЕМС та їхньому застосуванню в різних галузях.

До найпоширеніших типів актюаторів можна віднести [7, 9]:

- електростатичні актюатори – використовують силу притягання між електродами з різними зарядами. Для підвищення сили притягання

використовуються електроди у вигляді гребенів, де пальці одного електрода розміщуються в проміжках між пальцями іншого. Ці актюатори характеризуються малими розмірами та незначною силою, яка може досягати $1 - 10 \frac{\text{мкН}}{\text{мм}^2}$ при напрузі 15 В. Перевагою є простота виготовлення та використання кремнієвих матеріалів, що робить їх виготовлення сумісним з технологією інтегральних мікросхем;

- термоелектричні актюатори – працюють на основі біметалевих пластин, які реагують на нагрівання. Конструкція може бути горизонтальною або вертикальною. Коли пропускається струм, пластини нагріваються і видовжуються по-різному, створюючи силу, що переміщує кінці пластин. Існують каскадні термоелектричні актюатори, де з допомогою кількох елементів досягається більший результат руху;
- електромагнітні актюатори – використовують котушки з феромагнітними матеріалами або постійними магнітами для перетворення електричної енергії в механічну. Однією з поширених конструкцій є використання нерухомих котушок і рухомих елементів, таких як якорі. Ці актюатори мають перевагу високої ефективності, але ускладнені технологічно через необхідність виготовлення великих котушок і використання магнітних матеріалів;
- п'єзоелектричні актюатори – засновані на властивостях п'єзокераміки, яка деформується під впливом електричного поля. Вони мають високу навантажувальну здатність, хоча і збільшують розміри конструкцій та ускладнюють технологічний процес. Однак їх висока точність і здатність працювати в умовах високих навантажень робить їх важливими для складних MEMS;
- гідравлічні та пневматичні актюатори – використовують рідину або газ для створення руху. Гідравлічні актюатори, наприклад, можуть

перетворювати потік рідини на обертовий рух. Осмотичні актюатори використовують тиск рідини для переміщення еластичних мембран. Для ефективної роботи таких систем необхідні мініатюрні компресорні та регулювальні системи, що додає складності конструкції, але забезпечує високі переваги, такі як мала вага і компактність.

Кожен з цих типів актюаторів має свої переваги та недоліки, залежно від технологічних вимог, конструктивних рішень і специфікацій роботи МЕМС. Вибір конкретного типу актюатора визначається, перш за все, вимогами до продуктивності, вартістю виробництва та наявними технологіями.

Сенсори є важливими компонентами МЕМС, оскільки вони здатні вимірювати різноманітні фізичні величини і перетворювати їх у електричні сигнали для подальшої обробки. У МЕМС використовуються різні типи сенсорів, кожен з яких має свої специфічні особливості та області застосування. До найбільш поширених типів сенсорів можна віднести [7, 10]:

- ємнісні сенсори – ці сенсори часто використовуються для вимірювання переміщень, оскільки їх робота заснована на зміні ємності між двома пластинами або електродами. Одна з пластин або електродів зазвичай є нерухомою, а інша – рухомою (наприклад, мембрана чи пружна балка). При зміні відстані між пластинами або зміні площі їх поверхні змінюється ємність, що і використовується для вимірювань. Ці сенсори можуть бути виготовлені у вигляді гребенів електродів, де пальці одного гребеня розташовуються у проміжках між пальцями іншого;
- п'єзоелектричні сенсори – засновані на п'єзоелектричному ефекті, який виникає при деформації певних матеріалів (наприклад, п'єзокераміки). При механічних впливах на ці матеріали утворюється електричний заряд, що може бути виміряно. П'єзоелектричні сенсори використовуються для вимірювання сили, тиску або механічних коливань;

- тензорезистивні сенсори – працюють на основі змінювання електричного опору матеріалу при його деформації. Тензорезистори змінюють своє опір при механічному напруженні, що дозволяє точно вимірювати тиск, деформації або вигини. Ці сенсори застосовуються для вимірювання сили або напруження в конструкціях;
- терморезистивні сенсори – використовують зміни електричного опору матеріалу в залежності від температури. Ці сенсори широко використовуються для вимірювання температури. Вони можуть бути використані як для точних вимірювань температури в мікросистемах, так і для контролю температурних режимів в процесах;
- фотоелектричні сенсори – ці сенсори реагують на зміну світлового потоку, перетворюючи його в електричний сигнал. Вони можуть використовуватись для вимірювання інтенсивності світла, відстані або для визначення положення об'єктів у системах позиціонування;
- сенсори на основі ефекту Хола – ці сенсори використовують властивість матеріалу змінювати свої електричні властивості при наявності магнітного поля. Вони використовуються для вимірювання магнітних полів, потужностей струму або прискорення в певних додатках.

Сенсори та їхні допоміжні елементи (наприклад, пружні балки або мембрани) разом забезпечують точні вимірювання та перетворення фізичних величин, що дозволяє МЕМС ефективно виконувати свої функції в різних застосуваннях.

1.5 Сфери застосування

Як було зазначено раніше, МЕМС виготовляються для вирішення різноманітних завдань у багатьох галузях науки та техніки, і їх практичне застосування постійно розширюється. Для кращого розуміння можна навести декілька прикладів

використання технологій МЕМС. Одним із таких є застосування мікроакселерометрів та мікрогіроскопів, які базуються на технології МЕМС і широко використовуються в сучасних системах, що дозволяє цим пристроям відслідковувати зміни свого просторового положення та реагувати на них. Найбільш поширеним прикладом є мікроакселерометри, інтегровані в системи пасивної безпеки автомобілів, що визначають момент спрацьовування подушки безпеки. Це одна з найбільших категорій технологій МЕМС на ринку, що займає значну частку в даному сегменті.

Також технології МЕМС використовуються для виготовлення друкуючих головок струменевих принтерів, чия частка на ринку поступово зростає. В медичних, фармацевтичних та хімічних галузях активно використовуються різні пристрої МЕМС, зокрема мікродозатори та мікрофільтри. Крім того, в цих галузях застосовуються спеціалізовані технології та матеріали для виготовлення приладів МЕМС, такі як кремнієві мікроголки та спеціалізовані електроди для електронних стимуляторів [1, 4, 9, 12].

З розвитком високошвидкісних оптичних волоконних ліній передачі даних, спеціалізовані оптичні комутатори на базі МЕМС з багатоканальними системами комутації стали ефективним рішенням для перемикання з мінімальними втратами. Такі пристрої часто використовують різноманітні методи перенаправлення світлового потоку, зокрема масиви керованих мікродзеркал, які відхиляються під певним кутом за сигналом електронної системи управління. Цей принцип також застосовується для створення цифрових проекторів та проекційних телевізорів, де якість зображення не поступається традиційним проекційним системам, а іноді навіть перевищує їх.

1.6 Проблеми проектування МЕМС

Можна довго перераховувати конкретні застосування пристроїв МЕМС, однак всі вони є результатом чіткого розуміння конструкторами можливостей

технологічних процесів, що використовуються для вирішення поставлених задач. Однією з головних проблем залишається розробка нових ефективних технологій формування об'ємних структур із різних матеріалів. Для подальшого розвитку необхідно знайти технології з високою роздільною здатністю, що дозволяють виготовляти дрібніші елементи з високими механічними характеристиками. Іншою важливою проблемою для мікросистемних технологій є обмежений вибір матеріалів, які можна використовувати для виробництва пристроїв МЕМС. Тому створення нових матеріалів та впровадження перевірених у мікросистемах є ключовими задачами для технологів цієї галузі. Впровадження нових матеріалів з унікальними властивостями може значно спростити конструкцію мікросистем або розширити їхні функціональні можливості.

Серед інших важливих аспектів є проектування окремих елементів конструкції МЕМС та системи в цілому. Для оцінки поведінки майбутньої конструкції в різних умовах експлуатації та впливу навантажень необхідно розробляти складні математичні моделі, що враховують численні чинники, які можуть вплинути на роботу МЕМС. Розробка таких моделей вимагає значних інформаційних ресурсів, таких як довідкові та експериментальні дані про характеристики матеріалів, а також складні фізико-математичні теорії і відповідне програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання. Якісні та ефективні моделі можуть значно прискорити процес розробки, зменшити витрати на створення і модифікацію зразків, а також скоротити кількість необхідних випробувань. Тому проектування пристроїв МЕМС неможливе без використання спеціалізованих комп'ютерних програм.

Сучасні програми для проектування, моделювання та аналізу надають можливість швидко створити модель пристрою, використовуючи електронні бібліотеки конструктивних елементів і матеріалів. Віртуальне моделювання дозволяє проводити серію випробувань для аналізу поведінки пристрою в умовах нормальної експлуатації, перевантажень і нестандартних ситуацій. Такий підхід допомагає

виявити недоліки конструкції, матеріалів та оптимізувати параметри елементів ще на етапі попереднього проектування. Отже, застосування програм для моделювання та аналізу значно прискорює розробку робочого варіанту пристрою, дозволяє підібрати необхідні технологічні процеси і матеріали та зменшує кількість випробувань дослідних зразків.

Велика кількість рухомих елементів конструкції сучасних пристроїв МЕМС свідчить про складність і досконалість технологій, що використовуються. Проте це також ставить вимоги до зручності та продуманості послідовності збирання конструкцій. Найчастіше намагаються створювати всі елементи, об'єднуючи їх в одну складну конструкцію, замінюючи рухомі з'єднання на гнучкі пружні елементи. У разі неможливості такої заміни є два варіанти: або розробляти конструкцію так, щоб рухомі елементи можна було відокремити на пізніших етапах виробництва, або використовувати спеціалізовані мікроманіпулятори з високою точністю позиціонування для встановлення елементів. У таких випадках зазвичай застосовують спеціалізоване технологічне рішення, щоб уникнути втручання в послідовність виготовлення елементів конструкції.

Окрім проблеми збирання, важливою є проблема тертя в точках дотику, що може знижувати ефективність взаємодії елементів. У пристроях МЕМС, через особливості виготовлення і дуже малі розміри, навіть незначна шорсткість поверхонь може суттєво вплинути на тертя та зношення. Використання звичайних змащувальних матеріалів є непридатним через їх високу в'язкість та поверхневий натяг. Тому для рідкого змащення застосовують етиловий спирт, що має оптимальні молекулярні характеристики та низький рівень поверхневого натягу.

Інтеграція системи контролю та моніторингу є важливим аспектом проектування МЕМС, оскільки забезпечує зворотний зв'язок для оптимізації роботи приладів у реальному часі. Урахування вимог до надійності та довговічності потребує адаптації мікросистемних технологій до умов функціонування в різних середовищах,

що ставить додаткові вимоги до досліджень у матеріалознавстві та сенсорних технологіях.

Висновки до розділу 1

В результаті аналізу мікросистемних технологій (МСТ) та мікроелектромеханічних систем (МЕМС) було встановлено, що ця галузь демонструє значний прогрес завдяки розвитку технологій обробки матеріалів, нових сировин і інтеграції електроніки. Зокрема, реалізація мікросистем на основі МЕМС забезпечує зменшення розмірів пристроїв, зниження енергоспоживання, підвищення точності та швидкості виконання функцій, що є критично важливими для різних сфер, включаючи медицину та екологічний моніторинг.

Кількісні показники вказують на те, що технологічний процес виготовлення МЕМС залишається складним, при цьому вихід якісної продукції не перевищує 2%, що вказує на високий рівень відбраковування. Це підкреслює необхідність удосконалення технологічних процесів для підвищення ефективності виробництва. Різноманітність елементів і компонентів, а також їх класифікація свідчать про складність систем і потребу в інтеграції різних технологій.

Достовірність отриманих результатів підтверджується не лише експериментальними даними, а й аналізом існуючих підходів до виготовлення та функціонування мікросистем. Використання різних фізичних явищ для активації пристроїв, зокрема електростатичних, термоелектричних та п'єзоелектричних актюаторів, демонструє широкий спектр застосувань, а також виклики, пов'язані з технологічними аспектами.

Отже, подальші дослідження та розробки у сфері МСТ і МЕМС можуть створити нові можливості для інновацій, значно впливаючи на технологічний прогрес

в промисловості та наукових дослідженнях. Систематичний підхід до вдосконалення технологій та інтеграції різноманітних елементів є запорукою підвищення конкурентоспроможності цих технологій на глобальному ринку.

РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГОВОЇ МЕМБРАНИ ІЗ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Даний розділ присвячений аналітичному дослідженню радіальних коливань пружно закріпленої по периметру кругової мембрани, на яку діє рівномірно розподілена гармонічна сила. На основі матеріалу першого розділу, який висвітлює технологічну значимість та перспективи розвитку МЕМС, другий розділ слугує ключовим етапом для точного моделювання динамічної поведінки МЕМС у реальних умовах, забезпечуючи глибше розуміння їхніх характеристик і особливостей функціонування.

2.1 Формулювання задачі

Кругла однорідна мембрана радіуса R пружно закріплена по контуру і знаходиться в стані рівноваги при натягові T . У момент часу $t = 0$ до поверхні мембрани прикладена рівномірно розподілена сила $F = P_o \sin \omega t$. Математична постановка – це мішана крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння із однорідними крайовими умовами 3-го роду [13]:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(t), & f(t) &= \frac{P_o}{T} \sin \omega t, \\ u_r(R, t) + hu(R, t) &= 0, & |u(0, t)| &< \infty, \\ u(r, 0) &= 0, & u_t(r, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Надалі будемо вважати, що рівняння та крайові умови розглядаються при $0 \leq r < R$, $t > 0$, при чому $h > 0$.

2.2 Метод розв'язання

Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді суми функцій:

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t), \quad (2.1)$$

підбираючи функцію $w(r, t)$ так, щоб крайова задача для неї, враховувала фізичний характер коливального процесу:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + f(t), & f(t) &= \frac{P_0}{T} \sin \omega t, \\ w_r(R, t) + hw(R, t) &= 0, & |w(0, t)| &< \infty. \end{aligned}$$

Тобто, функція $w(r, t)$ – описує вимушені коливання круглої мембрани.

