

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТЕОРІЯ І ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інжиніринг зварювання, лазерних та споріднених технологій»
спеціальності G9 Прикладна механіка

Укладачі: Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, Т. А. Самойленко

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2026

УДК 517
Т33

Укладачі: *Рудик Тетяна Олександрівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Селезньова Надія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Самойленко Тетяна Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.

Рецензент *Якимів Р. Я.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Степаненко Н. В.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 03.04.2026 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 2 від 04.03.2026 р.)*

Т33 **Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення.** Теорія і практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інжиніринг зварювання, лазерних та споріднених технологій» спец. G9 Прикладна механіка/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, Т. А. Самойленко – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 129 с.

Розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної та операційного числення в об'ємі, необхідному для студентів спеціальності G9 «Прикладна механіка» у відповідності з навчальною програмою дисципліни. У посібнику наведено необхідні теоретичні дані та формули, розв'язки типових задач, задачі для самостійного розв'язку. Значну увагу приділено застосуванню перетворення Лапласа для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь. Запропоновано варіанти індивідуальних завдань для проведення контрольних і розрахунково-графічних робіт, а також тестові завдання.

Посібник призначений для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517

Реєстр. № НП 25/26-310. Обсяг 6,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.....	8
1.1. Комплексні числа та дії над ними.....	8
1.1.1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма запису комплексного числа.....	9
1.1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.....	10
1.1.3. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.....	12
1.1.4. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах	13
1.2. Функції комплексної змінної. Похідна функції комплексної змінної.....	20
1.2.1. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність....	20
1.2.2. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана.....	23
1.3. Поняття аналітичної функції.....	25
1.4. Ряди з комплексними членами. Елементарні функції на комплексній площині.....	29
1.4.1. Ряди з комплексними членами.....	29
1.4.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора.....	30
1.4.3. Елементарні функції на комплексній площині.....	33
1.5. Інтеграл від функції комплексної змінної.....	37
1.6. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші.....	41
1.6.1. Теорема Коші для однозв'язної області.....	41
1.6.2. Теорема Коші для багатозв'язної області.....	41
1.6.3. Інтегральна формула Коші.....	42
1.6.4. Похідна будь-якого порядку від аналітичної функції.....	44
1.7. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки.....	47
1.7.1. Ряд Лорана.....	47
1.7.2. Класифікація ізольованих особливих точок.....	51
1.8. Інтегральні лишки аналітичної функції.....	55

2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	60
2.1. Перетворення Лапласа.....	60
2.1.1. Поняття оригіналу та зображення.....	60
2.1.2. Властивості зображень.....	61
2.1.3. Зображення деяких елементарних функцій.....	62
2.1.4. Теореми подібності, запізнення, зміщення.....	65
2.1.5. Зображення періодичної функції.....	69
2.1.6. Диференціювання і інтегрування оригіналів і зображень.....	70
2.1.7. Таблиця зображень деяких функцій.....	77
2.2. Знаходження оригіналів дробово-раціональних функцій.....	79
2.3. Застосування теорії лишків для знаходження оригіналу за даним зображенням	84
2.4. Застосування перетворення Лапласа.....	89
2.4.1. Застосування операційного числення до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	89
2.4.2. Застосування операційного числення до розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	93
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	97
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ.....	126
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	129

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник має практичну спрямованість і призначений для студентів НН ІМЗ ім. Є. О. Патона НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» як допоміжний засіб при вивченні курсу «Вища математика. Частина 3. Числові та функціональні ряди», зокрема розділів «Елементи теорії функцій комплексної змінної» та «Операційне числення». В запропонованому навчальному посібнику розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної та операційного числення в обсязі, необхідному для студентів спеціальності G9 «Прикладна механіка» у відповідності з навчальною програмою дисципліни. Також цей посібник призначений для студентів ФРП НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» як допоміжний засіб при вивченні курсу «Вища математика. Частина 3. Математичний аналіз».

Посібник складається з двох частин. У першій частині розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної в обсязі, необхідному для вивчення операційного числення. Операційне числення розглядається у другій частині посібника.

Метою цього посібника є в доступній формі ознайомити студентів з основами теорії функцій комплексної змінної і операційного числення та їх застосуванням, допомогти оволодіти алгоритмами розв'язання задач, навчити самостійно застосовувати набуті навички для розв'язування прикладів.

Теорія функцій комплексної змінної широко застосовується в математиці, її ідеї і результати проникли в інші математичні дисципліни, такі як алгебра, аналітична теорія чисел, диференціальні рівняння, математична фізика, функціональний аналіз, теорія ймовірностей та ін. Методи теорії функції комплексної змінної використовуються у розв'язанні багатьох інженерних задач. Ця теорія застосовується в різних прикладних математичних дисциплінах, таких як теоретична фізика, теоретична електротехніка, гідродинаміка, радіотехніка,

електродинаміка, теорія систем автоматичного керування та ін.

Методи операційного числення застосовуються в математичній фізиці, теорії спеціальних функцій, при обчисленні інтегралів і рядів, при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь, лінійних рівнянь з частинними похідними, за допомогою яких описуються перехідні процеси лінійних систем в задачах електротехніки, радіоелектроніки та інших прикладних дисциплінах. Особливо велике і важливе значення вони мають в сучасних галузях науки і техніки, таких як автоматика та телемеханіка, теорія регулювання.

В посібнику викладено основні поняття операційного числення та показано його застосування до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Запропоновано завдання для самостійної роботи з метою отримання навичок знаходження оригіналів та зображень.

Набір розглянутих питань відповідає змісту навчального посібника. Теоретична частина посібника містить необхідні означення, формулювання теорем, формули. Теоретичний матеріал ілюструється достатньою кількістю прикладів, що дозволяє студентам опанувати відповідні теми.

У кінці посібника запропоновано добірки індивідуальних завдань та тестові завдання, які можуть бути використані студентами для закріплення викладеного матеріалу, а також для організації самостійної роботи студентів та проведення викладачами різних видів контролю знань студентів.

Розділ «Операційне числення» розроблено на основі матеріалу навчального посібника «Операційне числення. Теорія і практикум» [11] (2023). Збільшено кількість прикладів, що ілюструють теорію, а також додано значну кількість індивідуальних завдань для самостійної роботи студентів (розділ «Індивідуальні завдання», завдання № 5, 6, 7, 8, 9, 10), що сприятиме більш повному опануванню теми «Операційне числення» та допоможе студентам виробити уміння та навички розв'язання задач.

Посібник може бути рекомендовано студентам другого курсу для більш ефективного засвоєння лекційних матеріалів та для виконання розрахункових робіт, а також може стати основою дистанційного курсу із зазначених розділів фундаментальної математичної підготовки.

1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1.1. Комплексні числа та дії над ними

Історична довідка

Як же виникло комплексне число? З історії відомо, що комплексні числа з'явилися при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Під час розв'язування квадратного рівняння, якщо його дискримінант від'ємний, корені не можуть бути дійсними числами. Те ж саме спостерігалось і при розв'язуванні рівнянь третього і вищих степенів, тому постала необхідність у розширенні поняття числа.

З комплексними числами вперше зіткнулися індійські вчені, які мали поняття про квадратний корінь і від'ємні числа. Але вони вважали, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують, а тому квадратні рівняння з недійсними коренями не розглядали.

У XVI столітті італійські математики зробили значний внесок у розвиток алгебри, розв'язавши в радикалах рівняння третього і четвертого степенів. Зокрема, в опублікованій у 1545 році праці італійського математика Джироламо Кардано (1501-1546) «Велике мистецтво» наведено формулу алгебраїчних розв'язків кубічного рівняння $x^3 + px + q = 0$.

Цікавим є такий факт: за умови, що всі коефіцієнти цього рівняння дійсні, усі корені дійсні, проміжні обчислення призводять до уявних чисел. У зв'язку із застосуванням формули Кардано, з'явилися символи виду $a \pm \sqrt{-b}$ ($b > 0$), яким спочатку не надали ніякого змісту, але ними оперували у проміжних викладках, поширюючи на них правила дій з дійсними числами.

Інший італійський математик Раффаеле Бомбеллі (1530-1572) вперше виклав правила дій над комплексними числами майже у сучасному вигляді. Рене Декарт, який ототожнював дійсні числа з відрізками координатної осі, вважав, що для комплексних чисел не може існувати ніякого реального тлумачення, а тому вони назавжди залишаються уявними. Такого погляду дотримувалися й інші математики того часу, у тому числі Ісаак Ньютон, англійський фізик і математик та німецький вчений Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646-1716).

У XVII столітті англійський математик Джон Валліс (1616-1703) у своїй праці «Алгебра, історичний і практичний трактат» вказав на можливість геометричного тлумачення уявних чисел. Лише у XVIII столітті, у зв'язку зі стрімким розвитком науки, для розв'язування численних задач математичного аналізу, механіки і геометрії виникла потреба у геометричній інтерпретації комплексних чисел.

Початок застосування комплексних чисел у диференціальному та інтегральному численні поклали математики Лейбніц та Бернуллі, які ще на початку XVIII століття чисто формально використовували логарифми уявних чисел для інтегрування дробів з уявними знаменниками.

Цікаво, що Лейбніц, називаючи комплексні числа «притулком божественного духу», заповів викарбувати на своїй могилі знак « $\sqrt{-1}$ », як символ потойбічного світу. Символ « i » для позначення уявної частини комплексного числа ввів Ейлер у 1777 році. Поняття «модуль» і «аргумент» комплексного числа було запропоновано французьким вченим д'Аламбером, які пізніше були введені математиками Жаном Арганом і Огюстеном Коші.

Геометричне тлумачення комплексних чисел і дій над ними остаточно закріпилось у математиці лише після виходу у 1831 році праці німецького математика Карла Фрідріха Гаусса «Теорія біквдратних лишків». У ній вчений також змінив назву «уявні» на «комплексні» числа.

В 70-х роках XVIII століття Ейлер і Лагранж застосували поняття комплексної змінної до розв'язування багатьох задач. Комплексні числа застосовували у своїх працях також д'Аламбер і Ейлер.

1.1.1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма запису комплексного числа

Означення. *Комплексним числом* називається вираз

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

де x, y – дійсні числа; i – уявна одиниця, $i^2 = -1$.

Числа x та y називаються відповідно *дійсною* і *уявною частинами* комплексного числа z . Позначаються

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Множина всіх комплексних чисел позначається \mathbb{C} .

Вираз (1.1) називають *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z = x + i0 = x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y = 0$. Таким чином, множина дійсних чисел \mathbb{R} є підмножиною множини комплексних чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Комплексне число $z = iy = 0 + iy$, $y \neq 0$ називається *чисто уявним*.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються *рівними*, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються *комплексно спряженими*.

Для спряжених комплексних чисел:

- 1) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$;
- 2) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$;
- 3) $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$;
- 4) $|z| = |\bar{z}|$;
- 5) $\arg \bar{z} = -\arg z$.

1.1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. *Додавання* комплексних чисел:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

2. *Множення* комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

3. Ділення комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження. Дійсну і уявну частини комплексного числа $z = x + iy$ можна записати у вигляді

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/(2i).$$

Властивості операцій додавання і множення комплексних чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. $z_1z_2 = z_2z_1$;
4. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
5. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Приклад. Спростити вираз $z = (2 + i)^3(3 + 2i)^2$.

Розв'язання.

Дії множення та піднесення до степеня комплексних чисел, що задані в алгебраїчній формі, будемо виконувати за правилами множення алгебраїчних многочленів. Спочатку кожний множник піднесемо до степеня і спростимо, а потім результати перемножимо

$$\begin{aligned} z &= (2 + i)^3(3 + 2i)^2 = (8 + 12i + 6i^2 + i^3)(9 + 12i + 4i^2) = \\ &= (2 + 11i)(5 + 12i) = (10 + 24i + 55i + 132i^2) = -122 + 79i. \end{aligned}$$

Зауважимо, що будь-який проміжний результат є комплексним числом, а отже, зводиться до двочлена. Тому алгебра многочленів комплексних чисел зводиться до алгебри двочленів.

Приклад. Записати вираз $\frac{1}{i}$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання.

Помноживши чисельник та знаменник на i , одержимо:

$$z = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

1.1.3. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Введемо на площині прямокутну декартову систему координат Ox . Кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає єдина точка $M(x; y)$ на площині і навпаки (рис. 1.1). Дійсні числа зображаються точками осі абсцис Ox , тому вісь Ox називається *дійсною віссю*. Чисто уявні числа зображаються точками осі ординат Oy , тому вісь Oy називається *уявною віссю*. Числу $z = 0$ відповідає початок координат $O(0; 0)$.

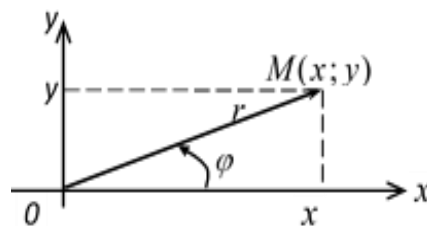


Рис. 1.1

Довжина r радіус-вектора \overline{OM} називається *модулем* комплексного числа z і позначається $|z| = r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кут φ між радіус-вектором \overline{OM} і віссю Ox називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $Arg z = \varphi$.

Єдине значення φ , що задовольняє умову $-\pi < \varphi \leq \pi$, називається *головним значенням аргументу* і позначається $arg z$.

$Arg z$ визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π :
 $Arg z = arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, \quad y \geq 0; \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, \quad y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Як бачимо з рис. 1.1

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

Тоді комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вираз (1.2) називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

можна від тригонометричної форми перейти до *показникової форми* комплексного числа

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\varphi}; \\ \cos \varphi &= (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2; \quad \sin \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/(2i). \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.4. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Нехай комплексні числа задані у тригонометричній формі (1.2)

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{і} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

1. *Добуток.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Отримали:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. *Частка.* Якщо $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Отримали:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Для комплексних чисел, заданих у показниковій формі (1.3)

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{і} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

1. *Добуток.*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i}.$$

2. *Частка.*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}.$$

Формула Муавра (*піднесення комплексного числа до n -го степеня*) впливає з правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.4)$$

Означення. Коренем n -го степеня з числа z (n – натуральне число) називається число w , що задовольняє рівняння

$$w^n = z.$$

Нехай $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, тоді відповідно до правила піднесення до степеня

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Використовуючи умови рівності комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, отримаємо:

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отже,

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Якщо комплексне число z відмінне від нуля $z \neq 0$, то корінь n -го степеня $\sqrt[n]{z}$ має рівно n різних значень, що визначаються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1.5)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

На комплексній площині всі корені n -го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Відстанню $\rho(z_1, z_2)$ між точками M_1 і M_2 , що зображають комплексні числа z_1 і z_2 на комплексній площині C , називається довжина відповідного вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Нехай ε – довільне додатне дійсне число $\varepsilon > 0$.

Множина точок, що задовольняють умову $|z - z_0| < \varepsilon$, називається ε -околом скінченної точки z_0 . *Окіл точки z_0* – це внутрішня частина круга з центром в точці z_0 і радіусом ε . Позначення: $U_\varepsilon(z_0)$.

Зауваження. Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ – це зовнішня частина круга нескінченно великого радіуса з центром у початку координат.

Приклад. Піднести до степеня: $(\sqrt{3} - i)^{40}$.

Розв'язання.

Запишемо число $\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

За формулою Муавра (1.4)

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{40} &= \left(2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right)^{40} = \\ &= 2^{40} \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{40} \left(\cos \left(-6\pi - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-6\pi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{40} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2^{40} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2^{39} - i 2^{39} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Приклад. Розділити число $z_1 = -1$ на число $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

Розв'язання.

Запишемо число z_1 в показниковій формі. Так як $z_1 = \cos \pi + i \sin \pi$, то $z_1 = e^{i\pi}$. Отже,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{1}{2} e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

Приклад. Нехай $z = \frac{a-b}{a+b}$, де a і b – два комплексних числа, причому $|a| = |b|$.

Чи вірно, що z – чисто уявне число?

Розв'язання.

Позначимо модулі чисел a і b буквою r , а їх аргументи відповідно α і β .

Запишемо дані числа в показниковій формі: $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$. Тоді:

$$z = \frac{re^{i\alpha} - re^{i\beta}}{re^{i\alpha} + re^{i\beta}} = \frac{re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right)}{re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right)} = \frac{2i \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = i \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Бачимо, що z – чисто уявне число.

Приклад. Знайти всі значення кореня: $\sqrt[3]{i-1}$.

Розв'язання.

За формулою (1.2) комплексне число $i-1$ запишемо в тригонометричній формі

$$i-1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Застосуємо формулу (1.5):

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{i-1} &= \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$k = 0: \quad \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (1 + i);$$

$$k = 1: \quad \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$k = 2: \quad \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

Приклад. Обчислити всі значення $\sqrt[4]{-16}$.

Розв'язання.

$$|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16; \quad \varphi = \pi.$$

Отже,

$$-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16} &= \sqrt[4]{16(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Всі значення $\sqrt[4]{-16}$ зображаються точками, розташованими на колі радіуса $r = 2$ з центром в початку координат (рис. 1.2) та є вершинами вписаного правильного чотирикутника (квадрата).

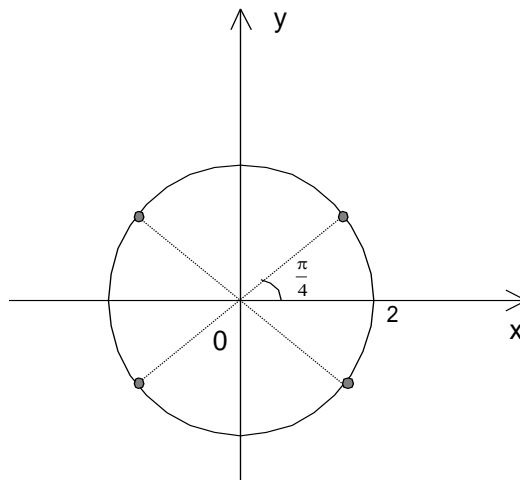


Рис. 1.2

Приклад. Нехай $z_1 = 2x + (x - y)i$, $z_2 = y + (x + 1)i$. Знайти x та y , якщо $z_1 = z_2$.

Розв'язання.

З умови рівності двох комплексних чисел маємо

$$\begin{cases} 2x = y, \\ x - y = x + 1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо $x = -0,5$; $y = -1$.

Приклад. Визначити вид лінії $|z - 2 + i| = 1$.

Розв'язання.

$$z = x + iy; \quad |x + iy - 2 + i| = 1; \quad |(x - 2) + i(y + 1)| = 1;$$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 1 \Rightarrow$$

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ – коло радіуса $r = 1$ з центром у точці $M_0(2; -1)$.

Приклад. На комплексній площині зобразити область, що задана нерівностями:

1) $Re z + Im z + 2 \geq 0, \quad |z + 2i| \leq 1;$

2) $|z| \geq 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$

Розв'язання.

1) $z = x + iy, \quad Re z + Im z + 2 = 0, \quad x + y + 2 = 0$ – пряма;

$|z + 2i| = 1, \quad |x + i(y + 2)| = 1; \quad x^2 + (y + 2)^2 = 1$ – коло радіуса $r = 1$ з центром у точці $M_0(0; -2)$.

Область заштрихована на рис. 1.3.

2) $z = x + iy, \quad |z| = 2$ – коло радіуса $r = 2$ з центром у початку координат;

$\arg z = -\frac{\pi}{4}$ і $\arg z = \frac{\pi}{2}$ – два промені, що виходять з початку координат.

Область заштрихована на рис. 1.4.

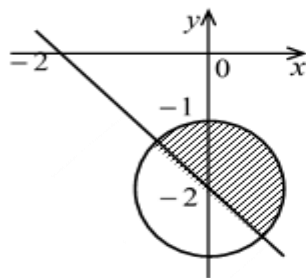


Рис. 1.3

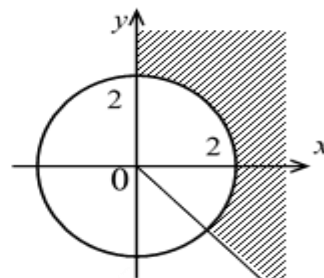


Рис. 1.4

Завдання для самостійної роботи.

1. Виконати дії над комплексними числами

$$z = 3(2 - 3i)(2 - i) - (3 - i)^3 + 5(4 - 5i) : (3 + 4i).$$

2. Зобразити на комплексній площині та подати в тригонометричній і показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = 2i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = -2 - i.$$

3. Піднести до степеня

$$(\sqrt{3} + i)^{30}; \quad (1 + i)^{20}.$$

4. Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{1 + i}; \quad \sqrt[4]{-1 - i}; \quad \sqrt[3]{-8}.$$

5. Обчислити

$$\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)^{24}.$$

6. Обчислити

$$\frac{z_1}{z_2} + z_3,$$

якщо $z_1 = 7 + 2i, \quad z_2 = 1 - 2i, \quad z_3 = 4i.$

7. На комплексній площині зобразити область, що задана нерівністю

$$|z - 2i| \leq 2.$$

1.2. Функції комплексної змінної.

