

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. АНАЛІЗ ТИПОВОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ: РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

Укладачі: Н.І. Бурау, Д.О. Півторак, С.А. Мураховський

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2025

УДК 681.5 (075.8)

T11

Укладачі: *Бурау Надія Іванівна, д-р техн. наук, проф.*
Півторак Діана Олександрівна, канд. техн. наук, доц.
Мураховський Сергій Анатолійович, канд. техн. наук

Рецензент *Антонюк В. С., д-р техн. наук, проф., професор кафедри*
комп'ютерно-інтегрованих технологій виробництва приладів

Відповідальний редактор *Павловський О.М., канд. техн. наук, доц.*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 10.04.2025 р.)
за поданням вченої ради Приладобудівного факультету
(протокол № 5/25 від 31.03.2025 р.)

T11 Теорія автоматичного керування. Аналіз типової системи автоматичного керування: рекомендації до виконання домашньої контрольної роботи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні» спец. 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Н.І. Бурау, Д.О. Півторак, С.А. Мураховський. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 63 с.

Навчальний посібник містить стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання домашньої контрольної роботи із аналізу часових та частотних характеристик елементів системи автоматичного керування та систем в цілому, приклади їх визначення за наведеними методиками, індивідуальне завдання для виконання домашньої контрольної роботи.

Виконання домашньої контрольної роботи, пов'язане з визначенням передатних функцій, вагових та перехідних характеристик, частотних характеристик, оцінкою точності та стійкості систем автоматичного керування, сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання, зокрема при виконанні розрахункових та контрольних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування».

УДК 681.5 (075.8)

Реєстр. № НП 24/25-453. Обсяг 2,86 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	5
1.1. Основні характеристики елементів систем автоматичного керування.....	5
1.1.1. Визначення передатних функцій елементів системи автоматичного керування.....	5
1.1.2. Часові характеристики ланок (систем) автоматичного керування.....	8
1.2. Перетворення структурних схем та визначення передатних функцій САК.....	13
1.3. Частотні характеристики динамічних ланок.....	16
1.4. Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.....	18
1.5. Оцінка точності САК.....	21
1.6. Оцінка стійкості САК.....	23
1.6.1. Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца.....	23
1.6.2. Частотний критерій стійкості Михайлова.....	25
2. ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	27
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	63

ВСТУП

Навчальний посібник складений відповідно до чинного силабусу кредитного модуля «Теорія автоматичного керування – 1. Теорія лінійних систем автоматичного управління» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за спеціальністю 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні». Кредитний модуль призначений для забезпечення підготовки майбутніх бакалаврів з методів аналізу лінійних неперервних систем автоматичного керування (САК) процесами та технологічними об'єктами, які є предметом професійного інтересу. Цей навчальний посібник також може використовуватися студентами інших спеціальностей або освітніх програм.

Мета даного навчального посібника – допомогти студентам в освоєнні методів аналізу лінійних систем автоматичного керування та надбанні необхідних практичних навичок аналізу типових лінійних систем в процесі виконання домашньої контрольної роботи. Домашня контрольна робота виконується як різновид самостійної роботи студента. Виконання контрольних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування» сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання. Тематика робіт присвячена питанням аналізу типових систем автоматичного керування чи з'єднань динамічних ланок, які можуть являти собою частину складної системи автоматичного керування.

Навчальний посібник містить стислі теоретичні відомості про динамічні характеристики систем автоматичного керування, завдання для домашньої контрольної роботи двох видів (аналіз розімкнених ланцюгів та аналіз замкнених систем) зі схемами, математичним описом та варіантами значень параметрів, а також приклади виконання домашньої контрольної роботи для кожного виду завдання.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Основні характеристики елементів систем автоматичного керування

2.1.1. Визначення передатних функцій елементів системи автоматичного керування

В теорії автоматичного керування елементи автоматичних систем з точки зору їх динамічних властивостей зображують за допомогою динамічних ланок. Під динамічною ланкою розуміють математичну модель штучно виділеної частини системи, яка характеризується певним (найпростішим) алгоритмом передачі сигналу зі входу ланки на її вихід (рис. 1.1).



Рис.1.1. Схематичне зображення динамічної ланки

Вхідну величину ланки позначають $x_{вх}(t)$, або, в загальному випадку, $x_1(t)$, а вихідну величину – позначають $x_{вих}(t)$, або $x_2(t)$.

Вхідна і вихідна величини відповідають фізичним величинам, що зображують дію попередньої ланки на дану ланку ($x_{вх}(t)$) і дію даної ланки на наступну ($x_{вих}(t)$). Передача сигналу ланкою відбувається тільки в одному напрямі – сигнал передається з входу ланки на її вихід. Вихід однієї ланки може бути входом іншої ланки. Рівняння динаміки елементу системи (ланки) визначає залежність його вихідної величини $x_{вих}(t)$ від вхідної величини $x_{вх}(t)$ і, як правило, подається в диференціальній формі. Ланка системи автоматичного керування (САК) може описувати технічний пристрій будь-якої фізичної природи, конструкції та призначення. Тому складання рівняння динаміки конкретної ланки є предметом відповідної галузі технічних наук (механіки, електротехніки, теплотехніки і т. ін.), до яких і слід звертатися кожного разу. Якщо відомі динамічні ланки (математичні моделі окремих частин системи) і їх зв'язки між собою, то можна отримати математичну

модель (рівняння динаміки) системи автоматичного керування.

Якщо задано диференціальне рівняння, що описує залежність вихідної величини елемента від вхідної, передатна функція ланки $W(p)$ визначається за допомогою перетворення Лапласа за нульових початкових умов.

Розглянемо визначення передатної функції ланки на прикладі диференціального рівняння електричного RL – ланцюжка (рис. 1.2):

$$T \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = kU_{\text{вх}}(t), \quad (1.1)$$

де $T = L/(R1 + R2)$ – стала часу; $k = R2/(R1 + R2)$ – коефіцієнт підсилення ланки.

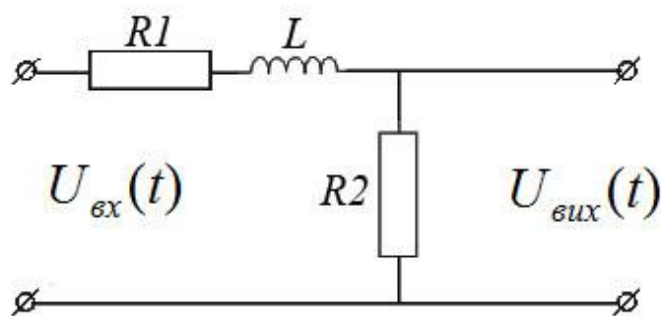


Рис.1.2. Електричний RL – ланцюжок

Запишемо початкове диференціальне рівняння в операційній формі (тобто в зображеннях за Лапласом), використовуючи такі теореми перетворення Лапласа:

1. Теорема про додавання (лінійність перетворення)

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\}.$$

2. Теорема про інтегрування

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

3. Теорема про диференціювання (за нульових початкових умов)

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p).$$

Тут $F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ – зображення за Лапласом функції часу $f(t)$; $p = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна перетворення Лапласа.

Відповідно до наведених теорем, функції часу, що входять до

диференціального рівняння, замінюються на їх зображення за Лапласом, а операції диференціювання (інтегрування) у випадку нульових початкових умов – множенням (діленням) на комплексну змінну p зображень функцій, від яких береться похідна (інтеграл).

Диференціальне рівняння (1.1) в операційній формі для випадку нульових початкових умов має вигляд:

$$(Tp + 1)U_{\text{вих}}(p) = kU_{\text{вх}}(p). \quad (1.2)$$

Передатна функція ланки (системи) $W(p)$ визначається як відношення зображень за Лапласом вихідної $X_{\text{вих}}(p)$ і вхідної $X_{\text{вх}}(p)$ величин за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}, \quad (1.3)$$

тобто передатна функція може бути визначена із рівняння динаміки ланки, записаного в операційній формі, і для рівняння (1.2) має вигляд:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (1.4)$$

Якщо елемент системи має дві вхідні величини, необхідно визначити дві передатні функції (за кожним входом). Нехай диференціальне рівняння елемента має вигляд:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_1 x(t) - k_2 f(t), \quad (1.5)$$

де $y(t)$ – вихідна величина; $x(t)$, $f(t)$ – відповідно регулююче і збурююче діяння (знак “-” показує, що за зростання $f(t)$ відбувається зменшення $y(t)$).

Покладаємо, $y = y_x - y_f$ тоді рівняння (1.5) розбивається на два рівняння:

$$T \frac{dy_x(t)}{dt} + y_x(t) = k_1 x(t), \quad (1.6)$$

$$T \frac{dy_f(t)}{dt} + y_f(t) = k_2 f(t), \quad (1.7)$$

яким відповідають дві передатні функції:

$$W_{y_x}(p) = \frac{y_x(p)}{x(p)} = \frac{k_1}{Tp + 1}, \quad (1.8)$$

$$W_{y_f}(p) = \frac{y_f(p)}{f(p)} = \frac{k_2}{Tp + 1}, \quad (1.9)$$

де y_x – вихідна величина, що зумовлена регулюючим діянням x за $f = 0$; y_f – вихідна величина, що зумовлена збурюючим діянням f за $x = 0$.

2.1.2. Часові характеристики ланок (систем) автоматичного керування

Перехідна функція ланки (системи) $h(t)$

Перехідною функцією ланки (системи) $h(t)$ називається реакція ланки (системи) на одиничне ступінчасте діяння (рис. 1.3,а), тобто це перехідний процес на виході $x_{\text{вих}}(t)$ за одиничного стрибка на вході $x_{\text{вх}}(t)$ за нульових початкових умов. Вхідний одиничний ступінчатий вплив $x_1(t) = 1[t]$ описується функцією Хевісайда $\sigma(t)$:

$$1[t] = \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Перехідна функція $h(t)$ може бути визначена вирішенням диференціального рівняння ланки (системи) звичайним або операційним методами. Для визначення $h(t)$ операційним методом в рівняння (1.3) підставимо зображення одиничної ступінчастої функції

$$X_{\text{вх}}(p) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$$

і знайдемо зображення перехідної функції:

$$H(p) = X_{\text{вих}}(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (1.10)$$

Таким чином, зображення перехідної функції ланки (системи) дорівнює передатній функції, поділеній на комплексну змінну перетворення Лапласа p .

Перехідна функція $h(t)$ визначається як обернене перетворення Лапласа (тобто оригінал) від зображення $H(p)$:

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (1.11)$$

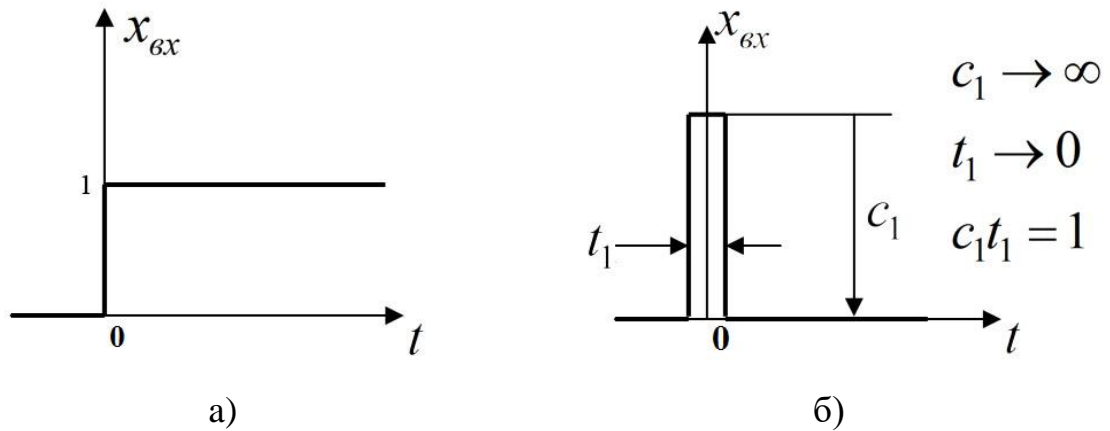


Рис. 1.3 Графічне зображення одиничного ступінчастого діяння (а) та одиничного миттєвого імпульсу (б)

Для розглянутого прикладу ланки з передатною функцією (1.4) перехідну функцію визначаємо з виразу:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{p(Tp + 1)} \right\}. \quad (1.12)$$

Імпульсна перехідна (вагова) функція ланки (системи) $w(t)$

Ваговою функцією $w(t)$ називається реакція ланки (системи) на одиничний миттєвий імпульс $\delta(t)$ на вході ланки (системи), тобто на миттєвий імпульс нескінченно великої амплітуди і одиничної площі, який називається дельта-функцією, чи функцією Дірака. Приклад апроксимації функції Дірака прямокутним імпульсом наведено на рис. 1.3,б.