Для функції $v(r, t)$ будемо крайову задачу про вільні коливання круглої мембрани з граничними умовами 3-го роду, а саме, мембрана пружно закріплена по контуру – характер жорсткості закріплення визначається параметром $h > 0$:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ v_r(R, t) + hv(R, t) &= 0, & |v(0, t)| &< \infty, \\ v(r, 0) &= -w(0), & v_t(r, 0) &= -w_t(0). \end{aligned}$$

2.3 Задача про вимушені коливання

Застосовуємо метод відокремлення змінних, вважаючи:

$$w(r, t) = q(r) \cdot z(t).$$

Залежність функції $w(r, t)$ від часу, обумовлену вимушеною силою, природно вважати такою:

$$z(t) = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad w(r, t) = q(r) \sin \omega t.$$

Підставляючи функцію $w(r, t)$ в неоднорідне хвильове рівняння, отримаємо:

$$-q(r) = \left(\frac{a}{\omega}\right)^2 \left(q''(r) + \frac{1}{r} q'(r)\right) + \frac{P_o}{T \omega^2}.$$

З граничної умови, випливає:

$$q'(R) + hq(R) = 0.$$

Отже, для функції $q(r)$ маємо задачу на власні значення для неоднорідного рівняння Бесселя:

$$\begin{cases} q''(r) + \frac{1}{r} q'(r) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 q(r) = -\frac{P_o}{T a^2}, \\ q'(R) + hq(R) = 0. \end{cases}$$

Оскільки рівняння неоднорідне, то у відповідності з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР, шукатимемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $q_{\text{заг}}$ та частинний розв'язок неоднорідного рівняння $q_{\text{част.}}$. Легко помітити, що частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння Бесселя має вигляд:

$$q_{\text{част.}} = -\frac{P_o}{T\omega^2}.$$

Тоді розв'язок задачі на власні значення для неоднорідного рівняння Бесселя з однорідною граничною умовою

$$q(r) = -\frac{P_o}{T\omega^2} + q_{\text{заг}}(r),$$

для функції $q_{\text{заг}}(r)$ зводиться до такої задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} q_{\text{заг}}''(r) + \frac{1}{r} q_{\text{заг}}'(r) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 q_{\text{заг}}(r) = 0, \\ q_{\text{заг}}'(R) + h q_{\text{заг}}(R) = \frac{h P_o}{T\omega^2}. \end{cases}$$

Розв'язок рівняння Бесселя відомий з точністю до сталої [14]:

$$q_{\text{заг}}(r) = C J_o\left(\frac{\omega}{a} r\right),$$

де власні значення $\lambda = \frac{\omega}{a}$.

Визначимо цю сталу використовуючи крайову умову:

$$-C \frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) + h C J_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) = \frac{h P_o}{T\omega^2} \Rightarrow C = \frac{a h P_o}{T\omega^2 \left(a h J_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) \right)}.$$

Таким чином,

$$q_{\text{зар}}(r) = \frac{ahP_o}{T\omega^2} \frac{J_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Тоді,

$$q(r) = -\frac{P_o}{T\omega^2} + \frac{ahP_o}{T\omega^2} \frac{J_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} = \frac{P_o}{T\omega^2} \left[\frac{ahJ_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right].$$

Отже, отримали розв'язок для функції $w(r, t)$, що відповідає вимушеним коливанням:

$$w(r, t) = q(r) \cdot z(t) = \frac{P_o}{T\omega^2} \left[\frac{ahJ_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] \sin \omega t. \quad (2.2)$$

Тепер крайову задачу для функції $w(r, t)$ можемо доповнити і початковими умовами:

$$w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = \frac{P_o}{T\omega} \left[\frac{ahJ_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right].$$

2.4 Задача про власні коливання

Знайшовши початкові умови для задачі $w(r, t)$, можемо уточнити крайову задачу для функції $v(r, t)$, підставляючи отримані значення [14]:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ v_r(R, t) + hv(R, t) &= 0, \quad |v(0, t)| < \infty, \\ v(r, 0) = \varphi(r) &= 0, \quad v_t(r, 0) = \psi(x) = \frac{P_o}{T\omega} \left[\frac{ahJ_o\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Розв'язуємо задачу для функції $v(r, t)$ методом Фур'є, вважаючи $v(r, t) = V(r)T(t)$. Внаслідок розділення змінних, отримаємо два ЛОДР 2-го порядку для кожної з функцій $V(r)$ і $T(t)$ окремо. Для функції $V(r)$ матимемо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння Бесселя нульового порядку:

$$\begin{aligned} V'' + \frac{1}{r}V' + \lambda^2 V &= 0, \\ V'(R) + hV(R) &= 0, \quad |V(0)| < \infty. \end{aligned}$$

Ця задача має відомий загальний розв'язок [14]:

$$V(r) = C_1 J_o(\lambda r) + C_2 Y_o(\lambda r),$$

де $J_o(r)$, $Y_o(r)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду нульового порядку.

Оскільки,

$$Y_o(\lambda r) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0,$$

то враховуючи другу крайову умову $|V(0)| < \infty$ слід вважати, що $C_2 = 0$. Щодо іншої умови, то:

$$V'(R) + hV(R) = C_1(\lambda J'_o(R\lambda) + hJ_o(R\lambda)) = 0,$$

тут слід вважати $C_1 \neq 0$, тоді

$$-\lambda R J_1(R\lambda) + h R J_o(R\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_n J_1(\mu_n) - h R J_o(\mu_n) = 0. \quad (2.3)$$

Додатні корені μ_n цього рівняння [14]:

$$\mu_n = R\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

утворюють нескінченно зростаючу послідовність (рис. 2.1):

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty.$$

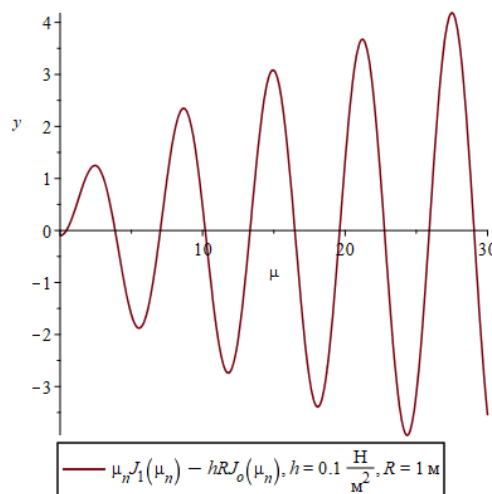


Рисунок 2.1 – Графік кривої $y = \mu_n J_1(\mu_n) - h R J_o(\mu_n)$, $h = 0.1 \text{ Н/м}^2$, $R = 1 \text{ м}$

Таким чином, власні значення задачі Штурма-Ліувілля:

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

а власні функції з точністю до сталого множника C_1 мають вигляд:

$$V_n(r) = C_1 J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Загальний розв'язок крайової задачі для функції $v(r, t)$ набуває вигляду:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right),$$

де $\omega_n = \frac{a\mu_n}{R}$, коефіцієнти A_n і B_n знаходяться з урахуванням початкових умов:

$$A_n = \frac{1}{\mathcal{N}_o^2} \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr, \quad B_n = \frac{R}{a\mu_n} \frac{1}{\mathcal{N}_o^2} \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr.$$

Тут $\mathcal{N}_o^2$ – квадрат норми функції Бесселя I роду нульового порядку:

$$\mathcal{N}_o^2 = \left\| J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \right\|^2 = \int_0^R r J_o^2\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2}{2} [J_1^2(\mu_n) + J_o^2(\mu_n)].$$

Оскільки $\varphi(r) = 0$, то коефіцієнт $A_n = 0$, а коефіцієнт B_n знайдемо обраховуючи інтеграл:

$$\begin{aligned}
B_n &= -\frac{R}{a\mu_n} \frac{2}{R^2[J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} \cdot \int_0^R r \frac{P_o}{T\omega} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) dr = \\
&= -\frac{RP_o}{a\mu_n T\omega} \frac{2}{R^2[J_1^2(\mu_n) + J_0^2(\mu_n)]} \times \\
&\times \left[\frac{ah}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) dr - \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) dr \right].
\end{aligned}$$

Візьмемо спочатку другий інтеграл, як більш простий. Виконаємо заміну змінної:

$$y = \frac{\mu_n}{R}r \Rightarrow r = \frac{R}{\mu_n}y, \quad dr = \frac{R}{\mu_n}dy.$$

При цьому отримаємо нові границі інтегрування – від 0 до μ_n :

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) dr = \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 \int_0^{\mu_n} y J_0(y) dy.$$

Надалі використаємо властивість функцій Бесселя [14]:

$$yJ_0(y)dy = d[yJ_1(y)].$$

Тоді,

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) dr = \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 \int_0^{\mu_n} y J_0(y) dy = \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 \int_0^{\mu_n} d[yJ_1(y)] =$$

$$= \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 y J_1(y) \Big|_0^{\mu_n} = \frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n}.$$

Отже,

$$\int_0^R r J_o\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n}.$$

Для першого інтеграла розглядаємо випадок відсутності резонансу, тобто:

$$\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_n}{R} \Rightarrow \omega \neq \omega_n = \frac{a\mu_n}{R},$$

де ω_n – частота власних коливань. Інтеграл набуває вигляду (інтеграл Ломмеля) [14]:

$$\int_0^R r J_o\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_o\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2} \left[\frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_o(\mu_n) - \frac{\mu_n}{R} J_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_1(\mu_n) \right].$$

За рахунок рівняння (2.3):

$$J_1(\mu_n) = \frac{hR}{\mu_n} J_o(\mu_n),$$

маємо:

$$\int_0^R r J_o\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_o\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{a^2 R}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[\frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_o(\mu_n) - \frac{\mu_n}{R} J_o\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_1(\mu_n) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 R}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[\frac{\omega}{a} J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) J_o(\mu_n) - h J_o \left(\frac{\omega R}{a} \right) J_o(\mu_n) \right] = \\
&= \frac{a R}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[\omega J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) - a h J_o \left(\frac{\omega R}{a} \right) \right] J_o(\mu_n) = \\
&= - \frac{a R}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[a h J_o \left(\frac{\omega R}{a} \right) - \omega J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) \right] J_o(\mu_n).
\end{aligned}$$

Отже, знаходимо:

$$\int_0^R r J_o \left(\frac{\omega}{a} r \right) J_o \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) dr = - \frac{a R}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[a h J_o \left(\frac{\omega R}{a} \right) - \omega J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) \right] J_o(\mu_n).$$

Підставимо отримані значення інтегралів:

$$B_n = \frac{R P_o}{a \mu_n T \omega} \frac{2}{R^2 [J_1^2(\mu_n) + J_o^2(\mu_n)]} \left[\frac{a^2 R h}{\omega^2 - \omega_n^2} J_o(\mu_n) + \frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} \right].$$

Спростимо цей вираз знову таки за рахунок рівняння (2.3):

$$J_1(\mu_n) = \frac{h R}{\mu_n} J_o(\mu_n).$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{R P_o}{a \mu_n T \omega} \frac{2}{R^2 [J_1^2(\mu_n) + J_o^2(\mu_n)]} \left[\frac{a^2 R h}{\omega^2 - \omega_n^2} J_o(\mu_n) + \frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} \right] = \\
&= \frac{2 a h P_o}{T \omega} \frac{\mu_n}{(h^2 R^2 + \mu_n^2) J_o(\mu_n)} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n^2} \right].
\end{aligned}$$

Отже розв'язок крайової задачі для функції $v(r, t)$, що описує власні коливання в системі має вигляд:

$$v(r, t) = \frac{2ahP_o}{T\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(h^2R^2 + \mu_n^2)J_0(\mu_n)} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \sin\left(\frac{a\mu_n}{R}t\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right). \quad (2.4)$$

2.5 Аналітичний розв'язок задачі

Підставляючи знайдені функції $w(r, t)$ (2.2) і $v(r, t)$ (2.4) у (2.1), отримаємо:

$$u(r, t) = \frac{P_o}{T\omega^2} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] \sin \omega t + \\ + \frac{2ahP_o}{T\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(h^2R^2 + \mu_n^2)J_0(\mu_n)} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \sin\left(\frac{a\mu_n}{R}t\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right).$$

де μ_n – додатні корені рівняння (2.3).

Даний розв'язок описує вимушені осесиметричні коливання кругової мембрани із пружно закріпленим краєм по периметру, яка коливається внаслідок рівномірно розподіленої дії гармонічної сили, що діє на один бік мембрани.

2.6 Графічна інтерпретація отриманого аналітичного розв'язку

За допомогою програмного забезпечення Maple 2017 створена анімаційна візуалізація осесиметричних коливань кругової мембрани із пружно закріпленим краєм по периметру. У роботі продемонструємо стоп-кадри цих коливань.

Для графічної інтерпретації необхідно визначити значення параметрів мембрани:

- радіус мембрани – $R = 10.0$ м;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 0.1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- густина матеріалу – $\rho = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

А також значення параметрів зовнішньої сили:

- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 1.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$;
- натяг мембрани – $T = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Отримаємо візуальну анімацію зміщення точок мембрани в часі, максимальна амплітуда досягає $1.5 \cdot 10^{-3}$ м. Наведемо декілька стоп-кадрів в різний момент часу (рис. 2.2).