Похідна функції комплексної змінної

1.2.1. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність

Область та її межа.

Непорожня множина D комплексної площини називається *областю*, якщо виконуються такі умови:

1) вона відкрита, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;

2) вона зв'язна, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L , всі точки якої належать цій множині D .

Точка z_0 називається граничною точкою області D , якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області. Множина всіх граничних точок Γ області D називається *границею* цієї області. Об'єднання області D з її границею Γ , називається замкненою областю і позначається \bar{D} .

Якщо межу області утворює одна лінія, що не має самоперетину, то область називається *однотрив'язною* (рис.1.5 а)), а коли межу області утворюють k таких ліній, що не мають самоперетину і спільних точок, то область називається k -*трив'язною* (рис.1.5 б) – двотрив'язна, в) – тритрив'язна області).

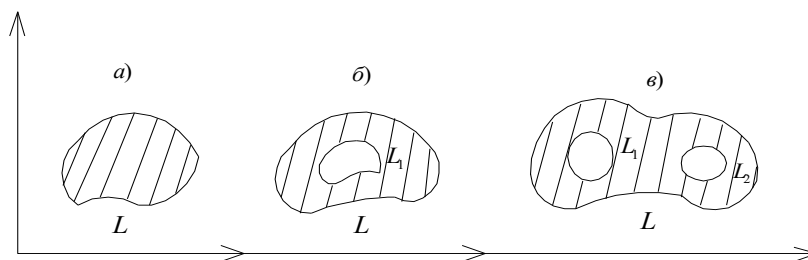


Рис. 1.5

Означення. Нехай на z -площині задана довільна множина точок D . Якщо кожній точці $z = x + iy$ множини D за певним законом f поставлено у відповідність одну точку $w = u + iv$ (або декілька точок) w -площини, то говорять, що на множині D задано однозначну (або багатозначну) комплексну функцію комплексної змінної $w = f(z)$. D називається множиною визначення

функції $w = f(z)$, а множина E усіх значень w , що набуває функція, називається множиною значень функції $w = f(z)$.

Означення. Відображення $w = f(z)$ називається *взаємно однозначним* або *однолистим* в області D , якщо довільним двом різним точкам $z_1 \neq z_2$ області D завжди відповідають дві різні точки $w_1 \neq w_2$ області E . У цьому випадку існує обернена функція $z = f^{-1}(w)$ – відображення області E на область D .

Зауваження. Задання комплексної функції комплексної змінної $w = f(z)$, де $z = x + iy$ – комплексний аргумент, $w = u + iv$ – комплексна залежна змінна, рівносильне заданню упорядкованої пари дійсних функцій двох дійсних змінних $u = \operatorname{Re} w = u(x, y)$ і $v = \operatorname{Im} w = v(x, y)$. Тому поняття *границі* та *неперервності* функції комплексної змінної вводяться так само, як і відповідні поняття для функції дійсних змінних. Це дозволяє перенести на комплексні функції основні теореми дійсного аналізу.

Приклад. $w = z^3$ – однозначна функція, визначена на всій комплексній площині:

$$\begin{aligned} w = z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3); \\ u(x, y) &= x^3 - 3xy^2; \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Приклад. Яка точка є образом точки $z_0 = 1 + i$ при відображенні $f(z) = z^2$?

Розв'язання.

$w_0 = f(1 + i) = (1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Образом точки $z_0 = 1 + i$ є точка $w_0 = 2i$ (рис. 1.6).

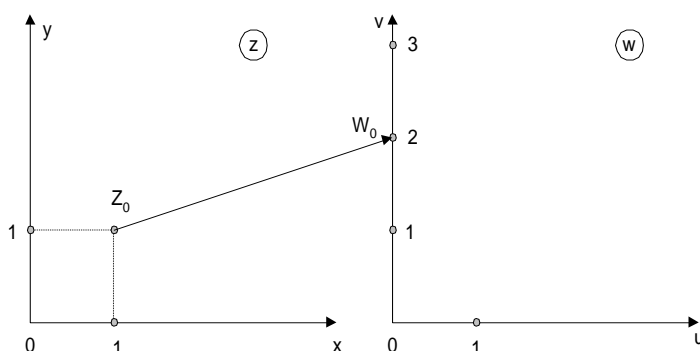


Рис. 1.6

Границя функції комплексної змінної.

Означення. Число $w_0 \neq \infty$ називають границею функції $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий δ – окіл точки z_0 , що для всіх z , що належать цьому околу, крім, можливо, точки z_0 ($z \neq z_0$), виконується нерівність

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Позначимо: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Означення. Число w_0 називається границею $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $R = R(\varepsilon)$, що для всіх z , що задовольняють нерівність $|z| > R$, виконується нерівність:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

Позначимо: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$.

Аналогічно можна ввести означення границі $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Рівність $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$, де $z_0 = x_0 + iy_0$, рівносильна двом рівностям:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Введене нами означення границі функції нічим не відрізняється від означення границі функції дійсної змінної, отже, усі доведені в курсі математичного аналізу теореми про границі і нескінченно малі залишаються в силі для функцій комплексної змінної.

Неперервність функції комплексної змінної.

Означення. Якщо функція $w = f(z)$ визначена в точці z_0 і в деякому її околі і границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не тільки існує, але і дорівнює значенню функції $f(z)$ у точці z_0 , тобто $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, то функція називається неперервною в точці z_0 .

Функція $w = f(z)$, що неперервна в кожній точці деякої області D , називається неперервною в області D .

Теорема. Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була неперервною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були неперервні в точці (x_0, y_0) .

Оскільки означення неперервності функції комплексної змінної збігається з означенням неперервності функції дійсної змінної, то доведені в курсі математичного аналізу теореми про неперервність суми, різниці, добутку, частки неперервних функцій, а також неперервність складеної функції залишаються в силі для функцій комплексної змінної.

1.2.2. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана

Нехай $w = f(z)$ – однозначна функція комплексної змінної у деякому околі фіксованої точки z .

Означення. Похідною $w' = f'(z)$ функції $w = f(z)$ у точці z називається границя відношення приросту функції Δw до приросту аргументу Δz , коли приріст аргументу прямує до нуля (довільним способом):

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функція, що має скінченну похідну в точці z , називається *диференційовною* в цій точці.

Теорема (необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної). Функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$ тоді і тільки тоді, коли існують неперервні частинні похідні функцій $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ за обома змінними x і y в точці $M(x, y)$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ і виконуються умови Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Згідно з умовами Коші – Рімана похідну функції комплексної змінної можна подати через частинні похідні дійсної та уявної частин наступними чотирма способами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Приклад. Перевірити, що функція $w = 1/z$ задовольняє умовам Коші – Рімана, знайти її похідну.

Розв'язання.

$$z = x + iy, \quad w = u + iv,$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Перевіримо умови Коші – Рімана (1.6). Для цього обчислимо частинні похідні

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Знайдені частинні похідні задовольняють умовам Коші – Рімана. Обчислимо похідну:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{-(x - iy)^2}{(x + iy)^2(x - iy)^2} = -\frac{1}{(x + iy)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Зауваження. Як і в дійсному аналізі, диференційовна в деякій точці функція комплексної змінної є неперервною в цій точці. З означення похідної і властивостей границь випливає, що правила диференціювання і таблиця похідних функцій комплексної змінної не відрізняються від аналогічних співвідношень для функцій дійсної змінної.

1.3. Поняття аналітичної функції

Означення. Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною* в точці z , якщо вона диференційовна в цій точці та в деякому околі точки z .

Функція $w = f(z)$, що аналітична в кожній точці деякої області D , називається аналітичною в області D .

Точка, в якій функція $w = f(z)$ є аналітичною, називається *правильною*.

Точка, в якій функція $w = f(z)$ не є аналітичною, називається *особливою* точкою цієї функції.

Нехай функція $w = f(z)$ – аналітична в деякій області D . Тоді для її дійсної $u = u(x, y)$ і уявної $v = v(x, y)$ частин мають місце умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продиференціюємо першу рівність по x , а другу – по y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Отримали *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогічно можна отримати рівняння Лапласа для функції $v = v(x, y)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функція, що задовольняє рівнянню Лапласа, називається *гармонічною*.

Дійсна $u = u(x, y)$ і уявна $v = v(x, y)$ частини аналітичної функції $w = f(z)$ є гармонічними.

Зауваження. Знаючи дійсну або уявну частини аналітичної функції, можна знайти іншу з точністю до сталої і відновити аналітичну функцію.

Приклад. Перевірити, чи є функція $w = e^{2z}$ аналітичною?

Розв'язання.

$$1) \quad e^{2z} = e^{2x+iy} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y);$$

$$u(x, y) = e^{2x} \cos 2y; \quad v(x, y) = e^{2x} \sin 2y;$$

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y.$$

Умови Коші-Рімана виконуються в кожній точці (x, y) площини XOY і функції $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ неперервні в цих точках. Тому e^{2z} аналітична в будь-якій точці z комплексної площини.

Приклад. Перевірити на аналітичність задану функцію і у випадку аналітичності подати її у вигляді $w = f(z)$, якщо

$$w = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y).$$

Розв'язання.

$$z = x + iy; \quad w = u + iv;$$

$$u = x^2 - y^2 - x; \quad v = 2xy - y.$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$$

неперервні і задовольняють умови Коші – Рімана, тому функція аналітична.

Якщо в початковий вираз для комплексної функції підставити

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/(2i),$$

то отримаємо її вираз у вигляді $w = f(z)$

$$w = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 - \frac{z + \bar{z}}{2} + i\left(2 \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = z^2 - z.$$

Приклад. Перевірити, чи існує аналітична функція, дійсна частина якої $u = xy - x^2 + y^2$. У випадку позитивної відповіді знайти уявну частину $v(x, y)$ і відновити саму аналітичну функцію $w = f(z)$ за умови $w(i\sqrt{2}) = 2$.

Розв'язання.

Оскільки частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, то функція $u(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, а тому функція $u = xy - x^2 + y^2$ – гармонічна. Отже, існує функція $v = v(x, y)$ така, що функція $w = u + iv$ буде

аналітичною.

За умовами Коші – Рімана (1.6), маємо:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y - 2x.$$

Функцію $v = v(x, y)$ можна знайти за її частинними похідними як криволінійний інтеграл від її повного диференціала

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C; \\ v(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-x - 2y) dx + (y - 2x) dy + C = \\ &= \int_0^x (-x) dx + \int_0^y (y - 2x) dy + C = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2xy + C. \end{aligned}$$

Тоді

$$w = u + iv = (xy - x^2 + y^2) + i \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2xy + C \right).$$

Для того, щоб отримати функцію у вигляді $w = f(z)$, треба підставити $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} w &= \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 - \frac{i}{2} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \frac{i}{2} \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 - \\ &\quad - 2i \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + Ci = -\frac{2+i}{2} z^2 + Ci. \end{aligned}$$

Враховуючи умову $w(i\sqrt{2}) = 2$, знайдемо значення довільної сталої

$$-\frac{2+i}{2} (i\sqrt{2})^2 + Ci = 2; \quad C = -1.$$

Аналітична функція має вигляд $w = -\frac{2+i}{2} z^2 - i$.

Приклад. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + vi$, $v(x, y) = 2xy + y$.

Розв'язання.

$$1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0 \Rightarrow$$

функція $v(x, y)$ – гармонічна.

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

3) застосуємо інший (в порівнянні з попереднім прикладом) спосіб знаходження функції:

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = -2 \int y dy = -y^2 + C(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C'(x) = 2x + 1; \quad C(x) = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C_1;$$

$$u(x, y) = -y^2 + x^2 + x + C_1.$$

4) запишемо функцію $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= -y^2 + x^2 + x + C_1 + i(2xy + y) = \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) + (x + iy) + C_1 = z^2 + z + C_1. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Переконайтеся в тому, що хоча дійсна і уявна частини функції

$$f(z) = (\bar{z})^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi$$

є функціями гармонічними, $w = f(z)$ не є функцією аналітичною.

2. Знайти аналітичну функцію $w = f(z)$ за її дійсною або уявною частиною:

$$1) \quad u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 2y, \quad f(i) = 1;$$

$$2) \quad u(x, y) = y^3 - 3x^2y + y, \quad f(1 - 2i) = 0;$$

$$3) \quad v(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2y, \quad f(1 - i) = 2i.$$

1.4. Ряди з комплексними членами.

Елементарні функції на комплексній площині

1.4.1. Ряди з комплексними членами

Означення. Ряд з комплексними членами

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \quad (1.7)$$

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a_n \in R, \quad b_n \in R$$

називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя його n -ої частинної суми

$$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

при $n \rightarrow \infty$. Цю границю називають сумою ряду (1.7) та записують

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Ряд (1.7) називається *розбіжним*, якщо ця границя не існує або вона дорівнює нескінченності.

З означення збіжності ряду з комплексними членами випливає, що, якщо ряд (1.7) збігається, то його n -член прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ (*необхідна умова збіжності ряду (1.7)*). Якщо n -член не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд (1.7) розбігається.

Теорема. Ряд з комплексними членами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, де $c_n = a_n + ib_n$, $a_n \in R$,

$b_n \in R$, збігається тоді і лише тоді, коли збігаються обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

складені відповідно з дійсних і уявних частин даного ряду.

Теорема (ознака абсолютної збіжності). Якщо ряд, складений з модулів

членів ряду (1.7) $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ також збіжний.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається

ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається *умовно збіжним*, якщо

сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, а ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ розбігається.

Зауваження. Дослідження на збіжність рядів з комплексними членами зводиться до дослідження рядів з дійсними членами, що здійснюється за відомими ознаками збіжності дійсних рядів.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i2^n \right)$.

Розв'язання.

Ряд з дійсних частин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником степеня $\alpha = 2 > 1$, а ряд з уявних частин $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ розбігається як геометрична прогресія зі знаменником $q = 2 \geq 1$. Тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i2^n \right)$ також розбігається, відповідно до теореми про необхідну та достатню умови збіжності рядів з комплексними членами.

Завдання для самостійної роботи.

Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + i \frac{1}{n^n} \right)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n!} \right)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)/n + i \ln n \right)$.

1.4.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора

Означення. Степеневим рядом з центром у точці z_0 називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots, \quad (1.8)$$

де c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – коефіцієнти ряду (комплексні числа).

Очевидно, що степеневий ряд завжди збігається в точці $z = z_0$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці z_1 : $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається в колі радіуса $|z_1 - z_0|$ з центром в точці z_0 . Якщо степеневий ряд розбігається в деякій точці z_2 : $z_2 \neq z_0$, то він розбігається поза колом радіуса $|z_2 - z_0|$ з центром в точці z_0 .

За теоремою Абеля для степеневого ряду завжди існує так зване *коло збіжності* $|z - z_0| < R$, всередині якого ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі $|z - z_0| = R$ можуть бути як точки збіжності, так і точки розбіжності. Радіус R цього кола називається *радіусом збіжності*.

Зауваження. Підкреслимо, що $0 \leq R \leq +\infty$. Якщо $R = 0$, то ряд збігається тільки в точці $z = z_0$. Якщо $R = +\infty$, то ряд збігається на всій комплексній площині.

Радіус збіжності степеневого ряду (1.8) можна визначити, користуючись відомими ознаками збіжності рядів.

Застосовуючи до ряду з модулів ознаку д'Аламбера чи радикальну ознаку Коші, радіус збіжності степеневого ряду можна знайти відповідно за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (1.9)$$

Відзначимо *важливу властивість степеневого ряду*: сума степеневого ряду є аналітичною функцією у всіх внутрішніх точках кола збіжності, причому її похідна обчислюється почленним диференціюванням ряду.

Ряд Тейлора. Якщо функція $f(z)$ – однозначна та аналітична всередині кола радіуса R з центром у точці z_0 , то вона може бути подана у цьому колі збіжним степеневим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{де} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При $z_0 = 0$ отримаємо ряд Маклорена.

Приклад. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - 2i)(z + i)^n.$$

Розв'язання. За формулою (1.9)

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n - 2i|}{|n + 1 - 2i|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{\sqrt{(n + 1)^2 + 4}} = 1.$$

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку д'Аламбера до ряду, складеному з модулів членів даного ряду

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n + 1)^2 z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n + 1)^2} = |z| < 1.$$

Отже, ряд збіжний в колі $|z| < 1$, $R = 1$. На колі $|z| = 1$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z^n|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Отримали збіжний ряд (узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ з показником $\alpha = 2 > 1$). Тоді початковий ряд також збіжний і притому абсолютно для всіх z , що задовольняють нерівність $|z| \leq 1$.

Завдання для самостійної роботи.

Знайти область збіжності степеневих рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n + i)^n (z - 1 + i)^n.$

1.4.3. Елементарні функції на комплексній площині

Означення функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, що відомі з елементарної математики, для комплексних значень z непридатні. Надамо означення цих функцій комплексної змінної.

Означення. Функції e^z , $\sin z$, $\cos z$ для будь-якого комплексного значення z визначаються рядами

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned} \tag{1.10}$$

Застосовуючи ознаку д'Аламбера, можна переконатися, що ряди, які стоять в правих частинах (1.10), абсолютно збігаються при будь-якому комплексному значенні z . Отже, ці функції визначені на всій комплексній площині. При дійсному значенні z , тобто при $z = x$, ці функції збігаються з відповідними функціями дійсної змінної.

Розглянемо деякі властивості функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Отже,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{1.11}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{1.12}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{1.13}$$

Формули (1.11) - (1.13) називаються *формулами Ейлера*.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отже,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (1.14)$$

Звідси випливає, що $|e^z| = e^x$, а одне із значень $Arg e^z$ дорівнює y .
Формула (1.14) дозволяє обчислювати значення показникової функції при будь-яких комплексних значеннях аргумента.

З рівності (1.14) випливає:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

тобто e^z – періодична функція з періодом $2\pi i$.

Функції $\sin z$, $\cos z$ – періодичні функції з періодом 2π .

Зберігаються всі основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

та інші.

Приклад. Обчислити $\sin(3 + 2i)$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу синуса суми і формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \sin(3 + 2i) &= \sin 3 \cos 2i + \cos 3 \sin 2i = \\ &= \sin 3 \frac{e^{i \cdot 2i} + e^{-i \cdot 2i}}{2} + \cos 3 \frac{e^{i \cdot 2i} - e^{-i \cdot 2i}}{2i} = \sin 3 \frac{e^{-2} + e^2}{2} + i \cos 3 \frac{e^2 + e^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

Тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної визначаються за допомогою формул Ейлера (1.11) – (1.13)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Формули, що зв'язують тригонометричні і гіперболічні функції

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

$$\sin z = \sin(z + 2\pi); \quad \cos z = \cos(z + 2\pi); \quad \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(z + \pi); \quad \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}(z + \pi);$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(z + 2\pi i); \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(z + 2\pi i); \quad \operatorname{th} z = \operatorname{th}(z + \pi i); \quad \operatorname{cth} z = \operatorname{cth}(z + \pi i).$$

Введемо логарифмічну функцію, як функцію обернену до e^z .

Означення. Логарифмом комплексного числа z називається таке число w ($w = \operatorname{Ln} z$), що $e^w = z$.

Якщо $w = u + iv$, $z = x + iy$, то

$$|e^w| = e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|, \quad z \neq 0; \quad v = \operatorname{Arg} z.$$

Отже,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\operatorname{arg} z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.15)$$

Логарифм є багатозначною функцією. За допомогою логарифмічної функції визначається загальна степенева функція $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, де показник $a = \alpha + i\beta$ – довільне комплексне число, та показниково-степенева функція $w = z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$, де основа не дорівнює нулю $z_1 \neq 0$.

Приклад. Обчислити $\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3})$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу (1.15)

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \operatorname{arg} z = \frac{\pi}{3}.$$

$$\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad \text{де } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Показникова функція:

$$a^z = (e^{\operatorname{Ln} a})^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \quad a \neq 0.$$

Обернені тригонометричні функції вводяться як функції обернені до $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ і обчислюються за формулами

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}. \quad (1.16)$$

Приклад. Обчислити: $\operatorname{Arctg} 3i$.

Розв'язання.

Відповідно до формули (1.16)

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctg} 3i &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-3i}{i+3i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{i}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{2}\right) + \pi i + 2k\pi i\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{i}{2} \ln 2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Приклад. Знайти $w = i^{-i}$.

Розв'язання.

$$w = i^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} i} = e^{-i(\ln|1| + i \operatorname{Arg} i)} = e^{-i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi k))} = e^{\pi/2 + 2\pi k},$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Приклад. Розв'язати рівняння $\sin z = -2$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}z &= \operatorname{Arcsin}(-2) = -i \operatorname{Ln}(i(-2) + \sqrt{1 - (-2)^2}) = \\ &= -i \operatorname{Ln}(-2i + \sqrt{-3}) = -i \operatorname{Ln}((-2 \pm \sqrt{3})i) = \\ &= -i(\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) + \operatorname{Ln}(-i)) = -i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + \ln|-i| + i \operatorname{Arg}(-i)) = \\ &= -i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + \ln 1 + i(-\pi/2 + 2\pi k)) = \\ &= (-\pi/2 + 2\pi k) - i \ln(2 \pm \sqrt{3}); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'язати рівняння $\cos z = 3$.
2. Знайти $\operatorname{Ln}(-3)$.
3. Виділити дійсну і уявну частини функцій: а) $\cos z$; б) $\operatorname{sh} z$.
4. Обчислити $(1+i)^i$, $e^{3+\pi i}$.