Оскільки одиничний імпульс $\delta(t)$ може бути отриманий диференціюванням одиничного стрибка

$$\delta(t) = \frac{d1[t]}{dt},$$

або ж в операційній формі

$$\delta(p) = p \cdot L\{1[t]\} = \frac{p}{p} = 1,$$

то зображення вагової функції ланки (системи) дорівнює відповідній передатній функції:

$$L\{w(t)\} = W(p) \cdot \delta(p) = W(p). \quad (1.13)$$

Таким чином, щоб отримати вагову функцію $w(t)$, треба знайти

оригінал (обернене перетворення Лапласа), що відповідає передатній функції:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}, \quad (1.14)$$

де $L^{-1}\{\blacksquare\}$ - знак оберненого перетворення Лапласа.

Для ланки з передатною функцією (1.4) вираз для визначення вагової функції (1.14) запишемо у вигляді:

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{Tp + 1}\right\}. \quad (1.15)$$

*Визначення оригіналу функції за її зображенням
(обернене перетворення Лапласа)*

Розглянемо деякі способи знаходження оберненого перетворення Лапласа, які дозволяють на практиці досить просто визначати оригінал функції за її зображенням, тобто такі, що є простими інженерними методами визначення перехідної $h(t)$ і вагової $w(t)$ функцій ланки (системи) за відомою передатною функцією $W(p)$.

1. В найпростішому випадку оригінал функції можна визначити за таблицею перетворень Лапласа [1], якщо зображення є табличним.

В табл. 1.1 наведені оригінали і зображення Лапласа для деяких простих функцій, що найчастіше зустрічаються в задачах ТАК.

2. Якщо зображення за Лапласом є дробово-раціональною функцією p , то таку функцію можна розкласти на елементарні дроби і, скориставшись теоремою про додавання, обмежитись оберненим перетворенням Лапласа елементарних зображень, наведених в табл. 1.1.

3. Використання теореми про розкладання.

Початкове зображення може бути подане у вигляді:

$$y(p) = \frac{B(p)}{D(p)},$$

де $B(p)$ – поліном чисельника; $D(p)$ – поліном знаменника (характеристичний поліном).

Зображення деяких функцій часу

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3.	$A \cdot 1(t)$	$\frac{A}{p}$
4.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
6.	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
7.	$\sin\lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$
8.	$\cos\lambda t$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$
9.	$e^{-at}\sin\lambda t$	$\frac{\lambda}{(p+a)^2 + \lambda^2}$
10.	$e^{-at}\cos\lambda t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \lambda^2}$
11.	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

➤ Якщо рівняння $D(p)=0$ не має нульових коренів, а ті корені, що є, дійсні не кратні, то оригінал функції визначається за формулою:

$$y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (1.16)$$

де p_i – корені характеристичного рівняння $D(p) = 0$;

$$B(p_i) = B(p) \Big|_{p=p_i}; D'(p_i) = \frac{dD(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}.$$

Для знаходження оригіналу у вигляді (1.16) необхідно:

- 1) знайти корені p_1, p_2, \dots, p_n знаменника ($D(p) = 0$);
- 2) знайти похідну $D'(p)$;
- 3) підставити послідовно корені p_1, p_2, \dots, p_n в $D'(p)$ та $B(p)$ і знайти значення дробів $B(p_i)/D'(p_i)$, ($i = 1, n$);
- 4) скласти суму (1.16).

➤ Якщо серед коренів рівняння $D(p) = 0$ є комплексні спряжені:

$$p_k = \alpha + j\beta; p_{k+1} = \alpha - j\beta,$$

то підставляємо їх значення у $D'(p)$ та $B(p)$ і для кожної пари комплексно спряжених коренів знаходимо відношення:

$$\frac{B(p_k)}{D'(p_k)} = \frac{a + jb}{c + jd} = r + jq$$

та

$$\frac{B(p_{k+1})}{D'(p_{k+1})} = \frac{a - jb}{c - jd} = r - jq.$$

Запишемо комплексні числа в показниковій (векторній) формі:

$$\frac{B(p_k)}{D'(p_k)} = Ae^{j\varphi}$$

та

$$\frac{B(p_{k+1})}{D'(p_{k+1})} = Ae^{-j\varphi},$$

де $A = \sqrt{r^2 + q^2}$; $\varphi = \arctg q/r$,

тоді серед доданків в сумі (1.16) будуть міститись доданки виду:

$$Ae^{j\varphi} e^{(\alpha+j\beta)t} + Ae^{-j\varphi} e^{(\alpha-j\beta)t}.$$

Скориставшись тотожністю Ейлера $e^{jz} = \cos z + j \sin z$, отримаємо:

$$e^{j(\beta t + \varphi)} = \cos(\beta t + \varphi) + j \sin(\beta t + \varphi);$$

$$e^{-j(\beta t + \varphi)} = \cos(\beta t + \varphi) - j \sin(\beta t + \varphi).$$

Отже, після математичних перетворень отримаємо:

$$Ae^{j\varphi} e^{\alpha t + j\beta t} + Ae^{-j\varphi} e^{\alpha t - j\beta t} = Ae^{\alpha t} [e^{j(\beta t + \varphi)} + e^{-j(\beta t + \varphi)}] = \\ = 2Ae^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi).$$

Таким чином, якщо характеристичний поліном $D(p)$ має n дійсних коренів і s пар комплексно-спряжених коренів, вираз для оригіналу функції (1.16) набуває вигляду:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^s 2C_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k), \quad (1.17)$$

де n – число дійсних коренів; p_i – дійсний корінь; s – число пар комплексно спряжених коренів; α_k і β_k – відповідно дійсна та уявна частини пари комплексно спряжених коренів p_k ;

$$C_i = \frac{B(p_i)}{D'(p_i)}; \quad C_k = \sqrt{r_k^2 + q_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg q_k/r_k;$$

де r_k і q_k – відповідно дійсна та уявна частини виразу $B(p_k)/D'(p_k)$ у випадку комплексно-спряжених коренів.

Якщо, крім розглянутих вище, характеристичний поліном має нульовий корінь, тобто $D(p) = pD_1(p)$, то вираз (1.16) набуває вигляду:

$$y(t) = \frac{B(0)}{D_1(0)} + \sum_i \frac{B(p_i)}{p_i D'_1(p_i)} e^{p_i t}, \quad (1.18)$$

де p_i – корені рівняння $D_1(p) = 0$; $B(0) = B(p)$ при $p = 0$; $D_1(0) = D_1(p)$ при $p = 0$.

2.2. Перетворення структурних схем та визначення передатних функцій САК

Структурною схемою називається графічне зображення математичної моделі САК у вигляді сполучення ланок, яка показує з яких динамічних ланок складається система та як вони пов'язані між собою. Структурна схема в найбільш наочній формі показує математичний бік перетворення змінних за часом сигналів окремими елементами та всією системою в цілому. Структурна схема САК може бути отримана із функціональної схеми, якщо

відомі передатні функції і параметри усіх елементів системи.

Часто САК мають складну структуру і є багатоконтурними, що ускладнює операцію визначення передатних функцій системи, а відтак і аналіз її динаміки. Для зручності розрахунків характеристик автоматичних систем необхідно перетворити структурну схему системи до будь-якого бажаного вигляду, найчастіше – до одноконтурної схеми. Для цього використовуються спеціальні правила перетворення структурних схем.

Наведемо найпростіші перетворення структурних схем, використовуючи правила визначення передатних функцій для типових з'єднань ланок:

- послідовне з'єднання:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p); \quad (1.19)$$

- паралельне з'єднання:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p); \quad (1.20)$$

- ланка, охоплена зворотним зв'язком:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_{зз}(p)}, \quad (1.21)$$

де $W_1(p)$ – передатна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком; $W_{зз}(p)$ – передатна функція ланки в каналі зворотного зв'язку (знак "-" відповідає додатному зворотному зв'язку, знак "+" – від'ємному).

З використанням формул (1.20) та (1.21) для перетворення паралельних з'єднань і місцевих зворотних зв'язків, структурну схему САК приводять до одноконтурної (рис. 1.4), що дає змогу досить просто визначити передатні функції САК.

На рис. 1.4 позначено: $W_{пр}(p)$ – передатна функція ланок в прямому ланцюзі керування; $W_{зз}(p)$ – передатна функція ланок в зворотному зв'язку; $W_f(p)$ – передатна функція в каналі збурення; $\delta(p) = X(p) - Y_{зз}(p)$ – зображення сигналу розбіжності (похибка системи).

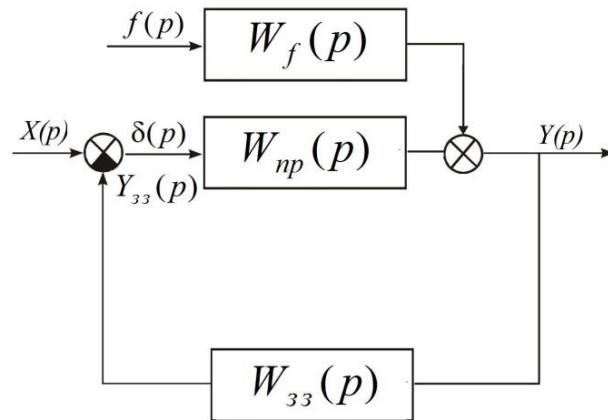


Рис. 1.4 Приклад одноконтурної структурної схеми САК

Передатна функція розімкненої системи $W_{роз}(p)$ дорівнює добутку передатних функцій всіх ланок, що входять до замкненого контуру:

$$W_{роз}(p) = W_{пр}(p) \cdot W_{зз}(p), \quad (1.22)$$

а для системи з одиничним зворотним зв'язком ($W_{зз}(p) = 1$):

$$W_{роз}(p) = W_{пр}(p). \quad (1.23)$$

Після визначення передатної функції розімкненої системи знаходимо передатні функції замкненої системи:

- за вхідним діянням:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{пр}(p) \cdot W_{зз}(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{роз}(p)}, \quad (1.24)$$

або для ($W_{зз}(p) = 1$):

$$\Phi(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)}, \quad (1.25)$$

- за похибкою системи:

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{\delta(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)}; \quad (1.26)$$

- за збуренням:

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{f(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_{роз}(p)}. \quad (1.27)$$

Вирази (1.24)-(1.27) мають однакові знаменники, які визначають

характеристичний поліном (характеристичне рівняння) $D(p)$ замкненої системи. Якщо передатну функцію розімкненої системи в загальному випадку записати у вигляді:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

то для отримання характеристичного рівняння слід до знаменника передатної функції розімкненої системи додати її чисельник:

$$D(p) = R(p) + Q(p).$$

Якщо структурна схема САК має типові з'єднання ланок (послідовне, паралельне чи місцеві зворотні зв'язки), спочатку необхідно виконати перетворення структурної схеми, щоб привести її до одноконтурної, а потім визначати передатні функції розімкненої та замкненої системи.

2.3. Частотні характеристики динамічних ланок

Комплексна передатна функція (КПФ) ланки визначається як відношення комплексного зображення вихідної величини до комплексного зображення вхідної величини в режимі усталених гармонічних коливань:

$$W(j\omega) = \frac{X_{\text{вих}}(j\omega)}{X_{\text{вих}}(j\omega)}, \quad (1.28)$$

Зазвичай, комплексну передатну функцію $W(j\omega)$ визначають з передатної функції $W(p)$ підстановкою $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p = j\omega}$$

Отриману в результаті комплексну передатну функцію можна представити в алгебраїчній формі:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (1.29)$$

де $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ – відповідно дійсна та уявна частини КПФ.

КПФ також можна подати в показниковій формі:

$$W(j\omega) = N(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.30)$$

де $N(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ – відповідно модуль та аргумент КПФ.

Якщо визначені модуль $N(\omega)$ і аргумент $\varphi(\omega)$ КПФ динамічної ланки, на вході якої діє синусоїдальний вхідний сигнал $x(t) = x_m \sin(\omega t)$, можна знайти усталену складову вихідного сигналу у вигляді:

$$y(t) = x_m N(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (1.31)$$

Таким чином, модуль $N(\omega)$ показує у скільки разів зміниться амплітуда вихідного сигналу порівняно з амплітудою вхідного сигналу в залежності від частоти, а аргумент $\varphi(\omega)$ – на скільки градусів (радіан) зсунеться фаза вихідного сигналу порівняно з фазою вхідного сигналу в залежності від частоти.