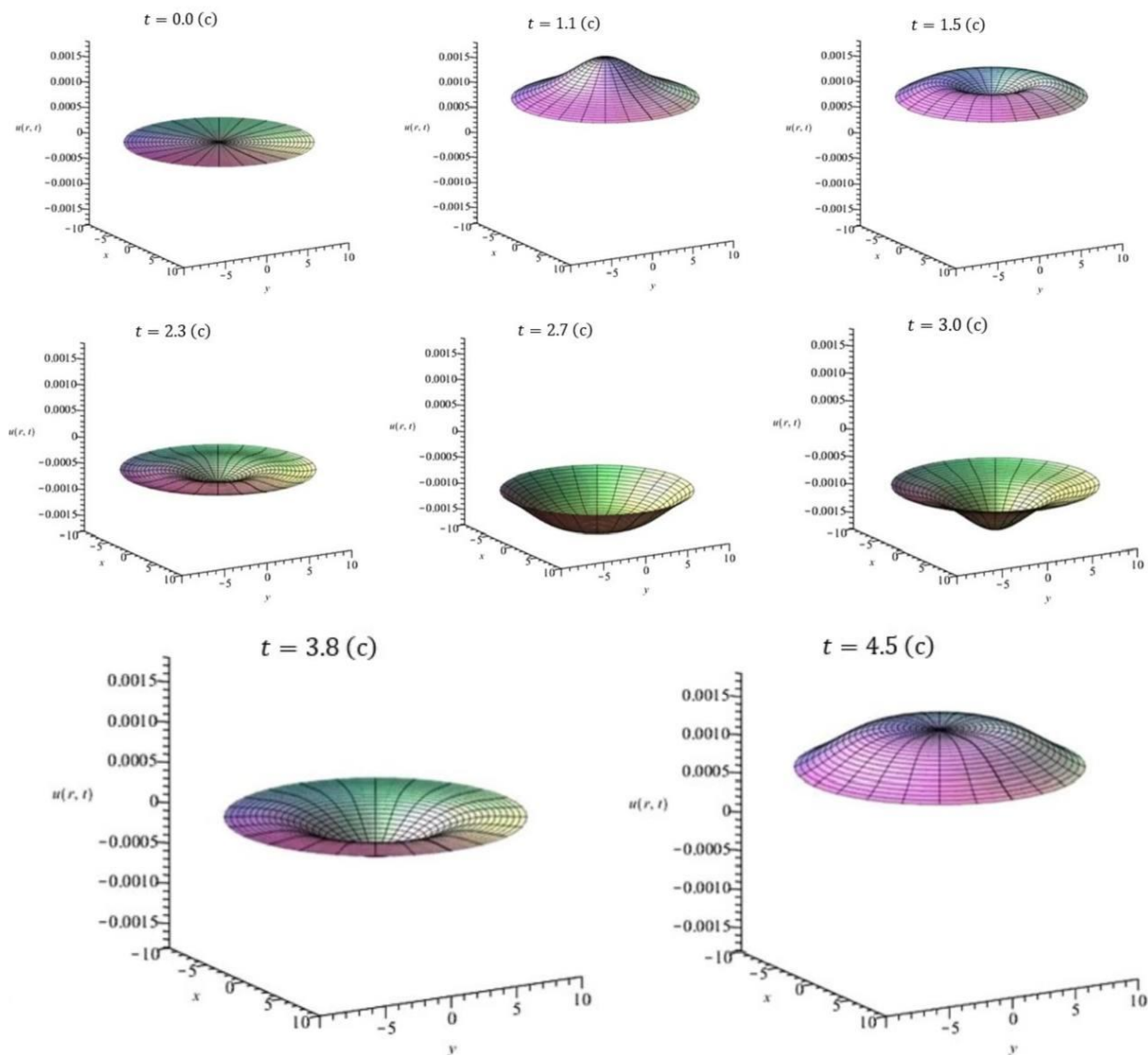


Рисунок 2.2 – Розподіл зміщення точок мембрани в різний момент часу

Динаміка коливального процесу має гармонійний характер, що добре простежується через послідовну зміну форми поверхні мембрани у різні моменти часу:

- **початкова стадія ($t = 0$ с).** Мембрана перебуває у стані рівноваги без видимих деформацій;

- **фаза підйому ($t = 1.1$ с).** У центральній частині мембрани формується підйом, максимальна деформація спостерігається у центрі, а периферія залишається майже нерухомою;
- **реверсування форми ($t = 2.3$ с).** Мембрана повертається у близьке до початкового положення, демонструючи гармонійний характер зміщення, де центральна частина поступово опускається. Периферійна область залишається стабільною завдяки умовам закріплення;
- **фаза зворотного прогину ($t = 2.7$ с).** Центральна частина мембрани опускається нижче початкового рівня, досягаючи мінімальної деформації. Амплітуда зміщення пропорційна прикладеній зовнішній силі;
- **періодичне повернення ($t = 3.0$ с).** Мембрана поступово проходить через точки рівноваги, періодично переходячи між підйомом і прогином. Відсутність різких змін у формі підтверджує гармонійний характер процесу;
- **стабільна періодичність ($t = 3.8$ с і $t = 4.5$ с).** У ці моменти спостерігається повторення попередніх етапів коливального руху. Мембрана демонструє циклічну поведінку із збереженням осесиметричної форми та стабільної амплітуди.

Поміняємо один геометричний параметр, радіус мембрани – $R = 20.0$ м, залишаючи всі інші показники незмінними. Отримаємо візуальну анімацію зміщення точок мембрани в часі, максимальна амплітуда досягає $3.0 \cdot 10^{-2}$ м. Наведемо декілька стоп-кадрів в різний момент часу (рис. 2.3).

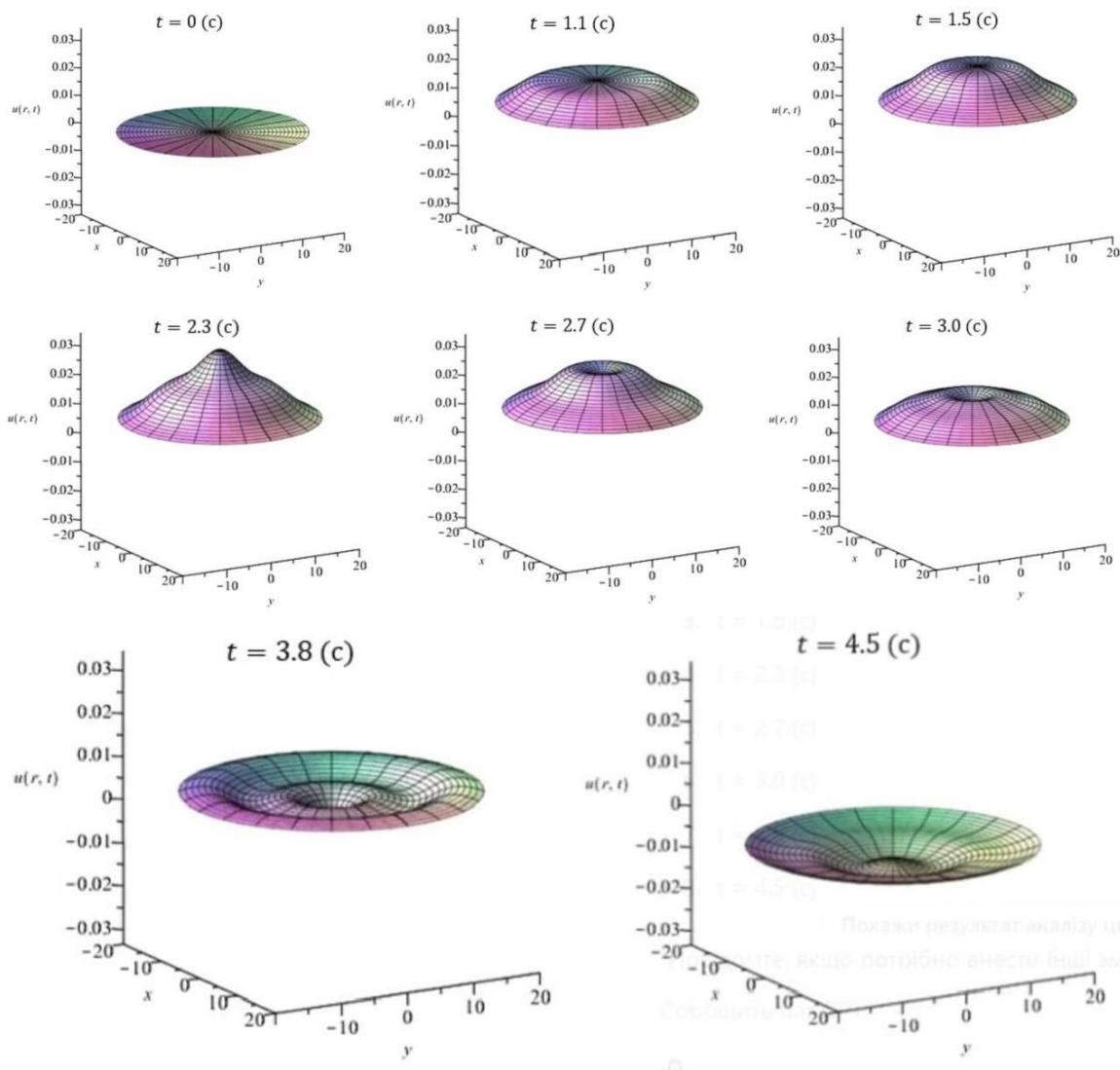


Рисунок 2.3 – Розподіл зміщення точок мембрани в різний момент часу зі зміненим радіусом мембрани

Збільшення радіуса мембрани за однакових інших параметрів суттєво впливає на характеристики її коливань. У мембрані з більшим радіусом (рис. 2.3) спостерігається зниження частоти коливань, оскільки хвилям потрібно долати більшу відстань, що призводить до повільнішого процесу. Амплітуда коливань у центрі зменшується через рівномірний розподіл енергії на більшій площі, тоді як вузлові та пучні зони розташовуються ширше в радіальному напрямку. Натомість мембрана з

меншим радіусом (рис. 2.2) демонструє вищу частоту коливань, більш виражену амплітуду у центрі та компактніше розташування вузлів і пучностей, що зумовлено зосередженням енергії у менших розмірах. Таким чином, відмінність у радіусі мембрани визначає різницю в частоті, амплітуді та просторовій структурі коливального процесу.

Зробимо ще одну зміну параметра, частота зовнішньої сили – $\omega = 4\pi \text{ c}^{-1}$, залишаючи всі інші показники незмінними. Отримаємо візуальну анімацію зміщення точок мембрани в часі, максимальна амплітуда досягає $3.0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Наведемо декілька стоп-кадрів в різний момент часу (рис. 2.4).

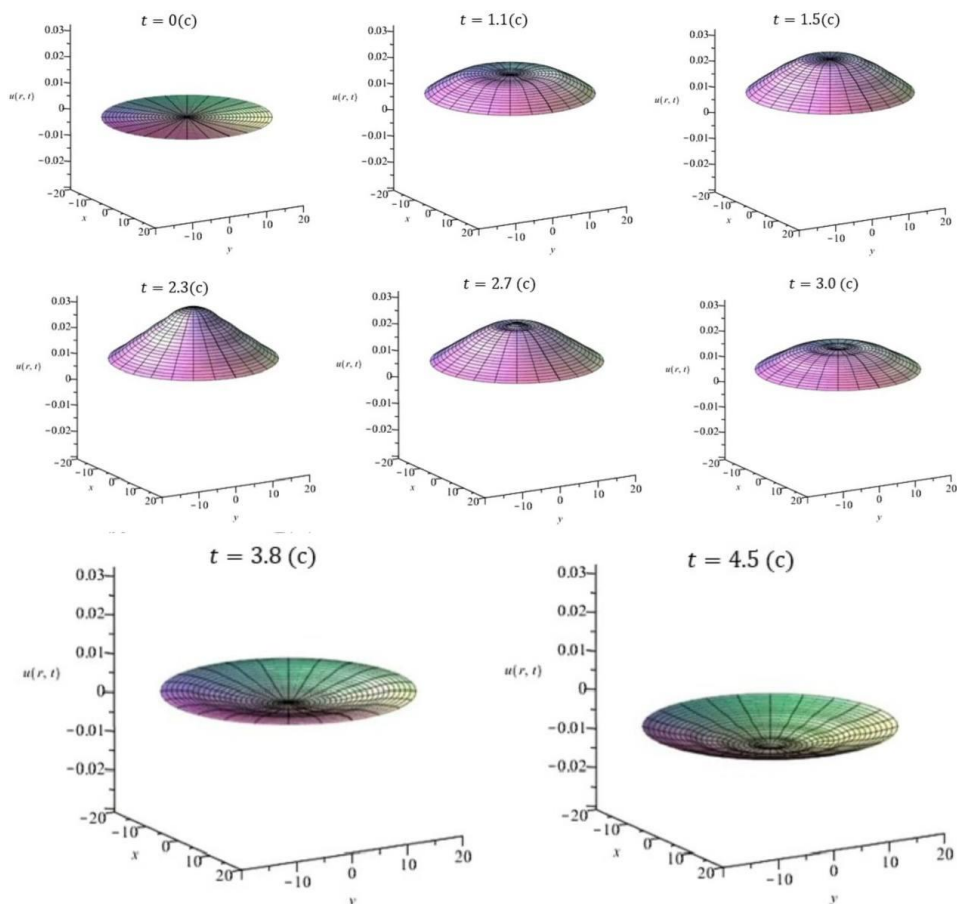


Рисунок 2.4 – Розподіл зміщення точок мембрани в різний момент часу із зміненою частотою зовнішньої сили

При зміні частоти зовнішньої сили, прикладеної до однієї сторони мембрани, за незмінних інших параметрів спостерігаються суттєві відмінності в характері коливань. При нижчій частоті зовнішньої сили коливання мембрани (рис. 2.3) є гармонійними, з вираженою амплітудою та чітко окресленими фазами підйому й прогину. Зміщення точки прикладання сили ефективніше передається на всю площу мембрани, що забезпечує більш рівномірний розподіл енергії. Водночас коливальний процес характеризується меншою кількістю циклів у часі, що відповідає повільнішим фазовим переходам. За підвищеної частоти зовнішньої сили коливання мембрани (рис. 2.4) стають частішими. Зміщення локалізуються ближче до точки прикладання сили, що спричиняє зниження ефективності передачі енергії на віддалені ділянки мембрани. Вузлові й пучні зони з'являються частіше, проте їхній вплив розподіляється менш рівномірно, порівняно з нижчою частотою. Таким чином, основні відмінності між процесами полягають у частоті коливань та ефективності розподілу енергії по мембрані.

Висновки до розділу 2

Результати проведеного дослідження аналітичної моделі вимушених гармонічних осесиметричних коливань круглої мембрани з пружно закріпленням краєм, на яку діє рівномірно розподілена гармонічна сила, забезпечують глибше розуміння впливу ключових параметрів, таких як частота зовнішньої дії, жорсткість закріплення по периметру та розміри мембрани, на динамічну поведінку системи. Незважаючи на давню постановку цієї задачі, її вирішення до сьогодні не мало строго обґрунтованого аналітичного підходу, що обумовило необхідність розробки нових методів і підходів для аналізу.

За допомогою методу Фур'є задачу було зведено до розв'язання системи крайових задач, кожна з яких окремо описує або власні коливання мембрани, або

вимушену відповідь на зовнішнє навантаження. Отриманий аналітичний розв'язок для спрощеної моделі дозволяє оцінити, як фізичні характеристики, включаючи коефіцієнт жорсткості закріплення та швидкість поширення хвиль у матеріалі, впливають на динамічні властивості мембрани.

Графічна інтерпретація результатів, зокрема анімаційна візуалізація коливань, підтверджує правильність запропонованого математичного підходу. Здобуті результати є цінними для прогнозування поведінки мембран у реальних умовах і можуть знайти застосування в розробці та оптимізації сенсорних елементів та інших пристроїв на основі мікроелектромеханічних систем (MEMS).

РОЗДІЛ 3 ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГОВОЇ МЕМБРАНИ ІЗ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Цей розділ зосереджений на чисельних методах аналізу та моделювання осесиметричних коливань круглої пружної мембрани, що є важливим етапом для точного прогнозування динамічної поведінки МЕМС у реальних умовах. Спираючись на результати другого розділу, де було отримано аналітичний розв'язок задачі, у цьому розділі детально розглянуто чисельні методи, які підтверджують коректність, достовірність та обґрунтованість запропонованого аналітичного підходу.