1.4. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай в площині Z задана будь-яка гладка або кусково-гладка крива L (рис. 1.7).

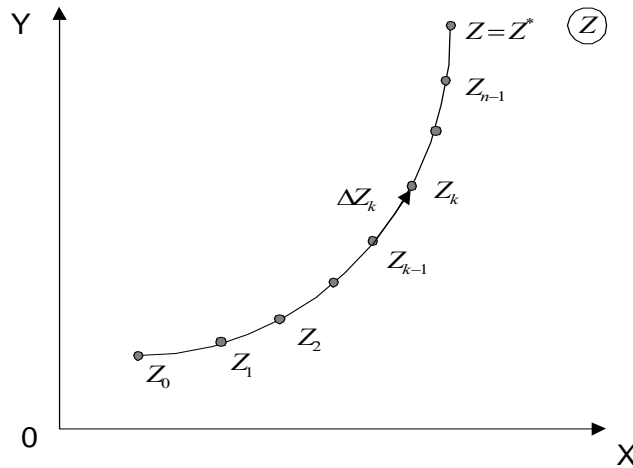


Рис. 1.7

Нехай функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ неперервна та однозначна у всіх точках дуги L . Розіб'ємо дугу L довільним способом на n частин. Кожній елементарній дузі ΔL_i відповідає елементарна хорда $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. На кожній елементарній дузі ΔL_i виберемо довільну точку ζ_i і складемо інтегральну суму для функції $f(z)$ на кривій L

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i. \quad (1.17)$$

Означення. Границя інтегральної суми (1.17), за умови, що довжина найбільшої з елементарних дуг прямує до нуля (при цьому $n \rightarrow +\infty$), незалежно від способу розбиття та вибору точок, називається інтегралом від функції $f(z)$ по дузі L і позначається

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i,$$

де λ – довжина найбільшої з елементарних дуг, $dz = dx + idy$ – диференціал комплексного аргументу.

Інтеграл від комплексної функції можна виразити через два дійсні криволінійні інтеграли за координатами:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy.$$

Отже,

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (1.18)$$

Обчислення інтеграла (1.18) зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів. Тому для інтеграла від комплексної функції справедливі відповідні властивості криволінійних інтегралів. Зокрема, при зміні напрямку обходу кривої інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_{\bar{L}} f(z)dz = - \int_L f(z)dz.$$

Нехай крива L задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Ці рівняння рівносильні рівнянню $z = z(t) = x(t) + iy(t)$. Тоді для обчислення інтеграла (1.18) необхідно підставити замість z у підінтегральну функцію $z(t) = x(t) + iy(t)$, а замість dz – її диференціал $dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))dt$, t належить проміжку (t_0, T) :

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^T f(z(t))z'(t)dt.$$

Для інтеграла від аналітичної функції справджується формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

де $F(z)$ – довільна первісна для функції $f(z)$, тобто $F'(z) = f(z)$.

Таблиця інтегралів від функції комплексної змінної аналогічна відповідній таблиці для функцій дійсного аргументу, але підлогарифмічні вирази не містять модуля.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \int_L (2z + \bar{z} + i)dz,$$

де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_L (2z + \bar{z} + i) dz = \\
 &= \left[\begin{array}{l} y = x^2; \quad z = x + iy = x + ix^2; \quad \bar{z} = x - ix^2; \\ dy = 2x dx; \quad dz = dx + idy = dx + i2x dx = (1 + 2xi) dx; \\ x_1 = 0; x_2 = 1; \\ f(z) = 2z + \bar{z} + i = 2(x + ix^2) + x - ix^2 + i = 3x + i(x^2 + 1) \end{array} \right] = \\
 &= \int_0^1 (3x + i(x^2 + 1))(1 + 2xi) dx = \int_0^1 (3x - 2x(x^2 + 1)) dx + \\
 &+ i \int_0^1 ((x^2 + 1) + 6x^2) dx = \int_0^1 (x - 2x^3) dx + i \int_0^1 (7x^2 + 1) dx = \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 + i \left(\frac{7x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{10}{3} i.
 \end{aligned}$$

Приклад. Обчислити

$$\int_L \bar{z} \operatorname{Im} z \, dz,$$

де L – пряма, що з'єднує точки $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = 0$ (z_1 – початкова точка).

Розв'язання.

Рівняння прямої L : $y = 2x$. Тоді

$$z = x + iy = x + 2xi = (1 + 2i)x; \quad dz = (1 + 2i)dx;$$

$$\bar{z} = x - iy = x - 2xi = (1 - 2i)x; \quad \operatorname{Im} z = y = 2x; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 \int_L \bar{z} \operatorname{Im} z \, dz &= \int_1^0 (1 - 2i)x \cdot 2x(1 + 2i) dx = 2 \int_1^0 (1 - 2i)(1 + 2i)x^2 dx = \\
 &= 10 \int_1^0 x^2 dx = \frac{10}{3} x^3 \Big|_1^0 = -\frac{10}{3}.
 \end{aligned}$$

Приклад. Користуючись таблицею інтегралів, обчислити заданий інтеграл від аналітичної функції

$$I = \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 4}}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 4}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 4} \right) \Big|_0^i = \\ &= \ln \left(i + \sqrt{i^2 + 4} \right) - \ln 2 = \ln(\sqrt{3} + i) - \ln 2 = \ln |\sqrt{3} + i| + \\ &+ i \arg(\sqrt{3} + i) - \ln 2 = \ln 2 + i\pi/6 - \ln 2 = i\pi/6. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Обчислити

$$\int_L z \operatorname{Re} z \, dz,$$

де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $z = 0$ до точки $z = 2 + 4i$.

2. Обчислити

$$\int_L |z| \, dz,$$

якщо

а) L – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = -1$, $z_2 = 1$;

б) L – верхня половина кола $|z| = 1$ (початок точка $z_1 = 0$);

в) L – ламана, що з'єднує точки $z_1 = -2$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 2$.

3. Обчислити

$$\int_L z \sin z \, dz,$$

де L – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = i$.

4. Обчислити

$$\int_L \operatorname{Im} z \, dz,$$

де L – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 2 + i$.

1.6. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші

1.6.1. Теорема Коші для однозв'язної області

Теорема 1 (*перше формулювання теореми Коші*). Нехай в однозв'язній області D задана однозначна аналітична функція $w = f(z)$. Тоді інтеграл від цієї функції $w = f(z)$ по будь-якому замкненому контуру C області D дорівнює нулю.

Теорема 2 (*друге формулювання теореми Коші*). Якщо функція $w = f(z)$ є аналітичною функцією в однозв'язній області D , обмеженій кусково-гладким контуром L , і неперервною в замкненій області \bar{D} , то інтеграл від функції $w = f(z)$ по границі L області D дорівнює нулю

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Приклад. $\oint_L \sin z dz = 0$ для будь-якої кривої L , тому що $\sin z$ – функція, аналітична в будь-якій точці z комплексної площини Z .

1.6.2. Теорема Коші для багатозв'язної області

Розглянемо багатозв'язну область D , обмежену зовнішнім контуром L і внутрішніми контурами L_1, L_2, \dots, L_n .

Теорема 3. Нехай функція $w = f(z)$ аналітична у багатозв'язній області D з додатньою орієнтацією її контура $C = L + L_1 + L_2 + \dots + L_n$, причому контури L_1, L_2, \dots, L_n лежать всередині контура L , і неперервна в замкненій області \bar{D} , тоді

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Іншими словами, якщо область D обмежена скінченною кількістю кусково-гладких кривих, а функція $f(z)$ аналітична в області \bar{D} , то інтеграл від функції $f(z)$ по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх контурах при умові, що обхід усіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz + \dots + \oint_{L_n} f(z) dz.$$

1.6.3. Інтегральна формула Коші

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D та на кривій L , що обмежує цю область, і точка a є внутрішньою точкою області D .

Тоді справедлива формула

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a). \quad (1.19)$$

Формула (1.19) називається інтегральною формулою Коші.

Запишемо формулу у вигляді:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Інтегральна формула Коші дозволяє знаходити значення аналітичної функції в будь-якій точці a , що лежить всередині області D , якщо відомі значення цієї функції на кривій L , що обмежує цю область.

Приклад. Обчислити

$$I = \oint_L \frac{e^{2z}}{z^2 + 4} dz,$$

де L – коло $|z - i| = 2$.

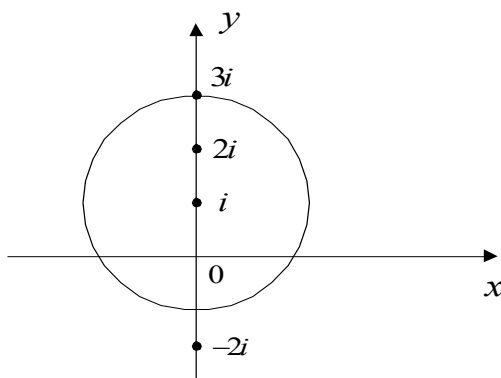


Рис. 1.8

Розв'язання.

Особливі точки підінтегральної функції $\frac{e^{2z}}{z^2+4}$ отримаємо з рівняння

$$z^2 + 4 = 0; \quad z = \pm 2i.$$

Одна з них $z = 2i$ є внутрішньою точкою області D , обмеженої колом $|z - i| = 2$ (рис.1.8).

Оскільки $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$, то запишемо інтеграл у вигляді

$$I = \oint_L \frac{e^{2z}}{z^2 + 4} dz = \oint_L \frac{e^{2z}/(z + 2i)}{z - 2i} dz.$$

Функція $f(z) = \frac{e^{2z}}{z+2i}$ аналітична всередині кола і на його межі (її особлива точка $z = -2i$ знаходиться поза колом), тому за інтегральною формулою Коші (1.19):

$$I = \oint_L \frac{e^{2z}/(z + 2i)}{z - 2i} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{2z}}{z + 2i} \right) \Big|_{z=2i} = 2\pi i \frac{e^{4i}}{4i} = \frac{\pi}{2} (\cos 4 + i \sin 4).$$

Приклад. Обчислити

$$I = \oint_L \frac{\cos z dz}{z(z - 1)},$$

де $L: |z| = 2$.

Розв'язання.

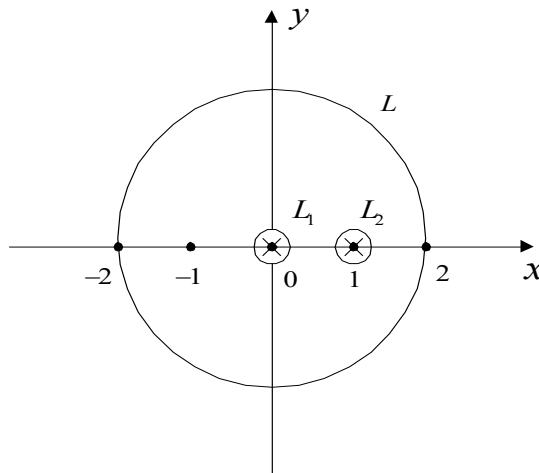


Рис. 1.9

Особливі точки підінтегральної функції $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Обидві точки належать області, що обмежена колом $|z| = 2$.

Проведемо два контури L_1 і L_2 такі, що точка $z_1 = 0$ міститься всередині L_1 , $z_2 = 1$ міститься всередині L_2 ; контури L_1 і L_2 не мають спільних точок і обидва лежать всередині кола $|z| = 2$. Форма цих ліній може бути будь-якою, це можуть бути, наприклад, кола з центрами в точках $z = 0$ і $z = 1$, при цьому їх

радіуси менші за $\frac{1}{2}$. Тоді, використовуючи теорему Коші для багатозв'язної області і формулу (1.19), отримаємо:

$$I = \oint_L \frac{\cos z}{z(z-1)} dz = \oint_{L_1} \frac{\cos z / (z-1)}{z-0} dz + \oint_{L_2} \frac{\cos z / z}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\cos z}{z-1} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{\cos z}{z} \Big|_{z=1} = 2\pi i \left(\frac{\cos 0}{-1} + \frac{\cos 1}{1} \right) = 2\pi i (\cos 1 - 1).$$

1.6.4. Похідна будь-якого порядку від аналітичної функції

Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D та на її межі L і точка a – внутрішня точка області, то

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in N. \quad (1.20)$$

З цієї формули випливає, що, якщо $f(z)$ – аналітична в однозв'язній області D і на її межі L , то в кожній точці області D вона має похідні усіх порядків.

Перепишемо формулу (1.20) у вигляді

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a). \quad (1.21)$$

Формулу (1.21) називають *інтегральною формулою Коші для похідних*.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \oint_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2}$$

по заданому замкненому контуру C :

$$1) C: |z-1| = 1/2, \quad 2) C: |z-i| = 1/2.$$

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$ скрізь аналітична за винятком двох особливих точок $z_1 = 0, z_2 = 1$.

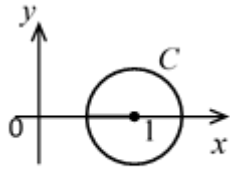


Рис. 1.10

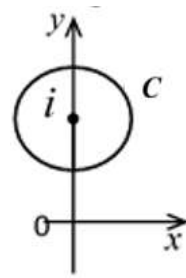


Рис. 1.11

1) Особлива точка $z_1 = 0$ не належить області D , обмеженої контуром $C: |z - 1| = 1/2$, (рис.1.10). У підінтегральному виразі виділимо функцію $\varphi(z) = e^{2z}/z$, що є аналітичною в області D . Тоді для обчислення інтеграла можна скористатися формулою Коші для першої похідної

$$I = \oint_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} = \oint_C \frac{\varphi(z) dz}{(z-1)^2} = 2\pi i \varphi'(z) \Big|_{z=1} =$$

$$= \left| \varphi'(z) = \frac{2e^{2z} z - e^{2z}}{z^2} \right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{2e^{2 \cdot 1} \cdot 1 - e^{2 \cdot 1}}{1^2} = 2\pi e^2 i.$$

2) Обидві особливі точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ не належать області D , обмеженої контуром $C: |z - i| = 1/2$, (рис. 1.11). Підінтегральна функція $f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$ аналітична в цій області, тоді за теоремою Коші

$$I = \oint_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} = 0.$$

Завдання для самостійної роботи.

За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграли:

- 1) $\oint_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2}$ по контуру $C: |z| = 2$.
- 2) $\oint_L \frac{\sin 2z}{(z+2)^4} dz$ по контуру $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.
- 3) $\oint_C \frac{(z+1) dz}{z^2 + 4}$ по контуру $C: |z| = 3$.
- 4) $\oint_L \frac{(z^2 - 1) dz}{z^2(z^2 + 9)^2}$ по контуру $L: |z + 2i| = 4$.

$$5) \oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z(z^2 + z - 2)}.$$

$$6) \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2 + 1)z^2}.$$

$$7) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz.$$

$$8) \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} dz.$$

1.7. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки

1.7.1. Ряд Лорана

Означення. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.22)$$

називається *рядом Лорана*, де c_n ($n = \pm 1; \pm 2; \dots$) – коефіцієнти ряду.

Ряд (1.22) містить як невід’ємні, так і від’ємні степені різниці $(z - z_0)$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} -$$

називається *головною частиною*, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n -$$

правильною частиною ряду Лорану.

Ряд Лорана збігається, якщо одночасно збігаються його головна і правильна частини. Оскільки правильна частина ряду Лорана як звичайний степеневий ряд збігається в колі з центром z_0 і радіусом збіжності

$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, то для визначення радіуса збіжності головної частини ряду

Лорану потрібно зробити заміну $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$. Тоді отриманий степеневий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$ збігається в колі з центром $\zeta = 0$ і радіусом $R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{-n}|}{|c_{-n-1}|}$:

$|\zeta| = \left| \frac{1}{z - z_0} \right| < R_1$. Позначимо $r = \frac{1}{R_1}$. Повертаючись до змінної z , можна

встановити, що головна частина ряду Лорану збігається поза колом з центром z_0

і радіусом $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$.

Отже, ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається до аналітичної функції $f(z)$ в

кільці $r < |z - z_0| < R$ і розбігається поза ним (рис. 1.12).

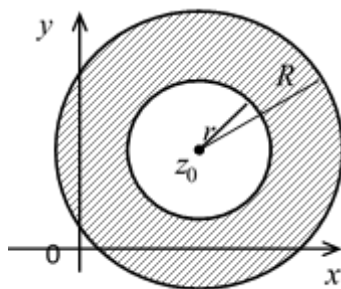


Рис. 1.12

Тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R, \quad (1.23)$$

де

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$$

або
$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^5}.$$

Розв'язання.

Знайдемо область збіжності головної частини $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}$.

Радіус збіжності обчислюємо за формулою (1.23)

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|e^n|} = e.$$

Тобто головна частина абсолютно збігається при $|z - i| > e$. На колі $|z - i| = e$ цей ряд розбігається, оскільки для відповідного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ не виконується необхідна умова збіжності.

Знайдемо область збіжності правильної частини $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^5}$, обчислюємо радіус збіжності за формулою (1.23)

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)^5}{3^n n^5} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = 3.$$

Тобто правильна частина абсолютно збігається при $|z - i| < 3$. На колі $|z - i| = 3$ цей ряд також абсолютно збігається, оскільки відповідний ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом. Тоді областю збіжності правильної частини є замкнений круг $|z - i| \leq 3$.

Отже, заданий ряд збігається у кільці $e < |z - i| \leq 3$ з центром $z_0 = i$.

Теорема (розвинення функції в ряд Лорана). Нехай функція $f(z)$ – аналітична в круговому кільці $r < |z - z_0| < R$ з центром у точці z_0 . Тоді вона однозначно зображується у цьому кільці збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots), \tag{1.24}$$

а γ – довільний замкнений контур, що лежить всередині кільця $r < |z - z_0| < R$ і обходить точку z_0 один раз проти годинникової стрілки.

Зауваження. Для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана рідко використовують формулу (1.24). Як правило, функцію $f(z)$, аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$, представляють у вигляді суми або добутку двох функцій, одна з яких аналітична всередині більшого кола $|z - z_0| < R$, а інша аналітична поза меншим колом $|z - z_0| > r$. Першу функцію необхідно розвинути за додатними степенями різниці $(z - z_0)$, а другу – за від’ємними. Потім необхідно знайти суму або добуток рядів.

Приклад. Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z + 2| < 2$, (рис. 1.13).

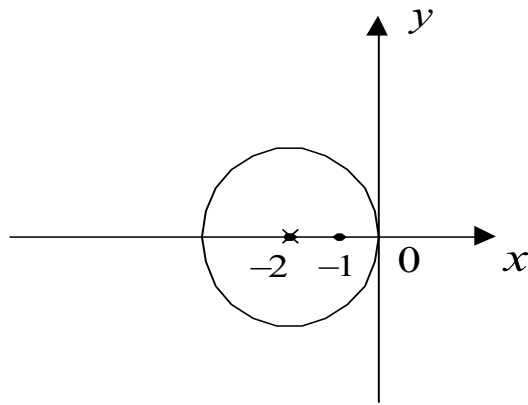


Рис. 1.13

Розв'язання.

Нам потрібно розвинути задану функцію за від'ємними та додатними степенями різниці $(z + 2)$, тому запишемо функцію у вигляді (розклали дробово-раціональну функцію $\frac{1}{z(z+2)}$ на суму елементарних дробів)

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right).$$

Другий доданок є членом ряду Лорана, а тому розвинемо в ряд функцію

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+2) - 2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+2}{2}}.$$

Оскільки $|z + 2| < 2$, тобто $\frac{|z+2|}{2} < 1$, то $\frac{1}{1 - \frac{z+2}{2}}$ є сумою геометричної прогресії зі знаменником

$$q = \frac{z+2}{2}, \quad |q| < 1,$$

тому

$$\frac{1}{1 - \frac{z+2}{2}} = 1 + \frac{z+2}{2} + \frac{(z+2)^2}{4} + \dots + \frac{(z+2)^n}{2^n} + \dots$$

Отже, ряд Лорана для заданої функції має вигляд

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z(z+2)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{2} + \frac{z+2}{2 \cdot 2} + \frac{(z+2)^2}{4 \cdot 2} + \dots + \frac{(z+2)^n}{2^n \cdot 2} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3i)}$ в ряд Лорана у кільці $1 < |z| < 3$.

2. Розвинути в ряд Лорана за степенями z функцію $f(z) = \frac{z^2-2z+10}{(z-2)(z^2+1)}$

а) у крузі $|z| < 1$ (в околі точки $z_0 = 0$);

б) у кільці $1 < |z| < 2$;

в) у кільці $2 < |z| < \infty$.

1.7.2. Класифікація ізольованих особливих точок

Означення. Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $w = f(z)$, якщо в деякому околі цієї точки однозначна аналітична функція не має інших особливих точок.

Класифікація ізольованих особливих точок здійснюється за характером розкладання функції $w = f(z)$ в ряд Лорана (1.22).