Характеристики у формулах (1.29) та (1.30) пов'язані між собою:

$$N(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

$$P(\omega) = N(\omega) \cos(\varphi(\omega)),$$

$$Q(\omega) = N(\omega) \sin(\varphi(\omega)).$$

Аналіз частотних характеристик проводиться найчастіше за їх графічними зображеннями.

Амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ) називається крива, яку описує вектор КПФ при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$. В англійській літературі АФЧХ називають діаграмою (годографом) Найквіста. АФЧХ найчастіше будується в декартових координатах, при цьому по осі абсцис відкладається дійсна частина $P(\omega)$, а по осі ординат – уявна частина $Q(\omega)$. АФЧХ також можна побудувати в полярних координатах, при цьому полярним радіусом буде модуль $N(\omega)$, а полярним кутом – аргумент $\varphi(\omega)$.

Амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) ланки (системи) називається крива залежності модуля $N(\omega)$ КПФ від частоти при змінюванні частоти від 0 до ∞ .

Фазочастотною характеристикою (ФЧХ) ланки (системи) називається крива залежності аргументу $\varphi(\omega)$ КПФ від частоти при

змінюванні частоти від 0 до ∞ .

Визначимо частотні характеристики на прикладі аперіодичної ланки, рівняння динаміки якої (1.2) було проаналізовано вище:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (1.32)$$

Комплексна передатна функція (КПФ) ланки:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{k - jk\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \end{aligned}$$

Дійсна $P(\omega)$ та уявна $Q(\omega)$ частини КПФ у цьому разі дорівнюють:

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Модуль $N(\omega)$ та аргумент $\varphi(\omega)$ КПФ визначаються залежностями:

$$N(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(T\omega).$$

2.4. Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

Розглянемо отримання частотних характеристик на прикладі передатної функції розімкненої системи

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \zeta p + 1)}, \quad (1.33)$$

де $k_{\text{роз}} = 10\text{с}^{-1}$; $T_1 = 0,1\text{с}$; $T_2 = 0,5\text{с}$; $T_3 = 0,01\text{с}$; $\zeta = 0,7$.

За наведеного значення ζ можна не враховувати горба амплітудно-частотної характеристики коливальної ланки, величина якого при цьому не перевищує значення 3 дБ.

Амплітудна і фазова частотні характеристики розімкненої системи визначаються за виразами:

$$N(\omega) = \frac{k_{\text{роз}}}{\omega} \sqrt{\frac{1 + T_1^2 \omega^2}{(1 + T_2^2 \omega^2)[(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4T_3^2 \zeta^2 \omega^2]}}, \quad (1.34)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg}T_1\omega - \operatorname{arctg}T_2\omega - \operatorname{arctg}\frac{2\zeta T_3\omega}{1 - T_3^2\omega^2}, \quad (1.35)$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) розімкненої системи визначається сумою:

$$L(\omega) = 20\lg N(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega) \quad (1.36)$$

де $L_i(\omega)$ – ЛАЧХ i -ї ланки системи.

Одиницею виміру $L(\omega)$ є децибел (відкладаємо на осі ординат), а на осі абсцис відкладається частота $\omega [c^{-1}]$ в логарифмічному масштабі.

Вираз для ЛФЧХ (зберігається у вигляді (1.35) без змін) також запишемо у вигляді алгебраїчної суми:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \quad (1.37)$$

де $\varphi_i(\omega)$ – ЛФЧХ i -ї ланки.

При побудові ЛФЧХ відлік кутів φ іде за віссю ординат в звичайному масштабі в кутових градусах чи радіанах. За віссю абсцис відкладається частота в логарифмічному масштабі.

Характеристики $L(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ будують на одному бланку, причому $\varphi(\omega)$ розташовують точно під $L(\omega)$.

ЛАЧХ і ЛФЧХ можна побудувати за виразами (1.34)-(1.36), або безпосередньо за заданою передатною функцією, використовуючи відомі асимптотичні характеристики окремих ланок.

Методика побудови асимптотичних характеристик за заданою передатною функцією розімкненої системи (рис. 1.5).

1. Визначити частоти спряження $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, де $\omega_i = \frac{1}{T_i}$, та відкласти їх значення вздовж осі частот.

2. На частоті $\omega = 1$ відкласти ординату, яка дорівнює $20\lg k_{\text{роз}}$, де $k_{\text{роз}}$ – коефіцієнт підсилення розімкненої системи, позначивши дану точку A .

3. Через точку A провести пряму з нахилом ($-v$ 20 дБ/дек), де v – порядок астатизму системи, від осі ординат до першої частоти спряження.

Даний відрізок є низькочастотною асимптотою ЛАЧХ. Якщо перша частота спряження менша за одиницю (тобто лежить зліва від частоти $\omega = 1$ на осі частот), то через точку A пройде продовження низькочастотної асимптоти.

4. Після кожної частоти спряження ω_i необхідно змінювати нахил ЛАЧХ:

– на (- 20 дБ/дек), якщо частота спряження визначається сталою часу ланки першого порядку в знаменнику $W_{роз}(p)$ (аперіодична ланка);

– на (+20 дБ/дек), якщо частота спряження визначається сталою часу ланки першого порядку в чисельнику (форсуюча ланка);

– для ланок другого порядку (аперіодична другого порядку, коливальна) нахил змінюється на (± 40 дБ/дек) (знак “+” , якщо ланка знаходиться в чисельнику $W_{роз}(p)$, а знак “-“, якщо ланка знаходиться в знаменнику).

Для побудови точної ЛФЧХ розрахунок слід проводити за формулою (1.30), а дані розрахунку звести в таблицю (табл. 1.2), за результатами розрахунку побудувати графік сумарної характеристики.

Таблиця 1.2

Результати розрахунку для побудови ЛФЧХ

ω	$\varphi_1 = -90^\circ$	$\varphi_2 = \arctg T_1 \omega$	$\varphi_3 = -\arctg T_2 \omega$	$\varphi_4 = -\arctg \frac{2\zeta T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2}$	$\varphi_{роз}(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$

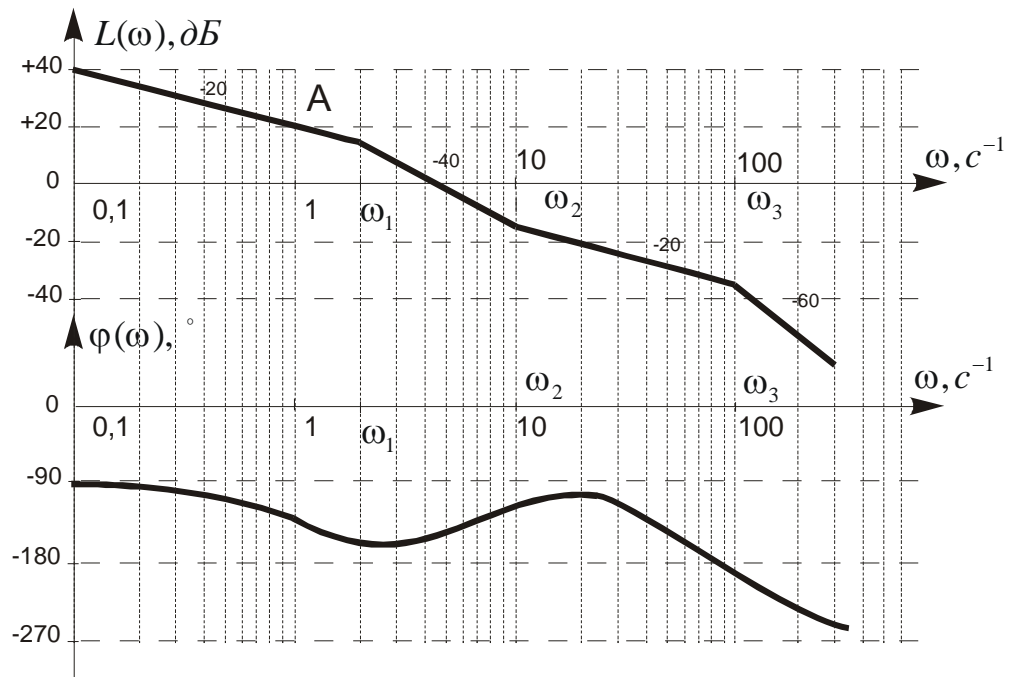


Рис. 1.5 Приклад побудови асимптотичних логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

1.5. Оцінка точності САК

В ТАК точність автоматичних систем, як правило, оцінюють за усталеними похибками, тобто за похибками в усталеному режимі, який настає після завершення перехідного процесу.

Усталені похибки САК визначають, використовуючи теорему про кінцеве значення функції:

$$\delta_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_{\delta}(p) X(p), \quad (1.38)$$

де $\Phi_{\delta}(p)$ – передатна функція замкненої системи за похибкою; $X(p)$ – зображення вхідного діяння.

Якщо визначається усталена похибка системи, зумовлена збуренням $f(t)$, то в формулі (1.38) використовуються відповідно передатна функція за збуренням $\Phi_f(p)$ і зображення збурення $F(p)$.

За сталого вхідного діяння $x(t) = x_0 = const$ і, відтак, $X(p) = \frac{x_0}{p}$ за формулою (1.38) визначимо статичну похибку САК $\delta_{ст}$.

Якщо ж на вхід системи подається діяння, яке змінюється з постійною

швидкістю $x(t) = x_1 t$, то $X(p) = \frac{x_1}{p^2}$ і кінцеве усталене значення (1.38)

називається швидкісною похибкою САК $\delta_{шв}$.

Динамічною похибкою САК $\delta_{дин}$ називається кінцеве усталене значення (1.38) за подання на вхід діяння, змінного з постійним прискоренням $x(t) = x_2 t^2$ $x(t) = x_2 t^2$ і, отже, $X(p) = \frac{2x_2}{p^3}$.

Якщо на вхід САК подається гармонічне вхідне збудження:

$$x(t) = A_m \sin \omega_x t, \quad (1.39)$$

де A_m , ω_x — відповідно амплітуда та частота вхідного діяння, тоді похибка САК також матиме гармонічний характер:

$$\delta(t) = \delta_m \sin(\omega_x t + \varphi_\delta), \quad (1.40)$$

де δ_m , φ_δ — відповідно амплітуда та фаза похибки.

Іноді визначають тільки амплітуду похибки δ_m . Для вхідного діяння (1.39), частота якого ω_x знаходиться у смузі низьких та середніх частот, де підсилення розімкненої системи більше за одиницю, тобто

$$|W_{роз}(j\omega_x)| > 1,$$

доцільно використовувати наближений вираз для визначення амплітуди δ_m . Передатну функцію замкненої системи за похибкою в цьому випадку запишемо у наближеному вигляді:

$$\Phi_\delta(j\omega_x) = \frac{1}{1 + W_{роз}(j\omega_x)} \approx \frac{1}{W_{роз}(j\omega_x)}. \quad (1.41)$$

Тоді з урахуванням (1.39) та (1.41) амплітуду похибки δ_m визначаємо за виразом:

$$\delta_m(j\omega_x) = A_m |\Phi_\delta(j\omega_x)| = \frac{A_m}{|W_{роз}(j\omega_x)|}. \quad (1.42)$$

Величину $|W_{роз}(j\omega_x)|$ можна визначити аналітичним шляхом, або, використовуючи ЛАЧХ розімкненої системи $L(\omega)$, за виразом:

$$|W_{роз}(j\omega_x)| = 10^{\frac{L(\omega_x)}{20}},$$

де $L(\omega_x)$ — ордината ЛАЧХ на частоті вхідного діяння ω_x .

1.6. Оцінка стійкості САК

Стійкість – це властивість системи, повертатися в попереднє положення рівноваги після виводу системи з нього, і після припинення змінювання вхідного впливу (збурення). Лінійна система, яка є стійкою при малих впливах (збуреннях), буде стійкою й при великих впливах (збуреннях). Нелінійна система може бути стійкою при малих впливах і нестійкою при великих.

Умовою стійкості лінійних неперервних САК є наявність від’ємних дійсних коренів чи комплексно-спряжених коренів з від’ємними дійсними частинами характеристичного рівняння (характеристичного поліному) замкненої системи. Тобто, щоб визначити, стійка система, чи ні, необхідно прирівняти характеристичний поліном замкненої системи до нуля, знайти його корені та за їх знаками прийняти відповідне рішення:

- всі корені знаходяться в лівій напівплощині комплексної площини коренів – система стійка;
- є хоча б один корінь в правій напівплощині – система не стійка;
- є хоча б одна пара коренів на уявній осі комплексної площини коренів (пара уявних коренів) – система знаходиться на границі стійкості.