3.1 Формулювання задачі

Кругла однорідна мембрана радіуса R пружно закріплена по контуру і знаходиться в стані рівноваги при натягові T . Мембрана піддається дії рівномірно розподіленої гармонічної сили $F = P_o \sin \omega t$, прикладеної до її поверхні з моменту часу $t = 0$. Математична постановка задачі зводиться до розв'язання мішаної крайової задачі для неоднорідного хвильового рівняння із однорідними крайовими умовами 3-го роду [13]:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(t), & f(t) &= \frac{P_o}{T} \sin \omega t, \\ u_r(R, t) + hu(R, t) &= 0, & |u(0, t)| &< \infty, \\ u(r, 0) &= 0, & u_t(r, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Надалі будемо вважати, що рівняння та крайові умови розглядаються при $0 \leq r < R$, $t > 0$, при чому $h > 0$.

3.2 Аналіз числових методів розв'язання

Метод кінцевих різниць було обрано для розв'язку задачі через кілька вагомих причин, пов'язаних як з природою диференціальних рівнянь, так і з перевагами методу в чисельному моделюванні. Розглянемо детальніше, чому цей метод є оптимальним вибором для розв'язку поставленої проблеми [15, 16, 17, 18, 19].

3.2.1 Особливості задачі

Система описується рівнянням

$$u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(t),$$

у циліндричних координатах, і має радіальну симетрію. Задачі такого типу формуються для дослідження відповідних фізичних процесів та описують поширення хвиль у сферично симетричних середовищах, наприклад, в акустичних системах, для вивчення динаміки механічно деформованих твердих тіл, поширення електромагнітних хвиль тощо [20, 21, 22, 23, 24].

Основними проблемами при аналітичному розв'язку таких рівнянь є наявність нелінійності через присутність членів, що містять похідну по радіусу з коефіцієнтом $\frac{1}{r}$, а також складність урахування граничних та початкових умов. Це унеможливорює або значно ускладнює знаходження аналітичного розв'язку [16, 25, 26, 27, 28].

3.2.2 Метод кінцевих різниць: огляд та обґрунтування вибору

Метод кінцевих різниць є одним із найбільш широко використовуваних чисельних методів для розв'язку рівнянь у частинних похідних. Цей метод ґрунтується на заміні похідних відповідними різницеvими аналогами. Для хвильових рівнянь кінцеві різниці дозволяють отримати наближені значення шуканої функції у дискретних точках просторово-часової сітки [15, 29, 30, 31, 32, 33].

Основними причинами, чому було обрано метод кінцевих різниць для даної задачі, є [16, 25, 27, 29]:

- 1) **простота реалізації.** Метод кінцевих різниць легко реалізується для рівнянь у частинних похідних різних порядків. Він не вимагає складної математичної трансформації рівнянь (як, наприклад, метод Фур'є або метод скінчених елементів). Його можна безпосередньо застосувати до рівнянь з початковими і граничними умовами. У нашій задачі це означає, що ми можемо легко дискретизувати похідні другого порядку по часу та простору, а також обробити змішану граничну умову на межі $r = R$;
- 2) **стійкість і точність.** У контексті хвильових рівнянь важливо забезпечити стійкість числового алгоритму, що гарантує правильне відтворення хвильових процесів без штучного згладжування чи виникнення нестабільностей. Для даного рівняння метод кінцевих різниць дозволяє задати відповідні просторові та часові кроки Δr та Δt , що забезпечують стійкість чисельної схеми відповідно до критерію Куранта-Фрідрікса-Леві. Цей критерій гарантує, що інформація про хвилю не поширюється швидше, ніж передбачено фізичною моделлю, що особливо важливо для задач, де поширення хвиль відіграє ключову роль [16, 28]:

$$a \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1.$$

3) **гнучкість у використанні граничних умов.** Задача передбачає змішану граничну умову на краю області $r = R$:

$$u_r(R, t) + hu(R, t) = 0.$$

Метод кінцевих різниць дозволяє легко врахувати цю умову, оскільки похідну можна апроксимувати різницевою схемою, що враховує значення функції в двох останніх точках сітки. Це робить метод ефективним для роботи з різними типами граничних умов (Діріхле, Нейман або змішані умови), які часто зустрічаються у фізичних моделях [25, 34, 35, 36, 37, 38, 39].

3.2.3 Аналіз альтернативних методів

Варто зазначити, що для розв'язку хвильових рівнянь у частинних похідних існують також інші чисельні методи, як-от метод скінченних елементів, метод спектральних різниць або метод інтегральних рівнянь. Однак їх застосування для даної задачі менш оптимальне з кількох причин [25, 29, 40, 41, 42, 43, 44, 45]:

- метод скінченних елементів – більш підходить для складних геометричних областей, тоді як у нашій задачі область є одновимірною з радіальною симетрією. Реалізація цього методу може бути зайвим ускладненням для такої простої геометрії;
- спектральні методи – зазвичай ефективні для задач із періодичними граничними умовами, де рішення мають гармонічну структуру. Вони вимагають глобальних апроксимацій функцій, що менш зручно для задач із локальними граничними умовами, як у нашому випадку;

- метод інтегральних рівнянь – також може бути застосований, але він значно ускладнює реалізацію, особливо в задачах з різного типу нелінійностями і складними граничними умовами.

Таким чином, серед усіх доступних методів кінцеві різниці надають оптимальне поєднання простоти реалізації, точності та можливості обробляти складні граничні умови [28, 45, 46, 47, 48, 49, 50].

Метод кінцевих різниць є загальновизнаним підходом для розв'язку рівнянь у частинних похідних, особливо для задач, подібних до поставленої в даній роботі. Його основними перевагами є простота реалізації, можливість працювати з різними типами граничних умов та контроль над стійкістю чисельної схеми. Завдяки цим властивостям даний метод був вибраний для розв'язку рівняння хвильового типу з радіальною симетрією та зовнішнім джерелом [28, 51, 52, 53].

У наступному пункті буде продемонстровано детальну реалізацію методу на основі Python (додаток А) із застосуванням різницевих схем, а також наведено аналіз отриманих результатів.

3.3 Числовий розрахунок

Щоб розв'язати дану задачу методом кінцевих різниць, розглянемо рівняння коливань для осесиметричної системи в циліндричних координатах без залежності від кута θ . Це означає, що рівняння спрощується до одного виміру по радіусі r , оскільки система є осесиметричною.

3.3.1 Дискретизація просторової та часової компонент

Розб'ємо область $r \in [0, R]$ на N рівних вузлів з кроком $\Delta r = \frac{R}{N}$ (радіус дискретизації). Позначимо вузли як $r_i = i\Delta r$, де $i = \overline{1, N}$. Для апроксимації просторових похідних використаємо метод кінцевих різниць:

- перша похідна за r в точці r_i наближається як: $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r}$;
- друга похідна за r : $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2}$.

Нехай $t_n = n\Delta t$, де n — номер поточного кроку, Δt — часовий крок. Для дискретизації за часом використовуємо центрально-різницеву схему для другого порядку похідної за часом:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t_n} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Зібравши всі члени хвильового рівняння, отримаємо чисельну схему:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta r} \right) + f(t), \quad f(t) = \frac{P_o}{T} \sin \omega t_n.$$

3.3.2 Дискретизація крайових умов

Дискретизуємо граничну умову 3-го роду:

$$\frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta r} + hu_N^n = 0 \Rightarrow u_N^n = \frac{u_{N-1}^n}{1 + h\Delta r}.$$

Оскільки мембрана симетрична відносно центру, похідна по радіусу в центрі має бути рівною нулю:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Для дискретизації цієї умови використовуємо симетрію, яка дає:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} \approx \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta r} = 0 \Rightarrow u_1^n = u_0^n.$$

Ця умова означає, що значення функції u в точці $r = 0$ (в центрі мембрани) дорівнює значенню функції в першій точці сітки $r_1 = \Delta r$. Це забезпечує симетрію функції u в радіусі навколо осі [26, 27, 29].

3.4 Алгоритм чисельного розв'язку

1) Задаємо початкові умови:

– $u_i^0 = 0$ для всіх вузлів;

- $u_i^1 = 0$, оскільки похідна за часом при $t = 0$ також дорівнює нулю.
- 2) Для кожного наступного кроку часу $n + 1$ обчислюємо u_i^{n+1} для всіх вузлів $i = \overline{1, N - 1}$ за отриманою чисельною схемою.
- 3) Використовуємо крайові умови для обчислення значень на крайніх вузлах u_0^{n+1} і u_N^{n+1} .
- 4) Повторюємо цей процес до досягнення потрібного моменту часу t_{max} .

3.5 Моделювання чисельного розв'язку

Графічна інтерпретація чисельного розв'язку реалізована за допомогою написаного коду на мові програмування Python (додаток А). Визначимо параметри мембрани та значення параметрів зовнішньої сили:

- радіус мембрани – $R = 1.0$ м;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- густина матеріалу – $\rho = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 1.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 5\pi \text{ с}^{-1}$;
- натяг мембрани – $T = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Визначимо також кількість часових та просторових точок:

- кількість просторових точок – $N = 100$;
- кількість часових точок – $M = 1000$.

Отримаємо графік зміщення мембрани вздовж радіуса в часі, максимальна амплітуда досягає $9.3 \cdot 10^{-5}$ м (рис. 3.1). По горизонтальній осі відкладено час, по

вертикальний — радіус мембрани, а кольорова шкала відображає величину зміщення. Усі величини визначені в системі СІ.

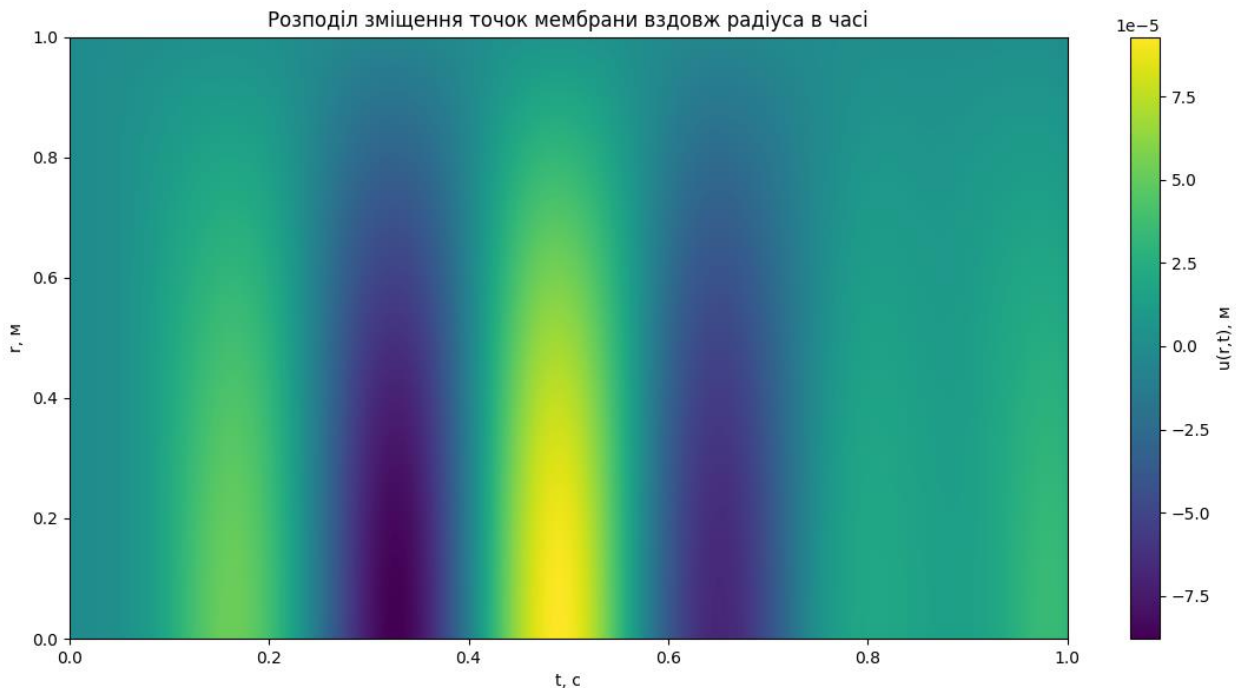


Рисунок 3.1 – Розподіл зміщення точок мембрани вздовж радіуса в часі

Яскраві області (жовтий колір) відповідають максимальному позитивному зміщенню $u(r, t)$, а темні області (фіолетовий колір) – максимальному негативному зміщенню, що демонструє гармонійний характер коливань. Центральна частина мембрани (малий r) зазнає найбільшої амплітуди деформацій, тоді як із наближенням до краю ($r \rightarrow 1$) зміщення зменшується, що вказує на закріплені умови на периферії мембрани. Процес є періодичним і симетричним, з чітко видимими чергуваннями фаз підйому та прогину, що вказує на стоячі хвилі з радіальною симетрією. Таким чином, коливальний процес відбувається з передбачуваною гармонійністю, а його динаміка демонструє сталість амплітуди та періоду.

Поміняємо один геометричний параметр, радіус мембрани – $R = 2.0$ м, залишаючи всі інші показники незмінними. Отримаємо графік зміщення мембрани вздовж радіуса в часі, максимальна амплітуда досягає $3.5 \cdot 10^{-4}$ м (рис. 3.2).