Означення. Точка z_0 називається *усувною особливою точкою* функції $w = f(z)$, якщо головна частина її ряду Лорана відсутня (в ряді не має членів з від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$), тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

При цьому $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, тобто в усувній особливій точці z_0 функція $f(z)$ має скінченну границю, де c_0 – вільний член ряду Лорана.

Приклад. Знайти особливі точки функції і з'ясувати їх характер:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Розв'язання.

Задана функція має єдину особливу точку $z = 0$.

Розвинемо функцію в ряд Лорана за степенями z

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Оскільки головна частина ряду відсутня, то $z = 0$ – усувна особлива точка.

Означення. Точка z_0 називається *полюсом m -го порядку* функції $w = f(z)$, якщо головна частина її ряду Лорана має m членів, тобто

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Полюс першого порядку називають *простим полюсом*.

Якщо точка z_0 – полюс m -го порядку функції $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,

тобто в полюсі z_0 функція $f(z)$ має нескінченну границю.

Точка z_0 є полюсом m -го порядку функції $w = f(z)$, якщо вона є нулем m -го порядку функції

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Приклад. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^5}$ і з'ясувати їх характер.

Розв'язання.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2z}{z^5} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2z}{2z} \cdot \frac{1}{z^4} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^4} = \infty.$$

Щоб визначити порядок полюса, розвинемо функцію в ряд

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2z}{z^5} &= \frac{1}{z^5} \left(2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{z^4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{2^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n+1} z^{2n-4}}{(2n+1)!} + \dots, \quad 0 < |z| < \infty. \\ c_{-4} &= 2 \neq 0, \quad c_{-5} = c_{-6} = \dots = c_{-n} = 0. \end{aligned}$$

За означенням $z = 0$ – полюс четвертого порядку.

Приклад. Знайти особливі точки функції

$$f(z) = \frac{z+2}{(z^2+1)^2 \cdot z^3}.$$

Розв'язання.

Функція $f(z)$ має особливі точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 0$.

Запишемо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z + i)^2(z - i)^2z^3},$$

$z = -i$ і $z = i$ – полюси 2-го порядку, а $z = 0$ – полюс 3-го порядку.

Означення. Точка z_0 називається *суттєво особливою точкою* функції $w = f(z)$, якщо головна частина її ряду Лорана має нескінченну кількість членів, тобто

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

В суттєво особливій точці z_0 не існує границі функції $f(z)$.

Приклад. Знайти всі особливі точки функції та визначити їх характер:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z - 1)^2(z^2 + 4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}}.$$

Розв'язання.

Знайдемо особливі точки функції $f(z)$: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -2i$, $z_5 = -i$.

1) $z_1 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z - 1)^2(z^2 + 4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z - 1)^2(z^2 + 4)} \cdot e^{1/(z+i)} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i}; \end{aligned}$$

$z_1 = 0$ – усувна особлива точка;

2) $z_2 = 1$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{z(z - 1)^2(z^2 + 4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}} = \infty;$$

$z_2 = 1$ – полюс другого порядку;

3) $z_3 = 2i$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\sin z}{z(z - 1)^2(z^2 + 4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}} = \infty;$$

$z_3 = 2i$ – простий полюс;

4) $z_4 = -2i$

$$\lim_{z \rightarrow -2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}} = \infty;$$

$z_4 = -2i$ – простий полюс;

5) $z_5 = -i$

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} \cdot e^{\frac{1}{z+i}} -$$

не існує, оскільки не існує $\lim_{z \rightarrow -i} e^{\frac{1}{z+i}}$;

$z_5 = -i$ – суттєво особлива точка.

Завдання для самостійної роботи.

Для даної функції $f(z)$ знайти ізольовані особливі точки та визначити їх

тип:

1) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4(z-i)}$;

2) $f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z+i)(z^2-4)}$;

3) $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3(z^2 - 1)}$;

4) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$;

5) $f(z) = \frac{z-1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$.

1.8. Інтегральні лишки аналітичної функції

Означення. Інтегральним лишком однозначної аналітичної функції $f(z)$ в її ізольованій особливій точці z_0 називається комплексне число, що дорівнює інтегралу $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$, взятому у додатному напрямку по будь-якому замкненому контуру γ в околі точки z_0 .

Позначимо так:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0), \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

За означенням

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

В околі ізольованої особливої точки однозначну аналітичну функцію $f(z)$ розвинемо у збіжний ряд Лорана (1.22)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де коефіцієнт ряду обчислюється за формулою (1.24)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

При $n = -1$ дістанемо

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Інтегральний лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} (при першому від'ємному степеню) ряду Лорана.

Обчислення інтегральних лишків в ізольованих особливих точках однозначних функцій.

1. Нехай z_0 – усувна особлива точка функції $w = f(z)$. Тоді функцію $f(z)$ можна розвинути тільки у правильну частину ряду Лорана, тобто ряд Лорана функції $f(z)$ не містить від'ємних степенів. За означенням лишок функції дорівнює нулю:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

2. Нехай z_0 – полюс 1-го порядку функції $w = f(z)$ (*простий полюс*).

Тоді

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (1.25)$$

Якщо функція $f(z)$ задана як дріб $f(z) = g(z)/h(z)$, z_0 – *простий полюс* функції $f(z)$, $h(z_0) = 0$, $g(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = g(z_0)/h'(z_0). \quad (1.26)$$

3. Нехай z_0 – *полюс m -го порядку* функції $f(z)$.

Тоді

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

4. Нехай z_0 – *суттєво особлива точка*.

Тоді для знаходження лишку слід безпосередньо скористатися розвиненням функції $w = f(z)$ в ряд Лорана і виділити коефіцієнт c_{-1} .

Теорема Коші про лишки. Нехай функція $w = f(z)$ аналітична в області D з межею Γ , крім скінченного числа n внутрішніх ізольованих особливих точок z_k , ($k = 1, 2, \dots, n$), що належать області D , і неперервна на границі Γ . Тоді інтеграл від функції $f(z)$ по контуру Γ дорівнює добутку числа $2\pi i$ на суму лишок функції $f(z)$ відносно всіх ізольованих особливих точок цієї функції, що містяться всередині області D :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Обхід Γ здійснюється в додатному напрямі.

Доведення.

Побудуємо в околах особливих точок z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функції $w = f(z)$ замкнені контури $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. В замкненій багатозв'язній області, що обмежена контурами $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, функція $f(z)$ є аналітичною. За теоремою Коші для багатозв'язної області:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Приклад. Знайти лишок функції $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)}$.

Розв'язання.

Функція має дві особливі точки: точка $z = 0$ – усувна особлива точка і точка $z = \pi/4$ – простий полюс.

1) $z = 0$ – усувна особлива, оскільки

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \pi/4} = -\frac{4}{\pi}.$$

Тому

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = 0.$$

2) $z = \pi/4$ – простий полюс, оскільки

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = \infty.$$

За формулою (1.25)

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} (z - \pi/4) f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{(z - \pi/4) \operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = \frac{4}{\pi} \neq 0.$$

Тому

$$\operatorname{res}_{z=\pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{(z - \pi/4) \operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = \frac{4}{\pi}.$$

Приклад. Знайти лишок функції $f(z) = z^2 e^{1/z}$.

Розв'язання.

Для функції $f(z) = z^2 e^{1/z}$ точка $z = 0$ – суттєво особлива, оскільки не існує границі $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 e^{1/z}$.

Розвинемо функцію в ряд Лорана:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n},$$

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots$$

За означенням

$$\operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

$$1) \oint_{|z|=3} \frac{(z+1)dz}{z^2+4}, \quad 2) \oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{2z}} dz.$$

Розв'язання.

1) Знаходимо особливі точки функції $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$: $z^2 + 4 = 0$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$. Обидві точки містяться всередині контуру інтегрування (рис. 1.14).

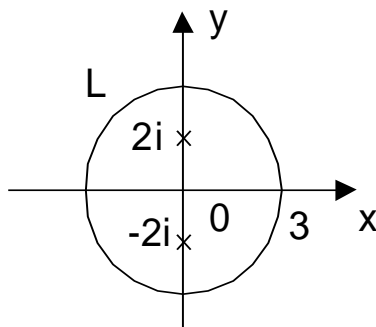


Рис. 1.14

Функцію запишемо у вигляді

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2i)(z+2i)}.$$

Точки $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ – прості полюси $f(z)$.

Знаходимо лишки функції $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$ відносно її особливих точок за формулою (1.26)

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \left. \frac{z+1}{2z} \right|_{z=2i} = \frac{1+2i}{4i};$$

$$\operatorname{res}_{z=-2i} f(z) = \left. \frac{z+1}{2z} \right|_{z=-2i} = \frac{-1+2i}{4i};$$

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=2i} \left(\frac{z+1}{z^2+4} \right) + \operatorname{res}_{z=-2i} \left(\frac{z+1}{z^2+4} \right) \right) = 2\pi i.$$

2) Функція $e^{\frac{1}{2z}}$ має одну особливу точку $z = 0$, що лежить всередині кола $|z| = 1$ (рис. 1.15).

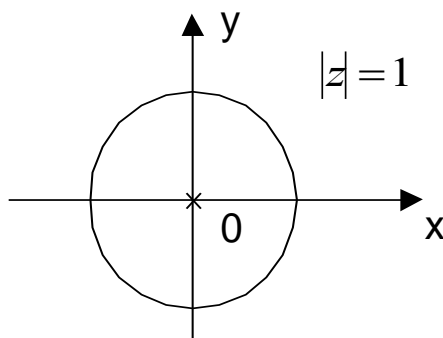


Рис. 1.15

Напишемо розвинення функції у ряд Лорана

$$e^{\frac{1}{2z}} = 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2! z^2 2^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n 2^n} + \dots$$

Отже, $z = 0$ – суттєво особлива точка функції $e^{\frac{1}{2z}}$.

$$\operatorname{res}_{z=0} e^{1/2z} = c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{2z}} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i.$$

Завдання для самостійної роботи.

Обчислити інтеграли за допомогою теореми Коші про лишки:

1) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2(z-2)} dz;$

2) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz;$

3) $\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z^2 + 4)z};$

4) $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz.$

2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.1. Перетворення Лапласа

2.1.1. Поняття оригіналу та зображення

Введемо поняття функції – оригіналу та функції – зображення.

Нехай $f(t)$ – дійсна функція дійсної змінної t .

Означення. Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

а) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

б) функція $f(t)$ неперервна або кусково-неперервна функція при $t \geq 0$;

в) функція $f(t)$ має обмежений порядок зростання, тобто існують такі числа $M > 0$ і $s_0 \geq 0$, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}.$$

(при $t \rightarrow \infty$ функція зростає не швидше, ніж деяка експоненціальна функція).

Число $s_0 \geq 0$ називається показником зростання функції $f(t)$.

Приклад. Перевірити, чи є наступні функції оригіналами:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}; \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0. \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Розв'язання.

1) Функція $f_1(t)$ – оригінал, виконуються всі три умови означення оригіналу: $M = 2$, $s_0 = 5$, $|2e^{5t}| \leq M e^{s_0 t}$.

2) Функція $f_2(t)$ – не є оригіналом, $t = 2$ – точка розриву другого роду функції $f_2(t)$, тобто не виконується умова б) означення оригіналу.

Означення. Функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, $s = \operatorname{Re} p$, $\sigma = \operatorname{Im} p$, називається зображенням оригінала $f(t)$, якщо

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \tag{2.1}$$

Інтеграл у формулі (2.1) називається *інтегралом Лапласа*.

Операцію переходу від оригіналу $f(t)$ до зображення $F(p)$ називають *перетворенням Лапласа*.

Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ позначаємо у вигляді

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(p), & F(p) &\rightarrow f(t), \\ F(p) &= L[f(t)], & f(t) &= L^{-1}[F(p)]. \end{aligned}$$

Теорема (існування зображення). Для будь-якого оригіналу $f(t)$ існує зображення $F(p)$ у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$, де s_0 – показник зростання функції $f(t)$, причому функція $F(p)$ є аналітичною в цій півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Доведення.

Дослідимо інтеграл (2.1) на збіжність. За означенням оригіналу $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, тому

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} |e^{-pt}| dt = \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \end{aligned}$$

врахували, що $s - s_0 > 0$ і $|e^{-pt}| = |e^{-st} e^{-i\sigma t}| = e^{-st} |\cos \sigma t - i \sin \sigma t| = e^{-st}$.

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s-s_0}. \tag{2.2}$$

Отже, отримали оцінку (2.2), інтеграл (2.1) – абсолютно збіжний, тобто зображення $F(p)$ існує та є однозначним у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Теорема доведена.

Теорема (необхідна ознака існування зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання $s_0 \geq 0$, то $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

2.1.2. Властивості зображень

1. Однорідність.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і a – комплексне число, то $a f(t) \rightarrow a F(p)$.

Доведення.

За означенням зображення та властивостями невласного інтегралу

$$af(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} af(t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = aF(p).$$

Отже, отримали

$$af(t) \rightarrow aF(p). \quad (2.3)$$

2. Сума зображень.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то $f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p)$.

Доведення.

За означенням зображення маємо:

$$\begin{aligned} f(t) + \varphi(t) &\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} [f(t) + \varphi(t)] dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = F(p) + \Phi(p); \\ f(t) + \varphi(t) &\rightarrow F(p) + \Phi(p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Теорема лінійності.

Якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p), \dots, f_n(t) \rightarrow F_n(p)$ і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – комплексні числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n \rightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p). \quad (2.5)$$

Доведення випливає з перших двох властивостей (2.3), (2.4).

4. Теорема (про єдиність оригіналу). Якщо функція $F(p)$ є зображенням двох оригіналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то ці оригінали співпадають у всіх точках неперервності.

2.1.3. Зображення деяких елементарних функцій

1. *Зображення одиничної функції Хевісайда.*

Означення. Функцією Хевісайда називається функція вигляду

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Якщо функція $f(t)$ задовольняє умовам б) та в) означення оригінала, але не задовольняє умові а), то функція $f(t) \cdot \eta(t)$ буде оригіналом, оскільки

$$f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Тобто виконується умова а) (у подальшому множник $\eta(t)$ не записуємо).

Знайдемо зображення функції Хевісайда. За формулою (2.1) при $s = \operatorname{Re} p > 0$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p}$$

або

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}. \tag{2.6}$$

2. Зображення показникової функції.

Знайти зображення функції $f(t) = e^{at}$, де a – будь-яке число.

Задана функція є оригіналом. За формулою (2.1)

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a}, \end{aligned}$$

якщо $\operatorname{Re}(p-a) > 0$.

Отже, отримали

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}, \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \tag{2.7}$$

3. Зображення тригонометричних функцій.

1) Знайти зображення функції $f(t) = \sin t$.

За теоремою лінійності (2.5) та формулою (2.7)

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{p+i - p+i}{(p-i)(p+i)} = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i}{p^2 - (i)^2} = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Отримали

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (2.8)$$

2) Знайти зображення функції $f(t) = \cos t$.

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+i+p-i}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1},$$

таким чином, отримали

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (2.9)$$

4. Зображення гіперболічних функцій.

Користуючись теоремою лінійності, знайти зображення функції $f(t) = \text{sh } t$.

$$f(t) = \text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

За формулою (2.7)

$$\begin{aligned} e^t &\rightarrow \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \rightarrow \frac{1}{p+1}. \\ \text{sh } t &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p+1-p+1}{(p-1)(p+1)}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{p^2-1^2}\right) = \frac{1}{p^2-1}, \\ \text{sh } t &\rightarrow \frac{1}{p^2-1}. \end{aligned}$$

Приклад. Користуючись теоремою лінійності, знайти зображення функції

$$f(t) = 3 \sin t + 5 \cos t.$$

Розв'язання.

За формулами (2.8), (2.9)

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}, \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

За теоремою лінійності

$$3 \sin t + 5 \cos t \rightarrow 3 \frac{1}{p^2 + 1} + 5 \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{3 + 5p}{p^2 + 1}.$$

Приклад. Користуючись теоремою лінійності, знайти зображення функції $f(t) = 11 - 2 \cos t$.

Розв'язання.

Оскільки

$$11 \rightarrow 11 \cdot \frac{1}{p} \quad \text{і} \quad \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

то користуючись теоремою лінійності, отримаємо

$$11 - 2 \cos t \rightarrow \frac{11}{p} - 2 \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{11(p^2 + 1) - 2p^2}{p(p^2 + 1)} = \frac{9p^2 + 11}{p^3 + p}.$$

2.1.4. Теореми подібності, запізнення, зміщення

Теорема подібності.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і b – комплексне число, то

$$f(bt) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right). \tag{2.10}$$

Довести теорему самостійно.

Приклад. Використовуючи теорему подібності, знайти зображення функцій $f(t) = \sin bt$ і $f(t) = \cos bt$. За формулами (2.8) – (2.10) маємо

$$\sin bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{b \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{b}{p^2 + b^2}, \tag{2.11}$$

$$\cos bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{\frac{p}{b}}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1 \cdot p}{b^2 \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{p}{p^2 + b^2}. \tag{2.12}$$

Аналогічно

$$\operatorname{ch} at \rightarrow \frac{p}{p^2 - a^2}, \quad \operatorname{sh} at \rightarrow \frac{a}{p^2 - a^2}.$$

Теорема запізнення.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \tag{2.13}$$

Геометричний зміст запізнення полягає у наступному: функції $f(t)$ і $f(t - t_0)$ мають однакові графіки (описують один і той же процес), але графік функції $f(t - t_0)$ зсунутий на t_0 одиниць вправо (процес для цієї функції починається на t_0 одиниць пізніше, ніж для функції $f(t)$).

Теорема запізнення є зручним способом для знаходження зображень кусково-неперервних функцій.

Приклад. Користуючись теоремою запізнення, знайти зображення функції

$$f(t) = \sin(2t - 3).$$

Розв'язання.

За теоремою подібності (2.10) та (2.11)

$$\sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4}.$$

За теоремою запізнення (2.13)

$$\sin(2t - 3) = \sin 2\left(t - \frac{3}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4} \cdot e^{-\frac{3}{2}p}.$$

Отже,

$$\sin(2t - 3) \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4} \cdot e^{-\frac{3}{2}p}.$$

Приклад. Знайти зображення кусково-неперервної функції, користуючись теоремою запізнення. Функція $f(t)$ задана графічно на рис. 2.1.

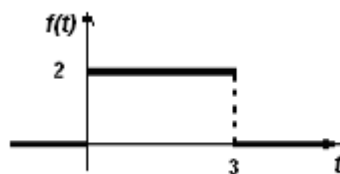


Рис. 2.1

Розв'язання.

Запишемо аналітичний вираз функції

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3, \\ 0, & t < 0, \quad t > 3. \end{cases}$$

Подамо функцію $f(t)$ у вигляді суми функцій

$$f(t) = 2\eta(t) - 2\eta(t - 3) = 2 \cdot [\eta(t) - \eta(t - 3)].$$

За формулою (2.6) і теоремою запізнення знайдемо зображення оригіналу $f(t)$

$$f(t) = 2 \cdot [\eta(t) - \eta(t - 3)] \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{p} - e^{-3p} \cdot \frac{1}{p} \right) = \frac{2}{p} (1 - e^{-3p}).$$

Приклад. Знайти зображення кусково-неперервної функції, користуючись теоремою запізнення. Функція $f(t)$ задана графічно на рис. 2.2.

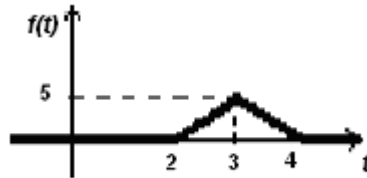


Рис. 2.2

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої на відрізку $t \in [2; 3]$, що проходить через дві точки з координатами $(2; 0)$ і $(3; 5)$:

$$\frac{t - 2}{3 - 2} = \frac{y - 0}{5 - 0} \Rightarrow t - 2 = \frac{y}{5} \Rightarrow y = 5t - 10.$$

Запишемо рівняння прямої на відрізку $t \in [3; 4]$, що проходить через дві точки з координатами $(3; 5)$ і $(4; 0)$:

$$\frac{t - 3}{4 - 3} = \frac{y - 5}{0 - 5} \Rightarrow t - 3 = \frac{y - 5}{-5} \Rightarrow -5(t - 3) = y - 5 \Rightarrow y = 20 - 5t.$$

Отримаємо аналітичний вираз функції

$$f(t) = \begin{cases} 5t - 10, & 2 \leq t < 3, \\ 20 - 5t, & 3 \leq t < 4, \\ 0, & t < 2, \quad t \geq 4. \end{cases}$$

Функцію $f(t)$ запишемо у вигляді суми функцій

$$f(t) = (5t - 10) \cdot \eta(t - 2) - (5t - 10) \cdot \eta(t - 3) + \\ + (20 - 5t) \cdot \eta(t - 3) - (20 - 5t) \cdot \eta(t - 4),$$

$$f(t) = 5 \cdot (t - 2) \cdot \eta(t - 2) + (-5t + 10 + 20 - 5t) \cdot \eta(t - 3) + \\ + 5 \cdot (t - 4) \cdot \eta(t - 4) = 5 \cdot (t - 2) \cdot \eta(t - 2) - 10(t - 3) \cdot \eta(t - 3) + \\ + 5 \cdot (t - 4) \cdot \eta(t - 4),$$

$$(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p^2}.$$

Отже,

$$F(p) = 5 \cdot \frac{e^{-2p}}{p^2} - 10 \cdot \frac{e^{-3p}}{p^2} + 5 \cdot \frac{e^{-4p}}{p^2} = 5 \cdot \frac{e^{-2p} - 2e^{-3p} + e^{-4p}}{p^2}.$$

Теорема зміщення.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, a – комплексне число, то

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow F(p - a). \quad (2.14)$$

Доведення. За формулою (2.1):

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a),$$

при $Re(p - a) > s_0$.