На практиці зручно користуватись непрямими, без знаходження коренів характеристичного рівняння, методами оцінки стійкості, які називаються **критеріями стійкості**.

1.6.1. Алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца

Для оцінки стійкості використовується характеристичний поліном замкненої системи, стійкість оцінюється за коефіцієнтами характеристичного поліному.

Розглянемо характеристичний поліном замкненої системи:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

- **необхідна умова стійкості**

Необхідною умовою є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного

поліному $a_i > 0$ при $a_n > 0$;

- **достатня умова стійкості**

Замкнена система буде стійкою, якщо при $a_i > 0$ всі n визначників Гурвіца будуть додатними, де n – порядок характеристичного поліному:

$$\Delta_n > 0; \Delta_{n-1} > 0; \dots; \Delta_1 > 0.$$

Якщо хоча б один визначник буде від’ємним, система буде нестійкою, якщо хоча б один визначник дорівнює нулеві – система буде на границі стійкості.

Таким чином, для оцінки стійкості треба записати n визначників Гурвіца і перевірити їх знак. Визначники Гурвіца складаються з коефіцієнтів характеристичного поліному замкненої системи.

Спочатку запишемо **головний визначник Гурвіца n -го порядку** за таким правилом:

1. За головною діагоналлю запишемо коефіцієнти характеристичного поліному, починаючи з другого (a_{n-1}) і далі зі зменшенням індексів до a_0 включно.

2. Стівпці вгору від головної діагоналі заповнюємо коефіцієнтами з індексами, які зменшуються, а стівпці вниз від діагоналі – коефіцієнтами з індексами, які збільшуються.

3. Місця відсутніх коефіцієнтів заповнюємо нулями.

Визначники більш низького порядку отримуємо з визначників більш високого порядку, викреслюючи один рядок знизу і один стівпчик справа.

$$\Delta_n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & 0 \\ \hline a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & 0 \\ \hline 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 0 \\ \hline 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ \hline \end{array}$$

Для головного визначника Δ_n і визначника Δ_{n-1} виконується умова:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1},$$

тому, наприклад, якщо для характеристичного поліному третього порядку

виконується необхідна умова стійкості (відповідно і $a_0 > 0$), а також і умова $\Delta_2 > 0$, то й головний визначник буде додатним: $\Delta_3 > 0$. Це означає, що система є стійкою.

1.6.2. Частотний критерій стійкості Михайлова

Для оцінки стійкості використовується характеристичний поліном замкненої системи, записаний у комплексній формі, $D(j\omega)$ - комплексний вектор. При змінюванні частоти від 0 до $+\infty$, будуть змінюватись модуль (довжина вектора) і аргумент (фазовий кут) комплексного вектора $D(j\omega)$, кінець комплексного вектора буде описувати на комплексній площині криву, яка називається годографом Михайлова.

Система буде стійкою, якщо при зміні частоти від 0 до $+\infty$ годограф Михайлова (рис.1.6) проходить послідовно n квадрантів проти годинникової стрілки, починаючи з дійсної додатної осі, де n порядок характеристичного рівняння:

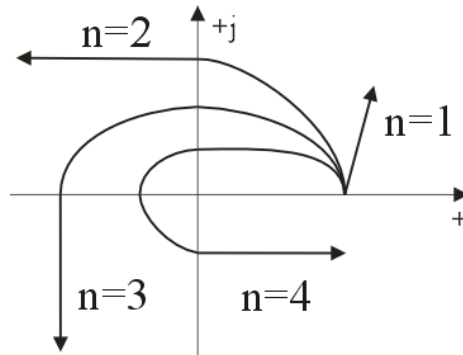


Рис.1.6 Годограф Михайлова

Якщо зазначена умова не виконується – **система не стійка**, якщо крива проходить через початок координат – система знаходиться на границі стійкості.

Побудова годографа Михайлова

1. Записати характеристичний поліном:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

2. Записати характеристичний поліном у комплексному вигляді, підставивши $p = j\omega$:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0.$$

3. Записати дійсну та уявну частини комплексного характеристичного поліному:

$$P(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots$$

$$Q(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots$$

4. Визначити частоти, на яких годограф перетинає дійсну та уявну осі:

$$Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_{\text{дійсн}} - \text{годограф перетинає дійсну вісь } (\omega_0; \omega_2; \omega_4; \dots)$$

$$P(\omega) = 0 \rightarrow \omega_{\text{уявн}} - \text{годограф перетинає уявну вісь } (\omega_1; \omega_3; \omega_5; \dots)$$

Використовуються тільки дійсні додатні значення частоти, якщо визначене значення частоти уявне – годограф не перетинає цієї осі.

5. Визначити значення дійсної та уявної частин, що відповідають визначеним частотам:

$$\omega_0; \omega_2; \omega_4; \dots \Rightarrow P(\omega) - \text{визначаємо абсциси графіка};$$

$$\omega_1; \omega_3; \omega_5; \dots \Rightarrow Q(\omega) - \text{визначаємо ординати графіка}.$$

Якщо система стійка, то відповідно до визначення стійкості за критерієм Михайлова, годограф по чергово перетинає то дійсну вісь, то уявну.

Наслідок критерію стійкості Михайлова: система буде стійкою, якщо частоти, на яких годограф Михайлова перетинає то дійсну, то уявну осі, задовольняють нерівності: $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots < \omega_n$.

2. ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

2.1. Аналіз розімкнених ланцюгів (завдання 1)


1. Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів розімкненого ланцюга (відповідно до варіанту згідно з табл.2.1).


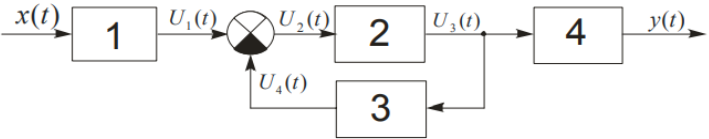
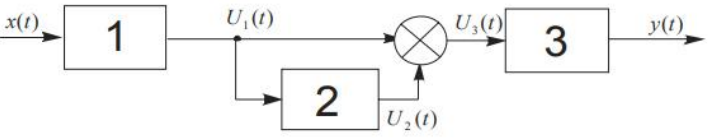
2. Визначити передатну функцію та записати рівняння динаміки ланцюга.

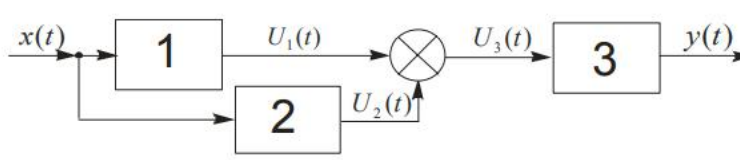


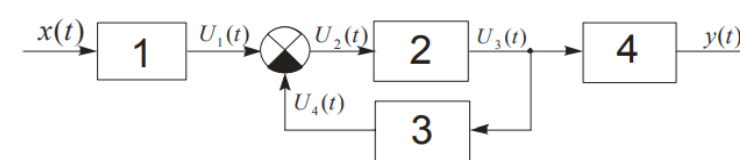
3. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненого ланцюга.

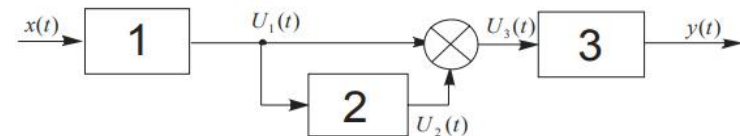
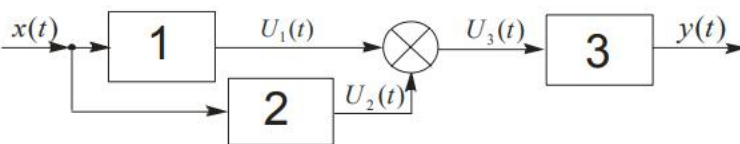


4. Оцінити стійкість, якби система була замкнена, за частотними характеристиками розімкненого ланцюга.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Структурна схема САК	Рівняння динаміки елементів		Значення сталих часу та коефіцієнтів підсилення
		Номер елементу	Рівняння динаміки елементів	
1	2	3	4	5
1.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 20c^{-1};$ $k_2 = 5c^{-1};$ $T_1 = 1c;$ $T_2 = 0,01c$
		2.	$\frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$	
		3.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	

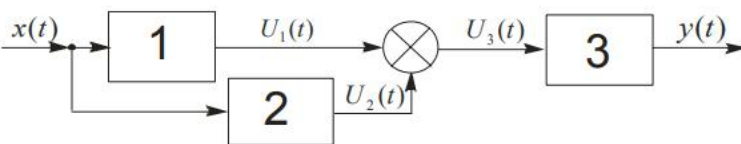


1	2	3	4	5
2.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 4c^{-1};$ $k_2 = 2,5c^{-1};$ $T_1 = 0,05c;$ $T_2 = 0,1c;$ $T_3 = 2c$
		2.	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 U_1(t)$	
		3.	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	
3.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 4c^{-1};$ $k_2 = 2,5c^{-1};$ $T_1 = 0,05c;$ $T_2 = 0,1c;$ $\tau = 2c$
		2.	$U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	
		3.	$U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$	
		4.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$	
4.		1.	$U_1(t) = k \cdot x(t)$	$k = 10c^{-1};$ $T_1 = 1c;$ $T_2 = 2c;$ $\tau = 0,2c$
		2.	$U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt}$	
		3.	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t)$	

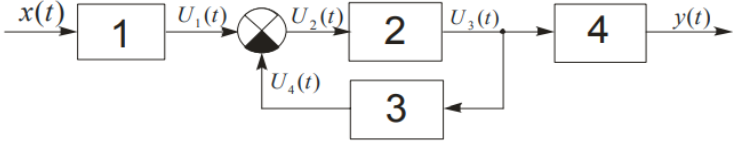
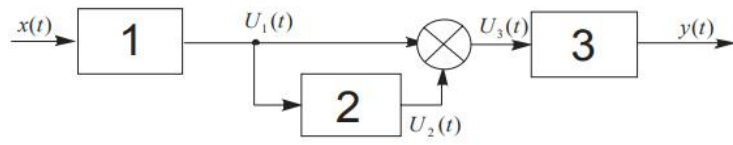
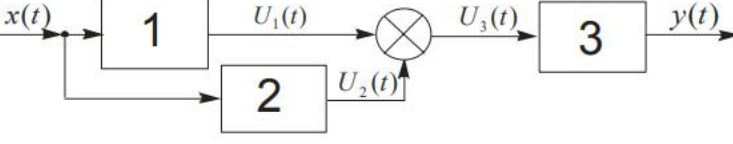
1	2	3	4	5
5.		1. $U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$ 2. $U_2(t) = k_1 \cdot x(t)$ 3. $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t)$	$k_1 = 20c^{-1};$ $k_2 = 0,5c^{-1};$ $T = 0,1c;$ $\tau = 10c$	
6.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$ 2. $\frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$ 3. $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	$k_1 = 2,5c^{-1};$ $k_2 = 4c^{-1};$ $T_1 = 5c;$ $T_2 = 0,1c$	
7.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$ 2. $T_1^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 U_1(t)$ 3. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	$k_1 = 5c^{-1};$ $k_2 = 20c^{-1};$ $T_1 = 5c;$ $T_2 = 0,2c;$ $T_3 = 0,1c$	
8.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$ 2. $U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$ 3. $U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$ 4. $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 10c^{-1};$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 0,5c;$ $\tau = 10c$	

1	2	3	4	5				
9.		1. $U_1(t) = k \cdot x(t)$	$U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt}$	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t)$	$k = 1c^{-1};$ $T_1 = 5c;$ $T_2 = 0,2c;$ $\tau = 0,1c$			
10.		1. $U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$				$U_2(t) = k_1 \cdot x(t)$	$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t)$	$k_1 = 2c^{-1};$ $k_2 = 0,5c^{-1};$ $T = 5c;$ $\tau = 2c$
11.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$						
12.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 U_1(t)$	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	$k_1 = 0,5c^{-1};$ $k_2 = 2c^{-1};$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 0,02c;$ $T_3 = 2,5c$			

1	2	3	4	5
13.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$ 2. $U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$ 3. $U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$ 4. $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 1c^{-1};$ $T_1 = 0,05c;$ $T_2 = 2c;$ $\tau = 0,01c$	
14.		1. $U_1(t) = k \cdot x(t)$ 2. $U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt}$ 3. $T_1^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t)$	$k = 100c^{-1};$ $T_1 = 10c;$ $T_2 = 0,5c;$ $\tau = 2c$	
15.		1. $U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$ 2. $U_2(t) = k_1 \cdot x(t)$ 3. $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t)$	$k_1 = 100c^{-1};$ $k_2 = 1c^{-1};$ $T = 0,02c;$ $\tau = 0,01c$	
16.		1. $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$ 2. $\frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$ 3. $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	$k_1 = 5c^{-1};$ $k_2 = 0,2c^{-1};$ $T_1 = 0,01c;$ $T_2 = 0,5c$	