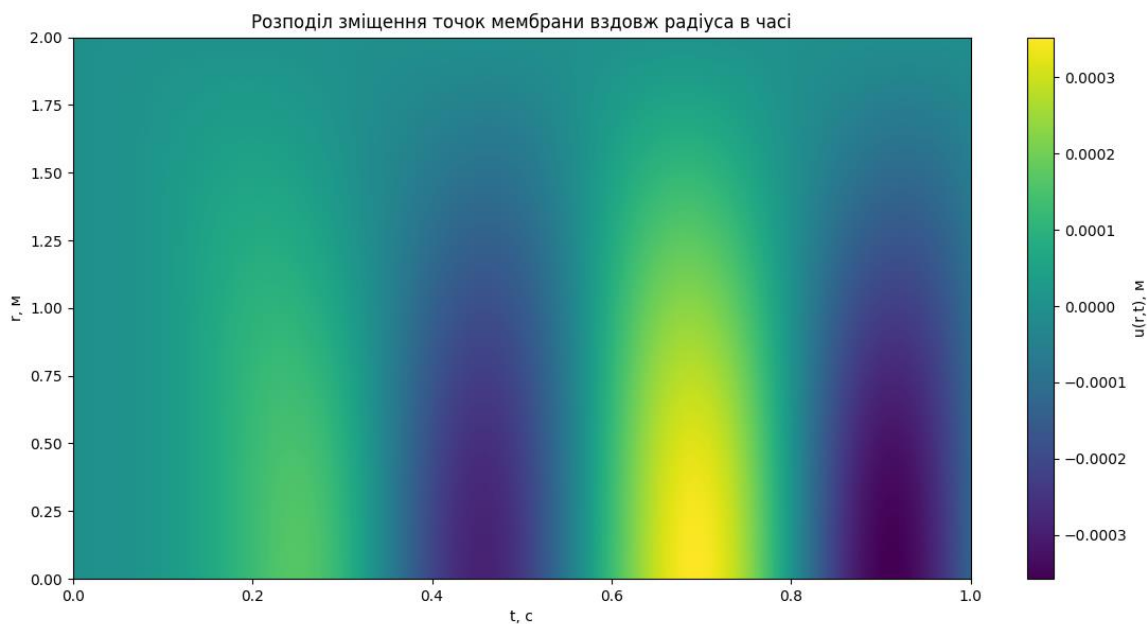


Рисунок 3.2 – Розподіл зміщення точок мембрани вздовж радіуса в часі зі зміненим радіусом мембрани

Зі збільшенням радіуса мембрани за незмінних інших параметрів спостерігається зменшення амплітуди коливань через більш рівномірний розподіл енергії на збільшеній площі поверхні. Коливальний процес стає повільнішим, що пов'язано зі зниженням частоти власних коливань, оскільки хвилі долають більшу відстань. Розподіл вузлових і пучних зон у мембрані з більшим радіусом є більш розтягнутим у радіальному напрямку, тоді як у мембрані меншого радіуса вони розташовані компактніше, з вищою частотою змін. У обох випадках зберігається осесиметрична структура коливань, що вказує на сталість гармонійного характеру процесу за різних геометричних розмірів.

Зробимо ще одну зміну параметра, частота зовнішньої сили – $\omega = 10\pi \text{ c}^{-1}$, залишаючи всі інші показники незмінними. Отримаємо графік зміщення мембрани вздовж радіуса в часі, максимальна амплітуда досягає $1.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (рис. 3.3).

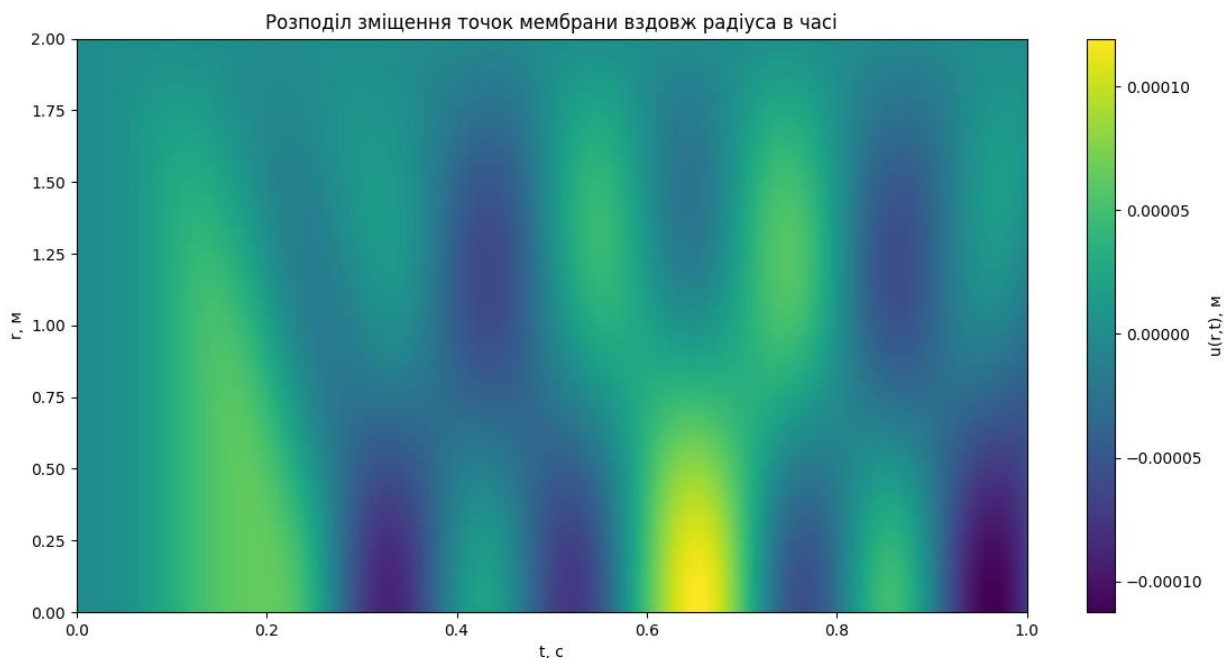


Рисунок 3.3 – Розподіл зміщення точок мембрани в вздовж радіуса в часі із зміненою частотою зовнішньої сили

Зміна частоти зовнішньої сили за незмінних інших параметрів призводить до суттєвих змін у характері коливань мембрани. За нижчої частоти (рис. 3.2) спостерігається більш гармонійний процес із меншою кількістю циклів у часі, ширшим розташуванням вузлів і пучностей та більшою амплітудою, що вказує на ефективнішу передачу енергії через близькість до резонансної частоти. Натомість за підвищеної частоти зовнішньої сили (рис. 3.3) коливання стають швидшими, з більшою кількістю циклів у часі, компактнішим розташуванням вузлів і пучностей, але меншою амплітудою через зниження резонансного впливу. У обох випадках

зберігається осесиметрична структура коливань, що підтверджує стабільність гармонійного характеру процесу незалежно від частоти збурення.

3.6 Дослідження амплітудно-частотної характеристики

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) є важливим інструментом для аналізу динамічних властивостей системи, що коливається, зокрема осесиметричної мембрани, закріпленої по контуру. Вивчення АЧХ дозволяє визначити, як система реагує на зовнішнє гармонічне навантаження, виявити її резонансні частоти, а також оцінити інтенсивність коливань на кожній із частот [26, 27, 29].

Метою дослідження є визначення амплітудної реакції мембрани на зовнішню періодичну силу, амплітуда якої задана як $f(t) = P_o \sin(\omega t)$, у широкому діапазоні частот. Аналіз АЧХ дозволить:

1. Ідентифікувати основні та вищі резонансні частоти, які відповідають максимальним амплітудам зміщень мембрани;
2. Оцінити рівень згасання коливань при частотах, далеких від резонансних;
3. Побудувати залежність амплітуди коливань від частоти зовнішнього впливу, що є ключовим для практичного застосування мембран у пристроях, таких як акустичні випромінювачі та чутливі сенсори.

Для обчислення АЧХ мембрани використовуються чисельні методи розв'язання неоднорідного хвильового рівняння, в якому розглядається вплив періодичної сили на всі точки мембрани. Основним критерієм визначення амплітуди є встановлення максимальної величини зміщення в центральній точці мембрани або середнього значення по всій площі при заданій частоті ω . Вибір цієї точки зумовлений тим, що центральна точка найбільше піддається впливу коливань через симетрію системи [28].

Розрахунок амплітудної реакції здійснюється наступним чином:

1. Визначається діапазон частот ω зовнішнього навантаження.

2. Для кожної частоти в чисельній моделі встановлюється усталений режим коливань, після чого фіксується максимальна амплітуда зміщень.
3. Усі отримані значення максимальних амплітуд по кожній частоті використовуються для побудови амплітудно-частотної характеристики.

Графічна інтерпретація АЧХ реалізована за допомогою мови програмування Python (додаток Б) в межах частот від $\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ до $5\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ для мембрани з найпершими параметрами, які вказані в минулому пункті (рис. 3.2).

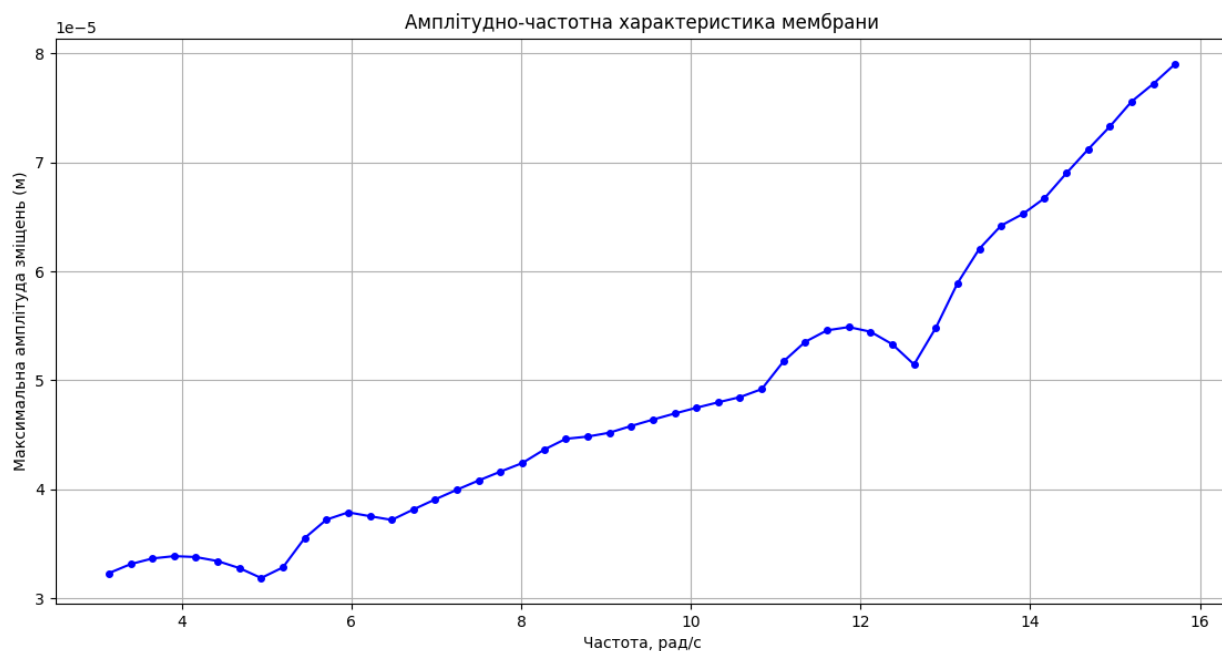


Рисунок 3.2 – Амплітудно-частотна характеристика мембрани в діапазоні від

$$\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} \text{ до } 5\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Графік амплітудно-частотної характеристики, який демонструє залежність максимальної амплітуди зміщень від частоти, дозволяє чітко визначити резонансні частоти системи. На них спостерігається пікове значення амплітуди, що свідчить про резонансну реакцію мембрани на зовнішнє навантаження. Резонансні частоти є

визначальними для характеристик мембрани та дозволяють передбачити її поведінку у реальних умовах експлуатації.

Зниження амплітуди зі збільшенням частоти свідчить про ефект частотного демпфування, а також про підвищення жорсткості мембрани при високочастотних навантаженнях. Це важливо для розробки та оптимізації конструкцій, які повинні працювати в певних частотних діапазонах, а також для контролю рівня вібрацій у пристроях, де мембрани виконують функції амортизації та демпфування.

Висновки до розділу 3

Дослідження процесу коливань круглої мембрани з однорідними крайовими умовами третього роду із застосуванням методу кінцевих різниць показало високу точність відтворення фізичної моделі. Використання цього методу дозволило ефективно дискретизувати хвильове рівняння в радіально симетричній системі та виконати чисельний розрахунок з урахуванням складних граничних умов. В результаті отримано стійку чисельну схему, що відповідає критерію Куранта-Фрідрікса-Леві, що підтверджує правильне відтворення хвильових процесів і забезпечує коректне поширення хвиль у системі.

Метод кінцевих різниць обрано оптимальним, з огляду на його гнучкість у застосуванні граничних умов і стійкість чисельної схеми. Серед інших числових методів цей підхід забезпечує найкраще поєднання точності та простоти реалізації, а також дозволяє контролювати крок дискретизації відповідно до потреб моделювання. Виявлено, що застосування альтернативних методів, таких як скінченні елементи чи спектральні методи, є менш ефективним для поставленої задачі.

У ході моделювання коливань осесиметричної мембрани, пружно закріпленої по контуру, отримано чисельні результати, що демонструють високу точність та надійність обраного методу. Проведене дослідження амплітудно-частотної

характеристики (АЧХ) дозволило детально оцінити динамічну реакцію мембрани на зовнішнє гармонічне навантаження в діапазоні від π до 5π рад/с. Виявлено основні резонансні частоти системи, при яких спостерігається максимальне значення амплітуди зміщень. Такі частоти є критичними, адже на них мембрана демонструє пікову чутливість до зовнішніх збурень, що є важливим для її практичного застосування.

Кількісні результати вказують на зменшення амплітуди зростанням частоти вище резонансних значень, що обґрунтовується ефектом частотного демпфування та підвищеною жорсткістю мембрани при високочастотних впливах. Таким чином, отримана АЧХ надає не лише інформацію щодо резонансів, але й дозволяє оцінити потенційні режими амортизації коливань для реальних конструкцій. Це особливо важливо для оптимізації характеристик систем, де мембрани функціонують як елементи з вібраційним навантаженням, забезпечуючи ефективне демпфування в широкому діапазоні частот.

Отримані кількісні результати свідчать про достовірне моделювання фізичних процесів коливання мембрани. Якісні показники розв'язку підтверджують об'єктивні та надійні дані, що підтверджуються чисельною стабільністю розрахунків та коректністю застосованих граничних умов.

РОЗДІЛ 4 ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ АНАЛІТИЧНОГО ТА ЧИСЕЛЬНОГО ПІДХОДІВ ДО СФОРМОВАНОЇ ЗАДАЧІ

Розділ присвячений порівнянню результатів аналітичного та чисельного підходів до моделювання осесиметричних гармонічних коливань круглої пружної мембрани. Основна мета полягає у верифікації правильності запропонованого аналітичного розв'язку та оцінці ефективності чисельних методів для вирішення подібних задач. Отримані висновки сприятимуть оптимізації методів аналізу динамічної поведінки мембран та стануть основою для подальших практичних застосувань у проектуванні й оптимізації MEMS.

4.1 Варіанти вхідних даних моделі

Наведемо чотири варіанти вхідних даних для дослідження, які можна використати для порівняння аналітичного та чисельного розв'язків:

1. Варіант №1 (базовий сценарій):

- радіус мембрани – $R = 0.1$ м;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 10.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$.

2. Варіант №2 (висока частота та жорстке кріплення):

- радіус мембрани – $R = 0.05$ м;

- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 500 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 15.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$.

3. Варіант №3 (низька частота і слабке кріплення):

- радіус мембрани – $R = 0.15 \text{ м}$;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 150 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 5.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 30 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

4. Варіант №4 (сценарій з великою амплітудою сили):

- радіус мембрани – $R = 0.08 \text{ м}$;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 200 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 50.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 70 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 80 \text{ с}^{-1}$.