Приклад. Застосовуючи теорему зміщення (2.14), знайдемо зображення наступних оригіналів:

$$e^{at} \cdot \cos bt \rightarrow \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}, \quad (2.15)$$

$$e^{at} \cdot \sin bt \rightarrow \frac{b}{(p - a)^2 + b^2}. \quad (2.16)$$

Приклад. Знайти оригінал за його зображенням

$$F(p) = \frac{2p - 5}{p^2 - 6p + 11}.$$

Розв'язання.

За формулами (2.15), (2.16)

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p - 5}{p^2 - 6p + 11} = \frac{2(p - 3) + 1}{(p - 3)^2 + 2} = \frac{2(p - 3)}{(p - 3)^2 + (\sqrt{2})^2} + \\ &+ \frac{1}{(p - 3)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \frac{p - 3}{(p - 3)^2 + (\sqrt{2})^2} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p - 3)^2 + (\sqrt{2})^2} \rightarrow 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \cdot \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(t) = 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \cdot \sin \sqrt{2}t.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Користуючись теоремою лінійності, знайти зображення функції

$$f(t) = t^2 - 4 \sin t.$$

2. Користуючись теоремою подібності і запізнення, знайти зображення функції

$$f(t) = -\sin(12 - 5t).$$

3. Знайти зображення кусково-неперервної функції, користуючись теоремою запізнення. Функція $f(t)$ задана графічно на рис. 2.3.

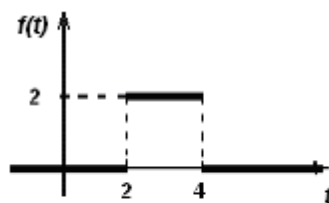


Рис. 2.3

4. Користуючись теоремою зміщення (2.14), знайти зображення функції

$$f(t) = -e^{-9t} \cdot \sin 9t.$$

2.1.5. Зображення періодичної функції

Теорема. Якщо оригінал $f(t)$ – періодична функція з періодом T , то його зображення:

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.17)$$

Приклад. Знайти зображення періодичної функції, що представлена на рис. 2.4.

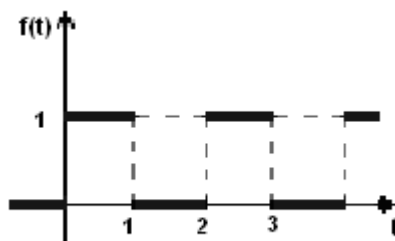


Рис. 2.4

$$f(t) = \cos 3t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 9} = F(p);$$

$$F'(p) \rightarrow -tf(t);$$

$$-t \cos 3t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' = \frac{p^2 + 9 - 2p^2}{(p^2 + 9)^2} = \frac{-p^2 + 9}{(p^2 + 9)^2} = -\frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

Отримали

$$t \cos 3t \rightarrow \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

Теорема про інтегрування оригіналу.

Інтегрування оригіналу приводить до ділення зображення на параметр p .

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $Re p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad Re p > s_0.$$

Теорема про інтегрування зображення.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $Re p > s_0$ і інтеграл $\int_p^{+\infty} F(p) dp$ збігається у півплощині $Re p > s_1 > s_0$, то

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad Re p > s_1 > s_0.$$

(2.20)

Приклад. Знайти зображення функції $\frac{\sin t}{t}$.

Розв'язання.

Оскільки $f(t) = \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$, то за теоремою інтегрування зображення (2.20) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{t} &\rightarrow \int_p^{+\infty} \frac{1}{p^2 + 1} dp = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg p \Big|_p^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg p) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctg p. \end{aligned}$$

Теорема про добуток зображень (теорема про згортку).

Означення. Згорткою $\varphi(t) * f(t)$ неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$ дійсної змінної $0 \leq t < \infty$ називається інтеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Властивості згортки функцій:

- 1) $\varphi * f = f * \varphi$;
- 2) $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$;
- 3) $\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$;
- 4) $|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|$;

5) якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ неперервні функції в області $0 \leq t < \infty$, то і їх згортка $\varphi * f$ є також неперервною функцією в цій області.

Приклад. Знайти згортку функцій $\varphi(t) = t$ і $f(t) = e^t$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \varphi * f &= t * e^t = \int_0^t (t - \tau) \cdot e^\tau d\tau = \int_0^t (te^\tau - \tau e^\tau) d\tau = \\ &= t \int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = te^t - t - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралу $\int_0^t \tau e^\tau d\tau$ застосували формулу інтегрування частинами

$$\int_0^t \tau e^\tau d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau \\ du = d\tau \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^\tau d\tau \\ v = e^\tau \end{array} \right| = \tau \cdot e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1.$$

Отже,

$$\varphi * f = t * e^t = e^t - t - 1.$$

Приклад. Знайти згортку функцій $\varphi(t) = 5t$ і $f(t) = e^{2t}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \varphi * f &= 5t * e^{2t} = \int_0^t 5(t - \tau) \cdot e^{2\tau} d\tau = 5 \int_0^t (te^{2\tau} - \tau e^{2\tau}) d\tau = \\ &= 5t \int_0^t e^{2\tau} d\tau - 5 \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau = \frac{5}{2} te^{2\tau} \Big|_0^t - 5 \cdot \left(\frac{1}{2} te^{2\tau} - \frac{1}{4} e^{2\tau} + \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{5}{2} te^{2t} - \frac{5}{2} t - \frac{5}{2} te^{2t} + \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{5}{2} t - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралу $\int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau$ застосували формулу інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau &= \left| \begin{array}{l} u = \tau \quad dv = e^{2\tau} d\tau \\ du = d\tau \quad v = \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \tau \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \tau \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{4} e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varphi * f = 5t * e^{2t} = \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{5}{2} t - \frac{5}{4}.$$

Теорема Бореля (про добуток зображень).

Якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$,

то

$$f_1 * f_2 \rightarrow F_1(p) \cdot F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0, \quad s_0 > s_1.$$

Приклад. Використовуючи теорему Бореля, знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}.$$

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

За формулами (2.11) і (2.12)

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 4} \rightarrow \sin 2t = f_1(t),$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow \cos 2t = f_2(t).$$

За теоремою Бореля

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow f_1 * f_2 = \int_0^t \sin 2\tau \cos 2(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(4\tau - 2t) + \sin 2t) d\tau = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(4\tau - 2t)}{4} + \tau \cdot \sin 2t \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{4} + t \sin 2t + \frac{\cos(-2t)}{4} \right) = \frac{t}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{p}{(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{t}{2} \sin 2t.$$

Інтеграл Дюамеля (спеціальний випадок теореми про добуток зображень).

Нехай $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $Re p > s_0$ і $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, $Re p > s_1$. Знайдемо оригінал, що відповідає зображенню

$$p F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Для цього застосуємо теорему про добуток зображень та теорему про диференціювання оригіналу (2.18)

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \rightarrow F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau + f_1(t) f_2(0) \rightarrow p F_1(p) \cdot F_2(p)$$

або

$$\int_0^t f_2(\tau) f_1'(t - \tau) d\tau + f_2(t) f_1(0) \rightarrow p F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Означення. Інтегралом Дюамеля для функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається оригінал, який відповідає зображенню

$$p F_1(p) \cdot F_2(p),$$

тобто функції

$$\int_0^t f_2(\tau) f_1'(t - \tau) d\tau + f_2(t) f_1(0) \quad \text{і} \quad \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau + f_1(t) f_2(0).$$

Приклад. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = p \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{при} \quad a = 1 \quad f_1(t) = \cos t,$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \quad \text{при } a = 2 \quad f_2(t) = \cos 2t.$$

Використовуючи інтеграл Дюамеля, отримаємо

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \cos 0 \cdot \cos 2t + \\ &+ \int_0^t \cos' \tau \cdot \cos 2(t - \tau) d\tau = \cos 2t - \int_0^t \sin \tau \cdot \cos 2(t - \tau) d\tau = \\ &= \cos 2t - \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(3\tau - 2t) + \sin(2t - \tau)] d\tau = \\ &= \cos 2t + \frac{1}{6} \cos(3\tau - 2t) \Big|_0^t - \frac{1}{2} \cos(2t - \tau) \Big|_0^t = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(t) = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t.$$

Приклад. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}.$$

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)} = p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2} = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p-1} \rightarrow e^t = f_1(t),$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p-2} \rightarrow e^{2t} = f_2(t).$$

Використовуючи інтеграл Дюамеля, отримаємо

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(0) \cdot f_2(t) + f_1' * f_2 = f_1(0) \cdot f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= e^0 \cdot e^{2t} + \int_0^t e^\tau \cdot e^{2 \cdot (t - \tau)} d\tau = e^{2t} + \int_0^t e^{\tau + 2t - 2\tau} d\tau = e^{2t} + \int_0^t e^{2t - \tau} d\tau = \\ &= e^{2t} + \int_0^t (e^{2t} \cdot e^{-\tau}) d\tau = e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$= e^{2t} - e^{2t} \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t = e^{2t} - e^{2t} \cdot (e^{-t} - e^0) = e^{2t} - e^t + e^{2t} = 2e^{2t} - e^t.$$

Приклад. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{1}{p(p-7)}.$$

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{1}{p(p-7)} = p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(p-7)} = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2} \rightarrow t = f_1(t),$$

$$F_2(p) = \frac{1}{(p-7)} \rightarrow e^{7t} = f_2(t).$$

Використовуючи інтеграл Дюамеля, отримаємо

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(0) \cdot f_2(t) + f_1' * f_2 = f_1(0) \cdot f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \\ &= 0 \cdot e^{7t} + \int_0^t \tau \cdot e^{7(t-\tau)} d\tau = \int_0^t \tau \cdot e^{7t-7\tau} d\tau = \int_0^t \tau \cdot e^{7t} \cdot e^{-7\tau} d\tau = \\ &= e^{7t} \int_0^t \tau \cdot e^{-7\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau \quad dv = e^{-7\tau} d\tau \\ du = d\tau \quad v = -\frac{1}{7} e^{-7\tau} \end{array} \right| = \\ &= e^{7t} \left(-\frac{\tau}{7} e^{-7\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{7} \int_0^t e^{-7\tau} d\tau \right) = e^{7t} \left(-\frac{t}{7} e^{-7t} - \frac{1}{49} e^{-7\tau} \Big|_0^t \right) = \\ &= e^{7t} \left(-\frac{t}{7} e^{-7t} - \frac{1}{49} e^{-7t} + \frac{1}{49} \right). \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайти згортку функцій $\sin 3t * \cos 2t$.
2. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p}{(p-3)(p-5)}.$$

2.1.7. Таблиця зображень деяких функцій

В таблиці 2.1 наведено оригінали і відповідні їм зображення.

Таблиця 2.1. Основні оригінали та їх зображення

№	оригінали $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	C	$\frac{C}{p}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	e^t	$\frac{1}{p-1}$
6	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
7	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
8	$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
9	$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
10	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
11	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$

12	$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
13	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
14	$t \cdot \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
15	$t \cdot \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
16	$e^{at} \cos bt$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}$
17	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p - a)^2 + b^2}$
18	$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
19	$\text{sh } at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
20	$\text{sh}^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
21	$\text{ch}^2 at$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
22	$e^{-at} \text{sh } bt$	$\frac{b}{(p + a)^2 - b^2}$
23	$e^{-at} \text{ch } bt$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 - b^2}$

2.2. Знаходження оригіналів дробово-раціональних функцій

Задача. Знайти оригінал за даним зображенням, якщо $F(p)$ – дробово-раціональна функція $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з комплексними коефіцієнтами ($Q(x)$ – ненульовий многочлен). Раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менше степеня многочлена $Q(x)$. Якщо дробово-раціональна функція *неправильна*, виділяємо цілу частину. З теорії многочленів відомо, що будь-яку правильну дробово-раціональну функцію можна розвинути на суму елементарних дробів. Користуючись властивостями перетворення Лапласа і таблицею оригіналів та зображень, знаходимо оригінали елементарних дробів.

Приклад. Розвинути дріб $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на суму елементарних дробів.

Розв'язання.

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}. \quad (2.21)$$

Необхідно знайти коефіцієнти A , B , C елементарних дробів. Для цього праву частину рівності зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x^2-1)(x-2)}.$$

Прирівнюємо чисельники

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1).$$

Корені знаменника дійсні, різні. Підставляємо в обидві частини рівності значення коренів $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$. Отримаємо

$$\begin{cases} 1 = -2A, \\ -1 = 6B, \\ 2 = 3C, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2, \\ B = -1/6, \\ C = 2/3. \end{cases}$$

Підставляємо знайдені значення коефіцієнтів A , B , C в (2.21), отримаємо

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

Приклад. Знайти оригінал для функції

$$F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p+2)(p-3)}.$$

Розв'язання.

Розкладаємо $F(p)$ на суму елементарних дробів (корені знаменника дійсні, різні).

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p+2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-3} = \\ &= \frac{A(p+2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-1)(p+2)}{(p-1)(p+2)(p-3)} = \\ &= \frac{A(p^2 - p - 6) + B(p^2 - 4p + 3) + C(p^2 + p - 2)}{(p-1)(p+2)(p-3)} = \\ &= \frac{(A+B+C)p^2 + (C-4B-A)p + (3B-6A-2C)}{(p-1)(p+2)(p-3)}, \end{aligned}$$

де A, B, C – невизначені коефіцієнти.

Дві дробово-раціональні функції рівні, маємо однакові знаменники, тому будуть рівними і чисельники дробів

$$p^2 + 4 = (A+B+C)p^2 + (C-4B-A)p + (3B-6A-2C). \quad (2.22)$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів можна застосувати метод надання p значень коренів знаменника, який застосували у попередньому прикладі, або метод невизначених коефіцієнтів, який полягає у наступному: прирівняємо у (2.22) коефіцієнти при однакових степенях p , отримаємо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ C-4B-A=0, \\ 3B-6A-2C=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B-C, \\ A=C-4B, \\ 3B-6A-2C=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\frac{3B+1}{2}, \\ A=\frac{1-5B}{2}, \\ 3B-6A-2C=4. \end{cases}$$

Підставляючи C і A в останнє рівняння системи, отримаємо

$$3B - 6 \cdot \frac{1-5B}{2} - 2 \cdot \frac{3B+1}{2} = 4,$$

$$3B - 3(1-5B) - (3B+1) = 4,$$

$$3B - 3 + 15B - 3B - 1 = 4,$$

$$15B = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{15}.$$

Підставляємо B у перші два рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} C = \frac{3B + 1}{2}, \\ A = \frac{1 - 5B}{2}, \\ B = \frac{8}{15}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{13}{10}, \\ A = -\frac{5}{6}, \\ B = \frac{8}{15}. \end{cases}$$

Знайдені значення коефіцієнтів підставляємо в елементарні дроби

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p+2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-3} = \\ &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{13}{10} \cdot \frac{1}{p-3} = \\ &= -\frac{5}{6} \cdot F_1(p) + \frac{8}{15} \cdot F_2(p) + \frac{13}{10} \cdot F_3(p). \end{aligned}$$

За таблицею оригіналів та зображень знаходимо

$$F_1(p) = \frac{1}{p-1} \rightarrow e^t = f_1(t),$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p+2} \rightarrow e^{-2t} = f_2(t),$$

$$F_3(p) = \frac{1}{p-3} \rightarrow e^{3t} = f_3(t).$$

Користуючись властивістю лінійності, отримаємо

$$f(t) = -\frac{5}{6} f_1(t) + \frac{8}{15} f_2(t) + \frac{13}{10} f_3(t) = -\frac{5}{6} e^t + \frac{8}{15} e^{-2t} + \frac{13}{10} e^{3t}.$$

Приклад. Знайти оригінал для функції

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)}.$$

Розв'язання.

Розкладаємо $F(p)$ на суму елементарних дроби (серед коренів знаменника є комплексно-спряжені)

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} =$$

$$= \frac{Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 4p + 13)},$$

де A, B, C – невизначені коефіцієнти.

Прирівняємо чисельники

$$3p^2 + 3p - 13 = Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp =$$

$$= (A + B)p^2 + (4A + C)p + 13A.$$

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях p , отримаємо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + C = 3, \\ 13A = -13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 3 - A, \\ C = 3 - 4A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 4, \\ C = 7. \end{cases}$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти елементарних дробів у вираз для $F(p)$

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} = -\frac{1}{p} + \frac{4p + 7}{p^2 + 4p + 13} =$$

$$= -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2) - 1}{(p+2)^2 + 9} = -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2)}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1}{(p+2)^2 + 3^2} = -\frac{1}{p} +$$

$$+ 4 \cdot \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} = -F_1(p) + 4F_2(p) - \frac{1}{3}F_3(p).$$

Знаходимо оригінали за таблицею оригіналів та зображень

$$F_1(p) = \frac{1}{p} \rightarrow f_1(t) = 1,$$

$$F_2(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} \rightarrow f_2(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t,$$

$$F_3(p) = \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} \rightarrow f_3(t) = e^{-2t} \cdot \sin 3t.$$

Застосовуючи властивість лінійності зображень, отримаємо

$$f(t) = -f_1(t) + 4f_2(t) - \frac{1}{3}f_3(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t.$$

Завдання для самостійної роботи.

Знайти оригінал для функцій:

$$1. F(p) = \frac{p - 4}{(p^2 + 3p - 4)(p - 1)};$$

$$2. F(p) = \frac{2(p - 1)}{(p^2 + p + 2)(p + 1)};$$

$$3. F(p) = \frac{p + 8}{(p + 3)(p^2 + p - 2)}.$$

2.3. Застосування теорії лишків для знаходження оригіналу за даним зображенням

Розглянемо теореми, що дозволяють за даним зображенням $F(p)$ знаходити відповідний оригінал $f(t)$.

Теорема розкладання. Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією і має лише скінчене число особливих точок p_1, p_2, \dots, p_n , то оригінал має вигляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)],$$

де $\operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)]$ – лишок функції $e^{pt} F(p)$ в особливій точці p_k .

Теорема розкладання у випадку простих полюсів.

Якщо $F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_s(p)}$, $m < s$ – правильна дробово-раціональна функція і p_1, p_2, \dots, p_n – прості полюси функції $F(p)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_m(p_k)}{P'_s(p_k)} \cdot e^{p_k t}. \quad (2.23)$$

Приклад. Знайти оригінал для функції

$$F(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p^3 - 3p^2 - 18p + 40}.$$

Розв'язання.

Знаходимо корені знаменника і розкладаємо знаменник на множники.

Функція

$$F(p) = \frac{p^2 + p - 1}{(p - 2)(p - 5)(p + 4)}$$

має прості полюси: $p = 2$, $p = 5$, $p = -4$ (нулі знаменника функції $F(p)$).

У чисельнику – многочлен 2 - го степеня, у знаменнику – многочлен 3 - го степеня

$$Q_2(p) = p^2 + p - 1,$$

$$P_3(p) = (p - 2)(p^2 - p - 20) = p^3 - 3p^2 - 18p + 40,$$

$$P'_3(p) = 3p^2 - 6p - 18.$$

За формулою (2.23) для функції $F(p)$ знаходимо оригінал $f(t)$.

Для $p_1 = 2$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = -\frac{5}{18} e^{2t};$$

для $p_2 = 5$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{29}{27} e^{5t};$$

для $p_3 = -4$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{11}{54} e^{-4t}.$$

Таким чином, оригінал даного зображення

$$f(t) = -\frac{5}{18} e^{2t} + \frac{29}{27} e^{5t} + \frac{11}{54} e^{-4t} = \frac{1}{54} (11e^{-4t} + 58e^{5t} - 15e^{2t}).$$

Приклад. Знайдемо оригінал для функції

$$F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p+2)(p-3)}$$

методом лишків (для даної функції у п.2 оригінал знайдено методом невизначених коефіцієнтів).

Розв'язання.

Функція $F(p) = \frac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)}$ має особливі точки – прості полюси (нулі знаменника): $p = 1$, $p = -2$, $p = 3$.

Як і у попередньому прикладі, позначаємо

$$Q_2(p) = p^2 + 4,$$

$$P_3(p) = (p-1)(p+2)(p-3) = p^3 - 2p^2 - 5p + 6,$$

$$P'_3(p) = 3p^2 - 4p - 5.$$

За формулою (2.23) для функції $F(p)$ знаходимо оригінал $f(t)$.