1	2	3	4	5
17.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 100c^{-1};$ $T_1 = 1c;$ $T_2 = 0,1c;$ $T_3 = 0,5c$
		2.	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 U_1(t)$	
		3.	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	
18.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 0,1c^{-1};$ $T_1 = 5c;$ $T_2 = 0,1c;$ $\tau = 0,2c$
		2.	$U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	
		3.	$U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$	
		4.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$	
19.		1.	$U_1(t) = k \cdot x(t)$	$k = 10c^{-1};$ $T_1 = 5c;$ $T_2 = 0,1c;$ $\tau = 0,05c$
		2.	$U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt}$	
		3.	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t)$	

1	2	3	4	5
20.		1.	$U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 0,1c^{-1};$ $T = 1c;$ $\tau = 0,2c$
		2.	$U_2(t) = k_1 \cdot x(t)$	
		3.	$T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t)$	
21.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 2c^{-1};$ $k_2 = 5c^{-1};$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 10c$
		2.	$\frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$	
		3.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	
22.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 0,1c^{-1};$ $k_2 = 2c^{-1};$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 5c;$ $T_3 = 10c$
		2.	$T_1^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 U_1(t)$	
		3.	$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	

1	2	3	4	5
23.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 100c^{-1};$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 1c;$ $\tau = 10c$
		2.	$U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	
		3.	$U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$	
		4.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$	
24.		1.	$U_1(t) = k \cdot x(t)$	$k = 0,1c^{-1};$ $T_1 = 0,01c;$ $T_2 = 5c;$ $\tau = 0,02c$
		2.	$U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt}$	
		3.	$T_1^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t)$	
25.		1.	$U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}$	$k_1 = 10c^{-1};$ $k_2 = 100c^{-1};$ $T = 0,1c;$ $\tau = 0,05c$
		2.	$U_2(t) = k_1 \cdot x(t)$	
		3.	$T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t)$	

Приклад виконання завдання 1

Проаналізувати розімкнений ланцюг (рис.2.1):

- Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів розімкненого ланцюга (рівняння динаміки для кожного елемента занесені у табл.2.2).
- Визначити передатну функцію та записати рівняння динаміки ланцюга.
- Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненого ланцюга.
- Оцінити стійкість, якби система була замкнена, за частотними характеристиками розімкненого ланцюга.



Рис.2.1 Схема розімкненого ланцюга

Таблиця 2.2

Рівняння динаміки елементів розімкненого ланцюга

Рівняння динаміки:	
1.	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$
2.	$\frac{dU_2(t)}{dt} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$
3.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$
Дані для розрахунку:	
$k_1 = 0,5c^{-1}; k_2 = 20c^{-1}; T_1 = 0,1c; T_2 = 0,25c$	

- Визначити передатні функції, вагові, перехідні та частотні характеристики елементів ланцюга.

1.1. Перший елемент	
Рівняння динаміки:	$U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$
Передатна функція:	$W_1(p) = \frac{U_1(p)}{X(p)} = k_1$
Часові характеристики:	
Вагова характеристика:	$w_1(t) = L^{-1}\{W_1(p)\} = L^{-1}\{k_1\} = k_1 \cdot \delta(t)$
Перехідна характеристика:	$h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_1(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k_1}{p}\right\} = k_1 \cdot 1[t]$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_1(j\omega) = k_1$
Амплітудно-частотна характеристика:	$N_1(\omega) = k_1$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_1(\omega) = 0$

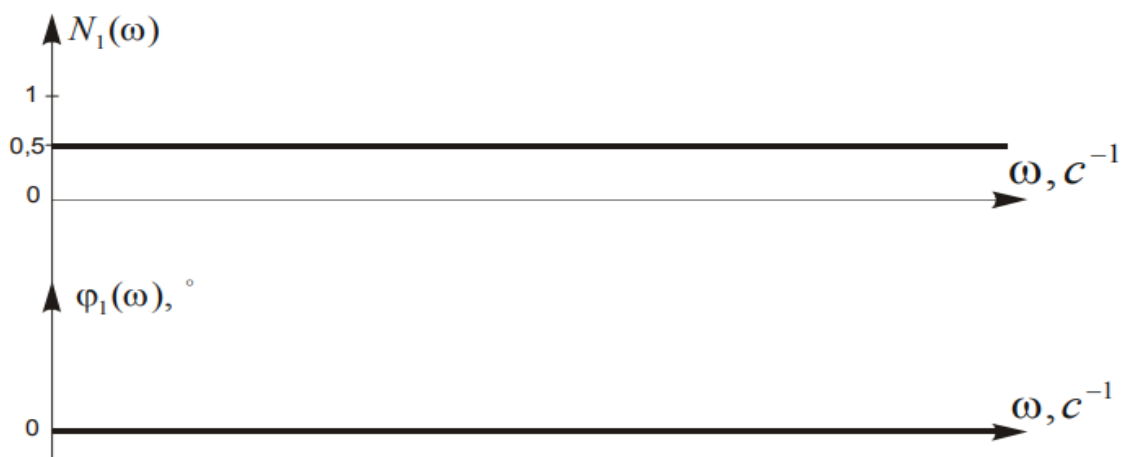


Рис.2.2 Графіки частотних характеристик першого елементу

1.2. Другий елемент	
Рівняння динаміки:	$\frac{dU_2(t)}{dt} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$
Рівняння в операторній формі:	$pU_2(p) = T_1 pU_1(p) + U_1(p)$
Передатна функція:	$W_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{T_1 p + 1}{p}$
Часові характеристики:	
Вагова характеристика:	$w_2(t) = L^{-1}\{W_2(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{T_1 p + 1}{p}\right\} =$ $= L^{-1}\left\{\frac{T_1 p}{p} + \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{T_1 + \frac{1}{p}\right\} =$ $= L^{-1}\{T_1\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = T_1 \delta(t) + 1[t]$
Перехідна характеристика:	$h_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_2(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{T_1 p + 1}{p^2}\right\} =$ $= L^{-1}\left\{\frac{T_1 p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{T_1}{p} + \frac{1}{p^2}\right\} =$ $= L^{-1}\left\{\frac{T_1}{p}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = T_1 \cdot 1[t] + t$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_2(j\omega) = \frac{j\omega T_1 + 1}{j\omega}$
Амплітудно-частотна характеристика:	$N_2(\omega) = \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\omega}$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_2(\omega) = -90^\circ + \text{arctg}(\omega T_1)$

Логарифмічні частотні характеристики:	$L_2(\omega) = 20 \lg N_2(\omega) =$ $= 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \omega$
--	---

$$T_1 = 0,1 \text{ c}; \quad \omega_1 = \frac{1}{T_1} = 10 \text{ c}^{-1}.$$

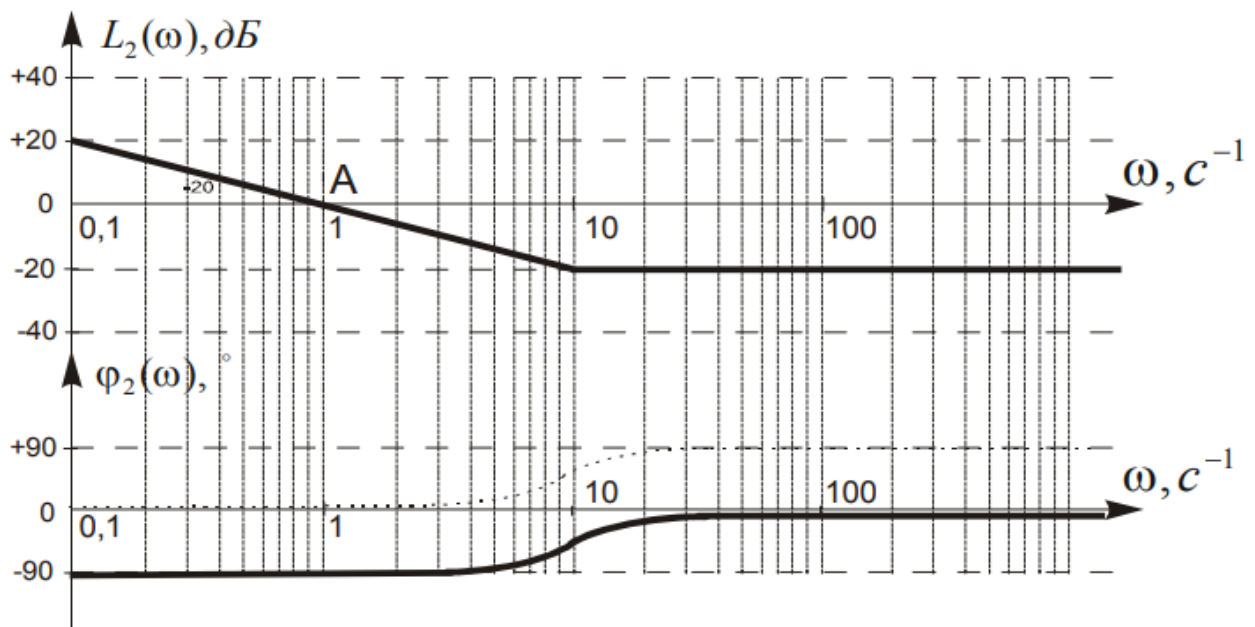


Рис.2.3. Графіки логарифмічних частотних характеристик другого елемента

1.3. Третій елемент	
Рівняння динаміки:	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$
Рівняння в операторній формі:	$T_2 p Y(p) + Y(p) = k_2 U_2(p)$
Передатна функція:	$W_3(p) = \frac{Y(p)}{U_2(p)} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}$
Часові характеристики:	

Вагова характеристика:	$w_3(t) = L^{-1}\{W_3(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_2}{T_2 p + 1}\right\} =$ $= \frac{k_2}{T_2} L^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{T_2}}\right\} = \frac{k_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$
Перехідна характеристика:	$h_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_3(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k_2}{p(T_2 p + 1)}\right\} =$ $= \frac{k_2}{T_2} L^{-1}\left\{\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_2}\right)}\right\} = k_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_3(j\omega) = \frac{k_2}{1 + j\omega T_2}$
Амплітудно-частотна характеристика:	$N_3(\omega) = \frac{k_2}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_3(\omega) = -\arctg(\omega T_2)$
Логарифмічні частотні характеристики:	$L_3(\omega) = 20 \lg N_3(\omega) =$ $= 20 \lg k_2 - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}$

$$k = 20c^{-1}; \quad 20 \lg k_2 = 20 \lg 20 = 26 \text{дБ}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 40c^{-1}.$$

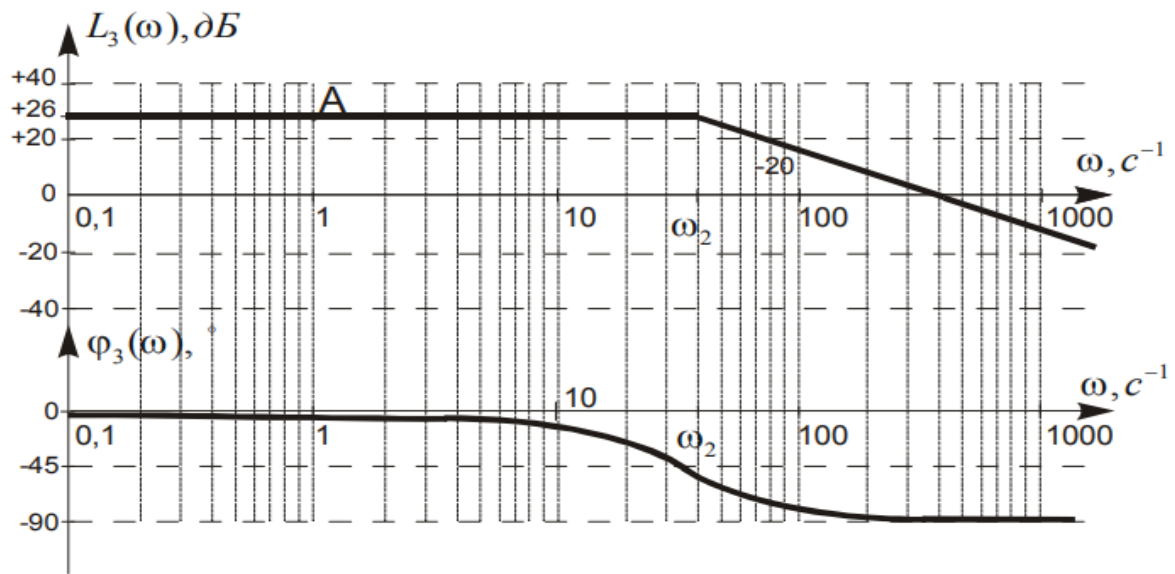


Рис.2.4. Графіки логарифмічних частотних характеристик третього елемента

➤ **Визначити передатну функцію і записати рівняння динаміки ланцюга.**

Для послідовного з'єднання передатна функція визначається як:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p).$$

Підставимо вирази для $W_i(p)$:

$$W(p) = k_1 \cdot \frac{T_1 p + 1}{p} \cdot \frac{k_2}{T_2 p + 1} = \frac{k_1 \cdot k_2 (T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}.$$

Позначимо $k_1 \cdot k_2 = k$, тоді

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)},$$

звідки запишемо:

$$p(T_2p + 1)Y(p) = k(T_1p + 1)X(p).$$

Розкриємо дужки:

$$T_2p^2Y(p) + pY(p) = kT_1pX(p) + kX(p).$$

Перейдемо до оригіналів функцій зліва та справа:

$$T_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kT_1 \frac{dy(t)}{dt} + kx(t).$$

Рівняння динаміки запишемо у вигляді:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0x(t),$$

де $a_2 = T_2$; $a_1 = 1$; $b_1 = k \cdot T_1$; $b_0 = k$.