Ці варіанти охоплюють різні фізичні умови, що дозволяє дослідити вплив кожного параметра на динамічну поведінку мембрани та забезпечити більш комплексне порівняння чисельного й аналітичного підходів.

4.1.1 Базовий сценарій (варіант №1)

Даний варіант вхідних даних визначає наступні параметри мембрани та зовнішньої сили:

- радіус мембрани – $R = 0.1$ м;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 10.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$.

Графічна інтерпретація аналітичного розв’язку реалізована за допомогою програми Maple 2017 представлена на рисунку 4.1.

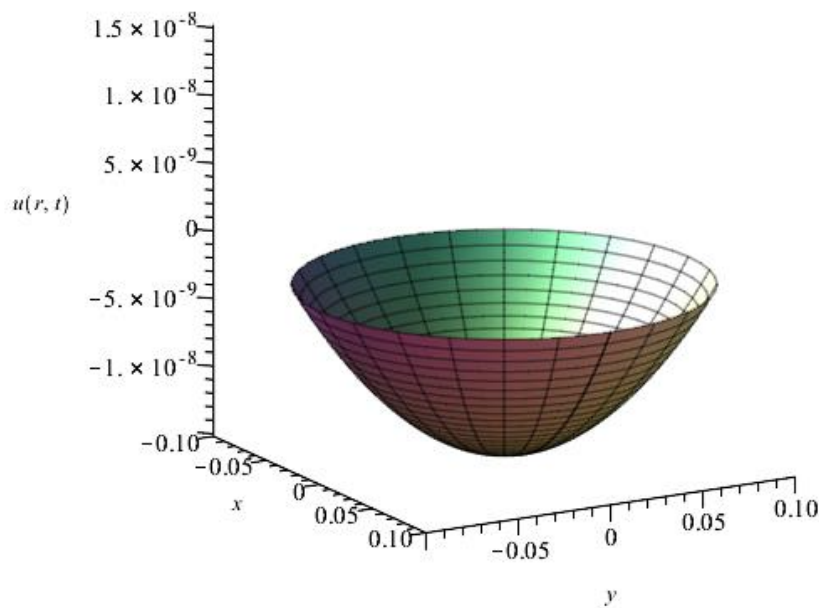


Рисунок 4.1 – Графічна інтерпретація аналітичного розв’язку із вхідними даними варіанту №1

Графічна інтерпретація чисельного розв'язку реалізована за допомогою програми, яка написана на мові програмування Python представлена на рисунку 4.2.

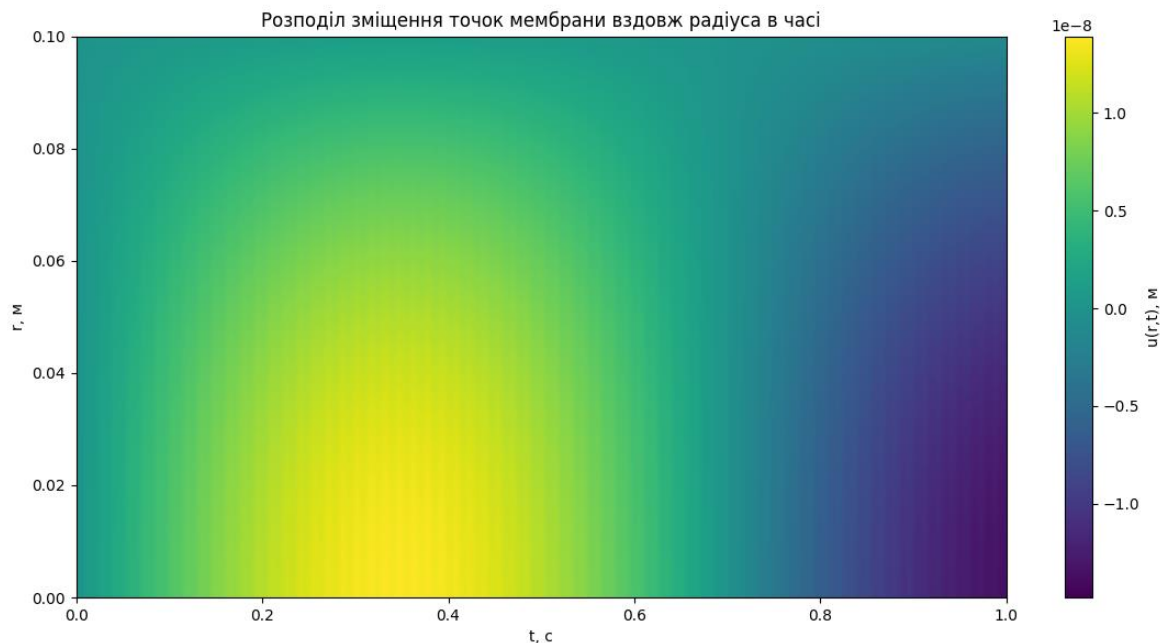


Рисунок 4.2 – Графічна інтерпретація чисельного розв'язку із вхідними даними варіанту №1

Обидва графіки показують осесиметричні гармонічні коливання, амплітуда зміщення узгоджена між двома графіками та коливаються в межах від 0 м до $1.5 \cdot 10^{-8}$ м.

4.1.2 Сценарій з високою частотою та жорстким кріпленням (варіант №2)

Даний варіант вхідних даних визначає наступні параметри мембрани та зовнішньої сили:

- радіус мембрани – $R = 0.05$ м;

- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 500 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 15.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- натяг мембрани – $T = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$.

Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку реалізована за допомогою програми Maple 2017 представлена на рисунку 4.3.

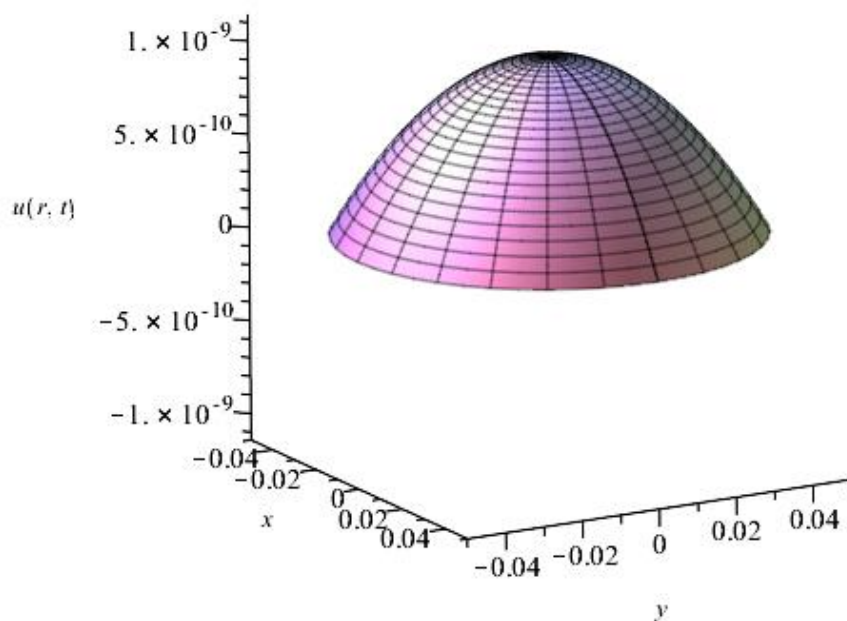


Рисунок 4.3 – Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку із вхідними даними варіанту №2

Графічна інтерпретація чисельного розв'язку реалізована за допомогою програми, яка написана на мові програмування Python представлена на рисунку 4.4.

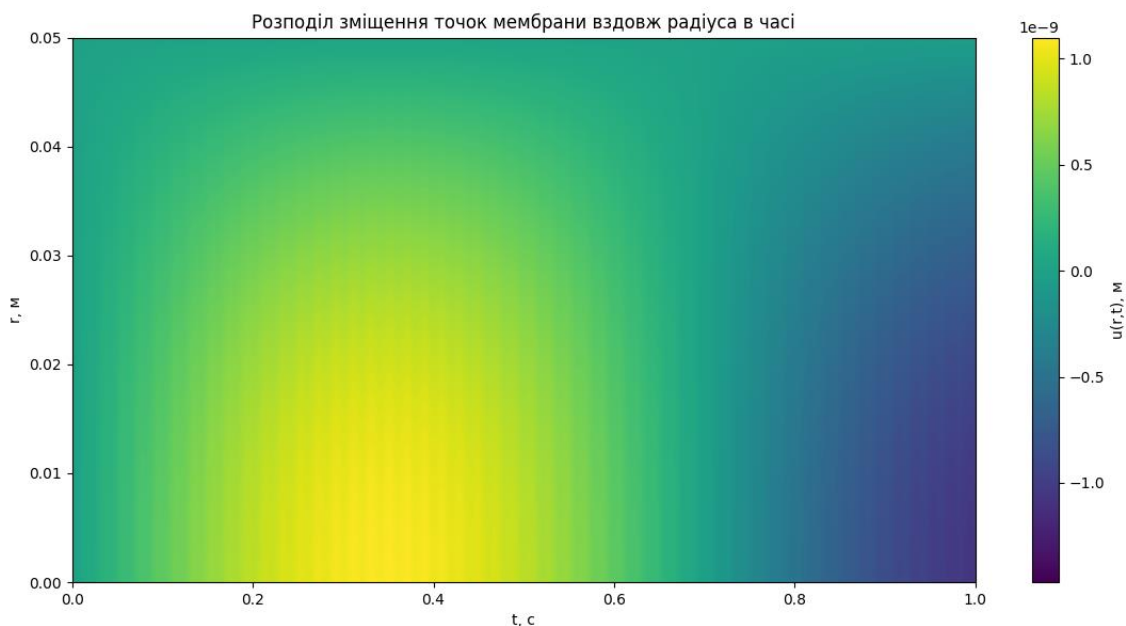


Рисунок 4.4 – Графічна інтерпретація чисельного розв’язку із вхідними даними варіанту №2

Обидва графіки показують осесиметричні гармонічні коливання, амплітуда зміщення узгоджена між двома графіками та коливаються в межах від 0 м до $1.2 \cdot 10^{-9}$ м.

4.1.3 Сценарій із низькою частотою та слабким кріпленням (варіант №3)

Даний варіант вхідних даних визначає наступні параметри мембрани та зовнішньої сили:

- радіус мембрани – $R = 0.15$ м;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 150 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 5.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;

- натяг мембрани – $T = 30 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку реалізована за допомогою програми Maple 2017 представлена на рисунку 4.5.

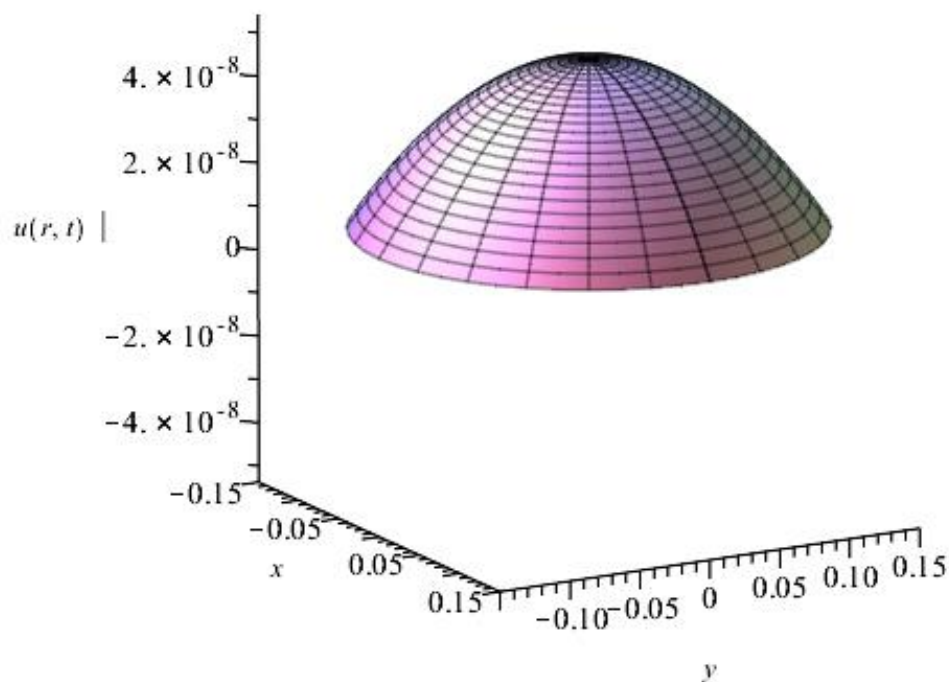


Рисунок 4.5 – Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку із вхідними даними варіанту №3

Графічна інтерпретація чисельного розв'язку реалізована за допомогою програми, яка написана на мові програмування Python представлена на рисунку 4.6.

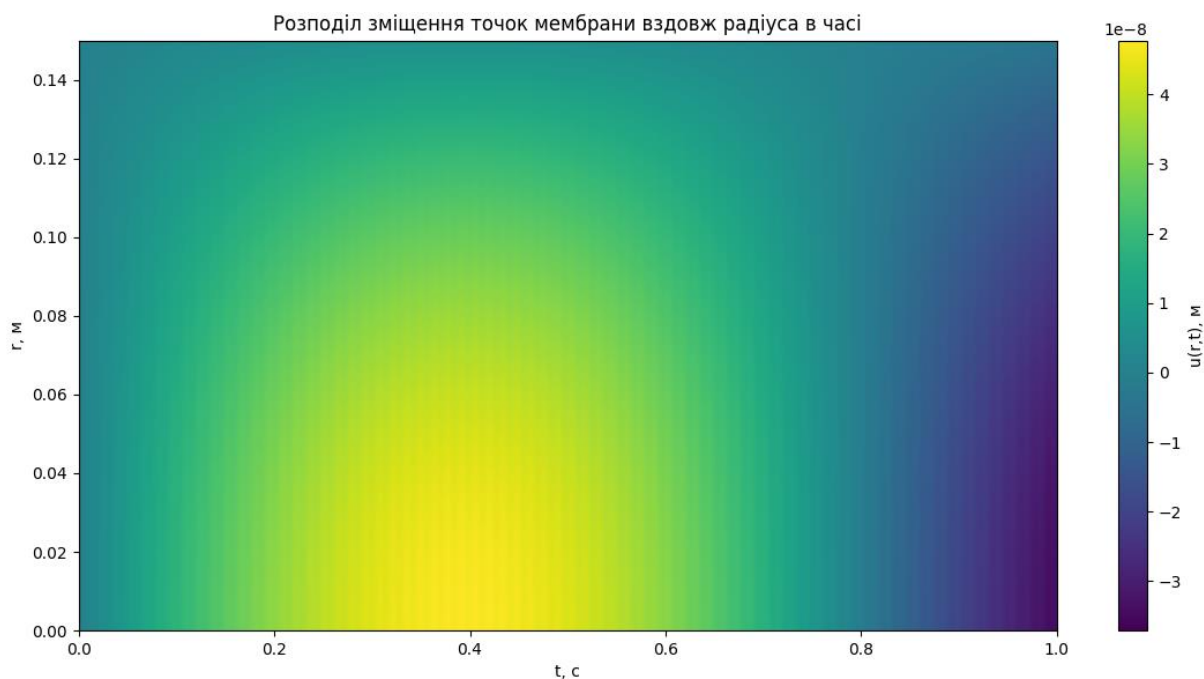


Рисунок 4.6 – Графічна інтерпретація чисельного розв’язку із вхідними даними варіанту №3

Обидва графіки показують осесиметричні гармонічні коливання, амплітуда зміщення узгоджена між двома графіками та коливаються в межах від 0 м до $5 \cdot 10^{-8}$ м.