Для $p_1 = 1$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = -\frac{5}{6} e^t;$$

для $p_2 = -2$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P_3'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{8}{15} e^{-2t};$$

для $p_3 = 3$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P_3'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{13}{10} e^{3t}.$$

Таким чином, оригінал даного зображення

$$f(t) = -\frac{5}{6} e^t + \frac{8}{15} e^{-2t} + \frac{13}{10} e^{3t} = \frac{1}{30} (39e^{3t} + 16e^{-2t} - 25e^t).$$

Теорема розкладання у випадку кратних полюсів.

Якщо p_k – полюси порядку m_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) функції $F(p)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[(p - p_k)^{m_k} \cdot e^{pt} \frac{Q_m(p)}{P_s(p)} \right] \right\}. \quad (2.24)$$

У окремому випадку, коли p_k – простий полюс, формула (2.24) для знаходження лишка функції у цій точці суттєво спрощується

$$\operatorname{res} [e^{pt} F(p)] = \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ (p - p_k) \cdot e^{pt} \frac{Q_m(p)}{P_s(p)} \right\}.$$

Якщо p_k – полюс 2-го порядку, то

$$\operatorname{res} [e^{pt} F(p)] = \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ (p - p_k)^2 \cdot e^{pt} \frac{Q_m(p)}{P_s(p)} \right\}'.$$

Якщо p_k – полюс 3-го порядку, то

$$\operatorname{res} [e^{pt} F(p)] = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ (p - p_k)^3 \cdot e^{pt} \frac{Q_m(p)}{P_s(p)} \right\}'' \quad (2.25)$$

Приклад. Знайти оригінал для функції

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}.$$

Розв'язання.

Функція $F(p)$ має прості полюси $p_1 = 2$, $p_{2,3} = \pm i$ і полюс 3-го порядку $p = 1$. Лишок для $p = 1$ знаходимо за формулою (2.25)

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=1} [F(p)e^{pt}] &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{pt}}{(p^2+1)(p-2)} \right)'' \Big|_{p=1} = \frac{1}{2} \left[\frac{2(6p^4 - 16p^3 + 15p^2 - 3)}{(p^2+1)^3(p-2)^3} \cdot e^{pt} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(3p^2 - 4p + 1)}{(p^2+1)^2(p-2)^3} \cdot te^{pt} + \frac{t^2 e^{pt}}{(p^2+1)(p-2)} \right] \Big|_{p=1} = -\frac{e^t}{4} (t^2 + 5). \end{aligned}$$

Для знаходження лишків функції $F(p)e^{pt}$ у простих полюсах $p_1 = 2$, $p_{2,3} = \pm i$ застосуємо формулу (2.23).

Для $p_1 = 2$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{1}{5} e^{2t};$$

для $p_2 = i$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{1+3i}{40} e^{it};$$

для $p_3 = -i$ отримаємо

$$\frac{Q_2(p_k)}{P'_3(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{1-3i}{40} e^{-it}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1+3i}{40} e^{it} + \frac{1-3i}{40} e^{-it} - \frac{e^t}{4} (t^2 + 5) = \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1}{40} e^{it} + \\ &\quad + \frac{1}{40} e^{-it} + \frac{3}{40} i e^{it} - \frac{3}{40} i e^{-it} - \frac{e^t}{4} (t^2 + 5) = \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1}{20} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{3}{40} (i e^{it} - i e^{-it}) - \frac{e^t}{4} (t^2 + 5) = \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1}{20} \cos t + \frac{3}{20} \left(\frac{i^2 \cdot (e^{it} - e^{-it})}{2i} \right) - \\ &\quad - \frac{e^t}{4} (t^2 + 5) = \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{1}{20} \cos t - \frac{3}{20} \sin t - \frac{e^t}{4} (t^2 + 5). \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи.

Знайти оригінал за даним зображенням за допомогою розкладання функції на елементарні дроби і за допомогою теорії лишків:

$$1. F(p) = \frac{p^2 + 11}{(p-3)(p+5)(p-1)};$$

$$2. F(p) = \frac{p}{(p+7)(p+9)} ;$$

$$3. F(p) = \frac{2p+17}{p(p-12)(p+1)} ;$$

$$4. F(p) = \frac{7-p}{p^2+6p-16} .$$

2.4. Застосування перетворення Лапласа

2.4.1. Застосування операційного числення для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Застосування операційного методу дозволяє від диференціальних рівнянь перейти до розв'язування алгебраїчних рівнянь. Початкові умови при запису рівнянь у зображеннях враховуються автоматично при використанні теореми про диференціювання оригіналу та немає необхідності розв'язувати систему для знаходження довільних сталих, як це робили при застосуванні класичного методу.

При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами операційним методом використовуємо наступний алгоритм розв'язування задачі Коші:

1. Застосуємо до обох частин рівняння перетворення Лапласа, використовуючи теорему про диференціювання оригіналу. Переходимо від функцій до їх зображень, отримаємо алгебраїчне рівняння (операторне рівняння).

2. Розв'язуємо операторне рівняння відносно $X(p)$.

3. Відновлюючи оригінал для $X(p)$, отримаємо розв'язок $x(t)$ даної задачі Коші.

Покажемо на прикладах, як працює алгоритм розв'язування задачі Коші операційним методом.

Приклад. Розв'язати задачу Коші (розв'язати диференціальне рівняння при заданих початкових умовах)

$$x' + x = \eta(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання.

Використаємо алгоритм.

1. Перейдемо від оригіналів до їх зображень, використовуємо теорему про диференціювання оригіналу та таблицю оригіналів і зображень

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - \frac{1}{2},$$

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Запишемо рівняння для зображень (операторне рівняння):

$$pX(p) - \frac{1}{2} + X(p) = \frac{1}{p}.$$

2. Розв'яжемо алгебраїчне рівняння для зображень відносно $X(p)$

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p)(p + 1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{2}}{p + 1} = \frac{1}{p(p + 1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 1} = X_1(p) + \frac{1}{2}X_2(p).$$

3. Знайдемо оригінал для функції $X(p)$, використовуємо розкладання дробово-раціональної функції на суму елементарних дробів та таблицю оригіналів і зображень

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1} \rightarrow 1 - e^{-t} = x_1(t),$$

$$X_2(p) = \frac{1}{p + 1} \rightarrow e^{-t} = x_2(t).$$

Використовуючи властивість лінійності, запишемо розв'язок задачі Коші

$$x(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) = 1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

Розв'язання.

1. Перейдемо від оригіналів до їх зображень

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - p - x'(0) = p^2 X(p) - p - 3,$$

$$e^{3t} \rightarrow \frac{1}{p-3}.$$

Запишемо рівняння для зображень

$$p^2 X(p) - p - 3 - 3pX(p) + 3 + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

2. Розв'яжемо алгебраїчне рівняння для зображень відносно $X(p)$:

$$p^2 X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3} + p,$$

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3} + p,$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{p}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{p-3}.$$

3. Знайдемо оригінал для функції $X(p)$ і запишемо розв'язок даної задачі

Коші

$$X(p) = \frac{1}{p-3} \rightarrow e^{3t} = x(t).$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 6.$$

Розв'язання.

1. Перейдемо від оригіналів до їх зображень (використовуємо теорему про диференціювання оригіналу та таблицю оригіналів і зображень)

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x' \rightarrow pX - x(0) = pX - 2,$$

$$x'' \rightarrow p^2 X - px(0) - x'(0) = p^2 X - 2p - 6,$$

$$e^{3t} \rightarrow \frac{1}{p-3}.$$

2. Розв'яжемо алгебраїчне рівняння для зображень відносно $X(p)$:

$$p^2 X - 2p - 6 - 3(pX - 2) + 2X = \frac{12}{p-3},$$

$$p^2 X - 2p - 6 - 3pX + 6 + 2X = \frac{12}{p-3},$$

$$p^2X - 3pX + 2X = \frac{12}{p-3} + 2p,$$

$$(p^2 - 3p + 2)X = \frac{12}{p-3} + 2p,$$

$$X = \frac{12}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{2p}{p^2 - 3p + 2},$$

$$X = \frac{12}{(p-3)(p-2)(p-1)} + \frac{2p}{(p-2)(p-1)} = X_1 + X_2.$$

Розкладаємо дробово-раціональні функції на суму елементарних дробів, для знаходження коефіцієнтів елементарних дробів застосуємо метод надання p значень коренів знаменника

$$X_1 = \frac{12}{(p-3)(p-2)(p-1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1} =$$

$$= \frac{A(p-2)(p-1) + B(p-3)(p-1) + C(p-3)(p-2)}{(p-3)(p-2)(p-1)},$$

$$12 = A(p-2)(p-1) + B(p-3)(p-1) + C(p-3)(p-2),$$

при $p = 1$ $C \cdot (-2) \cdot (-1) = 12 \Rightarrow 2C = 12 \Rightarrow C = 6,$

при $p = 2$ $B \cdot (-1) \cdot 1 = 12 \Rightarrow -B = 12 \Rightarrow B = -12,$

при $p = 3$ $A \cdot 1 \cdot 2 = 12 \Rightarrow 2A = 12 \Rightarrow A = 6.$

Отримаємо

$$X_1 = \frac{6}{p-3} - \frac{12}{p-2} + \frac{6}{p-1} = 6 \cdot \frac{1}{p-3} - 12 \cdot \frac{1}{p-2} + 6 \cdot \frac{1}{p-1},$$

$$X_2 = \frac{2p}{(p-2)(p-1)} = \frac{D}{p-2} + \frac{E}{p-1} = \frac{D(p-1) + E(p-2)}{(p-2)(p-1)},$$

$$2p = D(p-1) + E(p-2),$$

при $p = 1$ $E \cdot (-1) = 2 \Rightarrow -E = 2 \Rightarrow E = -2,$

при $p = 2$ $D \cdot 1 = 4 \Rightarrow D = 4.$

Отримаємо

$$X_2 = \frac{4}{p-2} - \frac{2}{p-1} = 4 \cdot \frac{1}{p-2} - 2 \cdot \frac{1}{p-1}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 X(p) &= 6 \cdot \frac{1}{p-3} - 12 \cdot \frac{1}{p-2} + 6 \cdot \frac{1}{p-1} + 4 \cdot \frac{1}{p-2} - 2 \cdot \frac{1}{p-1} = \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{p-3} - 8 \cdot \frac{1}{p-2} + 4 \cdot \frac{1}{p-1}.
 \end{aligned}$$

3. За даним зображенням відновлюємо оригінал. Для цього використовуємо таблицю оригіналів і зображень та властивість лінійності, отримаємо

$$x(t) = 6e^{3t} - 8e^{2t} + 4e^t.$$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати задачу Коші:

1. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
2. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
3. $x''' + x' = e^t$, $x(0) = x''(0) = 0$; $x'(0) = 2$.

3.4.2. Застосування операційного числення для розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Методи операційного числення можливо також використовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь. Відмінність від розв'язку диференціальних рівнянь полягає у тому, що замість одного операторного рівняння отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно зображень вихідних функцій.

Схема розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами аналогічна схемі розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

1. Застосуємо до обох частин кожного рівняння системи перетворення Лапласа, використовуючи теорему про диференціювання оригіналу. Переходимо від функцій до їх зображень, запишемо систему у зображеннях, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $X(p)$ і $Y(p)$.

3. Відновлюючи оригінали для $X(p)$ і $Y(p)$, отримаємо розв'язок системи $x(t)$ і $y(t)$.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Розв'язання.

1. Переходимо від оригіналів до зображень

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(p), & y(t) &\rightarrow Y(p), \\ x'(t) &\rightarrow pX - x(0) = pX, & y'(t) &\rightarrow pY - y(0) = pY, \\ x''(t) &\rightarrow p^2X - x'(0) = p^2X - 1, & y''(t) &\rightarrow p^2Y - y'(0) = p^2Y, \\ e^t &\rightarrow \frac{1}{p-1}, & e^{-t} &\rightarrow \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

2. Запишемо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p^2 + p)X + (p^2 - 1)Y = \frac{p}{p-1}, \\ (p+2)X + (1-p)Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно X і Y .

Розв'яжемо систему за формулами Крамера

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p^2 + p & p^2 - 1 \\ p + 2 & 1 - p \end{vmatrix} = p(p+1)(1-p) - (p+2)(p^2-1) = \\ &= p(1+p)(1-p) + (p+2)(1-p)(1+p) = (1+p)(1-p)(p+p+2) = \\ &= 2(1+p)(1-p)(p+1) = 2(1+p)^2(1-p), \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} \frac{p}{p-1} & p^2 - 1 \\ \frac{1}{p+1} & 1 - p \end{vmatrix} = 1 - 2p, & \Delta_y &= \begin{vmatrix} p^2 + p & \frac{p}{p-1} \\ p + 2 & \frac{1}{p+1} \end{vmatrix} = \frac{3p}{1-p}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
X(p) &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1-2p}{2(p+1)^2(1-p)} = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8p-4}{2(p-1)(p+1)^2} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{(6p-6)+2p+1+1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(p^2+2p+1)+6(p-1)-p^2+1}{2(p-1)(p+1)^2} = \\
&= \frac{(p+1)^2+6(p-1)-(p^2-1)}{8(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+1}, \\
Y(p) &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3p}{2(p+1)^2(1-p)^2} = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.
\end{aligned}$$

3. Відновлюємо оригінали. Використовуємо теорему про диференціювання зображення

$$\begin{aligned}
e^t &\rightarrow \frac{1}{p+1}; \quad \text{sh } t \rightarrow \frac{1}{p^2-1}; \\
\left(\frac{1}{p+1}\right)' &= -\frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow -te^{-t}; \\
\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' &= -\frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow -t \text{ sh } t; \\
\frac{1}{(p+1)^2} &\rightarrow te^{-t}; \quad \frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow t \text{ sh } t.
\end{aligned}$$

Отже, запишемо розв'язок системи

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} \text{sh } t + \frac{3}{4} te^{-t}, \\ y(t) = \frac{3}{4} t \text{ sh } t. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах

$$\begin{cases} x' = -4(x+y), \\ x' + 4y' = -4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання.

1. За таблицею оригіналів та зображень та теоремою про диференціювання оригіналів переходимо від оригіналів до зображень

$$\begin{aligned}
x(t) &\rightarrow X(p), & y(t) &\rightarrow Y(p), \\
x' &\rightarrow pX - x(0) = pX - 1, & y' &\rightarrow pY - y(0) = pY.
\end{aligned}$$

2. Запишемо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} pX - 1 = -4(X + Y), \\ pX - 1 + 4pY = -4Y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX + 4X + 4Y = 1, \\ pX + 4pY + 4Y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 + p)X + 4Y = 1, \\ pX + (4p + 4)Y = 1. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних рівнянь відносно $X(p)$ і $Y(p)$. Розв'яжемо систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 + p & 4 \\ p & 4p + 4 \end{vmatrix} = (4 + p)(4p + 4) - 4p = 4(p + 2)^2,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4p + 4 \end{vmatrix} = 4p; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 + p & 1 \\ p & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4p}{4(p + 2)^2} = \frac{p}{(p + 2)^2}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4(p + 2)^2} = \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

3. За допомогою таблиці оригіналів і зображень переходимо від зображень до оригіналів

$$\frac{p}{(p + 2)^2} \rightarrow (1 - 2t)e^{-2t}, \quad \frac{1}{(p + 2)^2} \rightarrow te^{-2t}.$$

$$\text{Знайшли розв'язок системи } \begin{cases} x = (1 - 2t)e^{-2t}, \\ y = te^{-2t}. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

$$1. \begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2. \begin{cases} x' + y + z = 0, \\ x + y' + z = 0, \\ x + y + z' = 0, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

$$3. \begin{cases} x'' = x - 2y, \\ y'' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за її дійсною $u = u(x, y)$ або уявною $v = v(x, y)$ частиною.

1.1	$u = x^2 - y^2 + xy,$ $f(0) = 7i$	1.2	$v = x^3 - 3xy^2 + 4x,$ $f(1) = -1 + 2i$
1.3	$u = 2x^2 - 2y^2 - 7x + 7y,$ $f(-1) = 5i$	1.4	$u = x^3 - 3xy^2 - x,$ $f(-1 + i) = 0$
1.5	$u = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 3y,$ $f(1 + i) = 3$	1.6	$v = x^2 - y^2 - 2x,$ $f(2i) = -3 + i$
1.7	$v = x^2 - y^2 - 3x,$ $f(-i) = 2 + 5i$	1.8	$u = -x^3 + 3xy^2 - 2x,$ $f(1 + i) = -i$
1.9	$u = x^2 - y^2 - 2y,$ $f(2i) = 3 - 2i$	1.10	$v = x^2 - y^2 + 2x,$ $f(1 - i) = -4$
1.11	$v = x^3 - 3xy^2 - x,$ $f(1 + i) = 1 - i$	1.12	$v = y^3 - 3x^2y,$ $f(1) = 2 - 3i$
1.13	$v = x^2 - y^2 + 5x + y,$ $f(-i) = 2 + 5i$	1.14	$u = 3x^2 - 3y^2 - 2xy,$ $f(2) = 1 - 3i$
1.15	$u = y^3 - 3x^2y + y,$ $f(1 - 2i) = 0$	1.16	$v = x^2 - y^2 - 2x,$ $f(-2i) = 1 - 6i$
1.17	$v = y^3 - 3x^2y - y,$ $f(1 + i) = -4i$	1.18	$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$ $f(-i) = 2 + i$
1.19	$u = -3x^2 + 3y^2 + 2x + y,$ $f(1 + i) = 3$	1.20	$v = y^3 - 3x^2y + 2y,$ $f(1 - i) = 2i$
1.21	$v = y^3 - 3x^2y - 2y,$ $f(1) = -4i$	1.22	$u = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 3y,$ $f(0) = 7$
1.23	$u = 2x^3 - 6xy^2 + 3x^2y - y^3,$ $f(i) = 2$	1.24	$v = y^3 - 3x^2y + 3y,$ $f(i) = 5 - 4i$

Завдання 2. Для даної функції $f(z)$ знайти ізольовані особливі точки, визначити їх тип і знайти відповідні лишки.

2.1	$f(z) = \frac{z - 2}{z^3(z^2 + 4)}$	2.2	$f(z) = \frac{z^2 + 4}{(z + i)^2(z^2 - 1)}$
2.3	$f(z) = \frac{z^3 - 8}{z^3(z^2 + 1)}$	2.4	$f(z) = \frac{e^{-z}}{z^4(z - i)}$
2.5	$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3(z + i)}$	2.6	$f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z + i)(z^2 - 4)}$
2.7	$f(z) = \frac{z^5 e^{1/z}}{z^2 + 1}$	2.8	$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2(z^2 - 1)}$
2.9	$f(z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{z^4}$	2.10	$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^2}$
2.11	$f(z) = z^3 \sin(1/z^2)$	2.12	$f(z) = z^3 \cos(1/z^2)$
2.13	$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z(z^2 - 1)}$	2.14	$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z + 2i)}$
2.15	$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z - i)^2(z^2 + 9)}$	2.16	$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(z + i)^2(z^2 - 4)}$
2.17	$f(z) = \frac{z^2 - z}{(z - i)(z^2 - 9)}$	2.18	$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 + 4)^2}$
2.19	$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4(z - i)}$	2.20	$f(z) = \frac{z^3(e^{1/z} - 1)}{z + i}$
2.21	$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 - 4)}$	2.22	$f(z) = \frac{e^{i/z}}{z(z^2 + 1)}$
2.23	$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z + 1)}$	2.24	$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3(z^2 - 1)}$

Завдання 3. Визначити тип ізольованих особливих точок підінтегральних функцій та обчислити інтеграли за теоремою Коші про лишки.