➤ **Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ.**

Передатна функція розімкненого ланцюга:

$$W(p) = \frac{k(T_1p + 1)}{p(T_2p + 1)}$$

де $k_1 \cdot k_2 = 0,5 \cdot 20 = 10c^{-1}$.

Побудова логарифмічно-частотної характеристики:

1) ордината точки A : $20 \lg k = 20 \text{ дБ}$;

Початковий нахил: $\nu=1$, нахил $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$;

2) частота спряження:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 10c^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 40c^{-1}.$$

Побудова логарифмічної фазочастотної характеристики:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2).$$

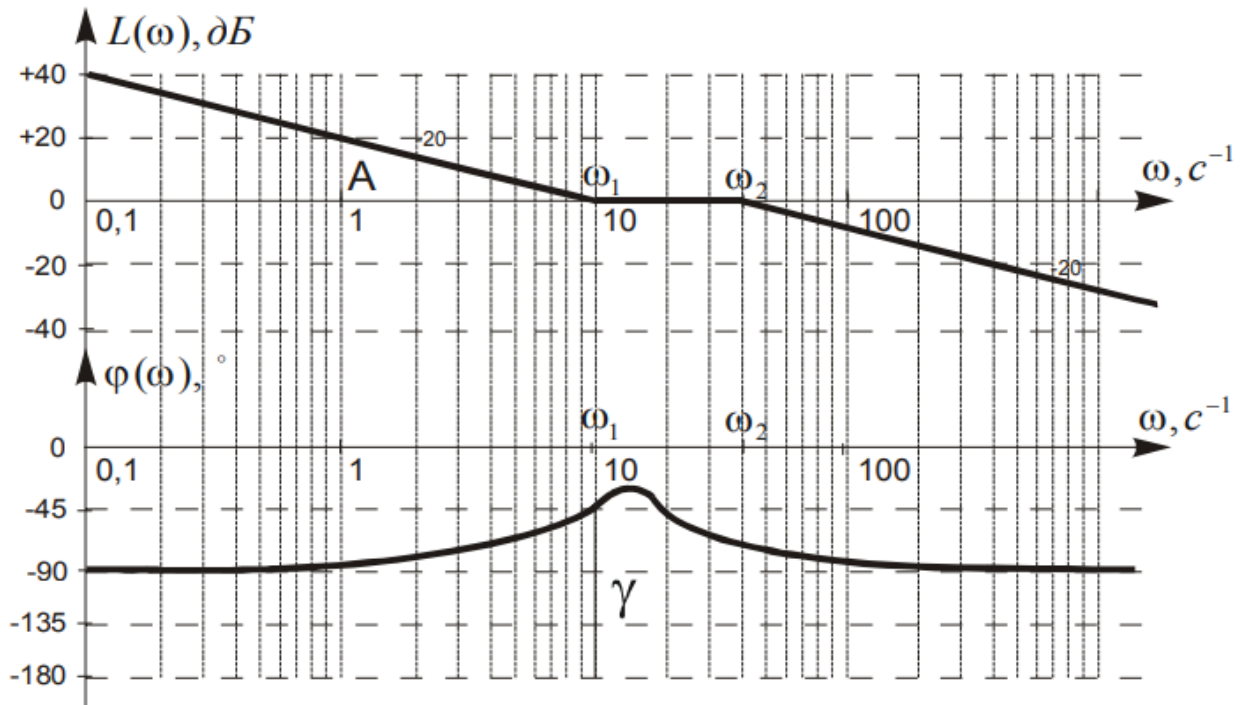


Рис.2.5. Графіки логарифмічних частотних характеристик ланцюга

➤ **Оцінити стійкість, якби система була замкнена, за частотними характеристиками розімкненого ланцюга.**

Частота зрізу $\omega_{зр} = \omega_1$, запас стійкості по фазі визначається на частоті зрізу як фазовий кут, яким необхідно доповнити ЛФЧХ на частоті зрізу $\varphi(\omega_{зр})$ до значення $|-180^\circ|$, тобто, $\gamma = 135^\circ$.

ЛФЧХ не перетинає значення (-180°) , тому запас стійкості по амплітуді не визначаємо (система стійка).

2.1. Аналіз замкнених систем (завдання 2)

1. Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів замкнених систем (відповідно до варіанту згідно з табл. 2.3).

2. Визначити передатну функцію замкненої системи за похибкою $\Phi_{\delta}(p)$ та оцінити усталену похибку САК при заданому вхідному сигналі $x(t)$.

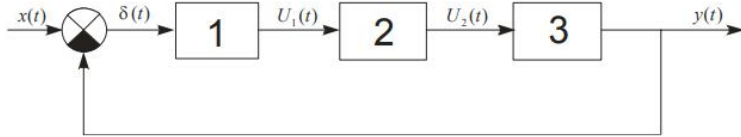
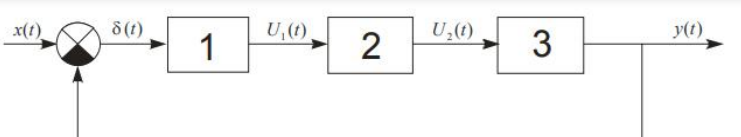
3. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.

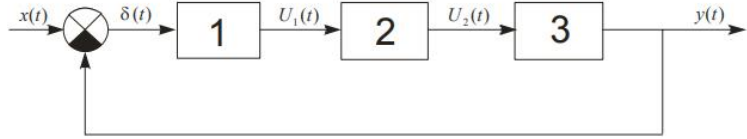
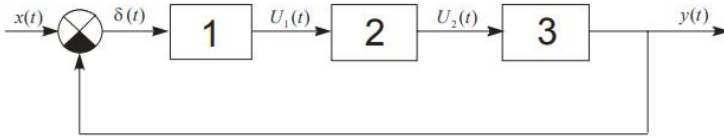
4. Оцінити стійкість САК.

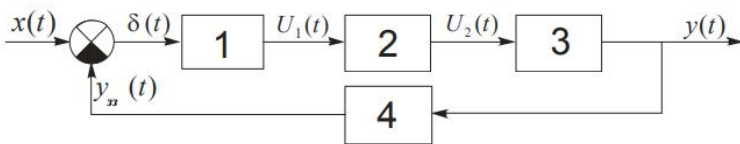
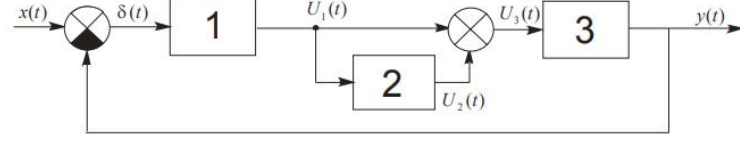
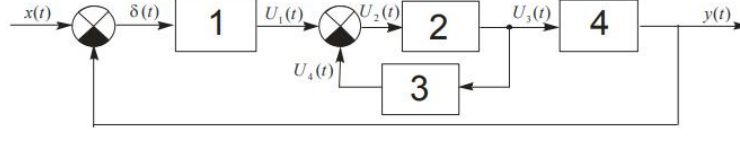
Таблиця 2.3

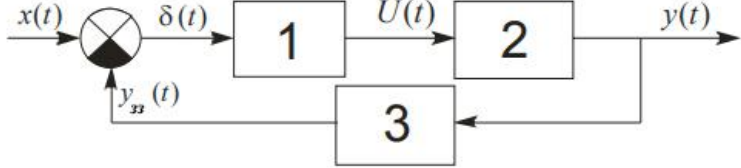
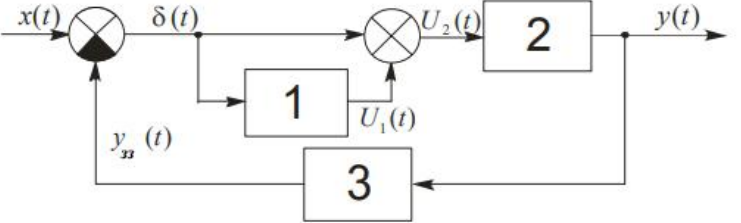
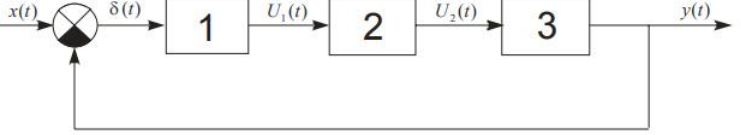
Варіанти індивідуальних завдань

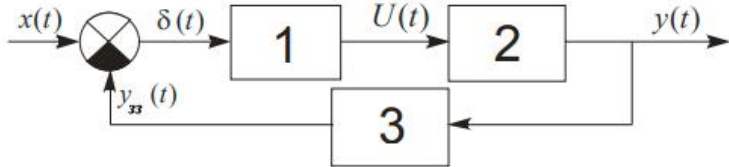
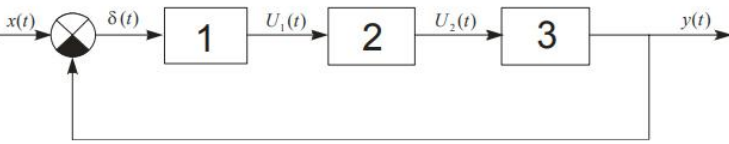
Варіант	Структурна схема САК	Рівняння динаміки елементів		Значення сталих часу та коефіцієнтів підсилення, вхідний сигнал
		Номер елементу	Рівняння динаміки елементів	
1	2	3	4	5
1.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} = k_1 \cdot \delta(t)$	$k_1 = 50 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 20;$ $T_1 = 0,8\text{с};$ $T_2 = 2\text{с};$ $T_3 = 0,05\text{с};$ $x(t) = (3t + 0,8t^2),$ град
		2.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$	
		3.	$T_3 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = k_2 \cdot y(t)$	

1	2	3	4	5
2.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$	$k = 10;$ $T_1 = 0,1c;$ $T_2 = 0,4c;$ $x(t) = 0,2 \sin(1,05t),$ град
3.		2.	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t)$	
		3.	$\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t)$	
		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$	$k = 10 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T_1 = 2c;$ $T_2 = 4c;$ $T_3 = 0,1c;$ $T_4 = 0,02c;$ $x(t) = 0,5 \sin(2t),$ град
		2.	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$	
		3.	$T_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	