4.1.4 Сценарій з великою амплітудою сили (варіант №4)

Даний варіант вхідних даних визначає наступні параметри мембрани та зовнішньої сили:

- радіус мембрани – $R = 0.08$ м;
- коефіцієнт жорсткості кріплення по периметру – $h = 200 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;
- швидкість поширення хвиль у мембрані – $a = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- амплітуда зовнішньої сили – $P_o = 50.0 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$;

- натяг мембрани – $T = 70 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- частота зовнішньої сили – $\omega = 80 \text{ с}^{-1}$.

Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку реалізована за допомогою програми Maple 2017 представлена на рисунку 4.7.

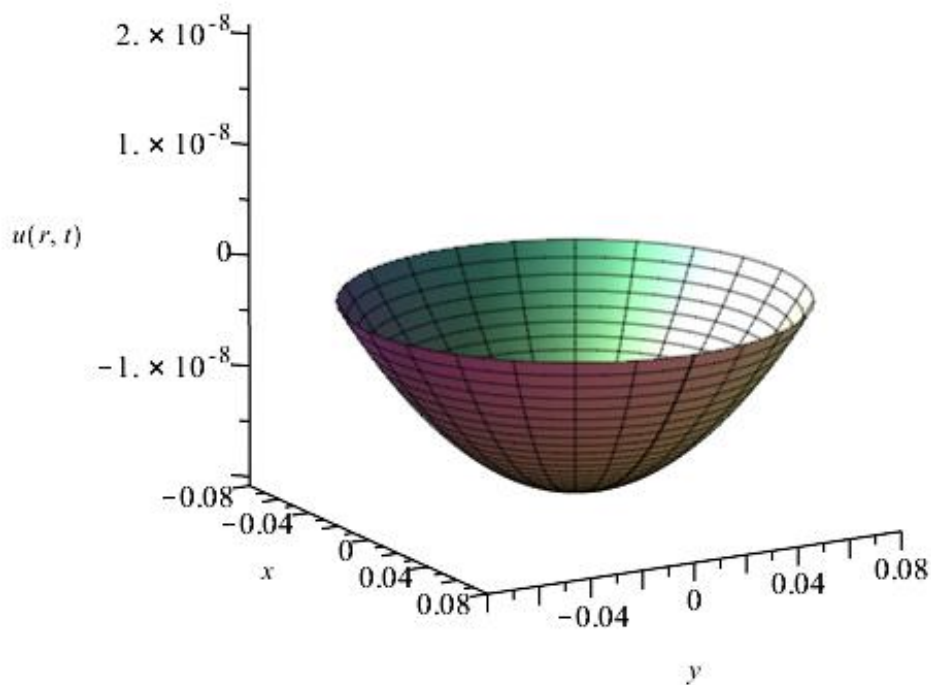


Рисунок 4.7 – Графічна інтерпретація аналітичного розв'язку із вхідними даними варіанту №4

Графічна інтерпретація чисельного розв'язку реалізована за допомогою програми, яка написана на мові програмування Python представлена на рисунку 4.8.

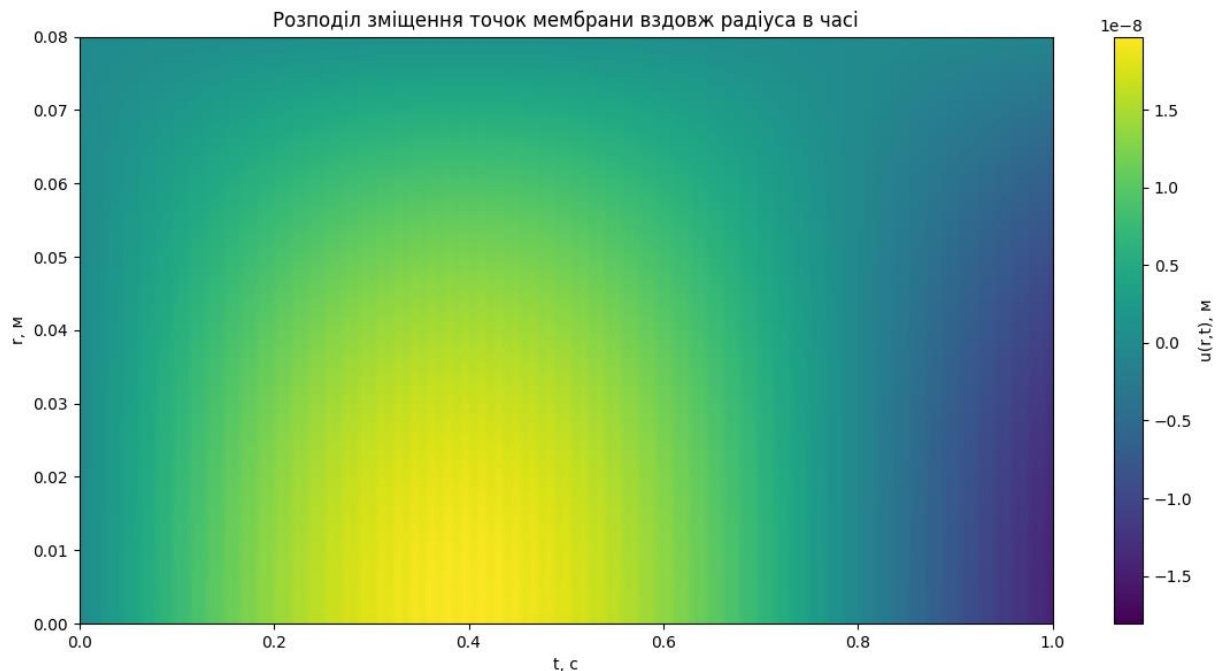


Рисунок 4.8 – Графічна інтерпретація чисельного розв’язку із вхідними даними варіанту №4

Обидва графіки показують осесиметричні гармонічні коливання, амплітуда зміщення узгоджена між двома графіками та коливаються в межах від 0 м до $2 \cdot 10^{-8}$ м.

Висновки до розділу 4

Аналіз отриманих результатів моделювань засвідчив високу ступінь відповідності між чисельним і аналітичним розв’язками. Зміщення $u(r, t)$, отримане чисельним методом, узгоджується з аналітичними даними як за амплітудою, так і за динамікою коливань. Зокрема, максимальна амплітуда зміщення в обох випадках збігається, що свідчить про фізичну правдоподібність результатів. На чисельному

графіку чітко видно гармонійний характер хвильового процесу, тоді як аналітична візуалізація акцентує увагу на просторовій симетрії мембрани.

Різниця у підходах до представлення результатів дозволяє краще зрозуміти їх специфіку. Чисельний розв'язок у форматі 2D-карти забезпечує деталізовану інформацію про часову динаміку зміщення для кожного радіуса. Аналітичний розв'язок у вигляді 3D-графіка підкреслює геометричну структуру коливального процесу, що важливо для оцінки загальної фізичної поведінки мембрани. Проте незначні розбіжності можуть виникати через дискретизацію в чисельному методі, хоча вони не впливають на загальну відповідність результатів.

Таким чином, проведений аналіз демонструє коректність чисельного моделювання гармонічних коливань. Аналітичний розв'язок виступає засобом верифікації чисельної схеми, підтверджуючи її точність. У свою чергу, чисельний метод забезпечує можливість розв'язання задач зі складнішими початковими або граничними умовами, що недоступно для аналітичного підходу. Обидва підходи показують осесиметричну поведінку, характерну для задач із радіальною симетрією. Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень у галузі моделювання коливальних процесів у мембранних структурах.

ВИСНОВКИ

Розгляд мікросистемних технологій (МСТ) та мікроелектромеханічних систем (МЕМС) свідчить про значні досягнення в розвитку матеріалів, технологій виготовлення та інтеграції електроніки. МЕМС сприяє зменшенню розмірів пристроїв, зниженню енергоспоживання, підвищенню точності й швидкості функціонування, що важливо для медичних та екологічних застосувань. Проте технологічний процес виготовлення МЕМС залишається складним з високим рівнем відбраковування, що вимагає удосконалення процесів. Використання різноманітних фізичних явищ для активації систем розширює їх можливості й стикається з технологічними викликами. Подальші дослідження мають потенціал для значного впливу на інновації та науково-технічний прогрес у цих сферах.

Результати дослідження аналітичної моделі вимушених гармонічних осесиметричних коливань круглої мембрани з пружно закріпленим краєм під рівномірно розподіленим навантаженням дозволяють краще зрозуміти вплив таких параметрів, як частота зовнішнього навантаження, жорсткість закріплення та розміри мембрани на її динамічну поведінку. Розв'язок задачі методом Фур'є зводить її до системи крайових задач, що дає змогу оцінити вплив фізичних характеристик на динамічні властивості мембрани. Одержані результати підтверджуються графічною візуалізацією і мають потенціал для використання в проектуванні сенсорних елементів і пристроїв на основі МЕМС.

Отримана анімаційна візуалізація підкреслює симетричний коливальний процес, що відповідає характеру задачі. Окрім цього, показує геометричну форму мембрани та гармонічний характер хвиль, що підтверджується регулярністю зміщень у часі. Така анімація зручна для візуалізації структури мембрани та її симетрії та може бути корисними для прогнозування поведінки мембран у реальних умовах і можуть

знайти застосування в розробці та оптимізації сенсорних елементів та інших пристроїв на основі MEMS.

Чисельне дослідження моделі кругової пружної мембрани в контексті мікроелектромеханічних систем (MEMS) дозволило отримати залежність зміщення мембрани вздовж радіуса у часі, що відображає її динамічні характеристики під дією зовнішніх сил. Це підтвердило коректність обраного підходу моделювання та його застосовність для аналізу мембран, які використовуються в акустичних системах MEMS. Аналіз амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) показав наявність резонансних частот, на яких амплітудні зміщення мембрани досягають максимальних значень, що свідчить про придатність методики для вивчення резонансних властивостей таких мембран.

Аналіз результатів моделювання продемонстрував високу узгодженість між чисельним та аналітичним розв'язками задачі осесиметричних коливань круглої мембрани. Чисельний метод забезпечив точне відтворення динаміки зміщення $u(r, t)$, яке відповідає аналітичним даним за амплітудою і формою коливань, підтверджуючи фізичну правдоподібність результатів. Візуалізація у форматі 2D-карти дозволила відобразити часову еволюцію зміщення, тоді як аналітичне представлення підкреслило просторову симетрію системи. Незначні розбіжності, спричинені дискретизацією чисельного методу, не вплинули на загальну відповідність даних. Аналітичний підхід слугує засобом верифікації чисельної схеми, тоді як чисельний метод ефективно вирішує задачі зі складними крайовими умовами. Обидва підходи підтвердили осесиметричний характер коливань, що створює основу для подальших досліджень коливальних процесів у мембранних структурах, зокрема в контексті мікроелектромеханічних систем (MEMS).

Виявлення основних та вищих резонансних частот мембрани є важливим для її інтеграції в акустичні випромінювачі, сенсори та інші MEMS-пристрої, де критично важливо точно контролювати динамічні параметри. Результати показали, що існує

пороговий діапазон значень частот, починаючи з якої зростання частоти викликає зниження амплітуди коливань, що вказує на ефект частотного демпфування. Це відкриває можливість створення нових пристроїв із оптимізованим частотним демпфуванням для застосувань, де мембрани слугують не лише випромінювачами звуку, але й елементами амортизації або демпфування.

Загалом, отримані результати підтверджують достовірність і точність чисельного підходу на основі неоднорідного хвильового рівняння. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення впливу змінних параметрів зовнішніх збуджень і граничних умов, що дозволить вдосконалити моделі для проектування більш стійких і надійних MEMC-мембран у різних галузях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Філяшкін М. К. Мікроелектромеханічні системи: Навчальний посібник. – К.: НАУ, 2019. – 276 с.
2. Ishfaqe, A.; Rahaman, A.; Kim, B. Bioinspired low noise circular-shaped MEMS directional microphone. *J. Micro/Nanolithogr. MEMS MOEMS* 2019, 18, 1; doi: 10.1117/1.JMM.18.1.010501
3. S. Zhang et al., "Annularly Grooved Diaphragm Pressure Sensor With Embedded Silicon Nanowires for Low Pressure Application," in *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 23, no. 6, pp. 1396-1407, Dec. 2014, doi: 10.1109/JMEMS.2014.2313635
4. Reeves, J.; Jayne, R.; Barrett, L.; White, A.; Bishop, D. Fabrication of multi-material 3D structures by the integration of direct laser writing and MEMS stencil patterning. *Nanoscale* 2019, 11, 3261–3267; doi:10.1039/C8NR09174A
5. Zhang, H.; Wei, X.; Ding, Y.; Jiang, Z.; Ren, J. A low noise capacitive MEMS accelerometer with anti-spring structure. *Sens. Actuators A Phys.* 2019, 296, 79–86; doi:10.1016/j.sna.2019.06.051
6. Shah, M.A.; Shah, I.A.; Lee, D.-G.; Hur, S. Design approaches of MEMS microphones for enhanced performance. *J. Sens.* 2019, 2019, 26; doi:10.1155/2019/9294528
7. Теслюк В. М. Методи проектування мікроелектромеханічних систем / АСУ и пристрої автоматики : Всеукр. міжвед. наук.-техн. збірник – Харків : ХТУРЄ, 2006. – Вип. 134. – 82 – 89 с.
8. E. Gaura and R. M. Newman, "Smart, intelligent and cogent MEMS based sensors," *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent*

- Control*, 2004., Taipei, Taiwan, 2004, pp. 431-436, doi: 10.1109/ISIC.2004.1387722
9. James H. Smith, Stephen Montague, Jeffry J. Sniegowski et al., "Characterization of the embedded micromechanical device approach to the monolithic integration of MEMS with CMOS", *Micromachining and Microfabrication Process Technology II* 2879, pg. 306, (1996); doi:10.1117/12.251218
 10. J.M. Bustillo, Roger T. Howe, Richard S. Muller, "Surface micromachining for microelectromechanical systems", *Proceedings of the IEEE* 86(8), pg. 1552, (1998); doi:10.1109/5.704260
 11. Bogue, R., "MEMS sensors: past, present and future", *Sensor Review*, Vol. 27 No. 1, pp. 7-13 (2007). doi:10.1108/02602280710729068
 12. Sun, Y.; Dong, Y.; Gao, R.; Chu, Y.; Zhang, M.; Qian, X.; Wang, X. Wearable pulse wave monitoring system based on MEMS sensors. *Micromachines* 2018, 9, 90; doi:10.3390/mi9020090
 13. Є.О. Швачко, В.С. Герасимчук, Вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм, Матеріали XX всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики” (15 червня 2022, Київ, Україна), с.95-98.
 14. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
 15. Вержбицкий В.М. Основа численных методов[Текст]/ В. М. Вержбицкий. - М.: Высш. шк., 2002. - 840 с.
 16. Калиткин Н.Н. Численные методы[Текст]/Н.Н.Калиткин.-М.:Наука, 1972.- 512 с.