3.1	$\oint_L \frac{(z^3 - 1)dz}{(z - 2i)(z^2 + 1)};$ $L: z - 2i = 2$	3.2	$\oint_L \frac{(e^z - 1)dz}{z^2(z^2 + 4)};$ $L: z - i = 2$
3.3	$\oint_L \frac{\sin(\pi z) dz}{(z - 2i)(z^2 + 4)};$ $L: z - i = 2$	3.4	$\oint_L \frac{\sin z dz}{z^3(z^2 + 9)};$ $L: z = 2$
3.5	$\oint_L \frac{z \cos z dz}{(z - i)(z^2 - 9)};$ $L: z + 1 = 3$	3.6	$\oint_L \frac{e^{iz} dz}{(z + 3i)(z^2 - 1)};$ $L: z = 2$
3.7	$\oint_L \frac{\sin z dz}{z(z^2 + 9)^2};$ $L: z + 2i = 4$	3.8	$\oint_L \frac{ze^{-z} dz}{(z + i)(z^2 - 4)};$ $L: z + 3 = 4$
3.9	$\oint_L \frac{e^{iz} dz}{(z + i)^3(z^2 - 4)};$ $L: z - 1 = 2$	3.10	$\oint_L \frac{z \cos z dz}{(z - i)^2(z^2 - 9)};$ $L: z + 1 = 3$
3.11	$\oint_L \frac{\sin(iz) dz}{z^2(z^2 + 3z - 4)};$ $L: z - 1 = 2$	3.12	$\oint_L \frac{e^{-z} dz}{z^3(z^2 - 2z - 3)};$ $L: z + 1 = 2$
3.13	$\oint_L \frac{\cos(i\pi z) dz}{(z + 2)^2(z^2 + 4z + 8)};$ $L: z + 2 - i = 2$	3.14	$\oint_L \frac{\cos(iz) dz}{z^2(z^2 + 4z - 5)};$ $L: z + 1 = 3$
3.15	$\oint_L \frac{e^{\pi z} dz}{(z - 1)^2(z^2 - 2z + 5)};$ $L: z - 1 - 2i = 3$	3.16	$\oint_L \frac{\sin(\pi z) dz}{(z - 2)^2(z^2 - 4z + 8)};$ $L: z - 2 + i = 2$

3.17	$\oint_L \frac{(z^2 - 1)dz}{z^3(z^2 - 2z + 10)};$ $L: z - 3i = 4$	3.18	$\oint_L \frac{z e^{\pi z} dz}{(z + 1)^2(z^2 + 2z + 5)};$ $L: z + 1 - 2i = 3$
3.19	$\oint_L \frac{(z^2 - 1)dz}{z^2(z^2 + 9)^2};$ $L: z + 3i = 4$	3.20	$\oint_L \frac{(z^2 - 1)dz}{(z^2 - 9)^2};$ $L: z - 2 = 4$
3.21	$\oint_L \frac{(z^2 - 4)dz}{(z - i)^2(z^2 + 1)};$ $L: z - 1 - i = 2$	3.22	$\oint_L \frac{(z^2 + 4)dz}{z^3(z^2 + 2z + 10)};$ $L: z + 3i = 4$
3.23	$\oint_L \frac{e^{2z} dz}{(z - 2i)^2(z^2 + 4z)};$ $L: z = 3$	3.24	$\oint_L \frac{(z^2 - 4)dz}{(z^2 - 1)^2(z^2 + 1)};$ $L: z - 1 - i = 2$

Завдання 4. Тематична контрольна робота «Теорія функцій комплексної змінної».

Варіант 4.1

1. Обчислити: $\sqrt[3]{1+i}$.

2. Побудувати на площині множину точок: $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_C (z + \bar{z}) dz,$$

де C – частина дуги кола $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$

$$\frac{\sin z}{z^3}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=6} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 5z} dz, \quad \text{б) } \int_{|z|=1} \frac{\cos z^2}{z^3} dz.$$

Варіант 4.2

1. Обчислити: $\sqrt[4]{-i}$.

2. Знайти множину точок на площині: $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad f(1) = 0; \quad (x > 0).$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} e^{\bar{z}} dz, \quad AB: y = -x, \quad z_A = 0, \quad z_B = \pi - i\pi.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$\frac{\sin^2 z}{z^2}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-2|=1} \frac{\cos 3z}{z^3 - 2z^2} dz, \quad \text{б) } \int_{|z-2|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)} dz.$$

Варіант 4.3

1. Обчислити: $\sqrt[4]{-1}$.

2. Знайти множину точок на площині: $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$\frac{e^z}{z^3}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2 - 1)^2} dz, \quad \text{б) } \int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

Варіант 4.4

1. Обчислити: $\sqrt[3]{i}$.

2. Знайти множину точок на площині: $|z - 1| \leq |z - i|$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = 2(\operatorname{ch} x \cdot \sin y - xy), \quad f(0) = 0.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^i z \cdot \cos z dz.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz, \quad \text{б) } \int_{|z|=1/2} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz.$$

Варіант 4.5

1. Обчислити: $\sqrt[4]{1}$.

2. Знайти множину точок на площині: $1 < \operatorname{Re} z < 2$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною.

$$u = 2 \sin x \cdot \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} z \cdot \operatorname{Re} z \, dz, \quad AB: y = x, \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$\frac{1}{z} \cdot \sin^2 \frac{2}{z}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)^3(z + 9)}, \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

Варіант 4.6

1. Обчислити: $\sqrt[3]{-1 + i}$.

2. Записати в алгебраїчній формі: $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 2(2 \operatorname{sh} x \cdot \sin y + xy), \quad f(0) = 3.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (i \operatorname{Re} z)^2 dz, \quad AB: z_A = i, \quad z_B = 2.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$\frac{1 + \cos z}{z^4}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz, \quad \text{б) } \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2+z} dz.$$

Варіант 4.7

1. Обчислити: $\sqrt{2 - i2\sqrt{3}}$.

2. Записати в алгебраїчній формі: $\ln(1 - i)$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = -2 \sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y, \quad f(0) = 2.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} \operatorname{Re}(z^2 + 1) dz, \quad AB: z_A = 0, \quad z_B = 1 + 2i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$:

$$\frac{1 - e^{-z}}{z^3}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz, \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Варіант 4.8

1. Обчислити: $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})}$.

2. Записати в алгебраїчній формі: $\sin \pi i$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 2 \cos x \cdot \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, \quad f(0) = 2.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz, \quad AB: z_A = 0, \quad z_B = -1 - i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad |z| < 1.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz; \quad \text{б) } \int_C \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \quad C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Варіант 4.9

1. Обчислити: 5^i .

2. Записати в алгебраїчній формі: $\cos \pi i$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 2^y \cos(x \ln 2).$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} z \operatorname{Re} z dz, \quad AB: y = x^2, \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad |z| > 2.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 + 2z} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z^4 e^{1/z} dz.$$

Варіант 4.10

1. Обчислити: $\operatorname{Ln}(-3)$.

2. Записати в алгебраїчній формі: $\operatorname{Arcsin} i$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 3^{-y} \cos(x \ln 3).$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} z \operatorname{Im} z \, dz, \quad AB: \quad z_A = 1, \quad z_B = i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-i|=3} \frac{e^z - 1}{z^3 - iz} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z^2 e^{1/4z} dz.$$

Варіант 4.11

1. Обчислити: $\operatorname{Ln}(3i + 4)$.

2. Записати в алгебраїчній формі: $\operatorname{Arccos} i$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = x^2 - y^2 + 3y.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (z + \operatorname{Re} z) dz, \quad AB: \quad z_A = 0, \quad z_B = -1 + i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2z + 3}{z^2 + 3z - 2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=5} \frac{z}{z^2 + 16} dz; \quad \text{б) } \int_C \frac{z}{(z-1)^2(z+1)} dz, \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Варіант 4.12

1. Обчислити: i^{3i-1} .
2. Показати, що функція є гармонічною: $u = x^2 + 2x - y^2$.
3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = 3^x \cdot \sin(y \ln 3).$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (\bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z}) dz, \quad AB: \quad z_A = 2i, \quad z_B = 2.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2z + 3}{z^2 + 3z + 2}, \quad 2 < |z| < +\infty.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

- а) за допомогою інтегральної формули Коші;
- б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{\cos 3z}{(z+1)^3 z} dz; \quad \text{б) } \int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz.$$

Варіант 4.13

1. Обчислити: $\sin 2i$.
 2. Показати, що функція є гармонічною:
- $$v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$
3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною: $v = \sin x \operatorname{sh} y$.

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} \operatorname{Im} z dz, \quad AB: \quad z_A = 0; \quad z_B = 2 + i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, \quad |z| < 1.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

- а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=5} \frac{4z+1}{z^2+9} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z \cdot \operatorname{tg}(\pi z) dz.$$

Варіант 4.14

1. Обчислити: $\sqrt[4]{-16}$.

2. Показати, що функція є гармонічною:

$$u = 2e^x \cdot \cos y.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною або уявною частиною:

$$v = e^{-x} \sin y.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} z dz, \quad AB: z_A = -1, \quad z_B = 1.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-1|=1} \frac{e^{3z} + z}{(z-1)^2(z+3)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{1 - \cos z}{z^3} dz.$$

Варіант 4.15

1. Обчислити: $\sqrt[3]{5}$.

2. Показати, що функція є гармонічною: $u = \ln(x^2 + y^2)$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = y^3 + 6xy^2 - 3x^2y - 2x^3.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} \bar{z} \operatorname{Re} z dz, \quad AB: z_A = 1 + i, \quad z_B = 0.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, \quad 2 < |z| < +\infty.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-2i|=1} \frac{e^{3z}}{z^2 + 4} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz.$$

Варіант 4.16

1. Обчислити: $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$.

2. Показати, що функція є гармонічною:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = \cos x \cdot \operatorname{ch} y.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (1 - iz) dz, \quad AB: z_A = 1, \quad z_B = -i.$$

5. Розвинути функцію в ряд Лорана в кільці:

$$\frac{2}{z^2 - 1}, \quad 1 < |z + 2| < 3.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)}; \quad \text{б) } \int_C \frac{\cos z}{z^2 - 4} dz, \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Варіант 4.17

1. Обчислити: $\left(\frac{1}{i-1}\right)^8$.

2. Показати, що функція є гармонічною: $u = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною: $u = e^y \cos x$.

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} iz dz, \quad AB: z_A = 0, \quad z_B = 1 - i.$$

5. Визначити тип особливої точки:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-4|=3} \frac{\sin 3z + 4z + 1}{(z-2)^2 z} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} z^3 \sin \frac{1}{z} dz.$$

Варіант 4.18

1. Обчислити: $\cos(3i - 1)$.

2. Знайти множину точок на площині: $|1 + z| = |z + i|$.

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = 3x^2y - y^3 + 4x.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (\operatorname{Re} z - z) dz, \quad AB: z_A = -1, \quad z_B = i.$$

5. Визначити тип особливої точки:

$$f(z) = (z - 1) \cdot e^{\frac{1}{z-1}}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=4} \frac{e^z - 4z}{(z-3)^3(z+1)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

Варіант 4.19

1. Обчислити: $(1 + 2i)^{i+1}$.

2. Знайти множину точок на площині:

$$\operatorname{Im} z - 1 = |z|.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = x^2 - 6xy - y^2.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (z + i \operatorname{Re} z) dz, \quad AB: \quad z_A = 2, \quad z_B = 1 - i.$$

5. Визначити тип особливої точки:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=3} \frac{e^{4z} + 2}{z^2(z-2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} z^2 e^{1/4z} dz.$$

Варіант 4.20

1. Обчислити: $\arcsin(2 - i)$.

2. Перевірити, чи є функція аналітичною:

$$w = z^2 \cdot \bar{z}.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = x^2 - y^2 + 5x.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (iz + \operatorname{Re} z) dz, \quad AB: \quad z_A = i, \quad z_B = 1 + 2i.$$

5. Визначити тип особливої точки:

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{\sin 3z + \cos 5z}{(z-1)^2} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-9)}.$$

Варіант 4.21

1. Обчислити: $(-2)^{4i}$.

2. Перевірити чи є функція аналітичною:

$$w = e^{z^2}.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною: $u = e^x \cos y$.

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (iz + 1) dz, \quad AB: \quad z_A = 2i, \quad z_B = -1.$$

5. Знайти лишки функції в особливих точках:

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z|=3} \frac{e^{4z}}{(z-1)^2(z+4)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} z^4 \sin \frac{1}{z} dz.$$

Варіант 4.22

1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(i+1)$.

2. Перевірити чи є функція аналітичною:

$$w = |z| \cdot \operatorname{Re} \bar{z}.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 2x - y + 4.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (i \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz, \quad AB: \quad z_A = 1 + i, \quad z_B = -1 + i.$$

5. Знайти лишки функції в особливих точках:

$$f(z) = z^3 \cdot \sin \frac{1}{z^2}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z+2i|=3} \frac{e^{4z} + 5z + 3}{z^2 + 16} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

Варіант 4.23

1. Обчислити: $e^{3+\pi i}$.

2. Перевірити чи є функція аналітичною:

$$w = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою дійсною частиною:

$$u = 2y^2 - 2x^2 + x.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (iz + 2) dz, \quad AB: \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + i.$$

5. Знайти лишки функції в особливих точках:

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z+3|=2} \frac{\sin 10z}{z^3(z+2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Варіант 4.24

1. Обчислити: $\text{Ln}(4 - 3i)$.

2. Перевірити чи є функція аналітичною:

$$w = z \cdot e^z.$$

3. Відновити аналітичну функцію за відомою уявною частиною:

$$v = 2x^3 - 6xy^2.$$

4. Обчислити інтеграл:

$$\int_{AB} (\bar{z} + z) dz, \quad AB: z_A = 3i, z_B = 3.$$

5. Знайти лишки функції в особливих точках:

$$\frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}.$$

6. Обчислити інтеграли двома методами:

а) за допомогою інтегральної формули Коші;

б) за допомогою теореми Коші про лишки

$$\text{а) } \int_{|z-2i|=2} \frac{e^{4z^2}}{z^2 + 9} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+2|=3} \frac{\sin z}{z(z+1)} dz.$$

Завдання 5. Використовуючи теорему лінійності, знайти зображення функції $f(t)$.

5.1	$f(t) = 5 \operatorname{sh} t - 4 \cos t$	5.2	$f(t) = 3 \operatorname{ch} t + 2 \operatorname{sh} t$
5.3	$f(t) = 5 \cos t - 7 \sin t$	5.4	$f(t) = 3 + 2e^t$
5.5	$f(t) = 12 + \frac{1}{3} \cos t$	5.6	$f(t) = 3t - \frac{5}{7} \sin t$
5.7	$f(t) = 3t - 4 \sin t$	5.8	$f(t) = 5 \cos t - 1$
5.9	$f(t) = 16 + 2 \sin t$	5.10	$f(t) = -5t + 14 \operatorname{ch} t$

5.11	$f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$	5.12	$f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$
5.13	$f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$	5.14	$f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$
5.15	$f(t) = e^t + 2 \operatorname{sh} t$	5.16	$f(t) = e^t - 3t$
5.17	$f(t) = e^t + 5 \sin t$	5.18	$f(t) = 15e^t - 7$
5.19	$f(t) = 12 - \frac{2}{3} \sin t$	5.20	$f(t) = \frac{4}{5}(\cos t - 2)$
5.21	$f(t) = 3 + 2e^{4t}$	5.22	$f(t) = 5 \operatorname{ch} t + 1$
5.23	$f(t) = t^2 - 4 \sin t$	5.24	$f(t) = 2e^t - 4 \operatorname{ch} t$

Завдання 6. Застосовуючи теорему зміщення, знайти зображення наступних оригіналів.

6.1	$f(t) = e^{2t} \cos 4t$	6.2	$f(t) = e^{-t} \cos 3t$
6.3	$f(t) = e^{-2t} \operatorname{ch} 3t$	6.4	$f(t) = -e^{-2t} \cos 13t$
6.5	$f(t) = -7 \cos 2t \cdot e^{8t}$	6.6	$f(t) = -e^{4t} \sin 17t$
6.7	$f(t) = e^t \cdot \sin 12t$	6.8	$f(t) = -e^{-9t} \sin 9t$
6.9	$f(t) = e^{5t} \sin 2t$	6.10	$f(t) = e^{-13t} \sin 6t$
6.11	$f(t) = 16e^{6t} \cdot 2t^4$	6.12	$f(t) = 7t^3 \cdot e^{-23t}$
6.13	$f(t) = 12e^{6t} \cdot \operatorname{ch} 3t$	6.14	$f(t) = e^{16t} \cdot \operatorname{sh} 2t$

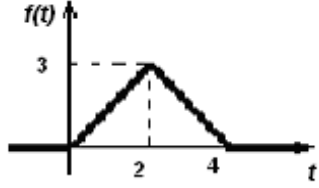
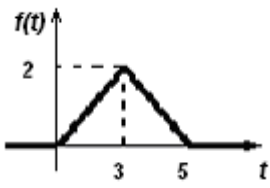
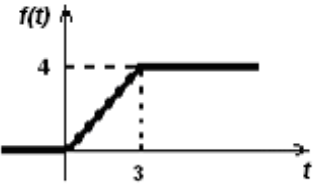
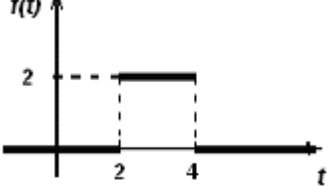
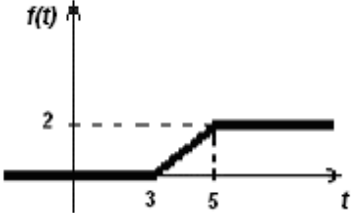
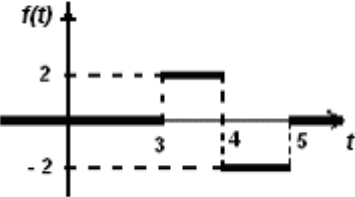
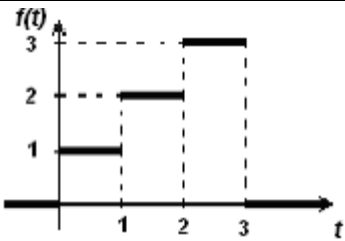
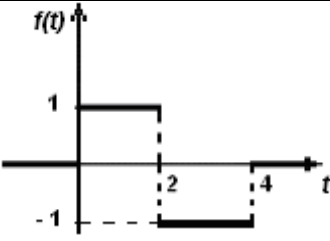
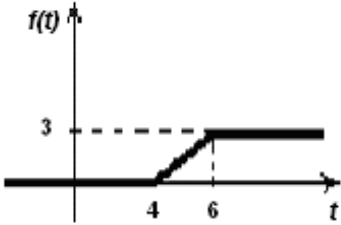
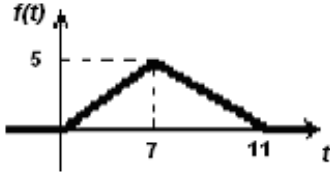
6.15	$f(t) = 11e^{-5t} \cdot t^3$	6.16	$f(t) = 16e^{-5t} \cdot \operatorname{ch} 4t$
6.17	$f(t) = e^{3t} \cdot \operatorname{ch} 4t$	6.18	$f(t) = 6 \operatorname{ch} 7t \cdot e^{-t}$
6.19	$f(t) = -e^{-2t} \cdot \cos 15t$	6.20	$f(t) = e^{11t} \cdot \cos 5t$
6.21	$f(t) = \operatorname{ch} 7t \cdot e^{-3t}$	6.22	$f(t) = 25 \operatorname{ch} 11t \cdot e^{9t}$
6.23	$f(t) = \operatorname{ch} 5t \cdot e^{-9t}$	6.24	$f(t) = e^{-4t} \cdot \sin 3t$

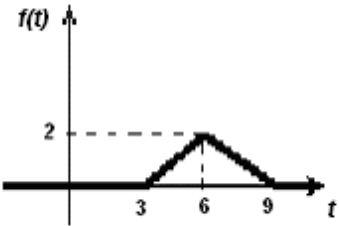
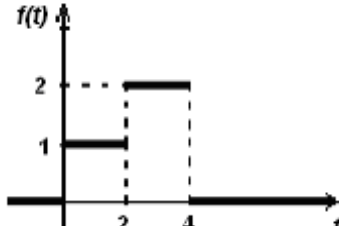
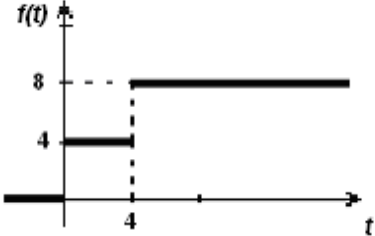
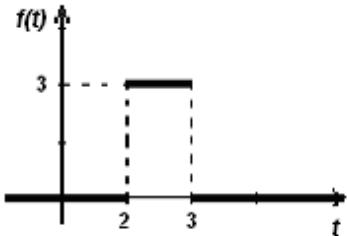
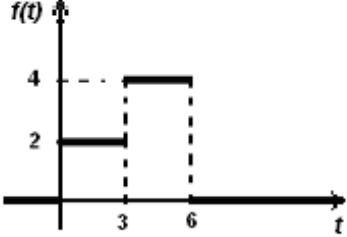
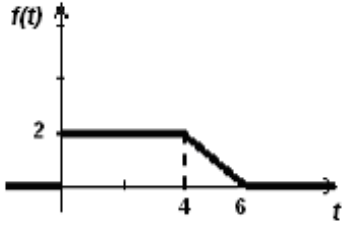
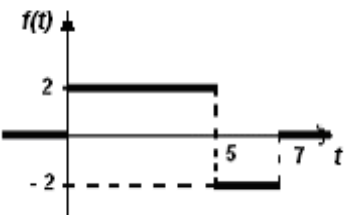
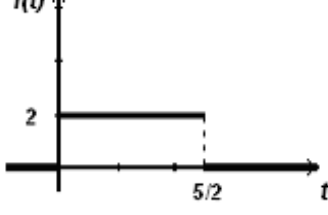
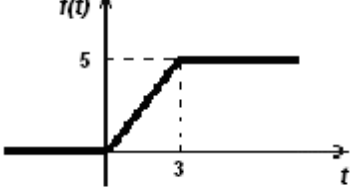
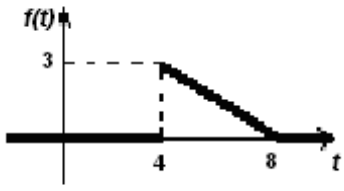
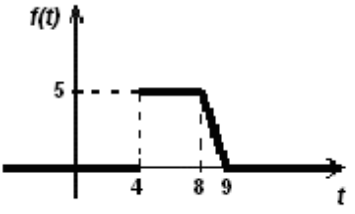
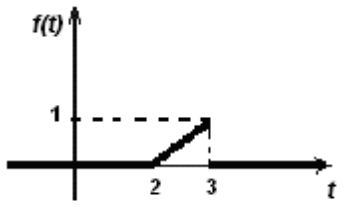
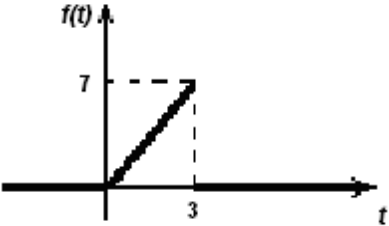

Завдання 7. Користуючись теоремою записання, знайти зображення функції $f(t)$.