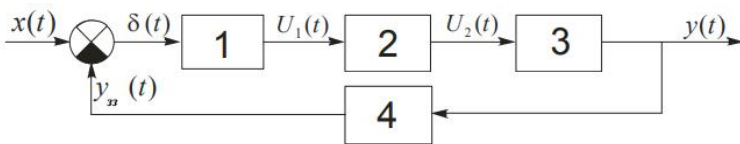
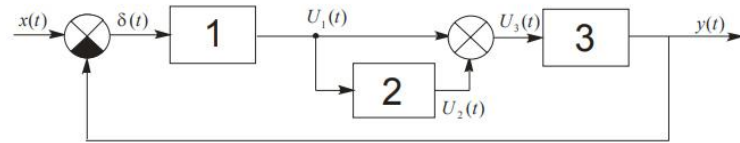
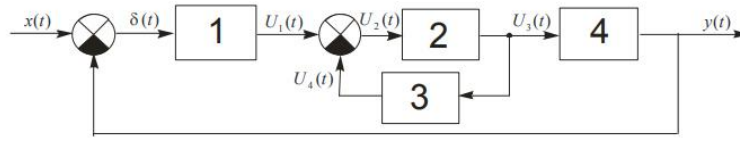
1	2	3	4	5	
4.		1.	$T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = k \cdot \delta(t)$	$k = 10 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T_1 = 2c;$ $T_2 = 0,2c;$ $T_3 = 0,01c;$ $x(t) = 0,8 \sin(0,1t),$ град	
		2.	$\frac{dU_2(t)}{dt} = U_1(t)$		
		3.	$T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$		
5.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$	$k_1 = 20 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 5 \frac{\text{град}}{\text{В}};$ $T_1 = 1c;$ $T_2 = 0,01c;$ $T_3 = 0,02c;$ $x(t) = 3t + 0,8t^2,$ град	
		2.	$\frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$		
		3.	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 U_2(t)$		

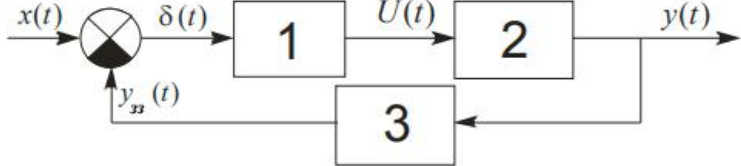
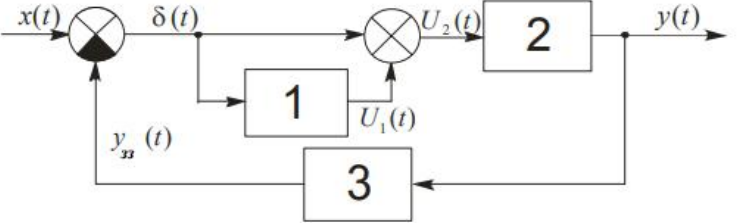
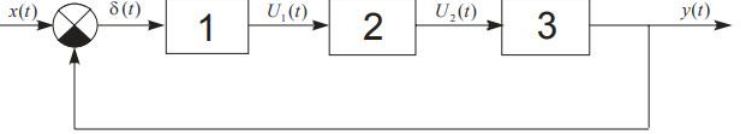
1	2	3	4	5		
6.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$	$k_1 = 5;$ $k_2 = 2;$ $T = 0,05c;$ $x(t) = 0,8t,$ град		
7.		1.	$U_1(t) = k \cdot \delta(t)$		$k = 1 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T = 0,1c;$ $x(t) = 5 \sin(0,3t),$ град	
8.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$			$k_1 = 100 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 0,1;$ $\tau = 0,1c;$ $T = 0,2c;$ $x(t) = 0,7 \sin(0,5t),$ град
		2.	$U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$			
		3.	$U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$			
		4.	$T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = U_3(t)$			

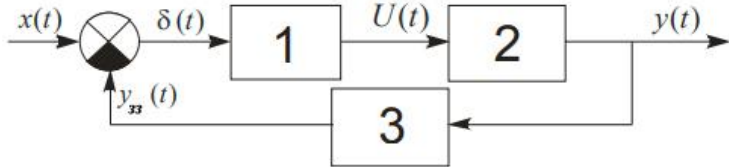
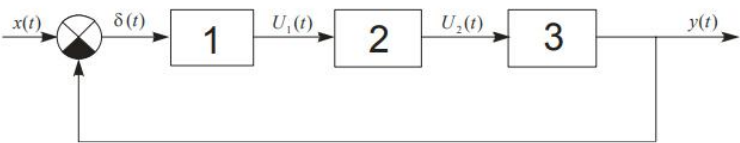
1	2	3	4	5	
9.		1.	$\frac{dU(t)}{dt} + U(t) = k \cdot \delta(t)$	$k = 10 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T_1 = 0,02\text{с};$ $T_2 = 0,2\text{с};$ $x(t) = 5 \sin(0,05t),$ град	
		2.	$\frac{dy(t)}{dt} = U(t)$		
		3.	$T_2 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$		
10.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} = \delta(t)$	$k_1 = 0,4;$ $k_2 = 2,5;$ $T_1 = 0,01\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $x(t) = 0,3 \sin(0,01t),$ град	
		2.	$T_1 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_1 \cdot U_2(t)$		
		3.	$T_2 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = k_2 \frac{dy(t)}{dt}$		
11.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$	$k_1 = 2,5 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 40;$ $T_1 = 0,02\text{с};$ $T_2 = 5\text{с}$ $x(t) = 0,4 \sin(0,2t),$ град	
		2.	$T_1 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 \cdot U_1(t)$		
		3.	$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$		

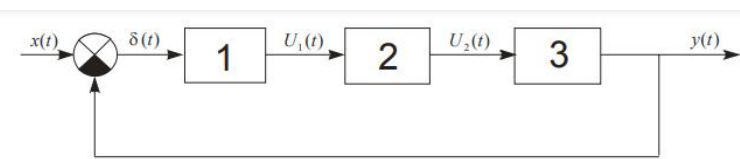
1	2	3	4	5
12.		1. 2. 3.	$\frac{dU_1(t)}{dt} = k_1 \cdot \delta(t)$ $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$ $T_3 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = k_2 \cdot y(t)$	$k_1 = 2,5 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 4;$ $T_1 = 0,1\text{с};$ $T_2 = 0,25\text{с};$ $T_3 = 0,75\text{с};$ $x(t) = (5 + 0,7t),$ град
13.		1. 2. 3.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ $T_1^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t)$ $\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t)$	$k = 0,1;$ $T_1 = 5\text{с};$ $T_2 = 10\text{с};$ $x(t) = 0,05 \sin(4t),$ град

1	2	3	4	5
14.		1. 2. 3.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$ $T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$ $T_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	$k = 10 \text{ В/град};$ $T_1 = 0,2\text{с};$ $T_2 = 1\text{с};$ $T_3 = 0,01\text{с};$ $T_4 = 0,2\text{с};$ $x(t) = 0,1 \sin(0,4t),$ град
15.		1. 2. 3.	$T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = k \cdot \delta(t)$ $\frac{dU_2(t)}{dt} = U_1(t)$ $T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	$k = 10 \text{ В/град};$ $T_1 = 0,01\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $T_3 = 0,1\text{с};$ $x(t) = 1,5 \sin(0,2t),$ град
16.		1. 2. 3.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$ $\frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$ $T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t)$	$k_1 = 5 \text{ В/град};$ $k_2 = 10 \text{ град/В};$ $T_1 = 2\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $T_3 = 0,1\text{с};$ $x(t) = 4\sin(8t),$ град

1	2	3	4	5
17.		1. 2. 3. 4.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ $U_2(t) = k_1 \cdot U_1(t)$ $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_2(t)$ $\frac{dy_{33}(t)}{dt} = k_2 \cdot y(t)$	$k_1 = 10;$ $k_2 = 0,01;$ $T = 2c;$ $x(t) = 0,2t + 0,6t^2,$ град
18.		1. 2. 3.	$U_1(t) = k \cdot \delta(t)$ $\frac{dU_2(t)}{dt} = U_1(t)$ $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = U_3(t)$	$k = 100 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T = 0,2c;$ $x(t) = 0,3 \sin(0,5t),$ град
19.		1. 2. 3. 4.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$ $U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$ $U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$ $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = U_3(t)$	$k_1 = 1 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 0,05;$ $\tau = 0,2c;$ $T = 1c;$ $x(t) = 4t^2,$ град

1	2	3	4	5
20.		1. 2. 3.	$\frac{dU(t)}{dt} + U(t) = k \cdot \delta(t)$ $\frac{dy(t)}{dt} = U(t)$ $T_2 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$	$k = 10 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $T_1 = 0,1\text{с};$ $T_2 = 0,05\text{с};$ $x(t) = 0,25,$ град
21.		1. 2. 3.	$\frac{dU_1(t)}{dt} = \delta(t)$ $T_1 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_1 \cdot U_2(t)$ $T_2 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = k_2 \frac{dy(t)}{dt}$	$k_1 = 1;$ $k_2 = 0,2;$ $T_1 = 1\text{с};$ $T_2 = 0,4\text{с};$ $x(t) = 0,7t^2,$ град
22.		1. 2. 3.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$ $T_1 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 \cdot U_1(t)$ $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	$k_1 = 0,5 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 20;$ $T_1 = 1\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с}$ $x(t) = 5t,$ град

1	2	3	4	5
23.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} = k_1 \cdot \delta(t)$	$k_1 = 5 \frac{\text{В}}{\text{град}};$ $k_2 = 0,2;$ $T_1 = 0,02\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $T_3 = 0,2\text{с};$ $x(t) = 0,02,$ град
		2.	$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t)$	
		3.	$T_3 \frac{dy_{33}(t)}{dt} + y_{33}(t) = k_2 \cdot y(t)$	
24.		1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$	$k = 2;$ $T_1 = 0,25\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $x(t) = 0,2,$ град
		2.	$T_1^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t)$	
		3.	$\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t)$	

1	2	3	4	5
25.		1.	$U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t)$	$k = 1 \frac{\text{ВТ}}{\text{град}};$ $T_1 = 0,1\text{с};$ $T_2 = 0,5\text{с};$ $T_3 = 0,01\text{с};$ $T_4 = 2\text{с};$ $x(t) = 5 + 2t,$ град
2.	$T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$	3.	$T_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$	

Приклад виконання завдання 2

Проаналізувати замкнуту систему (рис.2.6):

- Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів замкнених систем рівняння динаміки для кожного елемента занесені у табл.2.4).
- Визначити передатну функцію замкненої системи за похибкою $\Phi_\delta(p)$ та оцінити усталену похибку САК при заданому вхідному сигналі $x(t)$.
- Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.
- Оцінити стійкість САК.

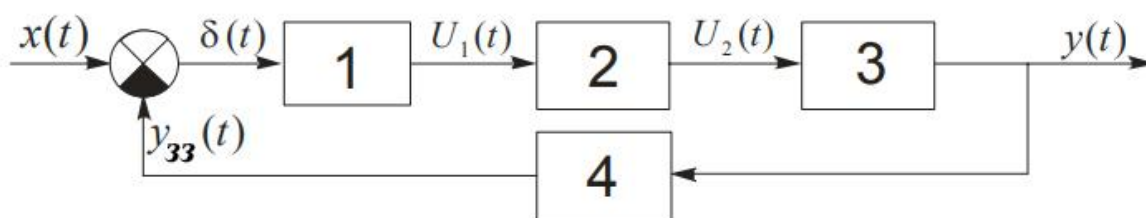


Рис.2.6 Схема замкненої системи

Таблиця 2.4

Рівняння динаміки елементів замкненої системи

Рівняння динаміки:	
1.	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$
2.	$T \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k \cdot U_1(t)$
3.	$\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t)$
Дані для розрахунку:	
$k = 10; T = 0,05c; x(t) = 0,2град.$	

- Визначити передатні функції, вагові, перехідні та частотні характеристики елементів ланцюга.