17. Gerardo T, Heriberto A, José AG, Ricardo R, José GT. A meshless finite difference scheme applied to the numerical solution of wave equation in highly irregular space regions. *Comput Math Appl* (2023) 136:25–33. doi:10.1016/j.camwa.2023.01.035
18. Wu Z, Alkhalifah T, Zhang Z. A partial-low-rank method for solving acoustic wave equation. *J Comput Phys* (2019) 385:1–12. doi:10.1016/j.jcp.2019.01.054
19. Young DL, Gu MH, Fan CM. The time-marching method of fundamental solutions for wave equations. *Eng Anal Boundary Elem* (2009) 33:1411–25. doi:10.1016/j.enganabound.2009.05.008
20. Rezvan S. A meshless point collocation method for 2-D multi-term time fractional diffusion-wave equation. *Numer Algorithms* (2017) 74:1145–68. doi:10.1007/s11075-016-0190-z
21. Ullmann, P., Bretthauer, C., Schneider, M., & Schmid, U. Stress analysis of circular membrane-type MEMS microphones with piezoelectric read-out. *Sensors and Actuators A: Physical* (2023), 349, 114003. doi.org:10.1016/j.sna.2022.114003
22. Iovine, G., & Cicala, G. A 2D membrane MEMS device model with fringing field: Curvature-dependent electrostatic field and optimal control. *Mathematics* (2021), 9(5), 465. doi.org:10.3390/math9050465
23. Li, J., Zhang, Y., & Sun, Y. Finite element analysis of the dynamic behavior of micro-circular membranes under electrostatic actuation. *Journal of Micromechanics and Microengineering* (2019), 29(7), 074004. doi.org:10.1088/1361-6439/ab1b57
24. Yang, Y., & Wang, Y. Numerical simulation of dynamic response of circular micro-membrane sensors under harmonic excitation. *Applied Mathematical Modelling* (2020), 80, 705–722. doi.org:10.1016/j.apm.2019.10.014
25. Кузьменко В.І. Варіаційні методи аналізу математичних моделей [Текст] В.І. Кузьменко. - Д.:ДНУ, 1997. - 120 с.

26. Кузьменко В.І. Вступ до методу скінченних елементів [Текст]/ В.І. Кузьменко. - Д.: ДНУ, 2002. - 84 с.
27. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики [Текст]/ Г. И. Марчук. - М.: Наука, 1980. - 608 с.
28. Самарский А.А. Численные методы математической физики [Текст]/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Наука, 2003. - 316 с.
29. Фельдман А. П. Чисельні методи в інформатиці [Текст]/ А. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. - К.: ВНУ, 2006. - 480 с.
30. Швачко Є.О., Решетняк С.О., Вивчення властивостей мікроелектромеханічної системи (МЕМС) на основі моделі осесиметричних коливань круглої пружної поверхні, Матеріали XLV International scientific and practical conference “Key Aspects of the Development of Scientific Research in Modern Conditions” (October 30-November 1, 2024) Constanta, Romania. International Scientific Unity, 2024. 162-167 p.
31. Patel, S., & Agarwal, A. Numerical simulation of MEMS devices: A study of membrane deformation due to electrostatic forces. *Microelectronics Journal* (2018), 72, 21-27. doi.org:10.1016/j.mejo.2018.05.004
32. Rana, A., & Bhatti, M. Dynamic analysis of microelectromechanical systems with circular membranes under varying boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration* (2021), 487, 115684. doi.org:10.1016/j.jsv.2020.115684
33. Zhang, L., & Lee, H. Investigation of the nonlinear behavior of circular membranes in MEMS using the finite element method. *Journal of Micromechanics and Microengineering* (2022), 32(4), 045019. doi.org:10.1088/1361-6439/abf5f7
34. Lee, J., & Kim, K. Finite element modeling of circular membranes for MEMS applications. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* (2020), 17(8), 3409-3416. doi.org:10.1166/jctn.2020.8674

- 35.Liang, Z., & Li, M. A study on the mechanical and electromechanical properties of circular membranes in MEMS devices. *Materials Science in Semiconductor Processing* (2019), 95, 149-156. doi.org:10.1016/j.mssp.2019.05.015
- 36.Chen, X., & Liu, T. Electrostatic actuation of circular membranes in MEMS devices: A numerical study. *Microelectronic Engineering* (2022), 249, 111541. doi.org:10.1016/j.mee.2022.111541
- 37.Singh, R., & Shah, A. Analytical and numerical investigation of MEMS-based circular membrane structures. *International Journal of Solids and Structures* (2019), 163, 10-23. doi.org:10.1016/j.ijsolstr.2019.04.006
- 38.Kumar, P., & Nanda, A. Dynamic analysis of microelectromechanical circular membranes under applied electrostatic forces. *Computational Materials Science* (2021), 187, 110070. doi.org:10.1016/j.commatsci.2020.110070
- 39.Thomas, G., & Sushant, S. Nonlinear response of circular micro-membranes under varying mechanical and electrostatic loading conditions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* (2020), 30(12), 2257-2278. doi.org:10.1142/S0218202520500845
- 40.Xu, D., & Huang, Y. Electromechanical analysis of circular membranes in MEMS applications using finite element simulations. *Computers, Materials & Continua* (2023), 70(2), 1881-1896. doi.org:10.32604/cmc.2023.019317
- 41.Wang, L., & Li, J. The electromechanical coupling effect on the dynamic performance of circular membrane-based MEMS devices. *Sensors and Actuators A: Physical* (2021), 317, 112484. doi.org:10.1016/j.sna.2020.112484
- 42.Kim, J., & Park, M. Numerical investigation of vibration characteristics of circular membrane in MEMS resonators. *Journal of Sound and Vibration* (2020), 469, 115075. doi.org:10.1016/j.jsv.2019.115075

43. Zhang, L., & Guo, Y. Dynamic modeling of electrostatically actuated circular micro-membranes: A numerical approach. *Computational Mechanics* (2018), 62(4), 893-903. doi.org:10.1007/s00466-018-1512-2
44. Chen, Y., & Zhang, Z. Study of MEMS circular membrane deflection using finite element analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2021), 386, 112580. doi.org:10.1016/j.cam.2020.112580
45. Guo, Y., & Zhou, H. Effect of edge effects on the mechanical performance of circular membranes in MEMS sensors. *Smart Materials and Structures* (2022), 31(6), 065020. doi.org:10.1088/1361-665X/ac64da
46. Srivastava, P., & Sharma, N. Numerical investigation of a circular membrane MEMS sensor for gas detection. *Sensors* (2021), 21(10), 3352. doi.org:10.3390/s21103352
47. Naresh K. Supercloseness analysis of a stabilizer-free weak Galerkin finite element method for viscoelastic wave equations with variable coefficients. *Adv Comput Math* (2023) 49:12. doi:10.1007/s10444-023-10010-w
48. Huang YQ, Li JC, Li D. Developing weak Galerkin finite element methods for the wave equation. *Numer Methods Partial Differential Equations* (2017) 33(3):868–84. doi:10.1002/num.22127
49. Najarzadeh L, Movahedian B, Azhari M. Numerical solution of scalar wave equation by the modified radial integration boundary element method. *Eng Anal Boundary Elem* (2019) 105:267–78. doi:10.1016/j.enganabound.2019.04.027
50. Wang XP, Gao FZ, Sun ZJ. Weak Galerkin finite element method for viscoelastic wave equations. *J Comput Appl Math* (2020) 375:112816. doi:10.1016/j.cam.2020.112816
51. Han WM, Song CH, Wang F, Gao JH. Numerical analysis of the diffusive-viscous wave equation. *Comput Math Appl* (2021) 102:54–64. doi:10.1016/j.camwa.2021.10.003

- 52.Lin J, Bai J, Reutskiy S, Lu J. A novel RBF-based meshless method for solving time-fractional transport equations in 2D and 3D arbitrary domains. Eng Comput (2023) 39:1905–22. doi:10.1007/s00366-022-01601-0
- 53.Zheng H, Yang ZJ, Zhang CZ. A local radial basis function collocation method for band structure computation of 3D phononic crystals. Appl Math Model (2020) 77:1954–64. doi:10.1016/j.apm.2019.09.006

ДОДАТОК А

Код програми на Python для моделювання чисельного розв'язку поставленої задачі про вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметри задачі
R = 0.00005 # Радіус
T = 10.0 # Час
N = 1000 # Кількість просторових точок
M = 100000 # Кількість часових кроків
a = 0.29 # Швидкість
h = 10000 # Гранична умова
P0 = 0.001 # Амплітуда сили
omega = 1000 # Кутова частота
dt = T / M # Часовий крок
dr = R / N # Просторовий крок

# Перевірка числа Куранта
C = a * dt / dr
if C > 1:
    print(f"Попередження: число Куранта C = {C:.2f} > 1. Скорегуйте dt або dr.")
    dt = dr / a * 0.9 # Зменшуємо dt для стабільності
    print(f"Часовий крок змінено на dt = {dt:.2e} для забезпечення стабільності.")

# Ініціалізація масивів
u = np.zeros((N + 1, M + 1)) # u(i, n)

# Початкові умови
u[:, 0] = 0 # u(r, 0) = 0
u[:, 1] = 0 # u_t(r, 0) = 0

# Функція сили f(t)
def f(t):
    return P0 * np.sin(omega * t)

# Явна схема кінцевих різниць
for n in range(1, M):
    for i in range(0, N):
        r = i * dr
        if i == 0:
            # Спеціальний випадок для r = 0 (симетрія)
            u[i, n + 1] = (2 * u[i, n] - u[i, n - 1] +
                           dt ** 2 * a ** 2 * (2 * (u[i + 1, n] - u[i, n]) / dr ** 2) +
                           dt ** 2 * f(n * dt))
        else:
            u[i, n + 1] = (2 * u[i, n] - u[i, n - 1] +
                           dt ** 2 * a ** 2 * (
                               (u[i + 1, n] - 2 * u[i, n] + u[i - 1, n]) / dr ** 2 +
                               (1 / r if r > 1e-10 else 0) * (u[i + 1, n] - u[i - 1,
n]) / (2 * dr)) +
                           dt ** 2 * f(n * dt))
```

```

# Граничні умови на  $r = R$  (Нехай  $u_R = u[N]$ )
u[N, n + 1] = (u[N - 1, n + 1] - h * dr * u[N, n]) / (1 + h * dr)

# Візуалізація результату
plt.imshow(u, extent=[0, T, 0, R], aspect='auto', origin='lower')
plt.colorbar(label='u(r,t), м')
plt.xlabel('t, с')
plt.ylabel('r, м')
plt.title('Розподіл зміщення точок мембрани вздовж радіуса в часі')
plt.show()

```

ДОДАТОК Б

Код програми на Python для моделювання амплітудно-частотної характеристики чисельного розв'язку поставленої задачі про вимушені гармонічні осесиметричні коливання круглої мембрани із пружно закріпленим краєм.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметри задачі
R = 0.00005 # Радіус
T = 1.0 # Час
N = 100 # Кількість просторових точок
M = 1000 # Кількість часових кроків
a = 0.29 # Швидкість
h = 10000 # Гранична умова
P0 = 0.001 # Амплітуда сили
dt = T / M # Часовий крок
dr = R / N # Просторовий крок

# Ініціалізація діапазону частот та масиву для зберігання амплітуд
frequencies = np.linspace(1000, 10000, 100) # Частоти від
amplitudes = []

# Розрахунок для кожної частоти
for omega in frequencies:
    # Ініціалізація масиву зміщень
    u = np.zeros((N + 1, M + 1))
    max_amplitude = 0 # Максимальна амплітуда для поточної частоти

    # Явна схема кінцевих різниць для поточної частоти
    for n in range(1, M):
        for i in range(1, N):
            r = i * dr
            if i == 0:
                # Випадок r = 0 (симетрія)
                u[i, n + 1] = (2 * u[i, n] - u[i, n - 1] +
                               dt ** 2 * a ** 2 * (2 * (u[i + 1, n] - u[i, n]) / dr
** 2) +
                               dt ** 2 * P0 * np.sin(omega * n * dt))

            else:
                u[i, n + 1] = (2 * u[i, n] - u[i, n - 1] +
                               dt ** 2 * a ** 2 * (
                               (u[i + 1, n] - 2 * u[i, n] + u[i - 1, n]) / dr **
2 +
                               (1 / r) * (u[i + 1, n] - u[i - 1, n]) / (2 * dr))
+
                               dt ** 2 * P0 * np.sin(omega * n * dt))

    # Гранична умова на r = R
    u[N, n + 1] = (u[N - 1, n + 1] - h * dr * u[N, n]) / (1 + h * dr)

    # Оновлення максимальної амплітуди
    max_amplitude = max(max_amplitude, np.max(np.abs(u[:, n + 1])))

# Збереження амплітуди для поточної частоти
```

```
amplitudes.append(max_amplitude)

# Побудова графіка амплітудно-частотної характеристики
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(frequencies, amplitudes, '-o', color='b', markersize=4)
plt.title("Амплітудно-частотна характеристика мембрани")
plt.xlabel("Частота, рад/с")
plt.ylabel("Максимальна амплітуда зміщень (м)")
plt.grid(True)
plt.show()
```