7.1	$f(t) = \cos (3t - 4)$	7.2	$f(t) = \cos (2t + 3)$
7.3	$f(t) = 3 \cos \left(\frac{1}{2}t - 7 \right)$	7.4	$f(t) = \frac{2}{5} \cos (9t - 3)$
7.5	$f(t) = \sin (4t + 5)$	7.6	$f(t) = \sin (6t - 3)$
7.7	$f(t) = 7 \sin \left(6 + \frac{1}{8}t \right)$	7.8	$f(t) = \frac{7}{10} \cos (10 - 7t)$
7.9	$f(t) = \frac{5}{9} \sin \left(\frac{9}{13}t - 11 \right)$	7.10	$f(t) = \frac{7}{9} \operatorname{ch} (8t + 3)$
7.11	$f(t) = -5 \sin (2t + 12)$	7.12	$f(t) = \operatorname{ch} (6t + 3)$
7.13	$f(t) = \operatorname{ch} (8t - 3)$	7.14	$f(t) = \operatorname{ch} (-12 + 3t)$
7.15	$f(t) = \operatorname{ch} \left(\frac{3}{4}t + 22 \right)$	7.16	$f(t) = \frac{4}{5} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2}t + 4 \right)$
7.17	$f(t) = \operatorname{sh} (6 + 7t)$	7.18	$f(t) = 3 \operatorname{sh} (4t - 22)$
7.19	$f(t) = 3 \operatorname{sh} (16 + 7t)$	7.20	$f(t) = \operatorname{sh} (4t - 16)$

7.21	$f(t) = \cos(2t - 5)$	7.22	$f(t) = -\operatorname{ch}(13t - 8)$
7.23	$f(t) = -\sin(12 - 5t)$	7.24	$f(t) = \operatorname{ch}(11t + 6)$

Завдання 8. Знайти зображення кусково-неперервної функції, користуючись теоремою запізнення. Функція $f(t)$ задана графічно.

8.1		8.2	
8.3		8.4	
8.5		8.6	
8.7		8.8	
8.9		8.10	

8.11		8.12	
8.13		8.14	
8.15		8.16	
8.17		8.18	
8.19		8.20	
8.21		8.22	
8.23		8.24	

Завдання 9. Знайти згортку функцій $f(t) * g(t)$.

9.1	$(2t + 5) * \sin 4t$	9.2	$(4t - 7) * \sin 3t$
9.3	$(2 - 81t) * \sin 7t$	9.4	$(9 + 4t) * \sin t$
9.5	$(t - 11) * \cos 2t$	9.6	$(7t + 13) * \cos 7t$
9.7	$(12 - 11t) * \cos t$	9.8	$(9t - 3) * \cos 12t$
9.9	$(7t + 41) * \cos 9t$	9.10	$\sin 11t * (9 + 4t)$
9.11	$\cos 7t * \sin 7t$	9.12	$\cos 13t * \sin 9t$
9.13	$\sin 15t * \cos t$	9.14	$\sin 3t * \cos 2t$
9.15	$\cos 19t * \sin t$	9.16	$\cos 7t * \cos t$
9.17	$\sin t * \sin 9t$	9.18	$(7t - 5) * e^{7t}$
9.19	$(4t + 9) * e^{-7t}$	9.20	$e^{13t} * (13 + 2t)$
9.21	$(12t + 81) * e^{-11t}$	9.22	$e^{8t} * (11t + 2)$
9.23	$(7t + 8) * (8t + 7)$	9.24	$(12 - 3t) * (12 + 3t)$

Завдання 10. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти оригінал зображення.

10.1	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 81)}$	10.2	$F(p) = \frac{p}{(p - 3)(p - 5)}$
10.3	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}$	10.4	$F(p) = \frac{p}{(p - 1)(p - 3)}$
10.5	$F(p) = \frac{p}{(p + 2)(p - 1)}$	10.6	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 2)(p^2 + 16)}$
10.7	$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$	10.8	$F(p) = \frac{3p}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}$
10.9	$F(p) = \frac{5p}{(p^2 + 25)(p^2 + 1)}$	10.10	$F(p) = \frac{4p}{(p^2 + 16)(p^2 + 1)}$

10.11	$F(p) = \frac{12p}{(144 + p^2)(p^2 + 1)}$	10.12	$F(p) = \frac{9p}{(p^2 + 1)(p^2 + 81)}$
10.13	$F(p) = \frac{p}{(p - 8)(p - 6)}$	10.14	$F(p) = \frac{p}{(p - 1)(p - 5)}$
10.15	$F(p) = \frac{p}{(p - 2)(p + 1)}$	10.16	$F(p) = \frac{p}{(p + 1)(p + 2)}$
10.17	$F(p) = \frac{p}{(p + 7)(p + 9)}$	10.18	$F(p) = \frac{p}{(p - 11)(p - 12)}$
10.19	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)}$	10.20	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}$
10.21	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 7)(p^2 + 8)}$	10.22	$F(p) = \frac{1}{p(p + 1)}$
10.23	$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 25)(p^2 + 1)}$	10.24	$F(p) = \frac{1}{p(p - 2)}$

Завдання 11. Знайти оригінал за даним зображенням двома способами: методом розкладання на елементарні дроби та за допомогою теорії лишків.

11.1	a) $F(p) = \frac{2p - 13}{(2p - 8)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{7 - p}{p(p^2 + 6p - 31)}$
11.2	a) $F(p) = \frac{4p - 7}{p(p - 1)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{7 - 6p}{p(p^2 + 8p - 31)}$
11.3	a) $F(p) = \frac{p^2 - 12p + 11}{(p - 3)(p + 7)(p - 1)}$	b) $F(p) = \frac{17 - p}{p(p^2 - 8p - 31)}$
11.4	a) $F(p) = \frac{12p + 11}{(p + 9)(p - 1)}$	b) $F(p) = \frac{4p - 15}{(p^2 + p + 2)(p - 1)}$
11.5	a) $F(p) = \frac{p + 16}{(p - 1)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{p - 15}{(p^2 + p + 2)(p + 1)}$

11.6	a) $F(p) = \frac{p^2 + 9}{(p - 2)(p + 12)}$	b) $F(p) = \frac{2p - 5}{(p^2 - 2p + 7)(p - 7)}$
11.7	a) $F(p) = \frac{p + 1}{(5p - 10)(p + 11)}$	b) $F(p) = \frac{p + 7}{p(p^2 + 6p + 10)(p - 1)}$
11.8	a) $F(p) = \frac{4p - 13}{(p - 1)(p + 3)}$	b) $F(p) = \frac{p - 7}{(p^2 + 6p + 10)(p - 1)}$
11.9	a) $F(p) = \frac{2p + 19}{(p - 2)(p + 15)}$	b) $F(p) = \frac{2p + 5}{(p^2 - 2p + 7)(p + 7)}$
11.10	a) $F(p) = \frac{2p + 19}{(p - 12)(p + 1)}$	b) $F(p) = \frac{9 + 2p}{(p^2 + 3p - 4)(p - 1)}$
11.11	a) $F(p) = \frac{p + 36}{(p - 12)(p + 9)}$	b) $F(p) = \frac{p + 8}{(p + 3)(p^2 + p + 2)}$
11.12	a) $F(p) = \frac{p^2 + 11}{(p - 3)(p + 5)(p - 1)}$	b) $F(p) = \frac{p^2 - 7}{(p^2 + p - 2)(p + 5)}$
11.13	a) $F(p) = \frac{4p + 3}{(p - 1)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{5p - 13}{(p^2 - p + 2)(p + 3)}$
11.14	a) $F(p) = \frac{p + 3}{(p - 5)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{p^2 + 16}{(p - 1)(p^2 - 3p + 5)}$
11.15	a) $F(p) = \frac{p^2 - 12p + 11}{(p - 3)(p + 8)(p - 1)}$	b) $F(p) = \frac{p^2 + 6}{(p - 1)(p^2 - 3p + 4)}$
11.16	a) $F(p) = \frac{7p - 3}{(p + 6)(p - 11)}$	b) $F(p) = \frac{p - 13}{(p^2 - p + 2)(p + 13)}$
11.17	a) $F(p) = \frac{p^2 + 2}{(p - 1)(p + 2)(p - 3)}$	b) $F(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + p - 2)(p - 5)}$
11.18	a) $F(p) = \frac{2p + 5}{(p - 7)(p + 6)}$	b) $F(p) = \frac{p + 8}{(p + 3)(p^2 + p - 2)}$

11.19	a) $F(p) = \frac{8p - 9}{(p - 5)(p + 1)}$	b) $F(p) = \frac{p^2 + 5p}{(p^2 - 4p + 3)(p + 2)}$
11.20	a) $F(p) = \frac{20p + 11}{(p - 7)(p + 11)}$	b) $F(p) = \frac{9 + p}{(p^2 + 3p - 4)(p + 1)}$
11.21	a) $F(p) = \frac{p - 19}{p(p - 13)(p + 3)}$	b) $F(p) = \frac{p - 4}{(p^2 + 3p - 4)(p - 1)}$
11.22	a) $F(p) = \frac{2p + 17}{p(p - 12)(p + 1)}$	b) $F(p) = \frac{p - 11}{p(p^2 - 3p + 4)(p + 7)}$
11.23	a) $F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p - 6)(p + 2)(p + 7)}$	b) $F(p) = \frac{2(p - 1)}{(p^2 + p + 2)(p + 1)}$
11.24	a) $F(p) = \frac{7p + 3}{(p - 8)(p + 9)}$	b) $F(p) = \frac{7 - p}{p^2 + 6p - 16}$

Завдання 12. Розв'язати задачу Коші операційним методом.

12.1	$x'' + 3x' = e^t$	$x(0) = 0, x'(0) = 1$
12.2	$x'' - 2x' = e^{2t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
12.3	$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$	$x(0) = 0, x'(0) = 1$
12.4	$x''' + x' = 1$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
12.5	$x'' + 2x' + x = \sin t$	$x(0) = 0, x'(0) = -1$
12.6	$x'' - 2x' + x = e^t$	$x(0) = 0, x'(0) = 1$
12.7	$x''' - x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
12.8	$x''' + x' = t$	$x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 0$
12.9	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2, x'(0) = 0$
12.10	$x'' + 2x' + x = t^2$	$x(0) = 1, x'(0) = 0$

12.11	$x''' + x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 0$
12.12	$x'' + x = \cos t$	$x(0) = -1, x'(0) = 1$
12.13	$x''' + x'' = t$	$x(0) = -3, x'(0) = 1, x''(0) = 0,$
12.14	$x'' + 2x' + 5x = 3$	$x(0) = 1, x'(0) = 0,$
12.15	$x'' + 2x' + 2x = 1$	$x(0) = x'(0) = 0$
12.16	$x'' + x = 1$	$x(0) = -1, x'(0) = 0$
12.17	$x''' + x'' = \cos t$	$x(0) = -2, x'(0) = x''(0) = 0$
12.18	$x''' + x' = e^t$	$x(0) = x''(0) = 0, x'(0) = 2$
12.19	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2, x'(0) = 0$
12.20	$x'' - x' = te^t$	$x(0) = x'(0) = 0$
12.21	$x'' - x = \sin t$	$x(0) = -1, x'(0) = 0$
12.22	$x'' + x = 2 \sin t$	$x(0) = 1, x'(0) = -1$
12.23	$x''' - 2x'' + x' = 4$	$x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2$
12.24	$x'' - 3x' + 2x = e^t$	$x(0) = x'(0) = 0$

Завдання 13. Розв'язати систему диференціальних рівнянь операційним методом.

13.1	$\begin{cases} x' - x - 2y = 2e^t, \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$	$x(0) = 0, y(0) = 1$
13.2	$\begin{cases} x' + y' = 1, \\ x' = x - y \end{cases}$	$x(0) = -1, y(0) = 0$
13.3	$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2(x + y) \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1$

13.4	$\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, \\ x' + y'' = 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 1, x'(0) = 2, \\ y(0) &= 0, y'(0) = -1 \end{aligned}$
13.5	$\begin{cases} x' + y + z = 0, \\ x + y' + z = 0, \\ x + y + z' = 0 \end{cases}$	$x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 1$
13.6	$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases}$	$x(0) = y(0) = x'(0) = 0$
13.7	$\begin{cases} x'' = x - 2y, \\ y'' + x = 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 0, x'(0) = 2, \\ y(0) &= 0, y'(0) = 0 \end{aligned}$
13.8	$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} x(0) &= 0, x'(0) = 2, \\ y(0) &= 2, y'(0) = 0 \end{aligned}$
13.9	$\begin{cases} x' = y, \\ x' - y' = x + y \end{cases}$	$x(0) = 0, y(0) = 1$
13.10	$\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$	$x(0) = -1, y(0) = 2$
13.11	$\begin{cases} x' + x = 3y + 1, \\ y' = x + y \end{cases}$	$x(0) = 1, y(0) = 2$
13.12	$\begin{cases} x'' + y = 0, \\ 2x' - y' + 2y = 0 \end{cases}$	$x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = 1$
13.13	$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - 2 \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0$
13.14	$\begin{cases} x' + 2x - y = 0, \\ y' - 3x = 0 \end{cases}$	$x(0) = 0, y(0) = 1$
13.15	$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$	$x(0) = 0, y(0) = 1$
13.16	$\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1$
13.17	$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases}$	$x(0) = 3, y(0) = 15$
13.18	$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t \end{cases}$	$x(0) = 2, y(0) = 4$

13.19	$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0$
13.20	$\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t} \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0$
13.21	$\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, \\ x' + y'' = 1 \end{cases}$	$x(0) = 1, x'(0) = 0,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2$
13.22	$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, \\ y' = 2x - y - 2 \cos t \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0$
13.23	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1$
13.24	$\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y \end{cases}$	$x(0) = -2, y(0) = 1$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайдіть «зайву» властивість у визначенні функції-оригіналу $f(t)$:

- а) $f(t) \equiv 0, t < 0$;
- б) гладка або кусково-гладка;
- в) зростає не швидше за показникову функцію;
- г) неперервна або кусково-неперервна функція.

Завдання 2. Перетворення Лапласа має вигляд:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{pt} dt; & \text{в) } F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt; \\ \text{б) } F(p) = \int_1^{+\infty} f(t)e^{pt} dt; & \text{г) } F(p) = \int_1^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \end{array}$$

Завдання 3. Властивість диференціювання оригіналу: якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то:

- а) $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$;
- б) $f'(t) \rightarrow F(p) - p \cdot f(0)$;
- в) $f'(t) \rightarrow F(p) + p \cdot f(0)$;
- г) $f'(t) \rightarrow pF(p) + f(0)$.

Завдання 4. Які з наведених функцій є функціями-оригіналами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(t) = \begin{cases} 3e^{4t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} & \text{в) } f(t) = \begin{cases} 3^{7t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \\ \text{б) } f(t) = \begin{cases} \frac{5}{t-1}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} & \text{г) } f(t) = \begin{cases} \frac{2}{t+7}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \end{array}$$

Завдання 5. Теорема подібності.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і a – комплексне число, то $f(at) \rightarrow$ _____.

Завдання 6. Теорема запізнення.

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то $f(t - t_0) \rightarrow$ _____.

Завдання 7. Якщо оригінал $f(t)$ – періодична функція з періодом T , то його зображенням буде:

$$\begin{aligned} \text{а) } F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{pt} f(t) dt; & \text{в) } F(p) &= \frac{1}{1 - e^{Tp}} \int_0^T e^{pt} f(t) dt; \\ \text{б) } F(p) &= \frac{1}{1 - e^{Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt; & \text{г) } F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt. \end{aligned}$$

Завдання 8. Теорема зміщення. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і a – комплексне число, то:

$$\begin{aligned} \text{а) } e^{at} \cdot f(t) &\rightarrow F\left(\frac{p}{a}\right); & \text{в) } e^{at} \cdot f(t) &\rightarrow F(p - a); \\ \text{б) } e^{at} \cdot f(t) &\rightarrow aF\left(\frac{p}{a}\right); & \text{г) } e^{at} \cdot f(t) &\rightarrow F(p + a). \end{aligned}$$

Завдання 9. Згортокою неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$ називається інтеграл:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi * f &= \int_0^t \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau; & \text{в) } \varphi * f &= \int_0^{+\infty} \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau; \\ \text{б) } \varphi * f &= \int_0^t \varphi(t - \tau) f(t) d\tau; & \text{г) } \varphi * f &= \int_0^{+\infty} \varphi(t - \tau) f(t) d\tau. \end{aligned}$$

Завдання 10. Властивість диференціювання зображення: якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то:

$$\begin{aligned} \text{а) } F'(p) &\rightarrow -\frac{f(t)}{t}; & \text{в) } F'(p) &\rightarrow tf(t); \\ \text{б) } F'(p) &\rightarrow -tf(t); & \text{г) } F'(p) &\rightarrow \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

Завдання 11. Властивість інтегрування зображення: якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то:

$$\begin{aligned} \text{а) } tf(t) &\rightarrow \int_1^p F(z) dz; & \text{в) } tf(t) &\rightarrow \int_p^{+\infty} F(z) dz; \\ \text{б) } \frac{f(t)}{t} &\rightarrow \int_1^p F(z) dz; & \text{г) } \frac{f(t)}{t} &\rightarrow \int_p^{+\infty} F(z) dz. \end{aligned}$$

Завдання 12. Властивість інтегрування оригіналу: якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^t f(\tau) d\tau &\rightarrow \frac{F(p)}{p}; & \text{в) } \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau &\rightarrow \frac{F(p)}{p}; \\ \text{б) } \int_0^t f(\tau) d\tau &\rightarrow pF(p); & \text{г) } \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau &\rightarrow pF(p). \end{aligned}$$

Завдання 13. Формула множення зображень: якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ і $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, то:

- а) $f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow F_1(p) * F_2(p)$; в) $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$;
 б) $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$; г) $f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow p \cdot F_1(p) * F_2(p)$.

Завдання 14. Поставте у відповідність зображенням $F(p)$ їх представлення у вигляді суми елементарних дробів.

а) $F(p) = \frac{2p-1}{p(p-1)}$	I $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1}$
б) $F(p) = \frac{2p-1}{p^2(p-1)}$	II $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$
в) $F(p) = \frac{2p-1}{p(p^2-1)}$	III $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1}$
г) $F(p) = \frac{2p-1}{p(p^2+1)}$	IV $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1}$

Завдання 15. Якщо $F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_s(p)}$, $m < s$, де $Q_m(p)$, $P_s(p)$ – многочлени, що не мають загальних коренів, і p_1, p_2, \dots, p_n – прості полюси $F(p)$, то:

- а) $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_m(p_k)}{P'_s(p_k)} \cdot e^{-p_k t}$; в) $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q'_m(p_k)}{P_s(p_k)} \cdot e^{p_k t}$;
 б) $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_m(p_k)}{P'_s(p_k)} \cdot e^{p_k t}$; г) $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q'_m(p_k)}{P_s(p_k)} \cdot e^{-p_k t}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мартиненко М. А. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення: навч. посіб. / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – К.: Видавничий дім «Слово», 2013. – 296 с.
2. Гаєва К. А. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення. Збірник задач. / К. А. Гаєва., О. М. Супрун – К.: НАУ, 2003. – 192 с.
3. Репета В. К. Вища математика: підручник: У 2 ч. – Ч. 2.– К.: НАУ, 2014. – 504 с.
4. Швець В. Т. Вища математика: операційне числення / В. Т. Швець. – Одеса: Вид-во ВМВ, 2015. – 138 с.
5. Ляшко І. І. Математичний аналіз / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук – К.: Вища школа, 1993. – Ч. II. – 375 с.
6. Павленко А. В. Операційне числення: Навч. посібник / А. В. Павленко, Л. П. Кагадій, В. Л. Копорулін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 42 с.
7. Дубовик В. П. Вища математика: Навч. посіб./ В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006.– 648 с.
8. Дубовик В. П. Вища математика: Збірник задач/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2005. – 408 с
9. Пастушенко С. М. Вища математика: Довідник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – К.: Діал, 2003. – 461 с.
10. Грималюк В. П. Збірник завдань з вищої математики. Типові розрахунки / В. П. Грималюк, М. М. Кухарчук, В. В. Ясінський. – К.: “Політехніка”, 2000. – 296 с.
11. Операційне числення. Теорія і практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, О. В. Кузьма. – Електронні текст. дані (1 файл: 905 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 52 с.