1.4. Перший елемент	
Рівняння динаміки:	$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$
Рівняння в операторній формі:	$pU_1(p) + U_1(p) = p\delta(p)$
Передатна функція:	$W_1(p) = \frac{U_1(p)}{\delta(p)} = \frac{p}{p+1} = \frac{p+1-1}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}$
Часові характеристики:	
Вагова характеристика:	$w_1(t) = L^{-1}\{W_1(p)\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{1}{p+1}\right\} = L^{-1}\{1\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = \delta(t) - e^{-t}$
Перехідна характеристика:	$h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_1(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{p(p+1)}\right\} = e^{-t}$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_1(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$
Амплітудно-частотна характеристика:	$N_1(\omega) = \omega \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_1(\omega) = +90^\circ - \text{arctg}(\omega)$
Логарифмічні частотні характеристики:	$L_1(\omega) = 20\lg N_1(\omega) = 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{\omega^2 + 1}$

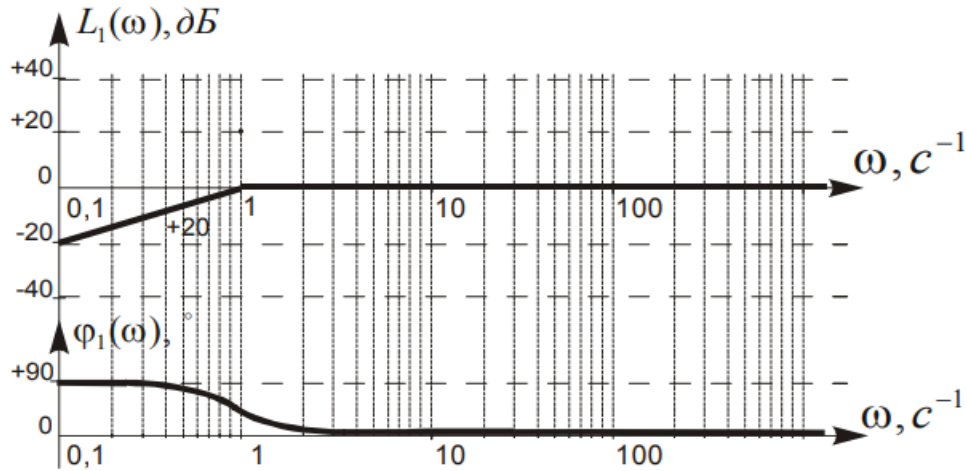


Рис.2.7. Графіки логарифмічних частотних характеристик першого елемента

1.5. Другий елемент	
Рівняння динаміки:	$T \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t)$
Рівняння в операторній формі:	$TpU_2(p) + U_2(p) = kU_1(p)$
Передатна функція:	$W_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{k}{Tp + 1}$
Часові характеристики:	
Вагова характеристика:	$w_2(t) = L^{-1}\{W_2(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{Tp + 1}\right\} =$ $= \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
Перехідна характеристика:	$h_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_2(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{(Tp + 1)p}\right\} =$ $= \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p + \frac{1}{T}\right)p}\right\} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_2(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}$

Амплітудно-частотна характеристика:	$N_2(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_2(\omega) = -\arctg(\omega T)$
Логарифмічні частотні характеристики:	$L_2(\omega) = 20\lg N_2(\omega) =$ $= 20\lg k - 20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$

$k = 10; ; \quad 20\lg k = 20\lg 10 = 20\text{дБ}; \quad T = 0,05\text{с}; \quad \omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,05} = 20\text{с}^{-1}$

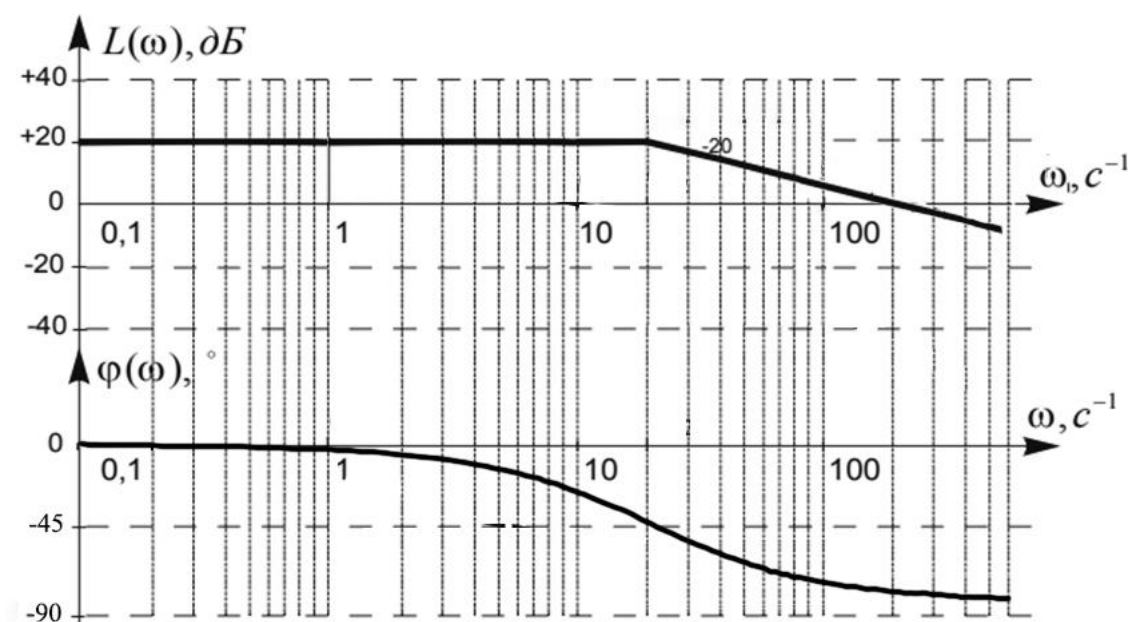


Рис.2.8. Графіки логарифмічних частотних характеристик другого елемента

1.6. Третій елемент	
Рівняння динаміки:	$\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t)$
Рівняння в операторній формі:	$pY(p) = U_2(p)$

Передатна функція:	$W_3(p) = \frac{Y(p)}{U_2(p)} = \frac{1}{p}$
Часові характеристики:	
Вагова характеристика:	$w_3(t) = L^{-1}\{W_3(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1[t]$
Перехідна характеристика:	$h_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_3(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t$
Частотні характеристики:	
Комплексна передатна функція:	$W_3(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$
Амплітудно-частотна характеристика:	$N_3(\omega) = \frac{1}{\omega}$
Фазочастотна характеристика:	$\varphi_3(\omega) = -90^\circ$
Логарифмічні частотні характеристики:	$L_3(\omega) = 20\lg N_3(\omega) = -20\lg \omega$

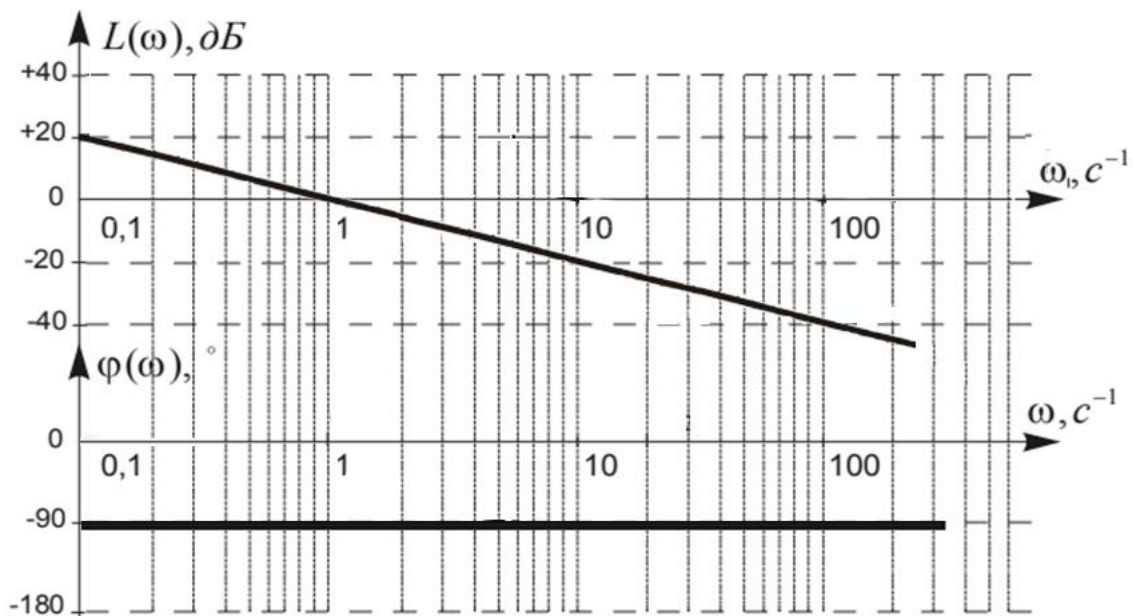


Рис.2.9. Графіки логарифмічних частотних елементів третього елементу

- **Визначити передатну функцію замкнутої системи за похибкою та визначити усталену похибку для заданої вхідної дії.**

Для розімкненої системи передатна функція визначається як:

$$W_{роз}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)$$

Підставимо вирази для $W_i(p)$:

$$W_{роз}(p) = \frac{k_{роз}}{(p+1)(Tp+1)},$$

де $k_{роз} = k$.

Передатна функція замкненої системи за похибкою:

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_{роз}}{(p+1)(Tp+1)}} = \frac{(p+1)(Tp+1)}{(p+1)(Tp+1) + k_{роз}}.$$

Усталена похибка системи визначається за виразом:

$$\delta_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Phi_{\delta}(p) \cdot X(p),$$

причому, для $x(t) = 0,2$ зображення за Лапласом буде $X(p) = \frac{0,2}{p}$.

Тоді усталена похибка системи:

$$\delta_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(p+1)(Tp+1)}{(p+1)(Tp+1) + k_{роз}} \cdot \frac{0,2}{p} = \frac{0,2}{1 + k_{роз}} = \frac{0,2}{1 + 10} = 0,018 \text{ (град)}.$$

- **Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.**

Передатна функція розімкненої системи:

$$W_{роз}(p) = \frac{k_{роз}}{(p+1)(Tp+1)}.$$

Побудова ЛАЧХ:

1) ордината точки A : $20 \lg k_{роз} = 20 \text{ дБ}$;

початковий нахил: порядок астатизму $\nu = 0$, тому початковий нахил – 0 дБ/дек;

2) частоти спряження:

$$\omega_1 = 1c^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T} = 20c^{-1}.$$

Побудова ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega) - \arctg(\omega T).$$

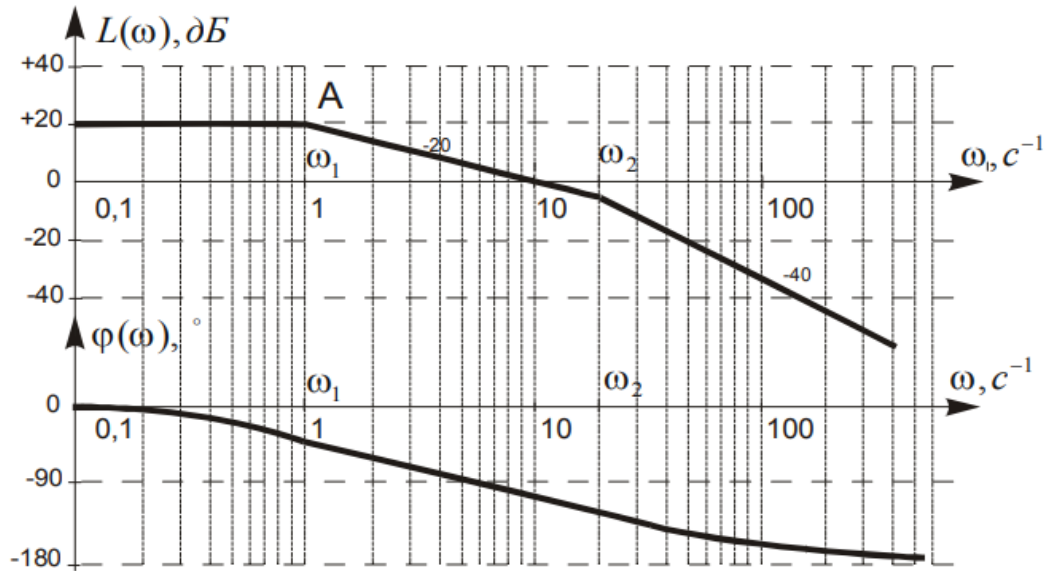


Рис.2.10. Графіки логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

➤ **Оцінити стійкість САК.**

На частоті зрізу системи $\omega_{зр} = 10c^{-1}$ ЛФЧХ не досягає значення (-180°):

$$\varphi_{зр}(\omega_{зр}) = -105^\circ.$$

Це означає, що розглянута система автоматичного керування стійкою.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорія автоматичного управління. Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Н.І. Бурау, Д.О. Півторак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. - 57 с.

2. Попович М. Г. Теорія автоматичного керування: Підручник. 2-ге вид., перер. і доп. / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К.: Либідь, 2007. – 656с.

3. Теорія автоматичного керування: метод. вказівки до викон. практич. робіт для студентів напрямів підгот. 6.051003 «Приладобудування», 6.051004 «Оптотехніка» / Уклад.: Н.І. Бурау, Д.О. Півторак. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 37 с.

4. Теорія автоматичного керування: метод. вказівки до викон. контрол. робіт для студентів напрямів підгот. 6.051003 «Приладобудування», 6.051004 «Оптотехніка» / Уклад.: Н.І. Бурау, Д.О. Півторак. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 38 с.

5. Теорія автоматичного керування: метод. вказівки до виконання розрахункових робіт для студентів напрямку підготовки 6.051003 – Приладобудування; спеціальностей 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, 152 – Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка, денної та заочної форми навчання, електронне видання [Текст] / Уклад.: Н.І. Бурау, С.А. Мураховський, Д.О. Півторак. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 34с.